arXiv:2512.19508v1 [math.QA] 22 Dec 2025

作为基本顶点代数粘合体的新普适顶点代数

Thomas Creutzig、Vladimir Kovalchuk 和 Andrew R. Linshaw

摘要。存在三个普适二参数顶点代数 $\mathcal{W}_\infty$、 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 和 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{sp}}$，它们分别由生成类型为 $\mathcal{W}(2,3,4,\dots)$、 $\mathcal{W}(2,4,6,\dots)$ 和 $\mathcal{W}(13,2,33,4,\dots)$ 的元素自由生成。在满足温和假设的情况下，它们是具有这些生成类型的顶点代数的分类对象。其单参数商预期将成为所有经典李型 $\mathcal{W}$ 代数的构件。此外，这类 $\mathcal{W}$ 代数预期会组织成若干族，并由新的普适二参数顶点代数所支配；这些代数本身是粘合体，即由 $\mathcal{W}_\infty$ 的若干个 A 型副本（连同一个海森堡代数）以及 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 和 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{sp}}$ 的若干个 B、 C 和 D 型副本的张量积扩张而成。我们将这些泛对象记为 $\mathcal{W}^X$、 $_{S\,M}^{\infty}$、，其中 X 表示李型（即 A、 C 或 BD，因为 B 和 D 型可以统一处理），而 S、 M 是决定某些分拆族的正整数集合。更确切地说，对于由 m_i 个大小为 n_i 的部分组成的 $N=\sum_{i=0}^t n_i m_i$ 的分拆 $P=(n_0^{m_0},\ n_1^{m_1},\ \dots,\ n_t^{m_t})$， $n_0>n_1>\cdots>n_t\geq 2$、 $M=\{m_0,\dots,m_t\}$ 是重数集合，而 $S=\{d_1,\dots,d_t\}$ 是高度差集合 $d_{i+1}=n_i-n_{i+1}$。在所有情况下， $\mathcal{W}^X$、 $_{S\,M}^{\infty}$ 应当具有若干族由 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 标记的单参数商，这些商来自 $\mathcal{W}$ 代数或 $\mathcal{W}$ 代数的仿射余集（或其轨形），此外还有若干族由 $\mathbb{N}$ 标记的对角余集，我们称之为 GKO 余集。在介绍这一一般性的猜想图景后，我们将构造第一个非平凡例子 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}:=\mathcal{W}^{BD}_{\emptyset\ \{2\}}$、，它是两个 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 副本的粘合体。它由生成类型为 $\mathcal{W}(1,23,3,43,\dots)$ 的元素自由生成，其单参数商包括 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sp}_{4n},f_{2n},{}_{2n})$ 和 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{so}_{2(2n+1)},f_{2n+1},{}_{2n+1})$，它们均为矩形型。此结果有多项应用，包括在更复杂的 $\mathcal{W}$ 代数中嵌入钩型 $\mathcal{W}$ 代数，以及证明当 $m\geq 2n-1$ 与 m、 $2n-1$ 互素时， $\mathcal{W}^{-h^\vee}_{4m+2n-1\ 4m}(\mathfrak{osp}_{1|4m},f_{2m},{}_{2m})$ 具有强有理性。最重要的是，这证明了构造这类基本泛对象粘合体的可行性。

1. Introduction

$\mathcal{W}$ 代数是顶点代数中的一个重要类别，近 40 年来一直受到数学和物理学界的研究。对于李（超）代数 $\mathfrak{g}$ 及其偶部 $\mathfrak{g}$ 中的幂零元 f，可构造层为 $k\in\mathbb{C}$ 的 $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},\ f)$。它们通过广义 Drinfeld-Sokolov 约化 [58], 定义，是仿射顶点代数和 Virasoro 代数的共同推广。当 f 是主幂零元时， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},\ f)$称为主 $\mathcal{W}$ 代数，记作 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$。它们出现在许多领域，包括可积系统 [16, 15, 53, 41], 、共形场论、高自旋引力对偶 [49], 、Alday-Gaiotto-Tachikawa 对应 [6, 72, 18], 以及量子几何 Langlands 纲领 [47, 52, 7, 26, 48, 13]。

主幺 $\mathcal{W}$-代数满足 Feigin-Frenkel 对偶，即同构 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})\cong\mathcal{W}^{k'}({}^L\mathfrak{g})$。这里 ${}^L\mathfrak{g}$是 Langlands 对偶李代数， $h^\vee$, ${}^Lh^\vee$ 是 $\mathfrak{g}$, ${}^L\mathfrak{g}$的对偶 Coxeter 数，并且 $(k+h^\vee)(k'+{}^Lh^\vee)=r$，其中 r 是 $\mathfrak{g}$ [44]的套结数。对于 $\mathfrak{g}$单键型，还存在另一种称为余集实现的对偶性，该对偶性由 [11]证明。对于一般的 ℓ，我们有一个顶点代数同构

$$\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{g})\cong\mathrm{Com}(V^{k+1}(\mathfrak{g}),V^k(\mathfrak{g})\otimes L_1(\mathfrak{g})),\qquad \ell+h^\vee=\frac{k+h^\vee}{(k+1)+h^\vee},\tag{1.1}$$

它下降为单顶点代数 $\mathcal{W}_\ell(\mathfrak{g})\cong\mathrm{Com}(L_{k+1}(\mathfrak{g})\ L_k(\mathfrak{g})\otimes L_1(\mathfrak{g}))$ 之间的同构，对所有可容许层级 k 均成立。这推广了 Goddard-Kent-Olive (GKO) 构造的 Virasoro 代数 [55] （即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 的情形），因此我们将 (1.1) 右侧的余集称为 *GKO* 余集。当 k 是 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 的可容许层时， ℓ 是非退化容许层，因此 $\mathcal{W}_\ell(\mathfrak{g})$ 是强有理的（即光滑且

T. Creutzig 受 DFG 项目 Projektnummer 551865932 资助。V. Kovalchuk 受亚历山大·冯·洪堡基金会资助。
A. Linshaw 受 NSF Grant DMS-2401382 和 Simons Foundation Grant MPS-TSM-00007694 资助。

有理） [8, 9]。在类型 A 中，注意秩为 n bc 的系统 $\mathcal{E}(n)$ 是 $\mathcal{H}\otimes L_1(\mathfrak{sl}_n)$ 的共形扩张，其中 $\mathcal{H}$ 是海森堡代数，并且 $\mathrm{Com}(V^{k+1}(\mathfrak{sl}_n)\ V^k(\mathfrak{sl}_n)\otimes L_1(\mathfrak{sl}_n))$ 可以替换为

$$\mathrm{Com}(V^{k+1}(\mathfrak{gl}_n), V^k(\mathfrak{sl}_n)\otimes\mathcal{E}(n)). \tag{1.2}$$

因此，我们常常认为（1.2）形式的对角余集，其中右侧的一个因子是自由费米子代数、 $\beta\gamma$-系统，或这些代数的张量积，是 GKO 余集的恰当类似物。

Gaiotto-Rap$\check{}$*c*$\acute{}$*ak* 三重性猜想 是 Feigin-Frenkel 对偶性与主幺 $\mathcal{W}$-型代数的余集实现的共同推广。在 [50], Gaiotto 和 Rap$\check{}$c$\acute{}$ak 引入了一族顶点代数 $Y_{N_1,N_2,N_3}[\psi]$ ，称为 Y- 代数，其指标由三个整数 $N_1, N_2, N_3\geq 0$ 以及一个复参数 ψ确定。它们与扭曲 $\mathcal{N}=4$ 超对称规范理论的界面相关联。这些界面满足置换对称性，由此引出 Y-代数之间的三重同构猜想。当其中一个指标为零时，这些 Y-代数可表示为某些称为钩型的 $\mathcal{W}$-(超)代数的仿射余集。当一个指标为零时的猜想已由第一和第三作者证明：他们明确地将 Y-代数实现为 $\mathcal{W}$型（$2, 3, \dots$）普适二参数顶点代数$\mathcal{W}_\infty$的单参数商。对于满足某些温和假设的 N，该对象可将（$2, 3, \dots, N$）型顶点代数分类。物理学家自20世纪90年代初便已知晓这一对象，第三作者于 [65]对其作了严格构造。

在 [50], Gaiotto 和 Rap$\check{}$c$\acute{}$ak 还引入了正交辛 Y-代数，并猜想存在类似的同构三元对偶，其中包括 Feigin-Frenkel 对偶、类型 D 的余集实现 (1.1)，以及类型为 B and C 以及 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$ 的主幺 $\mathcal{W}$-代数的另一种余集实现，作为特殊情形。第一作者和第三作者在 [37] 中证明了这一猜想：他们将这些代数明确实现为普适二参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$（类型 $\mathcal{W}(2，4，6，\dots\dots)$的单参数商。这一代数在 [22], 物理学家中也已为人所知，并由 Kanade 和第三作者于 [57] 构造出来。

最近，有人猜想 Y-代数是类型A 中所有 $\mathcal{W}$-代数的构件，其含义是，任意这样的 $\mathcal{W}$-代数都是有限多个 Y-代数的张量积的扩张；参见 [25, 猜想 B]。这一猜想基于 [25, 猜想 A]，后者认为量子 Drinfeld-Solokov 约化可以分阶段进行；参见 [54] ，其中给出了有限 $\mathcal{W}$-代数情形下的类似猜想。在 [25], 中，这一猜想在分次特征层面得到了证明，并且通过计算机验证了类型 A 中秩不超过 4 的所有 $\mathcal{W}$- 代数。在 [42], 中，给出了通过部分约化和逆约化连接 $\mathfrak{sl}_4$ 的所有 $\mathcal{W}$-代数的更完整图景，并证明总约化函子与迭代约化函子在 Kazhdan-Lusztig 范畴上同构。

在 [34], 中，人们注意到，正交辛 Y代数是构造 $\mathcal{W}$代数所需构件中的一部分，但并非全部，这些代数的类型为 B、 C和 D。幂零元$f_{2n+1、\ 2n+1}\in\mathfrak{sp}_{2(2n+1)}$ 和$f_{2n、\ 2n}\in\mathfrak{so}_{4n}$从某种意义上说是不可分解的，相应的 $\mathcal{W}$代数具有生成类型$\mathcal{W}(1_3、2、3_2，\dots\dots)$，并非自然地由两个正交辛 Y代数扩张而来。然而，确实存在一种新的普适二参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_\infty$，其类型为 $\mathcal{W}(1_3、2、3_3、4，\dots\dots)$；它的单参数商与 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$的单参数商应当构成类型为$B$、 C、 D的 $\mathcal{W}$代数的全部构件。一个精确的猜想见 [43, 猜想 3.2]。

1.1. 作为粘合体的新普适顶点代数。 为了阐明我们的结果，我们将提出一幅猜想性的图景，说明如何将经典李型的 $\mathcal{W}$-代数组织成若干族，并由新的普适二参数顶点代数统摄；这些新代数本身又是由有限多个基本代数副本粘合而成的，即 A 型的 $\mathcal{W}_\infty$ （以及一个海森堡代数），还有 B、C 和 D 型的 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_\infty$ 。A 型中对应于矩形幂零元的例子，最近由 Gaiotto、Rap$\check{}$c$\acute{}$ak 和 Zhou 在 [51], 中构造出来，不过，它们作为二参数顶点代数的唯一性尚未得到证明，而这对我们的应用至关重要。一般而言，这些二参数顶点代数的单参数商包括 $\mathcal{W}$-代数、某些 $\mathcal{W}$-(超)代数的仿射余集，以及一些类似于 GKO 余集 (1.2) 的对角余集。在 A 型中，这一图景曾在 [25], 中得到部分描述，但其中并未给出 GKO 余集。我们也可以猜想存在类似的普适二参数顶点超代数，以统摄经典型的 $\mathcal{W}$-超代数；但为简洁起见，本文不予讨论。

对于 $t\geq 0$, 考虑一组正整数 $n_0，\ n_1，\ \dots，\ n_t$，其中 $n_0>n_1>\cdots>n_t\geq 2$，并考虑 $N=\sum_{i=0}^t n_i m_i$ 的分拆 $P=(n_0^{m_0},\ n_1^{m_1},\ \dots,\ n_t^{m_t})$，它由 m_i 个大小为 n_i 的部分组成。令 $f_P\in\mathfrak{sl}_N$ 为对应于 P 的幂零元。 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N,\ f_P)$ 的强生成类型由命题 2.1], 给出，并且只取决于以下高度差 $d_{i+1}=n_i-n_{i+1}$，其中 $i=0,\ 1,\ \dots,\ t-1$

意义下，若固定最小高度 n_t，则所有其他高度 $n_0, \ldots, n_{t-1}$ 均由高度差确定；对于充分大的 n_t， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f_P)$ 在任意固定共形权范围内的生成类型均与 n_t 无关。

注意， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f_P)$的仿射子代数是 $\mathcal{H}(t) \otimes \left(\bigotimes_{i=0}^{t} V^{k_i}(\mathfrak{sl}_{m_i})\right)$，其中 $\mathcal{H}(t)$是秩为 t的海森堡代数，而层 k_i 都与 k呈线性关系。生成场也被组织成 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f_P)$的仿射子代数的模；当 n_t 充分大时，这种模结构也仅取决于高度差。因此，预期存在一个普适二参数顶点代数，它以单参数商的形式包含上述所有 $\mathcal{W}$代数；参见猜想 3.1。它仅取决于高度差集合 $S = \{d_1, \ldots, d_t\}$ 和重数集合 $M = \{m_0, \ldots, m_t\}$，故记作 $\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M}}$。在 $S = \emptyset$ 且 $M = \{1\}$, $\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M}}$的情形下，它恰好是 [65]中构造的代数 $\mathcal{W}_\infty$。事实上，有两族单参数顶点代数，每一族均由 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$标记；我们也预期它们可由 $\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M}}$ 的单参数商得到。这些代数推广了族 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f_P)$，并作为 $\mathcal{W}$-(超)代数的仿射余集出现，具体由（3.2）和（3.3）给出。所有这些顶点代数都应当通过对 $\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M}}$ 取一个理想的商得到，其中该理想的零权分量是参数环中的一个理想。这些理想对应于参数空间中的曲线，称为截断曲线；在 $\mathcal{W}_\infty$ 的情形下，它们已在 [36]中被明确描述。此外还有两族 GKO 余集，每一族均由 $\mathbb{N}$标记；我们将它们定义为较小分拆对应的 $\mathcal{W}$代数的对角仿射余集与自由场代数的张量积。这些余集由（3.4）给出。它们具有如下性质：在 P中对应于最小矩形块 $n_t^{m_t}$的仿射子代数 $V^{k_t}(\mathfrak{sl}_{m_t})$具有常数层 n，该层为正整数或负整数。特别地，在这些例子中，截断曲线对应于理想（$k_t - n$）。

我们关于将 $\mathcal{W}$型 A-代数的二参数顶点代数统一起来的图景，与 Brundan 和 Kleshchev 的工作 [20] 密切相关；在该工作中，所有 A型有限 $\mathcal{W}$-代数都被实现为移位Yangian [20]的截断。Ragoucy 和 Sorba [71] 首次注意到，与具有 m 个大小为 n的部分的矩形分拆相对应的有限 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{sl}_{mn}, f_{n^m})$ 同构于 Yangian $Y_m := Y(\mathfrak{gl}_m)$ 的层 n 截断。在 [20], 中，Brundan 和 Kleshchev 引入了移位Yangian $Y_m(\sigma)$，并证明：对于一个 N 的分拆 P，若其 m个部分的高度差由移位矩阵 σ决定，则有限 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}_{\mathrm{fin}}(\mathfrak{sl}_N, f_P)$ 是 $Y_m(\sigma)$ 的截断。

在矩形情形 f_P 下，对于 $P = (n^m)$，Kodera 和 Ueda 在 [62]中证明了仿射情形下的推广：对于所有 n，他们构造了一个从仿射杨 Yangian $Y_{\mathrm{aff}\,m} := Y(\hat{\mathfrak{gl}}_m)$ 到相应矩形 $\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{nm}, f_{n^m})$ 的模代数的映射（经过适当的完备化）。在 [51], 中，Gaiotto、Rapčák 和 Zhou 将二参数顶点代数 $\mathcal{W}_\infty^{(K)}$的模代数（按我们的记号为 $\mathcal{W}^{A,\infty_{\emptyset\,\{m\},}}$，其中 $m = K$）与仿射杨 Yangian $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_K)$ 联系起来。他们还将 Zhu 代数 $A(\mathcal{W}_\infty^{(K)})$ 与有限杨 Yangian Y_K联系起来。

我们提出如下推广。

猜想 1.1. 设 $P = (n_0^{m_0}, n_1^{m_1}, \ldots, n_t^{m_t})$ 是上述 $N = \sum_{i=0}^{t} n_i m_i$ 的分拆，其中 $n_0 > n_1 > \cdots > n_t \geq 2$, $d_{i+1} = n_i - n_{i+1}$ 对于 $i = 0, \ldots, t-1$。设 $S = \{d_1, \ldots, d_t\}$ 和 $M = \{m_0, \ldots, m_t\}$ 如上，并设 $m = \sum_{i=1}^{t} m_i$ 是 P 的部分数， σ 是相应的移位矩阵。存在一种合适的移位仿射杨 *Yangian* $Y_m^{aff}(\sigma)$ 的概念，具有以下性质：

(1) 经过适当的完备化和局部化后，模代数 $U(\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M,}})$ 与 $Y_m^{aff}(\sigma)$ 同构。(2) *Zhu* 代数 $A(\mathcal{W}^{A,\infty_{S\,M,}})$ 与 $Y_m(\sigma)$ 同构。

结合猜想 3.1，这将意味着存在从$Y_m^{\mathrm{aff}}(\sigma)$ 到顶点代数 (3.1)、(3.2)、(3.3) 和 (3.4) 的模代数的满射（在完备化之后）。特别是，由 (3.4) 给出的 GKO 余集 $\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{gl}_s)\ \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N-2,\,s},\ f_{S,\,M,\,-2,\,s}) \otimes \mathcal{E}(m_t s))$ 包含简单仿射子顶点算子代数$L_s(\mathfrak{sl}_{m_t})$，因此 $Y_m^{\mathrm{aff}}(\sigma)$ 将具有一个非平凡商，其中包含$L_s(\mathfrak{sl}_{m_t})$ 的（完备化后的）模代数。类似地， $Y_m(\sigma)$ 将具有一个有意义的商，其中包含（有限维）Zhu 代数 $A(L_s(\mathfrak{sl}_{m_t}))$。

在正交辛类型中，我们猜想存在类似的二参数普适顶点代数$\mathcal{W}^{C,\infty_{S\,M,}}$ 以及 $\mathcal{W}^{BD,\infty_{S\,M,}}$，它们也依赖于集合 S 和 M，并对重数$m_i \in M$ 有所限制，以反映类型 C 中的幂零元对应于奇数部分重数均为偶数的分拆，而类型 B 和 D 中的分拆对应于偶数部分重数均为偶数的分拆。相关内容见猜想 3.2 和猜想 3.3。它们各自都将包含 8 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$族单参数商，这些商要么是 $\mathcal{W}$代数，要么是 $\mathcal{W}$代数的仿射余集（或其轨形）；

对于 $\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M,}$，这些商由 (3.9)、(3.11) 和 (3.12) 给出；对于 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M,}$，则由 (3.10)、(3.17) 和 (3.18) 给出。类似地，$\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M,}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M,}$ 各自都有 4 族 GKO 余集，分别由 $\mathbb{N}$编号；参见 (3.13) 和 (3.19)。与类型 A类似，GKO 余集具有这样的性质：对于 $\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M,}$，对应于最低矩形块的仿射子顶点算子代数的层在 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 中为常数；对于 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M,}$，该层在 $\mathbb{Z}$ 中为常数。

Brundan 和 Kleschchev 的工作 [20] 向类型 B、C和 D 的推广，已在 [19, 40], 中针对特殊情形进行了研究，而一般图景则出现在 Lu、Peng、Tappeiner、Topley 和 Wang [66]近期的一项工作中。本文引入了移位扭杨代数，并证明对于类型B 和 C 中的所有偶幂零元（以及猜想中的类型 D），相应的有限 $\mathcal{W}$ 代数是移位扭杨代数的截断。对于类型 D的矩形幂零元，Ueda [75]证明了一个仿射类比：他构造了一个从扭仿射杨代数 $Y(\hat{\mathfrak{sp}}_{2m})$到 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{4nm}, f_{(2n)^{2m}})$的模代数的映射（在完备化之后）。这些 $\mathcal{W}$代数预计是 $\mathcal{W}^{C,\ \ \emptyset\,\{2m\}}$ 的单参数商；类比于 [51, 定理 17], ，人们预计完备化并局部化之后，$Y(\hat{\mathfrak{sp}}_{2m})$与 $\mathcal{W}^{C,\ \ \emptyset\,\{2m\}}$ 的模代数同构。关于与矩形幂零元对应的类型 D 扭仿射杨代数的类似结果也见于 [56, 76]。更一般地，人们预计完备化并局部化之后，$\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M}$ 的模代数将与正交辛类型中适当的移位扭仿射杨代数同构，而 $\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M}$ 的每个单参数商都将在移位扭仿射杨代数中产生一个理想。与类型 A的情形一样，我们预计 [66] 中的移位扭杨代数将作为顶点代数 $\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M}$ 的 Zhu 代数出现。最后，$\mathcal{W}^{C,\ \ S\,M}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,\ \ S\,M}$ 预计将具有 GKO 余集

$$\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{N_{-1,0}|2s}, f^{2BD}_{S,M,-1,0}) \otimes \mathcal{F}(2m_t s)),$$
$$\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{s|N_{-1,0}}, f^{2C}_{S,M,-1,0}) \otimes \mathcal{F}(m_t s))^{\mathbb{Z}_2},$$

分别作为单参数商；见 (3.13) 和 (3.19)。这些分别包含简单仿射子顶点算子代数 $L_s(\mathfrak{sp}_{2m_t})$ 和 $L_s(\mathfrak{so}_{m_t})$。这表明，相应的移位扭 Yangian 存在有趣的商，分别包含有限维 Zhu 代数 $A(L_s(\mathfrak{sp}_{2m_t}))$ 和 $A(L_s(\mathfrak{so}_{m_t}))$。

除了有助于深入理解 $\mathcal{W}$ 代数的结构之外，为 $X = A$、C、BD 构造泛对象$\mathcal{W}^{X,\ \ S\,M}$，至少还有三项关于顶点代数的应用；这些应用已在我们先前的工作中针对基本例子 $\mathcal{W}_\infty$、$\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 和 $\mathcal{W}^{\mathrm{sp}}_\infty$ 进行讨论。

(1) 在对 S 和 M 施加某些条件时（尤其是对于 $\mathcal{W}^{X,\ \ S\,M}$ 的超类似物，它们是 -超代数的统一代数），我们预期这些对象的某些单参数商之间存在同构，它们类似于 *Gaiotto-Rap˘cak* 三重性。在类型 中，一些猜想性例子见 猜想 *3.6* 和 *3.*。*(2)* 、$S\,M$ 是由基本二参数顶点代数 、和 粘合而成这一性质，产生了许多将 -代数嵌入更大 -代数的单参数嵌入；预期这些嵌入会在特殊层诱导出简单商的共形嵌入。发现并分类这类共形嵌入，以及确定较大的 -代数何时退化为较小的代数，这一问题极大地推广了对仿射顶点代数到 -代数中的共形嵌入进行分类的研究计划；例如参见 。*(3)* 普适二参数顶点代数的不同单参数商与其截断曲线一一对应；我们预期在这些曲线的交点处，简单商之间存在非平凡同构。*GKO* 余集具有特殊作用，因为它们往往有许多强有理的商；矩形情形见例 *3.1*、*3.3* 和 *3.5*，类型 中的非矩形情形见例 *3.2*。*GKO* 余集与其他代数之间的逐点重合，有时能帮助发现并证明有理性结果，既适用于处于非容许层的 -代数，也适用于 -超代数；例如参见 。对于这项应用，、$S\,M$ 必须恰好具有 2 个自由参数；但即使这一点已经得到证明，要从交点获得所需的同构仍面临重大挑战；参见第 2.5 小节中的讨论。

1.2.主要结果。 在本文中，我们将构造第一个非平凡的此类普适二参数顶点代数实例，它是由基本顶点代数粘合而成的。它将是 $\mathcal{W}^{BD,\ \ \emptyset\,\{2\},}$，是对代数 $\mathcal{W}^{C,\ \ \emptyset\,\{2\}}_\infty = \mathcal{W}^{\mathrm{sp}}_\infty$ 的补充，后者构造于 [34]。由于它的仿射子代数属于 $\mathfrak{so}_2$ 型，我们将记作

$\mathcal{W}^{BD,}_{\infty}{}^{\emptyset\{2\},}$，并在全文中沿用此记号。我们的第一个主要结果是对定理 6.1 和 6.2 以及推论 6.1 的改述，内容如下。

定理 1.1. 存在唯一的2参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$，具有以下特征：

(1) 它定义在 于多项式环 $\mathbb{C}[c,k]$ 的有限局部化上，并且自由生成，其类型为 e

$$\mathcal{W}(1,2^3,3,4^3,5,6^3,\dots), \tag{1.3}$$

且由权1 和2处的场弱生成。

(2) 权1 处的场 H 生成层为 k 的海森堡代数，即 $H(z)H(w) \sim k(z-w)^{-2}$.

(3) 每个偶数权2、4、6、.....处的三个场具有海森堡荷$0,\pm 2$.(4) 权2 处海森堡荷为0 的场是一个中心荷为 c 的共形向量。(5) 每个奇数权3、5、.....处的场具有海森堡荷0。

此外， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$可作为具有这些性质的顶点代数的分类对象；任何具有类型为(1.3) 的强生成集（不一定是极小生成集）且满足上述条件的顶点代数，都是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的一个商。

$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$有 8 个单参数商族，它们要么是我们称为 $\mathfrak{so}_2$-矩形型的 $\mathcal{W}$代数，要么是我们称为带尾部的 $\mathfrak{so}_2$-矩形型 $\mathcal{W}$代数的仿射余集（的轨形）。它们记作 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$，其中 $X=B$、C以及 $Y=B$、C、D、O和 n、$m\in\mathbb{N}$，并且正是 (3.10)、(3.17) 和 (3.18) 的特化。 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的构造与 [65, 57, 34]中的 $\mathcal{W}_{\infty}$、$\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$的构造类似。与 $\mathcal{W}_{\infty}$、 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$不同，单参数顶点代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$彼此各不相同，它们之间不存在三元对偶同构。除 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$外，我们还有将 (3.20) 特化到情形 $m=2$所得到的 GKO 余集。我们将它们记作 $\mathcal{C}^{\ell}(n)$，其中 ℓ 是与中心荷相关的复参数， $n\in\mathbb{Z}$ 固定不变，而 $\mathcal{C}^{\ell}(n)$包含一个层为 n 的海森堡代数，并对其进行归一化，使得偶数权场的海森堡荷为 0、 ± 2。

我们的下一个主要结果是， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$是两个 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$副本的粘合；见定理 9.1。一个副本的参数完全由另一个副本的参数决定。单参数商$\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$和 $\mathcal{C}^{\ell}(n)$各自都是两个正交辛 Y-代数的粘合，我们将明确写出它们；见定理 9.2。事实上，这给出了钩型 $\mathcal{W}$-代数嵌入较大的 $\mathcal{W}$-代数中的单参数嵌入；见推论 9.2。

接下来，我们证明，对于 $n\in\mathbb{N}$，以及作为 $\mathfrak{so}_{2n}$的可容许层的 $\ell-2$， $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$——$\mathcal{C}^{\ell}(2n):=\mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\ V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n))^{\mathbb{Z}_2}$的简单商——是强有理的；见引理 10.1。由此可知， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$有许多强有理商；见推论 10.2。利用截断曲线的交点，我们将据此证明，当 $m\geq 2n-1$与 $m,\ 2n-1$ 互素时， $\mathcal{W}$-超代数 $\mathcal{W}_{4m+2n-1\ -h^{\vee}}(\mathfrak{osp}_{1|4m},\ f_{2m,\ 2m})$具有有理性。目前，这类结果尚无其他可行的途径，而这正是我们设想的泛族应用之一的典型范例。

1.3. 结构安排。 第 2 节中，我们按照第一位和第三位作者的论文 [36, 37] 中的记号，简要回顾自由场代数、仿射顶点代数和 $\mathcal{W}$-代数。第 3 节中，我们介绍关于 $\mathcal{W}^{X,}_{\infty}{}^{S\,M,}$在 $X=A,C,BD$ 情形下的泛对象的猜想性描述，以及其单参数商的显式描述；这些单参数商是 Gaiotto-Rapčák Y-代数和 GKO 余集的类似物。第 4 节中，我们专门讨论 $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty}{}^{\emptyset\{2\}}=\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,}_{\infty}$的情形，并引入 $\mathfrak{so}_2$-矩形 $\mathcal{W}$-代数及其带尾部的版本，还定义了具有强生成类型 (1.3) 的 8 族顶点代数。第 5 节中，我们介绍同样具有这种强生成类型的 4 族 GKO 余集。第 6 节中，我们构造此类型的普适二参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$，这是我们的主要结果。第 7 节中，我们证明 Y-代数（类型为 C）和对角余集确实是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$的单参数商。第 8 节中，我们证明一个重构定理（定理 8.1）：带尾部的 $\mathfrak{so}_2$-矩形 $\mathcal{W}$-代数的完整算符乘积展开代数——它是仿射顶点代数的扩张和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$-商——由扩张场的共形权与宇称，以及李代数在扩张场上的零模作用唯一且可构造地确定。第 9 节中，我们证明 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$是两个 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$副本的张量积的共形扩张；此外，前文讨论的 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的每个单参数商本身都是两个正交辛 Y-代数的共形扩张。第 10 节中，我们将证明关于 $\mathcal{W}$-超代数的有理性结果。

2. Vertex algebras

我们假设读者熟悉顶点代数，并采用第一位和第三位作者的论文 [36] 中的相同记号。我们将用到以下在任意顶点代数 $\mathcal{A}$ 中成立的著名恒等式。

$$(\partial a)_{(r)}b = -ra_{(r-1)}b, \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

$$a_{(r)}b = (-1)^{|a||b|+r+1}b_{(r)}a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|a||b|+r+i+1}}{i!}\partial^i\left(b_{(r+i)}a\right), \quad r \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

$$:a(:bc:):=:(:ab:)c:+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}\left(:\partial^{i+1}(a)(b_{(i)}c):+(-1)^{|a||b|}:\partial^{i+1}(b)(a_{(i)}c):\right). \tag{2.3}$$

$$a_{(r)}:bc:=:(a_{(r)}b)c:+(-1)^{|a||b|}:b(a_{(r)}c):+\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}(a_{(r-i)}b)_{(i-1)}c, \quad r \geq 0. \tag{2.4}$$

$$a_{(r)}(b_{(s)}c) = (-1)^{|a||b|}b_{(s)}(a_{(r)}c) + \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}(a_{(i)}b)_{(r+s-i)}c, \quad r,s \geq 0. \tag{2.5}$$

恒等式 (2.5) 称为雅可比恒等式，我们常用简写 $J_{r,s}(a,b,c)$ 表示它们。我们用 $J(a,b,c)$ 表示所有雅可比恒等式 $\{J_{r,s}(a,b,c)|r,s \geq 0\}$ 的集合。

2.1. 自由场代数。自由场代数是一个带权分级的顶点超代数 $\mathcal{V}$ g

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{d \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathcal{V}[d], \quad \mathcal{V}[0] = \mathbb{C}\mathbf{1},$$

其强生成元为 $\{X^i|i \in I\}$，满足 OPE 关系

$$X^i(z)X^j(w) \sim a_{i,j}\mathbf{1}(z-w)^{-\Delta(X^i)-\Delta(X^j)}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad a_{i,j} = 0 \text{ if } \Delta(X^i)+\Delta(X^j) \notin \mathbb{Z}.$$

注意，$\mathcal{V}$ 不一定具有共形结构。在 [36]，中，第一和第三位作者引入了以下几族自由场代数。

(1) 偶数正交型代数 $\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(n,k)$，适用于 $n \geq 1$ 和偶数 $k \geq 2$。当 $k = 2$ 时，$\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(n,2)$ 就是秩为 n 的海森堡代数 $\mathcal{H}(n)$。(2) 奇数正交型代数 $\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(n,k)$，适用于 $n \geq 1$ 和奇数 $k \geq 1$。当 $k = 1$ 时，$\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(n,1)$ 就是秩为 n 的自由费米子代数 $\mathcal{F}(n)$。(3) 偶数辛型代数 $\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(n,k)$，适用于 $n \geq 1$ 和奇数 $k \geq 1$。当 $k = 1$ 时，$\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}(n,1)$ 就是秩为 n $\beta\gamma$ 的系统 $\mathcal{S}(n)$。(4) 奇数辛型代数 $\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}(n,k)$，适用于 $n \geq 1$ 和偶数 $k \geq 2$。当 $k = 2$ 时，$\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(n,2)$ 就是秩为 n 的辛费米子代数 $\mathcal{A}(n)$。

关于这些代数的构造和关键性质，读者可参阅 [36] 。

2.2. 仿射顶点超代数。设 $\mathfrak{g}$ 是一个具有归一化的基灵形式 $(\cdot|\cdot)$ 的有限维单李超代数。设 $\{q^\alpha|\alpha \in S\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组关于宇称齐性的基。定义相应的结构常数 $\{f_\gamma^{\alpha,\beta}|\alpha,\beta,\gamma \in S\}$ 为

$$[q^\alpha, q^\beta] = \sum_{\gamma \in S} f_\gamma^{\alpha,\beta}q^\gamma.$$

$V^k(\mathfrak{g})$ 在层 k 处的 $\mathfrak{g}$ 仿射顶点代数由场 $\{X^\alpha|\alpha \in S\}$ 强生成，满足

$$X^\alpha(z)X^\beta(w) \sim k(q^\alpha|q^\beta)\mathbf{1}(z-w)^{-2} + \sum_{\gamma \in S} f_\gamma^{\alpha,\beta}X^\gamma(w)(z-w)^{-1}. \tag{2.6}$$

我们将对应于 q_α 的场定义为 X_α，其中 $\{q_\alpha|\alpha\in S\}$ 是相对于 $(\cdot|\cdot)$ 的 $\mathfrak{g}$ 的对偶基。中心荷为 $c^{\mathfrak{g}}$ 的 Sugawara共形向量 $L^{\mathfrak{g}}$ 定义为

$$L^{\mathfrak{g}}=\frac{1}{2(k+h^\vee)}\sum_{\alpha\in S}(-1)^{|\alpha|}:X_\alpha X^\alpha:,\quad c^{\mathfrak{g}}=\frac{k\ \mathrm{sdim}\mathfrak{g}}{k+h^\vee}. \tag{2.7}$$

场 $X^\alpha(z)$ 和 $X_\alpha(z)$ 相对于 $L^{\mathfrak{g}}$ 是主场，共形权为 1。

2.3. **$\mathcal{W}$-超代数**。设 $\mathfrak{g}$ 是一个单的有限维李（超）代数，且 f 是 $\mathfrak{g}$ 的偶部中的一个幂零元。层为 k 的 $\mathcal{W}$-(超)代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},\ f)$ 由 Kac、Roan 和 Wakimoto [58], 定义，是对 Feigin 和 Frenkel [44] 先前给出的情形的推广；在该情形中，$\mathfrak{g}$ 是李代数，而 f 是主幂零元。我们将 f 补全为一个满足下列条件的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{f,h,e\}$

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h.$$

那么 $x=\frac{1}{2}h$ 在 $\mathfrak{g}$ 上诱导一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-分次，

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j,\quad \mathfrak{g}_j=\{a\in\mathfrak{g}|[x,a]=ja\}. \tag{2.8}$$

取 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $S=\bigcup S_k$，其中 S_k 是 $\mathfrak{g}_k$ 的一组基，并分别用 $S_+=\bigcup\{S_k|k<0\}$ 和 $S_-=\bigcup\{S_k|k>0\}$ 表示相应子空间的一组基

$$\mathfrak{g}_+=\bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}}\mathfrak{g}_j,\quad \mathfrak{g}_-=\bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}}\mathfrak{g}_j.$$

令 $F(\mathfrak{g}_+)$ 表示与向量超空间 $\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_+^*$ 相关联的带电费米子代数。它由场 $\{\varphi_\alpha,\varphi^\alpha|\alpha\in S_+\}$ 强生成，其中 φ_α, φ^α 的宇称与 q^α 相反。它们满足

$$\varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w)\sim\delta_{\alpha,\beta}(z-w)^{-1},\quad \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w)\sim 0\sim\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w).$$

我们赋予 $F(\mathfrak{g}_+)$ 共形向量及相应的中心荷

$$L^{\mathrm{ch}}=\sum_{\alpha\in S_+}(1-m_\alpha):\partial\varphi^\alpha\varphi_\alpha:-m_\alpha:\varphi^\alpha\partial\varphi_\alpha:,\quad c^{\mathrm{ch}}=-\sum_{\alpha\in S_+}(-1)^{|\alpha|}(12m_\alpha^2-12m_\alpha+2). \tag{2.9}$$

场 φ_α 和 φ^α 相对于 L^{ch} 是主场，共形权分别为 $1-m_\alpha$ 和 m_α。由于 $f\in\mathfrak{g}_{-1}$，它为 $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ 赋予了一个斜对称形式

$$\langle a,b\rangle=(f|[a,b]). \tag{2.10}$$

用 $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ 表示与 $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ 相关联的中性费米子代数。它的强生成元为 $\{\Phi_\alpha|\alpha\in S_{\frac{1}{2}}\}$，其中 Φ_α 的宇称与 q^α相同，且满足

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w)\sim\langle q^\alpha,q^\beta\rangle(z-w)^{-1}.$$

我们赋予 $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ 共形向量 L^{ne}，其中心荷为 c^{ne}，其中

$$L^{\mathrm{ne}}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in S_{\frac{1}{2}}}:\partial\Phi^\alpha\Phi_\alpha:,\quad c^{\mathrm{ne}}=-\frac{1}{2}\mathrm{sdim}\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}.$$

这里，Φ^α 关于双线性形式 (2.10) 与 Φ_α 对偶，而 $\Phi^\alpha(z)$ $\Phi_\alpha(z)$ 相对于 L^{ne} 是共形权为 1 2 的主场。

如 [58], 中定义的 $C^k(\mathfrak{g},f)=V^k(\mathfrak{g})\otimes F(\mathfrak{g}_+)\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$。它允许按荷进行 $\mathbb{Z}$-分次

$$C^k(\mathfrak{g},f)=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}C_j,$$

令 φ_α 的荷为 -1，φ^α 的荷为 1，其余所有项的荷为 0。存在一个荷为 -1的奇场 $d=d_{\mathrm{st}}+d_{\mathrm{tw}}$，其中

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{st}}&=\sum_{\alpha\in S_+}(-1)^{|\alpha|}:X^\alpha\varphi^\alpha:-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in S_+}(-1)^{|\alpha||\gamma|}f_\gamma^{\alpha,\beta}:\varphi_\gamma\varphi^\alpha\varphi^\beta:,\\ d_{\mathrm{tw}}&=\sum_{\alpha\in S_+}(f|q^\alpha)\varphi^\alpha+\sum_{\alpha\in S_{\frac{1}{2}}}:\varphi^\alpha\Phi_\alpha:.\end{aligned} \tag{2.11}$$

它满足 $d(z)d(w) \quad \sim 0$，因此 $(C^k(\mathfrak{g},\ f)\ d_{(0)})$ 具有 $\mathbb{Z}$-分次同调复形的结构，并定义 s

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f) := H(C^k(\mathfrak{g},f), d_{(0)}).$$

其共形向量表示为 $L = L^{\mathfrak{g}} + \partial x + L^{\mathrm{ch}} + L^{\mathrm{ne}}$，其中心荷为

$$c(\mathfrak{g},f,k) = \frac{k\ \mathrm{sdim}(\mathfrak{g})}{k+h^\vee} - 12k(x|x) - \sum_{\alpha\in S_+}(-1)^{|\alpha|}(12m_\alpha^2 - 12m_\alpha + 2) - \frac{1}{2}\mathrm{sdim}(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}). \tag{2.12}$$

这里，若 $\alpha \in S_j$，则 $m_\alpha = j$。

记 $\mathfrak{g}^f$ 为 $\mathfrak{g}$ 中 f 的中心化子，并令 $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}^f \cap \mathfrak{g}_0$。定义场

$$J^\alpha = X^\alpha + \sum_{\beta,\gamma\in S_+}(-1)^{|\gamma|} f_\gamma^{\alpha,\beta} :\varphi_\gamma\varphi^\beta: + \frac{(-1)^{|\alpha}}{2}\sum_{\beta,\gamma\in S_+} f_\gamma^{\beta,\alpha} :\Phi_\beta\Phi^\gamma: . \tag{2.13}$$

Then $\{J^\alpha | q^\alpha \in \mathfrak{a}\}$ 关于算符乘积展开封闭，并生成一个类型为 $\mathfrak{a}$ 的仿射顶点代数。我们有 e

定理 2.1（[60],定理 2.1）。

$$J^\alpha(z)J^\beta(w) \sim (k(q^\alpha|q^\beta) + k^\Gamma(q^\alpha,q^\beta))(z-w)^{-2} + f_\gamma^{\alpha,\beta}J^\gamma(w)(z-w)^{-1}, \tag{2.14}$$

其中

$$k^\Gamma(q^\alpha,q^\beta) = \frac{1}{2}\left(\kappa_{\mathfrak{g}}(q^\alpha,q^\beta) - \kappa_{\mathfrak{g}_0}(q^\alpha,q^\beta) - \kappa_{\frac{1}{2}}(q^\alpha,q^\beta)\right),$$

其中 $\kappa_{\frac{1}{2}}$是 $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$上的 $\mathfrak{g}_0$的超迹。 _

定理 2.2。 [60, 定理 4。1] 设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维单李超代数，带有不变双线性型 $(\ |\ )$，并设 x, f 是 $\mathfrak{g}$ 中的一对偶元素，使得 $\mathrm{ad}\ \ x$ 可对角化，且特征值属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $[x,f] = -f$，并且 $\mathrm{ad}\ x$ 在 $\mathfrak{g}^f$上的所有特征值均为非正，因此 $\mathfrak{g}^f = \bigoplus_{j\le 0}\mathfrak{g}_j^f$。那么

(1) 对于每个满足 $j \ge 0$的 $q^\alpha \in \mathfrak{g}^f_{-j}$，都存在一个权为 $1+j$的 $d_{(0)}$-闭场 K^α，其中权是相对于 L而言的。*(2)* 场 K^α的同调类（其中 $\{q^\alpha\}$遍历 $\mathfrak{g}^f$的一组基）自由生成 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$。*(3)* 若 $j \ne 0$，则 $H_0(C(\mathfrak{g},f,k)\ d_0) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ 且 $H_j(C(\mathfrak{g},f,k)\ d_0) = 0$。

On我们还可以考虑 $V^k(\mathfrak{g})$-模 M 的约化。复形的同调

$$H(M\otimes F(\mathfrak{g}_+)\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}), d_0),$$

是一个 $\mathcal{W}^k(\{\mathrm{v2},\ f)$-模，我们将其记为 $H_f(M)$。在此记号下，$\mathcal{W}^k(\{\mathrm{v9},\ f) = H_f(V^k(\mathfrak{g}))$.

2.4. **代数的大水平极限**。假设 $\mathfrak{g}$ 是单李（超）代数，且 $(\ |\ )$ 非退化。令 $x,\ f$ 和 $\mathfrak{g}^f$ 如定理 2.2 所述。在 [36], 中定义了一个特定的大水平极限 $\mathcal{W}^{\mathrm{free}}(\mathfrak{g},\ f) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},\ f)$。它是一个具有以下性质的单顶点代数。

定理 2.3 ([36], 定理 3.5 和推论 3.4)。 $\mathcal{W}^{free}(\mathfrak{g}, f)$ 是一个由强生成元$\{X^\alpha | q^\alpha \in \mathfrak{g}^f\}$ 生成、算符乘积展开为

$$X^\alpha(z)X^\beta(w) \sim (z-w)^{-2k}\delta_{j,k}B_k(q^\alpha,q^\beta) \tag{2.15}$$

对于 $q^\alpha \in \mathfrak{g}^f_{-k}$ 和 $q^\beta \in \mathfrak{g}^f_{-j}$，其中

$$B_k : \mathfrak{g}^f_{-k}\times\mathfrak{g}^f_{-k} \to \mathbb{C}, \quad B_k(a,b) := (-1)^{2k}((ad(f))^{2k}b|a).$$

此外，$\mathcal{W}^\infty(\mathfrak{g}, f)$ 分解为标准自由场代数的张量积。令 $X_k = Span\{X^\alpha | q^\alpha \in \mathfrak{g}^f_{-k}\}$。那么

- 若 $2k$ 为偶数且$(\cdot|\cdot)$ 是对称的，则 X_k 生成一个正交型偶代数。
- 若 $2k$ 为奇数且 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的，则 X_k 生成一个正交型奇代数。
- 若 $2k$ 为奇数且 $(\cdot|\cdot)$ 是斜对称的，则 X_k 生成一个辛型偶代数。
- 若 $2k$ 为偶数且$(\cdot|\cdot)$ 是斜对称的，则 X_k 生成一个辛型奇代数。

该定理有助于推导仿射子代数对 $\mathcal{W}$-代数的余集的强生成类型。在极限情形下，余集成为自由场代数的一个轨形，其结构可以用经典不变理论来分析。该轨形的一个强生成元随即给出一般水平下余集的强生成集。

2.5. 交换环上的顶点代数。 在研究有限生成的 $\mathbb{C}$-代数 R 上的顶点代数时，我们将采用 [65, 第 3] 节中的记号和设置。设 $\mathcal{V}$ 是定义在 R 上的顶点代数，带有共形权分次 $\mathcal{V}=\bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}}\mathcal{V}[d]$，其中 $\mathcal{V}[0]\cong R$。所有理想 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{V}$ 都是分次的，即 $\mathcal{I}=\bigoplus_{d\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}}\mathcal{I}[d]$,- 其中 $\mathcal{I}[d]=\mathcal{I}\cap\mathcal{V}[d]$。若不存在满足 $\mathcal{I}[0]=\{0\}$ 的真分次理想 $\mathcal{I}$，我们称 $\mathcal{V}$单 。当 R 是一个域时，这与通常的单性概念一致。若 $I\subseteq R$ 是一个理想， I 是 $\mathcal{V}[0]\cong R$ 的一个子集，我们用 $I\cdot\mathcal{V}$ 表示由 I 生成的顶点代数理想。于是 $\mathcal{V}^I=\mathcal{V}/(I\cdot\mathcal{V})$ 是定义在 R/I 上的顶点代数。即使 $\mathcal{V}$ 作为定义在 R 上的顶点代数是单的， $\mathcal{V}^I$ 作为定义在 R/I 上的顶点代数也未必是单的。

如果 R 是簇 X的坐标环，且 $\mathcal{V}$ 是定义在 R上的单顶点代数，假设 $I\subseteq R$ 是一个理想，使得 $\mathcal{V}^I$ 不是单的，即 $\mathcal{V}^I$ 具有一个极大真分次理想 $\mathcal{I}$，且 $\mathcal{I}[0]=\{0\}$。那么商

$$\mathcal{V}_I=\mathcal{V}^I/\mathcal{I}$$

是定义在 R/I上的单顶点代数。令 $Y\subseteq X$ 为对应于 I的闭子簇，我们可以将 $\mathcal{V}_I$ 视为定义在 Y上的单顶点代数。对于具有此性质的理想 I_1， I_2，我们分别得到定义在 R/I_1 和 R/I_2上的相应单顶点代数 $\mathcal{V}_{I_1}=\mathcal{V}^{I_1}/\mathcal{I}_1$ 和 $\mathcal{V}_{I_2}=\mathcal{V}^{I_2}/\mathcal{I}_2$ 。令 Y_1， $Y_2\subseteq X$ 为分别对应于 I_1， I_2的闭子簇，并令 $p\in Y_1\cap Y_2$。令 $\mathcal{V}^p_{I_1}$ 和 $\mathcal{V}^p_{I_2}$ 为在 $\mathbb{C}$ 上、通过在 p处取值而得到的顶点代数。如上所述， $\mathcal{V}^p_{I_1}$ 和 $\mathcal{V}^p_{I_2}$ 不一定是单的，我们将它们的简单商记为 $\mathcal{V}_{I_1,\ p}$ 和 $\mathcal{V}_{I_2,\ p}$。于是 p 对应于一个包含 I_1 和 I_2的极大理想 $M_p\subseteq R$ ，因此我们有同构

$$\mathcal{V}_{I_1,p}\cong\mathcal{V}_M\cong\mathcal{V}_{I_2,p}. \tag{2.16}$$

我们的主要例子 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 将定义在多项式环$\mathbb{C}[c,k]$的局部化 $R=D^{-1}\mathbb{C}[c,k]$ 上，其中 D 是有限生成的乘法封闭集；见定理 6.1。我们将把某些单参数顶点代数 $\mathcal{C}^\psi_{XY}(n,\ m)$（其中 $n,\ m\in\mathbb{N}$）以及 $\mathcal{C}^\ell(n)$（其中 $n\in\mathbb{Z}$）识别为 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 对素理想 $I\subseteq R$ 取商所得的代数，且需进行适当的局部化。所有顶点代数 $\mathcal{C}^\psi_{XY}(n,\ m)$ 都将定义为$\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{W}^\psi_{XY}(n,\ m)$、此类 $\mathcal{W}$-代数的仿射余集，或此类 $\mathcal{W}$-代数或其余集的 $\mathbb{Z}_2$-轨形。类似地， $\mathcal{C}^\ell(n)$ 要么是一个仿射顶点代数与一个自由场代数张量积的仿射余集，要么是此类余集的$\mathbb{Z}_2$-轨形。 I 的定义方程由中心荷 c 关于 Heisenberg 子代数层 k 的有理函数公式给出。

我们始终将 $\mathcal{C}^\psi_{XY}(n,\ m)$ 和 $\mathcal{C}^\ell(n)$ 视为单参数顶点代数，其中 ψ 和 ℓ 视为形式参数。它们定义在 R/I 的局部化上，该局部化是通过将 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 的结构常数的所有分母在分别用 ψ （以及 ℓ）的相应函数替换 c 和 k 后取逆而得到的。在给定点 $\psi_0\in\mathbb{C}$ 处，只要 $\mathcal{C}^\psi_{XY}$ 不属于结构常数分母的极点（有限）集合，特化

$$\mathcal{C}^{\psi_0}_{XY}(n,m):=\mathcal{C}^\psi_{XY}(n,m)/(\psi-\psi_0)\mathcal{C}^\psi_{XY}(n,m)$$

就是有意义的。然而，$\mathcal{C}^{\psi_0}_{XY}(n,\ m)$ 可能是真正的余集（或轨形）的真子代数；真正的余集（或轨形）是先将 $\mathcal{W}^\psi_{XY}(n,\ m)$ 特化到 $\psi=\psi_0$，再取其余集（或轨形）而得到的，尽管对 ψ 的一般值而言二者相同。 $\mathcal{C}^{\ell_0}(n)$ 也可能出现同样的情况：$=\mathcal{C}^\ell(n)/(\ell-\ell_0)\mathcal{C}^\ell(n)$ 在特定层 $\ell_0\in\mathbb{C}$ 上的 $\mathcal{C}^\ell(n)$。问题在于， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 由权不超过 2 的场弱生成，因此 $\mathcal{C}^{\psi_0}_{XY}(n,\ m)$ 或 $\mathcal{C}^{\ell_0}(n)$ 也具有同样的性质；而真正的余集（或轨形）的这一弱生成性质可能会在 ψ_0 或 ℓ_0 的特殊取值处失效。没有算法可以确定弱生成失效点的集合，而且这些集合不一定是有限的。因此，尽管在截断曲线上的交点处，我们有 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 的上述任意单参数商的简单商之间的同构（2.16），但要证明在这些交点处，这两个顶点代数都与真正的余集（或轨形）一致，是一个困难的问题。

我们将证明，在以下情形中

$$\mathcal{C}^\psi_{CC}(0,m)=\mathcal{W}^{\psi-2m-1}(\mathfrak{sp}_{4m},f_{2m,2m}),\qquad \mathcal{C}^\psi_{BD}(0,m)=\mathcal{W}^{\psi-4m}(\mathfrak{so}_{4m+2},f_{2m+1,2m+1}),$$

弱生成性质可能失效的 ψ 取值只有有限多个，我们会明确描述这些取值；见定理 6.3。在第 10 节中，我们将采用另一种方法，利用 D 型有理 $\mathcal{W}$ 代数的融合范畴，证明对于 n 正整数以及 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的 $\ell-2$ 可容许层，简单商 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 是强有理的，且除 ℓ 的有限多个取值外，弱生成性质均成立。在第 10 节中，我们还将确定使 $\mathcal{C}^\psi_{CO}(0,\ m)$ 具有弱

生成性质的层集合。结合 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 的有理性，并利用截断曲线交点处的同构 (2.16)，我们证明有理性结果，即定理 10.2。

3. New universal vertex algebras as glueings

本节将给出一幅猜想性的图景，说明如何将经典李类型的 $\mathcal{W}$-代数组织成若干族，这些族由新的普适二参数顶点代数支配；而这些普适二参数顶点代数本身又是有限多个基本顶点代数副本的粘合，即 A 型的 $\mathcal{W}_\infty$，以及 B、C 和 D 型的 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 和 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{sp}}$。这些二参数顶点代数的单参数商包括 $\mathcal{W}$-代数、某些 $\mathcal{W}$-(超)代数的仿射余集，以及某些与 GKO 余集 (1.2) 类似的对角余集。

3.1. **$\mathcal{W}$-代数，类型 A。**对于大小分别为 t 和 $t+1$ 的正整数集合 $S=\{d_1,\dots,d_t\}$ 和 $M=\{m_0,\dots,m_t\}$，我们得到一个分拆 $P_{S,M}=(n_0^{m_0},\ n_1^{m_1},\ \dots\dots,\ n_t^{m_t})$，它由 m_i 个大小为 n_i 的部分组成，其中 $n_t=2$，且对 $i=0,\ 1,\ \dots\dots,\ t-1$，有 $n_i-n_{i+1}=d_{i+1}$。当 $t=0$ 和 $S=\emptyset$ 时，这一记号也有意义；在此情形下，对某个 $m>0$，有 $M=\{m\}$，且 $P=(2^m)$。

对于 $r,\ s\geq 0$，我们用 $P_{S,\ M,\ r,\ s}$ 表示由下式给出的 $N_{r,\ s}=N+s+r\sum_{i=0}^t m_i$ 的分拆

$$((n_0+r)^{m_0},(n_1+r)^{m_1},\dots,(n_t+r)^{m_t},1^s),$$

它有 m_i 个大小为 n_i+r 的部分，以及 s 个大小为 1 的部分，因此 $P_{S,\ M,\ 0,\ 0}=P_{S,\ M}$。令 $f_{S,\ M,\ r,\ s}\in\mathfrak{sl}_{N_{r,\ s}}$ 为相应的幂零元。

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,0}},f_{P_{S,M,r,0}}) \tag{3.1}$$

其强生成类型由 [25, 命题 2.1]给出；对于足够大的 r，在任意固定的共形权范围内，它都与 r 无关。此外，容易看出，对于所有 r，李代数 $\mathfrak{sl}^{\natural}_{N_{r,\ 0}}\cong\mathfrak{t}\oplus(\bigoplus_{i=0}^t\mathfrak{sl}_{m_i})$ 中，$\mathfrak{t}$ 是一个维数为 t的阿贝尔李代数。此外，$\mathfrak{sl}^{\natural}_{N_{r,\ 0}}$ 对较高权生成场的作用，当 r 足够大时，与 r 无关。这引出了以下猜想：

猜想 3.1. 设 $S=\{d_1,\dots,d_t\}$、$M=\{m_0,\dots,m_t\}$ 和满足 $n_i-n_{i+1}=d_{i+1}$ 与 $n_t=2$ 的 n_i 如上所述。存在唯一的二参数顶点代数 $\mathcal{W}^{A,\ S\ M,}$，具有以下性质：

(1) $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 定义在二元多项式环的某个局部化上，该局部化由反转有限多个多项式得到。*(2)* $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 是由 S 和 M 确定的相应类型的自由生成代数。*(3)* $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 将所有的 $\mathcal{W}$-代数 *(3.1)* 作为单参数商。*(4)* $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 由权至多为 *3* 的场弱生成。*(5)* $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 是 $\mathcal{H}(|M|-1)$ 与 $|M|$ 个互相对易的 $\mathcal{W}_\infty$ 副本张量积的扩张，其中 $|M|=\sum_{i=0}^t m_i$。*(6)* $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 是满足 *(1)–(4)* 的顶点代数的分类对象；任何具有此类强生成集（不一定是极小生成集）且满足 *(1)–(4)* 的顶点代数，都是 $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 的商。

在 $S=\emptyset$ 和 $M=\{1\}$, $\mathcal{W}^{A,\ S\ M,}$ 的情形下，它恰好就是在 [65]中构造的代数 $\mathcal{W}_\infty$。代数$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,\ 0}},\ f_{P_{S,\ M,\ r,\ 0}})$ 是 $\mathcal{W}_\infty$ 的单参数商 $\mathcal{C}^\psi(n,\ 0)=\mathcal{W}^{\psi-n}_\infty(\mathfrak{sl}_n)$ 的类似物，其定义见 [36]。我们预期，除 $\mathcal{W}_\infty$, $\mathcal{W}^{A,\ S\ M,}_\infty$ 之外，在所有情形下，它实际上都由权 1 和 2 的场生成。

我们预期 $\mathcal{W}^{A,\ S\ M,}_\infty$ 存在其他几个单参数商族，现将其描述如下。首先，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,\ s}},\ f_{P_{S,\ M,\ r,\ s}})$ 含有一个仿射子顶点算子代数 $V^{k'}(\mathfrak{gl}_s)$，其移位层为某个 k'。通过取大水平极限，并运用 [78] 中经典不变理论的标准结果，如 [36, 37], 所示，很容易验证

$$\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,s}},f_{P_{S,M,r,s}})), \tag{3.2}$$

具有与 $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}$ 相同的生成类型，因此应是 $\mathcal{W}^{A,\ S\ M}_\infty$ 的单参数商。注意，*(3.2)* 的情形 只是族 *(3.1)*。对于 ，*(3.2)* 类似于文献 中给出的、适用于 和 的顶点代数 (、 m)。

接下来，考虑幂零元 $f_{P_{S,M,r|s}}\in\mathfrak{sl}_{N_{r,0|s}}$，它正是 $f_{P_{S,M,r,0}}\in\mathfrak{sl}_{N_{r,0}}\subseteq\mathfrak{sl}_{N_{r,0|s}}$ 与 $\mathfrak{sl}_s\subseteq\mathfrak{sl}_{N_{r,0|s}}$ 中零幂零元之和。于是，对于某个移位层 k''，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,0|s}},f_{P_{S,M,r|s}})$ 包含 $V^{k''}(\mathfrak{gl}_s)$，而该余集

$$\mathrm{Com}(V^{k''}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{r,0|s}},f_{P_{S,M,r|s}})), \tag{3.3}$$

与 $\mathcal{W}^{A,\ S\,M,}_{\infty}$ 具有相同的生成类型，因此它也应当是 $\mathcal{W}^{A,\ S\,M,}_{\infty}$ 的单参数商。与上文一样，对于 $s>0$，这些是 $n\geq 2$ 和 $m>0$ 所对应的 $\mathcal{D}^{\psi}(n,m)$ 的类似物，其定义见[36]。

接下来，我们在分拆 $P_{S,M}$ 中将 n_i 替换为 n_i-1，这等价于取上文的 $r=-1$。特别地，由于 $n_t=2$，这会将 n_t 替换为 $\mathbf{1}$。然后

$$\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-1,s}},f_{P_{S,M,-1,s}})),\qquad \mathrm{Com}(V^{k''}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-1,0|s}},f_{P_{S,M,-1|s}}))$$

也具有与 $\mathcal{W}^{A,\ S\,M,}_{\infty}$ 相同的生成类型。它们是文献 [36], 中定义的代数 $\mathcal{C}^{\psi}(\mathbf{1},n)$ 和 $\mathcal{D}^{\psi}(\mathbf{1},n)$ 的类似物；这些代数是仿射顶点（超）代数的仿射余集。

最后，我们在 $P_{S,M}$ 中将 n_i 替换为 n_i-2，这等价于取 $r=-2$。由于 $n_t=2$，这会使 n_t 被移除，因为它现在为零；也就是说，我们将 $P_{S,M}$ 替换为更小的分拆 $((n_0-2)^{m_0},(n_1-2)^{m_1},\dots,(n_{t-1}-2)^{m_{t-1}})$。我们用记号 $f_{S,M,-2,s}$ 表示 $\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}}$ 中的这个幂零元，其中 $N_{-2,s}=N+s-2\sum_{i=0}^{t}m_i$，如上所述。考虑张量积

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{S}(m_ts),\qquad \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{E}(m_ts),$$

其中，$\mathcal{S}(m_ts)$ 和 $\mathcal{E}(m_ts)$ 分别是秩为 m_ts 的 $\beta\gamma$-系统和 bc-系统。注意

(1) $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,\ s}},\ f_{S,\ M,\ -2,\ s})$ 具有仿射子顶点算子代数 $V^{k'}(\mathfrak{sl}_s)$，其中 k' 为某个值；(2) $\mathcal{S}(m_ts)$ 具有 $V^{-m_t}(\mathfrak{sl}_s)$ 在 $\otimes V^{-s}(\mathfrak{sl}_{m_t})$ 上的作用；(3) $\mathcal{E}(m_ts)$ 具有 $V^{m_t}(\mathfrak{sl}_s)$ 在 $\otimes V^{s}(\mathfrak{sl}_{m_t})$ 上的作用。

因此，我们有对角嵌入

$$V^{k'-m_t}(\mathfrak{gl}_s)\hookrightarrow\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{S}(m_ts),\qquad V^{k'+m_t}(\mathfrak{gl}_s)\hookrightarrow\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{E}(m_ts).$$

很容易看出，下列仿射余集具有 $\mathcal{W}^{A,\ S\,M,}_{\infty}$ 的生成类型：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Com}(V^{k'-m_t}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{S}(m_ts)),\\&\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{gl}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{N_{-2,s}},f_{S,M,-2,s})\otimes\mathcal{E}(m_ts)).\end{aligned}\tag{3.4}$$

这些是 [36] 中定义的 GKO 余集 $\mathcal{C}^{\psi}(0,\ m)$ 和 $\mathcal{D}^{\psi}(0,\ m)$ 的类似物。与 $\mathcal{W}_{\infty}$ 的情形不同，我们通常不期望存在将代数 (3.4) 与其他代数 (3.1)、(3.2)、(3.3) 联系起来的三元对偶同构。

例 3.1。考虑 $S=\emptyset$ 和 $M=\{m\}$，因此 $P_{\emptyset,\ \{m\}}=(2^m)$ 和 $N=2m$。我们称 $\mathcal{W}^{A,\ \emptyset\ \{m\},}_{\infty}$ 为矩形型，其生成类型为

$$\mathcal{W}(1^{m^2-1},2^{m^2},3^{m^2},4^{m^2},\dots).$$

这里的仿射子顶点算子代数属于 $\mathfrak{sl}_m$ 型，并且每个权 $d\geq 2$ 中的 m^2 场在 $\mathfrak{sl}_m$ 作用下都按平凡模与伴随模之和变换。这些构造见 [51], ，但其作为 2 参数顶点代数的唯一性尚未得到证明。在此情形下，将 r 替换为 -2 后得到的分拆为空，因此本例中的 *GKO* 余集 (3.4) 为

$$Com(V^{k-m}(\mathfrak{gl}_s),V^k(\mathfrak{sl}_s)\otimes\mathcal{S}(ms)),\quad Com(V^{k+m}(\mathfrak{gl}_s),V^k(\mathfrak{sl}_s)\otimes\mathcal{E}(ms)).$$

注意，对于所有层 k，第一个余集的仿射子顶点算子代数是 $V^{-s}(\mathfrak{sl}_m)$ 在 $\mathcal{S}(ms)$中的像；当 $s>m$ 时，它恰好是 $V^{-s}(\mathfrak{sl}_m)$。类似地，第二个余集的仿射子顶点算子代数是 $V^{s}(\mathfrak{sl}_m)$ 在$\mathcal{E}(ms)$中的像，并且与 $L_s(\mathfrak{sl}_m)$同构。

当 k 对 $\mathfrak{sl}_s$ 可容许时，存在单顶点代数的嵌入 $L_{k+m}(\mathfrak{gl}_s)\hookrightarrow L_k(\mathfrak{sl}_s)\otimes\mathcal{E}(ms)$，而余集

$$Com(L_{k+m}(\mathfrak{gl}_s),L_k(\mathfrak{sl}_s)\otimes\mathcal{E}(ms)),\tag{3.5}$$

是顶点代数的张量积 $Com(L_{k+i}(\mathfrak{gl}_s)\ L_{k+i-1}(\mathfrak{sl}_s)\ \otimes\mathcal{E}(s))$（对应 $i=1,\dots,\ m$）与一个秩为 $m-1$ 的格顶点代数的扩张，因此是强有理的。我们预期，在所有这些点，(3.5) 是 $\mathcal{W}^{A,\ \emptyset\ \{m\},}_{\infty}$ 的简单商，因此 $\mathcal{W}^{A,\ \emptyset\ \{m\},}_{\infty}$ 有许多强有理商。

例 3.2. 考虑 $S=\{2\}$ 和 $M=\{1,3\}$，因此 $P_{\{2\},\ \{1,3\}}=(4,2^3)$ 以及 $N=10$。$\mathcal{W}^{A,\ \{2\}\ \{1,3\}\ ,}_{\infty}$ 的生成类型为

$$\mathcal{W}(1^9,2^{16},3^{16},4^{16},\dots),$$

其中仿射子顶点算子代数的类型为 $\mathfrak{gl}_3$，而每个权 $d \geq 2$ 下的16 个场在 $\mathfrak{sl}_3$ 作用下变换为平凡模、标准模、对偶标准模和伴随模之和。将 r 替换为-2 得到的分拆恰为(2)，相应的幂零元 $f_{(2)} \subseteq \mathfrak{sl}_{2+s}$ 恰为极小幂零元 f_{min}。因此，本例中的 ***GKO*** 余集(3.4) 为

$$Com(V^{k'-3}(\mathfrak{gl}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min}) \otimes \mathcal{S}(3s)), \quad Com(V^{k'+3}(\mathfrak{gl}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min}) \otimes \mathcal{E}(3s)), \quad k' = k+1.$$

当 k 对 $\mathfrak{sl}_s$ 可容许时，我们有单顶点代数的嵌入 $L_{k+4}(\mathfrak{sl}_s) \hookrightarrow \mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min}) \otimes \mathcal{E}(3s)$，而余集

$$Com(L_{k+4}(\mathfrak{gl}_s), \mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min}) \otimes \mathcal{E}(3s)), \tag{3.6}$$

是一个扩张　　秩为 3 的格顶点代数与以下顶点代数的张量积

(1) $Com(L_{k+1}(\mathfrak{gl}_s)\ \mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min}))$,(2) $Com($
$L_{k+2}(\mathfrak{gl}_s)\ L_{k+1}(\mathfrak{sl}_s) \otimes \mathcal{E}(s))$,(3) $Com(L_{k+3}(\mathfrak{gl}_s)$
$L_{k+2}(\mathfrak{sl}_s) \otimes \mathcal{E}(s))$,(4) $Com(L_{k+4}(\mathfrak{gl}_s)\ L_{k+3}(\mathfrak{sl}_s)$
$\otimes \mathcal{E}(s))$.

假设 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $m+s$ 是奇数，并固定 $k = -(s+2) + \frac{m+s+2}{2}$。上述第二、第三和第四个余集是强有理的 [11], ，而第一个余集对应于 $\mathcal{C}^{\psi}(2,s)$ 和 $\mathcal{C}^{\phi}(m,0)$ 的截断曲线上的一个交点，该点为 $\psi = \frac{m+s+2}{2}$ 和 $\phi = \frac{m+s}{m+s+2}$，按照 [36] 中的记号。这表明

$$Com(L_{k+1}(\mathfrak{gl}_s), \mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_{2+s}, f_{min})) \cong \mathcal{W}_{-m+\frac{m+s}{m+s+2}}(\mathfrak{sl}_m),$$

它是强有理的。这个同构将在 [38] 中作为一个更一般定理的推论得到证明，并且这意味着对于这些 k的取值，(3.6)是强有理的。最后，我们预计这些将是 $\mathcal{W}^A$、$\mathcal{W}^{\{2\}}_{\infty}$、$\mathcal{W}^{\{1,3\}}$的强有理商。

3.2. $\mathcal{W}$**型中的-代数** B**、** C**和** D。回顾一下，幂零元对应于满足以下条件的分拆:

(1) 在 C型中，分拆（$n_0^{m_0}$、$n_1^{m_1}$、.....、$n_t^{m_t}$）必须满足：当 n_i为奇数时， m_i为偶数。(2) 在 B型和 D型中，分拆（$n_0^{m_0}$、$n_1^{m_1}$、.....、$n_t^{m_t}$）必须满足：当 n_i为偶数时， m_i为偶数。（在 D型中，对应于极偶分拆（即所有 n_i 均为偶数）的幂零元有两个共轭类，但我们无需区分它们，因为相应的 $\mathcal{W}$-代数是同构的 [43]。）我们将对 S 和 M 使用与上面相同的记号。对于 C型，我们考虑分拆$P_{S,M} = (n_0^{m_0}、n_1^{m_1}、.....、n_t^{m_t})$，它由$N = \sum_{i=0}^{t} n_i m_i$ 个大小为 n_i的 m_i 部分组成，其中 $n_i - n_{i+1} = d_{i+1}$对于$i = 0$、1、.....、$t-1$成立，并且当 n_i为奇数时， m_i为偶数。我们将 n_t取为2或3；如果至少有一个 m_i为奇数，则只允许其中一种取值。在 $n_t = 2$ 为2或3的情形下，我们分别使用记号$P_S^{2C}{}_{,M}$或$P_S^{3C}{}_{,M}$。如果所有 m_i 都是偶数，那么 $n_t = 2$ 和 $n_t = 3$都允许，我们仍使用这一记号，因为需要区分这两个分拆。

对于 $r, s \geq 0$，我们用 $P_S^{2C}{}_{,M,r,s}$和 $P_S^{3C}{}_{,M,r,s}$表示.....的分拆

$$N_{r,s} = N + 2s + 2r\sum_{i=0}^{t} m_i, \tag{3.7}$$

由 $((n_0+2r)^{m_0}, (n_1+2r)^{m_1}, \ldots, (n_t+2r)^{m_t}, 1^{2s})$ 给出，它有 m_i 个大小为 n_i+2r 的部分，以及 $2s$ 个大小为 1 的部分。注意，只要 $P_S^{2C}{}_{,M}$ 和 $P_S^{3C}{}_{,M}$ 满足我们的限制，$P_S^{2C}{}_{,M,r,s}$ 和 $P_S^{3C}{}_{,M,r,s}$ 就满足这些限制；并且对于 $i = 2$，$P_S^{iC}{}_{,M,0,0} = P_{S,M}$。令 $f_S^{2C}{}_{,M,r,s} \in \mathfrak{sp}_{N_{r,s}}$ 和 $f_S^{3C}{}_{,M,r,s} \in \mathfrak{sp}_{N_{r,s}}$ 表示相应的幂零元。

类似地，在类型 B 和 D 中，我们有 $P_{S,M} = (n_0^{m_0}, n_1^{m_1}, \ldots, n_t^{m_t})$ 这一 $N = \sum_{i=0}^{t} n_i m_i$ 的分拆，由 m_i 个大小为 n_i 的部分组成，其中 $n_i - n_{i+1} = d_{i+1}$ 对于 $i = 0, 1, \ldots, t-1$ 成立，并且当 n_i 为偶数时， m_i 也是偶数。同样，我们取 n_t 为 2 或 3，并用记号 $P_{S\,M\,,}^{2BD}$和 $P_{S\,M\,,}^{3BD}$来区分这两种情况。对于 $r, s \geq 0$，我们用 $P_{S\,M\,,r,s}^{2BD}$和 $P_{S\,M\,,r,s}^{3BD}$表示.....的分拆

$$N_{r,s} = N + s + 2r\sum_{i=0}^{t} m_i, \tag{3.8}$$

由 $((n_0+2r)^{m_0}、(n_1+2r)^{m_1}、.....、(n_t+2r)^{m_t}、1^s)$ 给出，其中有 m_i 个大小为 n_i+2r 的部分，以及 s 个大小为 1 的部分。请注意，我们在 (3.7) 和 (3.8) 中使用了相同的记号$N_{r,\ s}$，但从上下文中总能清楚看出

我们使用的是哪个表达式。与上文一样，只要$P^{2BD}_{SM,}$和$P^{3BD}_{SM,}$满足限制，$P^{2BD}_{SM、r,s}$以及$P^{3BD}_{SM、r,s}$也满足限制；并且对于 $i=2,3$，$P^{iBD}_{SM、0,0}=P_{S,M}$。令$f^{2BD}_{SM、r,s}\in\mathfrak{so}_{N_{r,s}}$和$f^{3BD}_{SM、r,s}\in\mathfrak{so}_{N_{r,s}}$表示相应的幂零元。

显然，如果$f^{3C}_{S,M,r,s}\in\mathfrak{sp}_{N_{r,s}}$是定义良好的幂零元，那么$f^{2BD}_{SM,,r,s}\in\mathfrak{so}_{N_{r,s}}$也是如此。同样，如果$f^{3BD}_{SM,,r,s}\in\mathfrak{so}_{N_{r,s}}$定义良好，那么$f^{2C}_{S,M,r,s}\in\mathfrak{sp}_{N_{r,s}}$也是如此。直接验证可知，以下对象的生成类型

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sp}_{N_{r,0}},f^{3C}_{S,M,r,0}),\qquad \mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{N_{r,0}},f^{2BD}_{S,M,r,0}), \tag{3.9}$$

当 r 充分大时，在任意固定的共形权范围内都相同。此外，当 r 充分大时，相对于$f^{3C}_{S,M,r,0}$的李代数$\mathfrak{sp}^{\natural}_{N_{r,0}}$与相对于$f^{2BD}_{SM,,r,0}$的李代数$\mathfrak{so}^{\natural}_{N_{r,0}}$相同。我们有

$$\mathfrak{sp}^{\natural}_{N_{r,0}}\cong\bigoplus_{i=0}^{t}\mathfrak{g}_i,$$

其中，当 n_i 为奇数时，$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{sp}_{m_i}$（因此 m_i 为偶数）；当 n_i 为偶数时，$\mathfrak{g}_i\cong\mathfrak{so}_{m_i}$。同理，

$$\mathfrak{so}^{\natural}_{N_{r,0}}\cong\bigoplus_{i=0}^{t}\mathfrak{g}_i,$$

其中，当 n_i 为偶数时，$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{sp}_{m_i}$（因此 m_i 为偶数）；当 n_i 为奇数时，$\mathfrak{g}_i\cong\mathfrak{so}_{m_i}$。此外，$\mathfrak{sp}^{\natural}_{N_{r,0}}$和$\mathfrak{so}^{\natural}_{N_{r,0}}$对高权生成场的作用与 r无关。这启发了以下猜想。

猜想 3.2。设 $S=\{d_1,\dots,d_t\}$和 $M=\{m_0,\dots,m_t\}$为正整数集，使得对于 $i=0$、1、.....、$t-1$，有 $n_i-n_{i+1}=d_{i+1}$；当 n_i为奇数时，m_i为偶数，并且 $n_t=3$。那么存在唯一的2参数顶点代数 $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM,}$，具有以下性质：

(1) $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$定义在一个二元多项式环的局部化上，该局部化由对有限多个多项式求逆得到。*(2)* $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$是自由生成的，其类型由 S 和 M适当确定。*(3)* $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$拥有所有形如 *(3.9)* 的顶点代数作为单参数商。*(4)* $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$由权不超过 *3* 的场弱生成。*(5)* $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$是张量积的扩张：对于每个偶数 n_i，取 m_i 个 $\mathcal{W}^{ev}_{\infty}$；对于每个奇数 n_i，取 $\frac{1}{2}m_i$ 个 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$。*(6)* $\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$是满足 *(1)–(4)* 的顶点代数的分类对象；任何具有此类强生成集（不一定是极小强生成集）且满足 *(1)–(4)* 的顶点代数，都是$\mathcal{W}^{C,}_{\infty\,SM}$的商。

同样，以下对象的生成类型

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sp}_{N_{r,0}},f^{2C}_{S,M,r,0}),\qquad \mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{N_{r,0}},f^{3BD}_{S,M,r,0}), \tag{3.10}$$

当 r 充分大时，在任意固定的共形权以下，它们的生成类型相同，但与式 (3.9) 的生成类型不同。与上文一样，李代数$\mathfrak{sp}^{\natural}_{N_{r,0}}$和$\mathfrak{so}^{\natural}_{N_{r,0}}$相同，并且当 r 充分大时，$\mathfrak{sp}^{\natural}_{N_{r,0}}$和$\mathfrak{so}^{\natural}_{N_{r,0}}$对高权生成场的作用与 r 无关。

猜想 3.3。设 $S=\{d_1,\dots,d_t\}$和 $M=\{m_0,\dots,m_t\}$是正整数集，使得对于 $i=0$、1、.....、$t-1$，$n_i-n_{i+1}=d_{i+1}$，且当 n_i为偶数时，m_i为偶数，并且 $n_t=3$。存在唯一的2参数顶点代数 $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$，具有以下性质：

(1) $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 定义在一个二元多项式环的局部化上，该局部化由有限多个多项式取逆得到。*(2)* $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 按由 S *and* M 确定的适当类型自由生成。*(3)* $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 将所有的 $\mathcal{W}$-代数 *(3.10)* 作为单参数商纳入其中。*(4)* $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 由权至多为 *4* 的场弱生成。*(5)* $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 是以下张量积的一个扩张：对每个奇数 n_i，取 m_i 个 $\mathcal{W}^{ev}_{\infty}$ 的张量积；对每个偶数 n_i，取 $\frac{1}{2}m_i$ 个 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$ 的张量积。*(6)* $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 是满足 *(1)-(4)* 的顶点代数的分类对象；任何具有此类强生成集（不一定是极小的）且满足 *(1)-(4)* 的顶点代数，都是 $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty\,SM,}$ 的一个商。

在 $S=\emptyset$ and $M=\{1\}$, $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty}{}_{\emptyset\{1\},}$ 的情形下，它恰好是 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 中构造的代数。在 $S=\emptyset$ and $M=\{2\}$, $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{\emptyset\{2\},}$ 的情形下，它恰好是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$ 中构造的代数。我们预期，除了 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_{\infty}$ and $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 这两种情形外， $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{S\,M,}$ 和 $\mathcal{W}^{BD,}_{\infty}{}_{S\,M,}$ 均由权为 1 和 2 的场弱生成；在这两种情形下，我们还分别需要权为 3 和权为 4 的场。注意，(3.9) 和 (3.10) 分别是 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 在 [37], 中为 $m\geq 1$ 定义的单参数商 $\mathcal{C}^{\psi}_{1D}(0,m)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(0,m)$ 的类似物。

3.3. 生成类型为 $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{S\,M,}$ 的顶点算子代数族。这里我们列出更多我们预期可作为 $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{S\,M,}$ 的单参数商出现的顶点代数。我们使用相同的记号 $f^{3C}_{S,M,r,s}$ 来表示子代数 $\mathfrak{sp}_{N_r,s}\subseteq\mathfrak{osp}_{1|N_r,s}$ 中的这个幂零元。类似地，对于 $s=0$，我们使用记号 $f^{3C}_{S,M,r,0}$ 来表示子代数 $\mathfrak{sp}_{N_r,0}\subseteq\mathfrak{osp}_{s|N_r,0}$ 中对应于 $s>1$ 的这个幂零元。我们使用记号 $f^{2BD}_{S\,M,,r,0}$ 来表示 $\mathfrak{so}_{N_r,0}\subseteq\mathfrak{osp}_{N_r,0|2s}$ 中的这个幂零元。照例，通过取大水平极限并运用经典不变理论，可以验证以下顶点代数的生成类型均为 $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{S\,M,}$，因此应当作为单参数商出现：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{sp}_{N_{r,s}},f^{3C}_{S,M,r,s})),\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{N_{r,0}|2s},f^{2BD}_{S,M,r,0})),\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_{s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{so}_{N_{r,s}},f^{2BD}_{S,M,r,s}))^{\mathbb{Z}_2},\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_{s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{s|N_{r,0}},f^{3C}_{S,M,r,0}))^{\mathbb{Z}_2},\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{1|N_{r,s}},f^{3C}_{S,M,r,s}))^{\mathbb{Z}_2},\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{N_{r,0}+1|2s},f^{2BD}_{S,M,r,0}))^{\mathbb{Z}_2}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

注意，在（3.11）中，取第一族中的 $s=0$ 和第二族中的 $s=0$，即可恢复（3.9）。这些是 [37], 中为 $m\geq 1$ 和 $n\geq 1$定义的 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 的单参数商 $\mathcal{C}^{\psi}_{iX}(n,\ m)$ 的类似物。与 [37], 中一样，我们将（3.11）视为由 8 个族组成的列表，因为第三族和第四族中 s 为偶数或奇数的情形应加以区分。

在 $f^{3C}_{S\,M,\,r,\,s}$ 的情形中，令 $r=-1$，我们还可以得到一些族。这会将 n_i 替换为 n_i-2，因此由于 $n_t=3$，它又被替换为 1。具体如下：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{sp}_{N_{-1,s}},f^{3C}_{S,M,-1,s})),\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{1|N_{-1,s}},f^{3C}_{S,M,-1,s}))^{\mathbb{Z}_2},\\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_{s}),\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{s|N_{-1,0}},f^{3C}_{S,M,-1,0}))^{\mathbb{Z}_2}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

这些是 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 的单参数商 $\mathcal{C}^{\psi}_{1B}(n,\ 0)$、$\mathcal{C}^{\psi}_{1D}(n,\ 0)$、$\mathcal{C}^{\psi}_{1C}(n,\ 0)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{1O}(n,\ 0)$ 的类似物；它们是仿射顶点（超）代数的（$\mathbb{Z}_2$-轨形）仿射余集。我们将（3.12）视为由 4 个族组成的列表，因为第三族中 s 为偶数或奇数的情形应加以区分。

最后，在情形 $f^{2BD}_{S\,M}$ 下令 $r=-1$，我们得到一些族：$_{r,s}$。这会将 n_i 替换为 n_i-2，因此特别地，n_t 被替换为 0。这样便去掉了 n_t，所以我们将分拆 $P^{2BD}_{S\,M}$ 替换为分拆 $((n_0-2)^{m_0},(n_1-2)^{m_1},\dots,(n_{t-1}-2)^{m_{t-1}})$。注意，$m_t$ 必须是偶数，并且 $\mathcal{W}^{C,}_{\infty}{}_{S\,M}$ 有一个类型为 $\mathfrak{sp}_{m_t}$ 的仿射子顶点算子代数。我们用记号 $f^{2BD}_{S\,M,,-1,s}$ 表示 $\mathfrak{so}_{N_{-1,s}}$ 中的相应幂零元，并用记号 $f^{2BD}_{S\,M,,-1,0}$ 表示将此幂零元视为 $\mathfrak{osp}_{N_{-1,0}|2s}$ 或 $\mathfrak{osp}_{1+N_{-1},0|2s}$ 的李子代数时，它在 $\mathfrak{so}_{N_{-1},0}$ 中的表示。注意

(1) $\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{so}_{N_{-1},s},f^{2BD}_{S\,M,,-1,s})$、$\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{N_{-1},0|2s},f^{2BD}_{S\,M,,-1,0})$ 和 $\mathcal{W}^{k}(\mathfrak{osp}_{1+N_{-1},0|2s},f^{2BD}_{S\,M,,-1,0})$ 在某些移位层 k' 下具有类型为 $\mathfrak{so}_s$、$\mathfrak{sp}_{2s}$ 和 $\mathfrak{osp}_{1|2s}$ 的仿射子顶点算子代数；(2) $\beta\gamma$-系统 $\mathcal{S}(\frac{1}{2}m_ts)$ 具有 $V^{-m_t}(\mathfrak{so}_s)\otimes V^{-s/2}(\mathfrak{sp}_{m_t})$ 的作用；(3) 自由费米子代数 $\mathcal{F}(2m_ts)$ 具有 $V^{m_t/2}(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes V^{s}(\mathfrak{sp}_{m_t})$ 的作用；(4) 张量积 $\mathcal{F}(2m_ts)\otimes\mathcal{S}(m_t)$ 具有 $V^{m_t/2}(\mathfrak{osp}_{1|2s})\otimes V^{s-1/2}(\mathfrak{sp}_{m_t})$ 的作用。

以下对角余集很容易看出具有 $\mathcal{W}^{C}$、$_{\infty}$ $_{S\,M}$、的生成类型。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Com}(V^{k'-m_t}(\mathfrak{so}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{N-1,s},f^{2BD}_{S,M,-1,s})\otimes\mathcal{S}(\frac{1}{2}m_ts))^{\mathbb{Z}_2},\\&\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{sp}_{2s}),\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{N-1,0|2s},f^{2BD}_{S,M,-1,0})\otimes\mathcal{F}(2m_ts)),\\&\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1+N-1,0|2s},f^{2BD}_{S,M,-1,0})\otimes\mathcal{F}(2m_ts)\otimes\mathcal{S}(m_t))^{\mathbb{Z}_2}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

注意，对于所有 k，在上述余集中，类型为 $\mathfrak{sp}_{2m_t}$ 的仿射子顶点算子代数的层分别为 $-\frac{s}{2}$、 s、 $s-\frac{1}{2}$。这些是 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 的单参数商 $\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n,\ 0)$、 $\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n,\ 0)$、 $\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(n,\ 0)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{2O}(n,\ 0)$ 的类似物，这些单参数商定义于 [37]，中，我们将其视为 GKO 余集。我们将 (3.13) 视为 4 个族，因为第一族中的 s 为偶数或奇数的情形应加以区分。

例3.3。 考虑 $S=\emptyset$ 和 $M=\{2m\}$，于是 $P^{2BD}_{\emptyset,\ \{2m\}}=(2^{2m})$ 以及 $P^{3C}_{\emptyset,\ \{2m\}}=(3^{2m})$ 。我们称 $_{\mathcal{W}^{C,}}$ $_{\infty}$ $_{\emptyset\ \{2m\},}$ 为矩形型，并且它具有如下生成类型

$$\mathcal{W}(1^{2m^2+m},2^{2m^2-m},3^{2m^2+m},4^{2m^2-m},\dots),$$

其中仿射子顶点算子代数的类型为 $\mathfrak{sp}_{2m}$。每个奇数权 $d\geq 3$ 处的 $2m^2+m$ 场在 $\mathfrak{sp}_{2m}$下按伴随模变换，即对于 $\lambda=2\omega_1$，有 V_λ；而每个偶数权 $d\geq 2$ 处的 $2m^2-m$ 场则按平凡模与不可约模 V_λ 的直和变换，其中 $\lambda=\omega_2$。本例中的 *GKO* 余集(3.13) 为

$$\begin{aligned}&Com(V^{k-2m}(\mathfrak{so}_s),V^k(\mathfrak{so}_s)\otimes\mathcal{S}(\frac{1}{2}ms))^{\mathbb{Z}_2},\\&Com(V^{k+m}(\mathfrak{sp}_{2s}),V^k(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{F}(2ms)),\\&Com(V^{k+m}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),V^k(\mathfrak{osp}_{1|2s})\otimes\mathcal{F}(2ms)\otimes\mathcal{S}(m))^{\mathbb{Z}_2}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

如上所述，在上述余集中，仿射 $\mathfrak{sp}_{2m}$的层分别为 $=\frac{s}{2}$、 s、 $s-\frac{1}{2}$。

当 k 对 $\mathfrak{sp}_{2s}$可容许时，我们有单顶点代数的嵌入 $L_{k+m}(\mathfrak{sp}_{2s})\hookrightarrow L_k(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{F}(2ms)$，且余集

$$Com(L_{k+m}(\mathfrak{sp}_{2s}),L_k(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{F}(2ms)),\tag{3.15}$$

是强有理顶点代数 $Com(L_{k+i}(\mathfrak{sp}_{2s})\ L_{k+i-1}(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{F}(4s))$ 关于 $i=1$、.....、 $\frac{m}{2}$ [34]的张量积的一个扩张，因此是强有理的。我们预期(3.15) 在所有这些点上都是$_{\mathcal{W}^{C,}}$ $_{\infty}$ $_{\emptyset\ \{2m\},}$的简单商，因此 $\mathcal{W}^{C,}$ $_{\infty}$ $_{\emptyset\ \{2m\},}$有许多强有理商。在 $m=1$的情形下，其中 $\mathcal{W}^{C,}$ $_{\infty}$ $_{\emptyset\ \{2m\}}\cong\mathcal{W}^{\mathfrak{sp},}_{\infty}$，这一点已在 [34]中得到证明。

如图所示，在第娱乐网址 明了 [37, 推论 7。6], 余集(3.15) 满足以下层-秩对偶性:

$$Com(L_s(\mathfrak{sp}_{2k}),L_s(\mathfrak{sp}_{2(k+m)}))=Com(L_{k+m}(\mathfrak{sp}_{2s}),L_k(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{F}(2ms)).$$

左侧的这些余集出现在正交辛矩形型的高自旋*AdS/CFT*对偶中 [29]。

例 3.4。 考虑 $S=\{2\}$和 $M=\{4,6\}$，于是$P^{2BD}_{\{2\},\ \{4,6\}}=(4^4,2^6)$以及$P^{3C}_{\{2\},\ \{4,6\}}=(5^4,3^6)$。 $\mathcal{W}^{C,}$ $_{\infty}$ $^{\{2\}\ \{4,6\},}$ 的生成类型为

$$\mathcal{W}(1^{31},2^{45},3^{55},4^{45},5^{55},\dots),$$

其中仿射子顶点算子代数的类型为 $\mathfrak{sp}_4\oplus\mathfrak{sp}_6$。对于每个奇数 $d\geq 3$，权 d 上的55 个场在$\mathfrak{sp}_4\oplus\mathfrak{sp}_6$ 下按如下方式变换

$$V_{2\omega_1}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\otimes V_{2\omega_1}\oplus V_{\omega_1}\otimes V_{\omega_1}.$$

即 $\mathfrak{sp}_4$ 和 $\mathfrak{sp}_6$ 的伴随表示之和，以及标准模 $\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^6$ 的乘积。每个偶数权 $d\geq 2$ 中的 45 个场在 $\mathfrak{sp}_4\oplus\mathfrak{sp}_6$ 下变换为

$$\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}\oplus V_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\otimes V_{\omega_2}\oplus V_{\omega_1}\otimes V_{\omega_1}.$$

将 r 替换为 -2 所得到的分拆正是 (2^4)。因此，本例中的 *GKO* 余集 (3.13) 为

$$
\begin{aligned}
&Com(V^{k'-6}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{8+s}, f_{2^4}) \otimes \mathcal{S}(3s))^{\mathbb{Z}_2}, \qquad k' = k+4, \\
&Com(V^{k'+3}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{8|2s}, f_{2^4}) \otimes \mathcal{F}(12s)), \qquad k' = -\frac{k}{2} - 2, \\
&Com(V^{k'+3}(\mathfrak{osp}_{1|2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{9|2s}, f_{2^4}) \otimes \mathcal{F}(12s) \otimes \mathcal{S}(6))^{\mathbb{Z}_2}, \qquad k' = -\frac{k}{2} - 2.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

在上述余集中，仿射 $\mathfrak{sp}_6$ 的层分别为 $-\frac{s}{2}$、s、$s-\frac{1}{2}$。

3.4. 生成类型为 $\mathcal{W}^{BD}$、∞ $_{S\,M}$的顶点算子代数族。这里我们给出一个类似的顶点代数列表，并预期它们可作为 $\mathcal{W}^{BD}$、∞ $_{S\,M}$的单参数商出现。我们使用记号f^{2C}_{S}、$_{M}$、$_{r}$、$_{s}$、f^{2C}_{S}、$_{M}$、$_{r}$、0以及$f^{3BD}_{S\,M}$、$_{r}$、0，分别表示这些幂零元在$\mathfrak{osp}_{1|N_r}$、$_{s}$、$\mathfrak{osp}_{s|N_r}$、0和$\mathfrak{osp}_{N_r}$、$_{0|2s}$ 中的像。下列顶点代数具有这种生成类型，并且是 [37], 中代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{iX}$ (n、m)针对 n、$m \geq 1$的类似物：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{sp}_{N_{r,s}}, f^{2C}_{S,M,r,s})), \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{N_{r,0}|2s}, f^{3BD}_{S,M,r,0})), \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{N_{r,s}}, f^{3BD}_{S,M,r,s}))^{\mathbb{Z}_2}, \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{s|N_{r,0}}, f^{2C}_{S,M,r,0}))^{\mathbb{Z}_2}, \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|N_{r,s}}, f^{2C}_{S,M,r,s}))^{\mathbb{Z}_2}, \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1+N_{r,0}|2s}, f^{3BD}_{S,M,r,s}))^{\mathbb{Z}_2}.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

我们将（3.17）视为由8个族组成的列表，因为第三族和第四族中的 s 为偶数或奇数的情形应予以区分。

我们还可以通过在 $f^{3BD}_{S\,M}$、$_{r}$、$_{s}$ 的情形中令 $r=-1$，得到一些族：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{N_{r,s}}, f^{3BD}_{S,M,-1,s}))^{\mathbb{Z}_2}, \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{N_{r,0}|2s}, f^{3BD}_{S,M,-1,0})), \\
&\mathrm{Com}(V^{k'}(\mathfrak{osp}_{1|2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1+N_{r,0}|2s}, f^{3BD}_{S,M,-1,0}))^{\mathbb{Z}_2}.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

它们是 [37] 中代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{1B}$(n,0)、$\mathcal{C}^{\psi}_{1D}$(n,0)、$\mathcal{C}^{\psi}_{1C}$(n,0) 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{1O}$(n,0) 的类似物。我们将 (3.18) 视为 4 个族的列表，因为第一族中的 s 为偶数或奇数的情形应当加以区分。

我们还可以通过在 f^{2C}_{S}、$_{M}$、$_{r}$、$_{s}$的情形中令 $r=-1$，得到相应的族。这会将 n_i 替换为 n_i-2；由于 $n_t=2$，它被移除，并且我们将分拆 P^{2C}_{S}、$_{M}$ 替换为分拆 $((n_0-2)^{m_0}, (n_1-2)^{m_1}, \ldots, (n_{t-1}-2)^{m_{t-1}})$。注意，$\mathcal{W}^{BD}$、$\infty$ $_{S\,M}$ 具有 $\mathfrak{so}_{m_t}$型的仿射子顶点算子代数，而 m_t 可以是偶数或奇数。我们将 $\mathfrak{sp}_{N_{-1}}$、$_{s}$ $\subseteq \mathfrak{osp}_{1|N_{-1}}$、$_{s}$ 中相应的幂零元记为 f^{2C}_{S}、$_{M}$、-1，并将 $\mathfrak{sp}_{N_{-1}}$、$_{0}$ $\subseteq \mathfrak{osp}_{s|N_{-1}}$、0 中相应的幂零元记为 f^{2C}_{S}、$_{M}$、-1、0。如上所述，

(1) $\mathcal{W}^k$($\mathfrak{sp}_{N_{-1},s}$, f^{2C}_{S},$_{M,-1,s}$)、$\mathcal{W}^k$($\mathfrak{osp}_{1|N_{-1},s}$, f^{2C}_{S},$_{M,-1,s}$) 和 $\mathcal{W}^k$($\mathfrak{osp}_{s|N_{-1}}$,0, f^{2C}_{S},$_{M,-1}$,0) 含有类型为 $\mathfrak{sp}_{2s}$、$\mathfrak{osp}_{1|2s}$ 和 $\mathfrak{so}_s$ 的仿射子顶点算子代数，其移位层为某些 k'；(2) $\beta\gamma$-系统 $\mathcal{S}(sm_t)$ 上有 $V^{-m_t/2}(\mathfrak{sp}_{2s})$ $\otimes V^{-2s}(\mathfrak{so}_{m_t})$ 的作用；(3) 自由费米子代数 $\mathcal{F}(sm_t)$ 上有 $V^{m_t}(\mathfrak{so}_s) \otimes V^{s}(\mathfrak{so}_{m_t})$ 的作用；(4) 张量积 $\mathcal{S}(sm_t) \otimes \mathcal{F}(m_t)$ 上有 $V^{-m_t/2}(\mathfrak{osp}_{1|2s}) \otimes V^{-2s+1}(\mathfrak{so}_{m_t})$ 的作用。

以下对角余集具有生成类型 $\mathcal{W}^{BD}$,$_{\infty}$ $_{S\,M,}$：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(V^{k'-m_t/2}(\mathfrak{sp}_{2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{sp}_{N_{-1,s}}, f^{2C}_{S,M,-1,s}) \otimes \mathcal{S}(m_t s)), \\
&\mathrm{Com}(V^{k'-m_t/2}(\mathfrak{osp}_{1|2s}), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|N_{-1,s}}, f^{2C}_{S,M,-1,s}) \otimes \mathcal{S}(m_t s) \otimes \mathcal{F}(m_t))^{\mathbb{Z}_2}, \\
&\mathrm{Com}(V^{k'+m_t}(\mathfrak{so}_s), \mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{s|N_{-1,0}}, f^{2C}_{S,M,-1,0}) \otimes \mathcal{F}(m_t s))^{\mathbb{Z}_2}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

请注意，对于所有 k，上述余集中类型为 $\mathfrak{so}_{m_t}$ 的仿射子顶点算子代数的层分别为 $-2s$、$-2s+1$ 和 s。这些是 GKO 余集 $\mathcal{C}^{\psi}_{2B}$(n，0)、$\mathcal{C}^{\psi}_{2D}$(n，0)、$\mathcal{C}^{\psi}_{2C}$(n，0) 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{2O}$(n，0) 的类似物，其中

[37], 并且我们将 (3.19) 视为由 4 个族构成的列表，因为第三个族中 s 为偶数还是奇数的情况应当区分开来。

例3.5. 考虑 $S=\emptyset$和 $M=\{m\}$，于是 $P^{2C}_{\emptyset,\{m\}}=(2^m)$ 以及 $P^{3BD}_{\emptyset,\{m\}}=(3^m)$。如上所述，我们称$\mathcal{W}^{BD,\emptyset\{m\},}_{\infty}$ 为矩形型，其生成类型为

$$\mathcal{W}(1^{m(m-1)/2},2^{m(m+1)/2},3^{m(m-1)/2},4^{m(m+1)/2},\dots),$$

其中仿射子顶点算子代数的类型为 $\mathfrak{so}_m$。此外，每个奇数权 $d\geq 3$中的 $m(m-1)/2$ 场按伴随模变换，即对于 $\lambda=\omega_2$，有 V_λ；而每个偶数权 $d\geq 2$中的 $m(m+1)/2$ 场按平凡模与不可约模 V_λ 的直和变换，其中该模对应于 $\lambda=2\omega_1$。本例中的 *GKO* 余集 (3.19) 为

$$\begin{aligned}&Com(V^{k-m/2}(\mathfrak{sp}_{2s}),V^k(\mathfrak{sp}_{2s})\otimes\mathcal{S}(ms)),\\ &Com(V^{k-m/2}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),V^k(\mathfrak{osp}_{1|2s})\otimes\mathcal{S}(ms)\otimes\mathcal{F}(m))^{\mathbb{Z}_2},\\ &Com(V^{k+m}(\mathfrak{so}_s),V^k(\mathfrak{so}_s)\otimes\mathcal{F}(ms))^{\mathbb{Z}_2}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

如上 如上所述，仿射 $\mathfrak{so}_m$ 的层分别为 $-2s$、$-2s+1$ 和 s，在上述余集中 s.

当 k 对 $\mathfrak{so}_s$ 可容许时，我们有单顶点代数 $L_{k+m}(\mathfrak{so}_s)\hookrightarrow L_k(\mathfrak{so}_s)\otimes\mathcal{F}(sm)$的一个嵌入，而余集

$$Com(L_{k+m}(\mathfrak{so}_s),L_k(\mathfrak{so}_s)\otimes\mathcal{F}(sm)),\tag{3.21}$$

是顶点代数 $Com(L_{k+i}(\mathfrak{so}_s)\ L_{k+i-1}(\mathfrak{so}_s)\otimes\mathcal{F}(s))$ 在 $i=1,\dots,m$ 上的张量积的一个扩张。当 s 为偶数 [11], 时，这些代数是强有理的；我们推测，当 s 为奇数 [37, 猜想 7。1]时也是如此。这将推出 (3.21)及其 $\mathbb{Z}_2$-轨形是强有理的。同样，这意味着$\mathcal{W}^{BD,\emptyset\{m\},}_{\infty}$有许多强有理商。在 $m=2$ 的情形下，我们将在第 *10* 节证明，对大多数可容许层级此结论成立；见推论 *10.2*。

例3.6。 考虑 $S=\{3\}$ 和 $M=\{2,3\}$，于是有 $P^{2C}_{\{2\},\{2,3\}}=(5^2,2^3)$ 以及 $P^{3B}_{\{2\},\{2,3\}}=(6^2,3^3)$。 $\mathcal{W}^{BD,\{3\}\{2,3\},}_{\infty}$的生成类型为

$$\mathcal{W}\left(1^6,2^7,\left(\frac{5}{2}\right)^6,3^6,\left(\frac{7}{2}\right)^6,4^7,\left(\frac{9}{2}\right)^6,5^6,\dots\right),$$

其中仿射子顶点算子代数的类型为 $\mathfrak{sp}_2\oplus\mathfrak{so}_3$。每个奇数权 $d\geq 3$ 中的6 个场在$\mathfrak{sp}_2\oplus\mathfrak{so}_3$ 下变换为 $\mathfrak{sp}_2$ 和 $\mathfrak{so}_3$的伴随表示之和。每个偶数权 $d\geq 2$中的7 个场在 $\mathfrak{sp}_2$ 下平凡变换，在 $\mathfrak{so}_3$ 下变换为两个平凡模和一个5维模 $V_{2\omega_1}$的直和。对于 $d\geq 2$，每个权 $\frac{2d+1}{2}$ 中的6 个场变换为标准模 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^3$的乘积。

将 r 替换为 -2后得到的分拆正是(3^2)。因此，本例中的 *GKO* 余集(3.19) 为

$$\begin{aligned}&Com(V^{k'-3/2}(\mathfrak{sp}_{2s}),\mathcal{W}^k(\mathfrak{sp}_{6+2s},f_{3^2})\otimes\mathcal{S}(3s)),\qquad k'=k+2,\\ &Com(V^{k'-3/2}(\mathfrak{osp}_{1|2s}),\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|6+2s},f_{3^2})\otimes\mathcal{S}(3s)\otimes\mathcal{F}(3))^{\mathbb{Z}_2},\qquad k'=k+2,\\ &Com(V^{k'+3}(\mathfrak{so}_s),\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{s|6},f_{3^2})\otimes\mathcal{F}(3s))^{\mathbb{Z}_2},\qquad k'=-2k-4.\end{aligned}\tag{3.22}$$

在上述余集中，仿射 $\mathfrak{so}_3$ 的层分别为 $-2s$、$-2s+1$和 s。

3.5. 矩形族。我们预期，例 *3.1*、*3.3* 和 *3.5* 给出的矩形类型泛对象，将在 $\mathcal{W}^X$，$S\ M$ 对于 $X=A,C,BD$ 的结构中发挥特殊作用，因为它们应当构成另一组构件。更准确地说，我们预期 $\mathcal{W}^A$，$S\ M$ 是 $\mathcal{H}(t)\otimes\left(\bigotimes_{i=0}^{\infty}\mathcal{W}^{\emptyset,\{m_i\}}_{\infty}\right)$的共形扩张，其中 $\mathcal{H}(t)$ 是秩为 t 的海森堡代数。类似地，回想一下，$\mathcal{W}^C$，$S\ M$ 对应于分拆 $P^{3C,M}_S=(n_0^{m_0},n_1^{m_1},\dots,n_t^{m_t})$，其中 $n_t=3$。它应当是以下张量积的粘合：对每个奇数 n_i（使得 m_i 为偶数），取$\mathcal{W}^{C,\emptyset\{m_i\}}_{\infty}$；对每个偶数 n_i（使得 m_i可为偶数或奇数），取 $\mathcal{W}^{BD,\emptyset\{m_i\}}_{\infty}$。同样，$\mathcal{W}^{BD,}$ $S\ M$ 对应于分拆 $P^{3BD,M}_S=(n_0^{m_0},n_1^{m_1},\dots,n_t^{m_t})$，其中 $n_t=3$，它应当是以下张量积的粘合：对每个偶数 n_i（使得 m_i 为偶数），取 $\mathcal{W}^{C,\emptyset\{m_i\}}_{\infty}$；对每个奇数 n_i（使得 m_i 可为偶数或奇数），取 $\mathcal{W}^{BD,\emptyset\{m_i\}}_{\infty}$。如上所述，$\mathcal{W}^{C,\emptyset\{2\}}_{\infty}$ 这种情形，

恰好就是在 [34], 中构造的代数 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{sp}}$，并且它与 $\mathcal{W}_\infty$ 和 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 一样，被视为基本构件。本文的主要目标是构造第一个非平凡例子 $\mathcal{W}^{BD,\ \emptyset\{2\},}_{\infty}$，它并非基本构件，而是由两个 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 粘合而成。它具有类型为 $\mathfrak{so}_2$ 的仿射子顶点算子代数。为强调它与 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{sp}}$ 的相似之处，在本文余下部分我们将其记为 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$。在第 4 节中，我们将详细描述本例中单参数顶点代数族 (3.10)、(3.17) 和 (3.18) 的特化。我们称它们为 Y-型 $\mathfrak{so}_2$-矩形型代数，并采用记号 $\mathcal{C}_{XY}^{\psi}(n,\ m)$ 表示 $X=B,\ C$ 和 $Y=B,\ D,\ C,\ O$，以强调它们与 [34] 中 $\mathfrak{sp}_2$-矩形型 Y-代数的相似之处。同样，在第5节中，我们将描述 GKO 余集 (3.19) 的特化，并采用记号 $\mathcal{C}^{\ell}(n)$ 表示 $n\in\mathbb{Z}$，以统一的方式指称这些代数。

4. Y-ALGEBRAS OF $\mathfrak{so}_2$-ORTHOGONAL TYPE

本节将（3.17）给出的 8 个族具体化到 $\mathcal{W}^{BD,\ \emptyset\{2\},}_{\infty}:=\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的情形。首先，设 $\mathfrak{g}$ 是类型为 B、C 或 D 的单李（超）代数；特别地，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{so}_{2n+1}$、$\mathfrak{sp}_{2n}$、$\mathfrak{so}_{2n}$ 或 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$。我们进一步假设 $\mathfrak{g}$ 存在如下 $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$-模分解：

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}\cong&\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}\oplus\rho_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m+1}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}},\\ \mathfrak{g}\cong&\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}\oplus\rho_{2\omega_1}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}},\end{aligned}\tag{4.1}$$

其具有以下性质。

(1) $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李子（超）代数，且为 $\mathfrak{so}_{2n}$、$\mathfrak{so}_{2n+1}$、$\mathfrak{sp}_{2n}$ 或 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$。(2) $\rho_{\mathfrak{a}}$ 和 $\rho_{\mathfrak{b}}$ 具有相同的宇称，可以为偶或奇。(3) $\rho_{\mathfrak{a}}$ 按照 $\mathfrak{a}$ 的标准表示变换。

注意，若 $\mathfrak{a}=\mathfrak{osp}_{1|2n}$, $\rho_{\mathfrak{a}}$ 为偶，则作为向量超空间有 $\rho_{\mathfrak{a}}\cong\mathbb{C}^{2n|1}$；若 $\rho_{\mathfrak{a}}$ 为奇，则有 $\rho_{\mathfrak{a}}\cong\mathbb{C}^{1|2n}$。若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{m|2n}$，我们对其对偶考克斯特数 $h^\vee$ 采用以下约定。

$$h^\vee=\begin{cases}m-2n-2 & \text{type } B\\ n+1-\frac{1}{2}m & \text{type } C\end{cases},\quad \mathrm{sdim}(\mathfrak{osp}_{m|2n})=\frac{(m-2n)(m-2n-1)}{2}.\tag{4.2}$$

在此记号下，类型 B（分别为 C）表示子代数 $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}$ 属于类型 B（分别为 C），且 $\mathfrak{osp}_{m|2n}$ 上的双线性形式经过归一化，使其与 $\mathfrak{b}$ 上归一化的基灵形式一致。我们所需的情形列于表（1）中。

TABLE 1. $\mathcal{W}$ 型 $\mathfrak{so}_2$-矩形型代数。

情形	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\rho_{\mathfrak{a}}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{b}}$	a
BD	$\mathfrak{so}_{2(2m+1)+2n}$	$\mathfrak{so}_{2n}$	$\mathfrak{so}_{2m+1}$	Even	$\psi-2n$
BB	$\mathfrak{so}_{2(2m+1)+2n+1}$	$\mathfrak{so}_{2n+1}$	$\mathfrak{so}_{2m+1}$	Even	$\psi-2n-1$
BC	$\mathfrak{osp}_{2(2m+1)\|2n}$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{so}_{2m+1}$	Odd	$-\frac{1}{2}\psi-n$
BO	$\mathfrak{osp}_{2(2m+1)+1\|2n}$	$\mathfrak{osp}_{1\|2n}$	$\mathfrak{so}_{2m+1}$	Odd	$-\frac{1}{2}\psi-n+\frac{1}{2}$
CC	$\mathfrak{sp}_{2(2m)+2n}$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	$\mathfrak{sp}_{2m}$	Even	$\psi-n$
CD	$\mathfrak{osp}_{2n\|2(2m)}$	$\mathfrak{so}_{2n}$	$\mathfrak{sp}_{2m}$	Odd	$-2\psi-2n+4$
CB	$\mathfrak{osp}_{2n+1\|2(2m)}$	$\mathfrak{so}_{2n+1}$	$\mathfrak{sp}_{2m}$	Odd	$-2\psi-2n+3$
CO	$\mathfrak{osp}_{1\|2(2m)+2n}$	$\mathfrak{osp}_{1\|2n}$	$\mathfrak{sp}_{2m}$	Even	$\psi-n-\frac{3}{2}$

令 $f_{\mathfrak{b}}$ 为在 $\mathfrak{b}$ 中主幺、在 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$ 中平凡的幂零元。沿用先前的记号，在情形 $\mathfrak{b}=\mathfrak{so}_{2m+1}$ 下，$f_{\mathfrak{b}}$ 对应于分拆 $(2m+1,\ 2m+1)$；而在情形 $\mathfrak{b}=\mathfrak{sp}_{2m}$ 下，$f_{\mathfrak{b}}$ 对应于分拆 $(2m,\ 2m)$。令 ρ_d 表示 $\mathfrak{sl}_2$-三元组 $\{f_{\mathfrak{b}},x_{\mathfrak{b}},e_{\mathfrak{b}}\}$ 的 $(d+1)$ 维表示，并定义两个 $\mathfrak{sl}_2$-模

$$\mathrm{Even}(m)=\bigoplus_{i=1}^{m}\rho_{4i-2},\quad \mathrm{Odd}(m)=\bigoplus_{i=1}^{m}\rho_{4i}.\tag{4.3}$$

回顾分解 (4.1)。取 f 为 $\mathfrak{b}$ 中的主幺元，我们得到以下 $\mathfrak{sl}_2$-模的同构。

$$\rho^{\mathfrak{so}_{2n+1}}_{\omega_2}\cong\rho^{\mathfrak{sp}_{2n}}_{2\omega_1}\cong\mathrm{Even}(n),\quad \rho^{\mathfrak{so}_{2n+1}}_{2\omega_1}\cong\mathrm{Odd}(n),\quad \rho^{\mathfrak{sp}_{2n}}_{\omega_2}\cong\mathrm{Odd}(n-1).\tag{4.4}$$

为了计算 th　总中心荷需要计算表达式中每一项的贡献

$$c = c_{\mathfrak{g}} + c_{\text{dilaton}} + c_{\text{ghost}}.$$

在类型 B and C 中，膨胀子贡献分别化为奇数平方与偶数平方之和。

$$c_{\text{dilaton}} = -\ell \times \begin{cases} (m+2)(2m)(2m+1), & \mathfrak{b} = \mathfrak{so}_{2m+1}, \\ (2m-1)(2m)(2m+1), & \mathfrak{b} = \mathfrak{sp}_{2m}. \end{cases}$$

还需计算 c_{ghost} 的贡献。考虑分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_d \rho_d$ intro 不可约$\mathfrak{sl}_2$-模。于是每个 ρ_d 都会在 $\mathcal{W}^{\ell}(\mathfrak{g},\ f_{\mathfrak{b}})$ 中产生一个共形权为 $\frac{d+1}{2}$ 的场。

$$c_d = -\frac{(d-1)(d^2-2d-1)}{2}. \tag{4.5}$$

考察分解 (4.1)，可知带电费米子贡献由三项组成

$$c_{\text{ghost}} = c_{\text{odd}} + 3c_{\text{even}} + 2\text{sdim}(\rho_{\mathfrak{g}})c_{d_{\mathfrak{b}}}. \tag{4.6}$$

为计算 c_{Even} 和 c_{Odd} 的贡献，我们使用公式 (4.5) 和分解 (4.3) 来计算这些和

$$c_{\text{Even}} = \sum_{i=0}^{n} c_{4i+3} = 6m^2 - 8m^4, \quad c_{\text{Odd}} = \sum_{i=0}^{n} c_{4i+1} = -2m(m+1)(4m(m+1)-1).$$

第三项 (4.6) 通过应用公式 (4.5) 计算。

由上述讨论可知，$\mathcal{W}^{\ell}(\mathfrak{g},\ f_{\mathfrak{b}})$ 属于以下类型:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}\left(1^{1+\dim(\mathfrak{a})}, 2^3, 3, 4^3, \dots, 2m-1, (2m)^3, (m+\frac{1}{2})^{2\dim(\rho_{\mathfrak{a}})}\right), \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{sp}_{2m}, \\ &\mathcal{W}\left(1^{1+\dim(\mathfrak{a})}, 2^3, 3, 4^3, \dots, (2m)^3, 2m+1, (m+1)^{2\dim(\rho_{\mathfrak{a}})}\right), \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{so}_{2m+1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

仿射子代数为 $V^k(\mathfrak{so}_2) \otimes V^a(\mathfrak{a})$，其层为 a，记录于表（1）中。我们总是将ℓ 替换为临界平移层 $\psi = \ell + h^{\vee}_{\mathfrak{g}}$，其中 $h^{\vee}_{\mathfrak{g}}$是 $\mathfrak{g}$的对偶考克斯特数。现在我们将更详细地描述所需的例子。

4.1. BD情形。 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4m+2n+2}$，取 $m \geq 0$ 和 $n \geq 0$，我们有一个 $\mathfrak{so}_{2m+1} \oplus \mathfrak{so}_2 \oplus \mathfrak{so}_{2n}$-模的同构:

$$\mathfrak{so}_{4m+2n+2} \cong \mathfrak{so}_{2m+1} \oplus \mathfrak{so}_2 \oplus \mathfrak{so}_{2n} \oplus \rho_{2\omega_1} \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{2m+1} \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n},$$

临界平移层为 $\psi = \frac{k+4m+2n}{1+2m}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{BD}(n,m) := \mathcal{W}^{\frac{k+4m+2n}{1+2m} - h^{\vee}}(\mathfrak{so}_{4m+2n}, f_{\mathfrak{so}_{2m+1}}), \qquad h^{\vee} = 4m+2n$$

其仿射子代数为 $V^k(\mathfrak{so}_2) \otimes V^{\psi-2n}(\mathfrak{so}_{2n})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,m) := \text{Com}(V^{\psi-2n}(\mathfrak{so}_{2n}), \mathcal{W}^{\psi}_{BD}(n,m))^{\mathbb{Z}_2}.$$

共形元 $L - L^{\mathfrak{so}_2} - L^{\mathfrak{so}_{2n}}$ 的中心荷为

$$c_{BD} = -\frac{4(k-1)(km-2m-n)(km+k+n-1)}{(k+2n-2)(k+4m+2n)}. \tag{4.8}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{BD}(n,\ m)$ 的自由场极限为

$$\mathcal{O}_{\text{ev}}(2n^2-n, 2) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\text{ev}}(3,4i) \bigotimes \bigotimes_{i=1}^{m+1} \mathcal{O}_{\text{ev}}(1,4i-2)\right) \bigotimes \mathcal{O}_{\text{ev}}(4n, 2m+2).$$

引理 4.1。 对于 $n+m \geq 1$, $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}$（n,m）是一个单的、1 参数顶点代数，类型为 $\mathcal{W}$（1，2_3，3，4_3，.....）。

证明。由 [36, 引理 4。2]，$\mathcal{C}^{\psi}_{BD}$（n,m）具有大水平极限

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\text{ev}}(3,4i) \bigotimes \bigotimes_{i=1}^{m+1} \mathcal{O}_{\text{ev}}(1,4i-2)\right) \bigotimes \mathcal{O}_{\text{ev}}(4n, 2m+2)^{\text{O}_{2n}}.$$

第一个因子（$\bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\text{ev}}(3,\ 4i) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m+1} \mathcal{O}_{\text{ev}}(1,\ 4i-2)$）具有强生成类型 $\mathcal{W}(1,\ 2_3,\ 3,\ .....,\ (2m)^3,\ 2m+1)$。利用经典不变理论，可以看出第二个因子 $\mathcal{O}_{\text{ev}}(4n,\ 2m+2)^{\text{O}_{2n}}$ 具有一个无限的

强生成集，其类型为 $\mathcal{W}((2m+2)^3,\ 2m+3,\ (2m+4)^3,\ 2m+5,\ \ldots\ldots)$，其中只需要有限多个元素。因此，$\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,\ m)$具有所需的强生成类型。最后，简单性由 [36, 定理 3.6]推出。□

4.2. 情形 e BB。 对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{4m+2n+3}$，我们有 $\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n+1}$-模的一个同构 s

$$\mathfrak{so}_{4m+2n+3}\cong\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n+1}\oplus\rho_{2\omega_1}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m+1}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n+1},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m+2n+1}{2m+1}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{BB}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m+2n+1}{2m+1}-h^\vee}(\mathfrak{so}_{4m+2n+3},f_{\mathfrak{so}_{2m+1}}),\qquad h^\vee=4m+2n+1$$

其具有仿射子代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{\psi-2n-1}(\mathfrak{so}_{2n+1})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{\psi-2n-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}),\mathcal{W}^{\psi}_{BB}(n,m))^{\mathbb{Z}_2}.$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{so}_{2n+1}}$ 的中心荷为

$$c_{BB}=-\frac{(k-1)(2km-4m-2n-1)(2km+2k+2n-1)}{(k+2n-1)(k+4m+2n+1)}. \tag{4.9}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{BB}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{BB}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2n^2+n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m+1}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(4n+2,2m+2).$$

引理 4.2。 对于 $n+m\geq 1,\ \mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,\ m)$ 是一个 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ \ldots\ldots)$ 型的单参数顶点代数 .

4.3. BC 情形。 对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{4m+2|2n}$，我们有 $\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}$-模的一个同构

$$\mathfrak{osp}_{4m+2|2n}\cong\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}\oplus\rho_{2\omega_1}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m+1}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{0|2n},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m-2n}{2m+1}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{BC}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m-2n}{2m+1}-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{4m+2|2n},f_{\mathfrak{so}_{2m+1}}),\qquad h^\vee=4m-2n$$

其具有仿射子代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{-\frac{1}{2}\psi-n}(\mathfrak{sp}^-_{2n})$。接下来，我们定义其仿射余 et

$$\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{-\frac{1}{2}\psi-n}(\mathfrak{sp}_{2n}),\mathcal{W}^{\psi}_{BC}(n,m)).$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ 的中心荷为

$$c_{BC}=\frac{4(k-1)(km+k-n-1)(km-2m+n)}{(-k+2n+2)(k+4m-2n)}. \tag{4.10}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{BC}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{BC}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2n^2+n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m+1}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}(2n,2m+2).$$

引理 4.3。 对于 $n+m\geq 1,\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,m)$，这是一个 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ \ldots\ldots)$ 型的单参数顶点代数 .

4.4. BO 情形。 对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{4m+3|2n}$，我们有 $\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{osp}_{1|2n}$-模的一个同构

$$\mathfrak{osp}_{4m+3|2n}\cong\mathfrak{so}_{2m+1}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{osp}_{1|2n}\oplus\rho_{2\omega_1}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m+1}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{1|2n},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m+2n+1}{2m+1}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{BO}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m+2n+1}{2m+1}-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{4m+3|2n},f_{\mathfrak{so}_{2m+1}}),\qquad h^\vee=4m-2n+1$$

其具有仿射子代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{-\frac{1}{2}\psi-n+\frac{1}{2}}(\mathfrak{osp}_{1|2n})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{-\frac{1}{2}\psi-n+\frac{1}{2}}(\mathfrak{osp}_{1|2n}),\mathcal{W}^{\psi}_{BO}(n,m))^{\mathbb{Z}_2}.$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{osp}_{1|2n}}$ 的中心荷为

$$c_{BO}=\frac{(k-1)(2km+2k-2n-1)(2km-4m+2n-1)}{(-k+2n+1)(k+4m-2n+1)}. \tag{4.11}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{BO}(n,m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{BO}(n,m)$

$$\mathcal{O}_{\rm ev}(2n^2+n,2)\otimes\mathcal{O}_{\rm odd}(4n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\rm ev}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m+1}\mathcal{O}_{\rm ev}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{S}_{\rm ev}(1,2m+2)\otimes\mathcal{S}_{\rm odd}(2n,2m+2).$$

引理 4.4. 对于 $n+m\geq 1$, $\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,m)$，作为单参数顶点代数，其类型为 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ \ldots)$。等价地，对于 ψ 的一般值，此结论成立。

4.5. **CC 情形**。 对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{4m+2n}$，我们有一个 $\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}$-模的同构

$$\mathfrak{sp}_{4m+2n}\cong\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}\oplus\rho_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k-4m+2n}{4m}$。~~我们定义~~

$$\mathcal{W}^{\psi}_{CC}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k-4m+2n}{4m}-h^\vee}(\mathfrak{sp}_{4m+2n},f_{\mathfrak{sp}_{2m}}),\qquad h^\vee=2m+n+1,$$

其仿射子代数为 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{\psi-n}(\mathfrak{sp}_{2n})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{\psi-n}(\mathfrak{sp}_{2n},\mathcal{W}^{\psi}_{CC}(n,m)).$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{sp}_{2n}}$ 的中心荷为

$$c_{CC}=-\frac{(k-1)(2km-k-4m-2n)(2km+k+2n)}{(k+2n)(k+4m+2n)}.\tag{4.12}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{CC}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{CC}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\rm ev}(2n^2+n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\rm ev}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\rm ev}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{S}_{\rm ev}(2n,2m+1).$$

引理 4.5。 对于 $n+m\geq 1$, $\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(n,m)$ 是 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ \ldots)$ 类型的单参数顶点代数。等价地，对于 ψ 的一般值，该结论成立。

4.6. **CB 情形**。 对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{2n+1|4m}$，我们有 $\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n+1}$-模之间的同构

$$\mathfrak{osp}_{2n+1|4m}\cong\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n+1}\oplus\rho_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n+1},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m-2n-1}{4m}$。~~我们定义~~

$$\mathcal{W}^{\psi}_{CB}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m-2n-1}{4m}-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{2n+1|4m},f_{\mathfrak{sp}_{2m}}),\qquad h^\vee=2m-n+\frac{1}{2}$$

其具有仿射子代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{-2\psi-2n+3}(\mathfrak{so}_{2n+1})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{CB}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{-2\psi-2n+3}(\mathfrak{so}_{2n+1}),\mathcal{W}^{\psi}_{CB}(n,m))^{\mathbb{Z}_2}.$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{so}_{2n+1}}$ 的中心荷为

$$c_{CB}=\frac{(k-1)(2km+k-2n-1)(2km-k-4m+2n+1)}{(-k+2n+1)(k+4m-2n-1)}.\tag{4.13}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{CB}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{CB}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\rm ev}(2n^2+n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\rm ev}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\rm ev}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{O}_{\rm odd}(4n+2,2m+1).$$

引理 4.6。 对于 $n+m\geq 1$, $C^{\psi}_{CB}(n,m)$，是类型为 $\mathcal{W}(1、2_3、3、4_3、\ldots\ldots)$ 的 ***1*** 参数顶点代数 $ra.$

4.7. **CD 情形**。对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{2n|4m}$，我们有一个 $\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n}$-模的同构

$$\mathfrak{osp}_{2n|4m}\cong\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_{2n+1}\oplus\rho_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m-2n}{4m}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{CD}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m-2n}{4m}-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{2n|4m},f_{\mathfrak{sp}_{2m}}),\qquad h^\vee=2m-n+1,$$

其仿射子代数为 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{-2\psi-2n+4}(\mathfrak{so}_{2n})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{CD}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{-2\psi-2n+4}(\mathfrak{so}_{2n}),\mathcal{W}^{\psi}_{CD}(n,m)).$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{so}_{2n}}$ 的中心荷为

$$c_{CD}=\frac{(k-1)(2km+k-2n)(2km-k-4m+2n)}{(2n-k)(k+4m-2n)}. \tag{4.14}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{CD}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{CD}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2n^2-n,2)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(4n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(4n,2m+1).$$

引理 4.7。对于 $n+m\geq 1$, $\mathcal{C}^{\psi}_{CD}(n,m)$，作为一个 *1* 参数顶点代数，其类型为 $\mathcal{W}(1,\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ \ldots)$ *a.*

4.8. **CO 情形**。对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}_{1|4m+2n}$，我们有 $\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{osp}_{1|2n}$-模的一个同构

$$\mathfrak{osp}_{1|4m+2n}\cong\mathfrak{sp}_{2m}\oplus\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}\oplus\rho_{\omega_2}\otimes\mathbb{C}^3\otimes\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{2m}\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n|1},$$

以及临界平移层 $\psi=\frac{k+4m+2n-1}{4m}$。我们定义

$$\mathcal{W}^{\psi}_{CO}(n,m):=\mathcal{W}^{\frac{k+4m+2n-1}{4m}-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{1|4m+2n},f_{\mathfrak{sp}_{2m}}),\qquad h^\vee=2m+n+\frac{1}{2},$$

其仿射子代数为 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^{\psi-n-\frac{3}{2}}(\mathfrak{osp}_{1|2n})$。接下来，我们定义

$$\mathcal{C}^{\psi}_{CO}(n,m):=\mathrm{Com}(V^{\psi-n-\frac{3}{2}}(\mathfrak{osp}_{1|2n}),\mathcal{W}^{\psi}_{CO}(n,m))^{\mathbb{Z}_2}.$$

共形元 $L-L^{\mathfrak{so}_2}-L^{\mathfrak{osp}_{1|2n}}$ 的中心荷为

$$c_{CO}=-\frac{(k-1)(2km-k-4m-2n+1)(2km+k+2n-1)}{(k+2n-1)(k+4m+2n-1)}. \tag{4.15}$$

$\mathcal{W}^{\psi}_{CO}(n,\ m)$ 的自由场极限是自由场代数 $\mathcal{W}^{\infty}_{CO}(n,\ m)$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2n^2+n,2)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(4n,2)\otimes\left(\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(3,4i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{m}\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(1,4i-2)\right)\otimes\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(2n,2m+1)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(1,2m+1).$$

引理 4.8。对于 $n+m\geq 1$, $\mathcal{C}^{\psi}_{CO}(n,m)$，作为一个单参数顶点代数，其类型为 $\mathcal{W}(1,\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ldots)$ *a.*

定理与引理 4.7–4.4 的一个推论如下。

命题 4.1. 设 $X=B$ 或 C，且设 $Y=B,\ C,\ D,$ 或 O。

(1) $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 在 ψ 的一般值下是单的。(2) 对于 $\mathcal{W}^{\psi}_{CY}(n,m)$，不失一般性，我们可以将每个奇数权 1、3、.....、$2M-1$ 中的强生成场，以及每个偶数权 2、4、.....、$2M$ 中的三个强生成场，替换为余集 $\mathcal{C}^{\psi}_{CY}(n,m)$ 中权相同的元素。类似地，对于 $\mathcal{W}^{\psi}_{BY}(n,m)$，我们可以将每个奇数权 1、3、.....、$2M-1$ 中的强生成场，以及每个偶数权 2、4、.....、$2M+2$ 中的三个强生成场，替换为余集 $\mathcal{C}^{\psi}_{BY}(n,m)$ 中权相同的元素。

(3) 设 $U\cong\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}}$，其中 $\rho_{\mathfrak{a}}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的标准表示。它由 $P^{\frac{1}{2},j},P^{-\frac{1}{2},j}$ 张成，其中 j 遍历 $\rho_{\mathfrak{a}}$ 的一组基。于是 U 具有超对称双线性形式

$$\langle\ ,\ \rangle:U\to\mathbb{C},\quad\begin{cases}\langle a,b\rangle=a_{(2m)}b, & X=C,\\ \langle a,b\rangle=a_{(2m+1)}b & X=B.\end{cases}$$

该形式非退化，且与 $\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}}$上的标准配对一致。因此，不失一般性，我们可以将 U 中的场规范化为

$$P^{\mu,i}(z)P^{\nu,j}(w)\sim\begin{cases}\delta_{i,j}\delta_{\mu+\nu,0}\mathbf{1}(z-w)^{-2m-1}+\cdots, & X=C,\\ \delta_{i,j}\delta_{\mu+\nu,0}\mathbf{1}(z-w)^{-2m-2}+\cdots, & X=B.\end{cases}\tag{4.16}$$

这里，其余项属于 $V^a(\mathfrak{a})\otimes\mathcal{C}_{XY}(n,m)$。

5. GKO cosets

本节中，我们描述 GKO 余集 (3.19) 在 $\mathcal{W}^{BD,\emptyset\{2\},\infty}:=\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 情形下的特化。我们将用记号 $\mathcal{C}^\ell(n)$ 表示 $n\in\mathbb{Z}$，它们具有这样的性质：海森堡场（视为仿射 $\mathfrak{so}_2$的生成元）具有常数层 n。

5.1. B 类和 D 类。 考虑秩为 $2n$ 的自由费米子代数 $\mathcal{F}(2n)$，其基为 $\{\phi^{1,i},\phi^{2,i}|\ i=1,\dots,n\}$，OPE 关系为

$$\phi^{1,i}(z)\phi^{1,j}\sim\delta_{i,j}(z-w)^{-1},\qquad \phi^{2,i}(z)\phi^{2,j}\sim\delta_{i,j}(z-w)^{-1}.$$

我们有一个嵌入 $L_2(\mathfrak{so}_n)\hookrightarrow\mathcal{F}(2n)$，由 $\omega_{i,j}\mapsto:\phi^{1,i}\phi^{1,j}:+:\phi^{2,i}\phi^{2,j}:$给出，其中 $i\neq j$。$L_2(\mathfrak{so}_n)$ 在 $\mathcal{F}(2n)$ 中的交换子包含海森堡场 $H=\sqrt{-1}\sum_{i=1}^n:\phi^{1,i}\phi^{2,i}:$，它满足 $H(z)H(w)\sim n(z-w)^{-2}$。$\mathcal{F}(2n)$ 的权为 1/2 的空间在 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{so}_n$ 作用下按 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^n$ 变换。我们有对角嵌入 $V^\ell(\mathfrak{so}_n)\hookrightarrow V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_n)\otimes\mathcal{F}(2n)$，并定义

$$\mathcal{C}^\ell(n)=\mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{so}_n),V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_n)\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}.\tag{5.1}$$

$\mathcal{C}^\ell(n)$ 的海森堡余代数的中心荷为

$$c_n=\frac{(-2+\ell)(-1+n)(-4+\ell+2n)}{(-4+\ell+n)(-2+\ell+n)}.\tag{5.2}$$

$\mathcal{C}^\ell(n)$ 的自由场极限是不变代数 $\mathcal{F}(2n)^{\mathrm{O}_n}$。根据 O_n [78] 标准表示的 Weyl 第一基本定理，该代数具有由以下元素组成的强生成集

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n\big(:\partial^p\phi^{1,j}\partial^q\phi^{1,j}:\big),\qquad p>q\geq 0,\\ &\sum_{j=1}^n\big(:\partial^p\phi^{2,j}\partial^q\phi^{2,j}:\big),\qquad p>q\geq 0,\\ &\sum_{j=1}^n\big(:\partial^p\phi^{1,j}\partial^q\phi^{2,j}:\big),\qquad p\geq q\geq 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

去除上述生成元之间因微分关系导致的冗余后，我们看到 $\mathcal{F}(2n)^{\mathrm{SO}_n}$ 具有类型为 $\mathcal{W}(1,2_3,3,\dots\dots)$ 的强生成集。这对余集 (5.1) 一般成立，因此我们得到

引理 5.1。 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，$\mathcal{C}^\ell(n)$ 是一个单的、具有 $\mathcal{W}(1,2_3,3,4_3,\dots\dots)$ 类型的 1 参数顶点代数，其中包含一个标准归一化的海森堡场 H，其层为 n。

5.2. C 类。 考虑秩为 $2n$ $\beta\gamma$ 的系统 $\mathcal{S}(2n)$，其生成元为 $\{\beta^{i,j},\gamma^{i,j}|\ i=1,2,\ j=1,\dots,n\}$，OPE 关系为

$$\beta^{1,j}(z)\gamma^{1,k}(w)\sim\delta_{j,k}(z-w)^{-1},\qquad \beta^{2,j}(z)\gamma^{2,k}(w)\sim\delta_{j,k}(z-w)^{-1}.$$

我们有一个同态 $V^{-1}(\mathfrak{sp}_{2n})\to\mathcal{S}(2n)$，其生成元为

$$:\beta^{1,i}\beta^{1,j}:+:\beta^{2,i}\beta^{2,j}:,\qquad :\beta^{1,i}\gamma^{1,j}:+:\beta^{2,i}\gamma^{2,j}:,\qquad :\gamma^{1,i}\gamma^{1,j}:+:\gamma^{2,i}\gamma^{2,j}:.$$

$\mathcal{S}(2n)$ 中 $V^{-1}(\mathfrak{sp}_{2n})$ 的交换子包含海森堡场

$$H=\sqrt{-1}\big(\sum_{i=1}^n:\beta^{1,i}\gamma^{1,i}:+:\beta^{2,i}\gamma^{2,i}:\big)$$

满足 $H(z)H(w)\sim -2n(z-w)^{-2}$。$\mathcal{S}(2n)$ 的权 1_2 空间在 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{sp}_{2n}$ 下按 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n}$ 变换。我们有一个对角嵌入 $V^\ell(\mathfrak{sp}_{2n})\hookrightarrow V^{\ell+1}(\mathfrak{sp}_{2n})\otimes\mathcal{S}(2n)$，并定义

$$\mathcal{C}^\ell(-2n)=\mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{sp}_{2n}),V^{\ell+1}(\mathfrak{sp}_{2n})\otimes\mathcal{S}(2n)).\tag{5.4}$$

$\mathcal{C}^\ell(-2n)$ 的海森堡余代数的中心荷为

$$c_{-2n} = -\frac{(1+\ell)(1+2n)(2+\ell+2n)}{(1+\ell+n)(2+\ell+n)}. \tag{5.5}$$

$\mathcal{C}^\ell(-2n)$ 的自由场极限是不变代数 $\mathcal{S}(2n)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$。根据 Sp_{2n} [78] 标准表示的 Weyl 第一基本定理，它的强生成集由以下元素组成:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{1,j}\partial^q\gamma^{1,j}: - :\partial^q\beta^{1,j}\partial^p\gamma^{1,j}: \big), \qquad p>q\geq 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{2,j}\partial^q\gamma^{2,j}: - :\partial^q\beta^{2,j}\partial^p\gamma^{2,j}: \big), \qquad p>q\geq 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{1,j}\partial^q\gamma^{2,j}: - :\partial^q\beta^{2,j}\partial^p\gamma^{1,j}: \big), \qquad p\geq q\geq 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

消去上述生成元之间微分关系导致的冗余后，我们看到 $\mathcal{S}(2n)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$ 的强生成集类型为 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ \dots)$。这对余集 (5.4) 一般成立，因此我们得到

引理5.2。对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathcal{C}^\ell(-2n)$，这是一个单的、以 1 为参数的顶点代数，类型为 $\mathcal{W}(1,\ 2_3,\ 3,4_3,\dots)$，其中包含一个标准归一化的海森堡场 H，其层为 $-2n$。

5.3. **O情形**。使用上述记号，我们有一个同态 $V^{-1}(\mathfrak{osp}_{1|2n}) \to \mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2)$，其生成元为

$$\begin{aligned}
&:\beta^{1,i}\beta^{1,j}: + :\beta^{2,i}\beta^{2,j}:, \qquad :\beta^{1,i}\gamma^{1,j}: + :\beta^{2,i}\gamma^{2,j}:, \qquad :\gamma^{1,i}\gamma^{1,j}: + :\gamma^{2,i}\gamma^{2,j}:,\\
&:\phi^1\phi^2:, \qquad :\beta^{1,j}\phi^1: + :\beta^{2,j}\phi^2:, \qquad :\gamma^{1,j}\phi^1: + :\gamma^{2,j}\phi^2:.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$V^{-1}(\mathfrak{osp}_{1|2n})$ 在 $\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2)$ 中的交换子包含海森堡场

$$H = \sqrt{-1}\big(\sum_{j=1}^{n} \big(:\beta^{1,j}\gamma^{2,j}: - :\beta^{2,j}\gamma^{1,j}\big) - :\phi^1\phi^2:\big)$$

满足 $H(z)H(w)\sim(-2n+1)(z-w)^{-2}$。$\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2)$ 的权 $_1{}_2$ 空间在 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{osp}_{1|2n}$ 下按 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^{2n|1}$ 变换。我们有对角嵌入 $V^\ell(\mathfrak{osp}_{1|2n})\hookrightarrow V^{\ell+1}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\otimes\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2)$，并定义

$$\mathcal{C}^\ell(-2n+1) = \mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{osp}_{1|2n}), V^{\ell+1}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\otimes\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2))^{\mathbb{Z}_2}. \tag{5.8}$$

$\mathcal{C}^\ell(-2n+1)$ 的海森堡余代数的中心荷为

$$c_{-2n+1} = -\frac{8(1+\ell)n(1+\ell+2n)}{(1+2\ell+2n)(3+2\ell+2n)}. \tag{5.9}$$

$\mathcal{C}^\ell(-2n+1)$ 的自由场极限是不变代数 $(\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$。根据 Sergeev 关于正交辛超代数 $_{1|2n}$ [73, 74] 的标准表示的第一基本定理，它的强生成集由以下元素组成

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{1,j}\partial^q\gamma^{1,j}: - :\partial^q\beta^{1,j}\partial^p\gamma^{1,j}: \big) - :\partial^p\phi^1\partial^q\phi^1:, \qquad p>q\geq 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{2,j}\partial^q\gamma^{2,j}: - :\partial^q\beta^{2,j}\partial^p\gamma^{2,j}: \big) - :\partial^p\phi^2\partial^q\phi^2:, \qquad p>q\geq 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} \big(:\partial^p\beta^{1,j}\partial^q\gamma^{2,j}: - :\partial^q\beta^{2,j}\partial^p\gamma^{1,j}: \big) - :\partial^p\phi^1\partial^q\phi^2:, \qquad p\geq q\geq 0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

消除上述生成元之间微分关系导致的冗余后，我们看到 $(\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$ 具有类型为 $\mathcal{W}(\mathbf{1},\ 2_3,\ 3,\ \dots\ \dots)$ 的强生成集。对于余集 (5.8)，这一结论在一般情况下成立，因此我们得到

引理 5.3. 对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathcal{C}^{\ell}(-2n+1)$ 是一个单的、1 参数顶点代数，类型为 $\mathcal{W}(1,2_3,3,4_3,\dots)$，其中包含一个标准归一化的海森堡场 H，其层为 $-2n+1$。

6. Universal 2-parameter vertex algebra $\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}$

在本节中，我们将构造类型为 $\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}$的普适二参数顶点代数

$$\mathcal{W}(1,2^3,3,4^3,5,6^3,\dots). \tag{6.1}$$

权一场 H 生成一个海森堡代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)$ 的副本，

$$H(z)H(w) \sim k(z-w)^{-2}, \tag{6.2}$$

and 权二场 L 生成中心荷为 $c+$ 的普适 Virasoro 代数 1,

$$L(z)L(w) \sim \frac{c+1}{2}(z-w)^{-4} + 2L(w)(z-w)^{-2}(w) + \partial L(w)(z-w)^{-1}. \tag{6.3}$$

其余强生成元记为 $W^{n,\mu}$，其中 n 表示共形权， μ 表示海森堡荷。这些场被假定为海森堡子顶点算子代数的主场，并分别按平凡模和标准 $\mathfrak{so}_2$-模变换，

$$H(z)W^{n,\mu}(w) \sim \mu W^{n,\mu}(w)(z-w)^{-1}, \tag{6.4}$$

其中 $W^{3,0}$, $W^{4,0}, W^{4,\pm 2}$ 也都是维拉索罗子顶点算子代数的主场

$$L(z)W^{n,\mu}(w) \sim nW^{n,\mu}(w)(z-w)^{-2}(w) + \partial W^{n,\mu}(w)(z-w)^{-1}, \quad (n,\mu) = (3,0),(4,0),(4,\pm 2). \tag{6.5}$$

注意，在上述记号中，生成元 $W^{2,0}$ 是海森堡余中心维拉索罗场 $L - \frac{2}{k}{:}HH{:}$，其中心荷为 c。我们不假定所有场 $W^{n,\mu}$ 都是维拉索罗主场，而是假设代数 $\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}$由 $V^k(\mathfrak{so}_2)$、Vir^c 和 $W^{4,0}$ 弱生成；具体而言， W^4 满足以下弱生成性质

$$W^4_{(1)}W^{n,\mu} = W^{n+2,\mu}, \quad (n,\mu) = (2,\pm 2), \text{ and } n \geq 3. \tag{6.6}$$

其余算符乘积展开均取与共形分次和海森堡分次相容的最一般形式；也就是说，我们作如下拟设，

$$W^{n,\mu}(z)W^{m,\nu}(w) \sim \sum_{r=0}^{n+m-1} \sum_{\Omega \in \mathrm{PBW}_r} w_{\Omega}^{W^{n,\mu},W^{m,\nu}} \Omega(w)(z-w)^{-n-m+r}, \tag{6.7}$$

其中 Ω 是由生成元及其导数组成的庞加莱-伯克霍夫-维特正规序单项式，共形权为$n+m-r-1$，海森堡荷为 $\mu+\nu$。

$\mathrm{Vir}^c \otimes V^k(\mathfrak{sl}_2)$ 的存在具有一些有用的推论。回想一下， $V^k(\mathfrak{so}_2)$ 存在一个自同构 σ，它将 $H \mapsto -H$ 映为；根据弱生成假设 (6.6)，通过设定 $W^{3,\,0} \mapsto -W^{3,\,0}$ 和 $W^{2,\,\pm 2} \mapsto W^{2,\,\mp 2}$，它可延拓至 $\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}$，其形式为

$$\sigma : W^{n,\mu} \mapsto (-1)^n W^{n,-\mu}. \tag{6.8}$$

特别地，(6.7) 中出现的结构常数满足

$$w_{\Omega}^{W^{n,\mu},W^{m,\nu}} = (-1)^{n+m} w_{\sigma(\Omega)}^{W^{n,-\mu},W^{m,-\nu}}. \tag{6.9}$$

此外，我们不妨对拟设 (6.7) 作进一步细化。用圆括号 $W^{(\Gamma,\gamma)}$ 表示 $V^k(\mathfrak{so}_2)$ 的 $\otimes\,\mathrm{Vir}^c$-主场 $W^{(\Gamma,\gamma)}$ 所张成的空间，其中这些场的共形权为 Γ，海森堡荷为 γ；也就是说，它们是满足以下算符乘积展开关系的某些庞加莱-伯克霍夫-维特单项式的线性组合

$$L(z)W^{(\Gamma,\gamma)} \sim \Gamma W^{(\Gamma,\gamma)}(w)(z-w)^{-2} + W^{(\Gamma,\gamma)}(w)(z-w)^{-1}, \quad H(z)W^{(\Gamma,\gamma)}(w) \sim \gamma W^{(\Gamma,\gamma)}(w)(z-w)^{-1}.$$

因此，我们有 $\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}$ 作为一个模的分解

$$\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2} \cong \bigoplus_{\Gamma,\gamma} W^{(\Gamma,\gamma)} = \mathbf{1} \oplus W^{(2,\pm 2)} \oplus W^{(3,0)} \oplus 2W^{(4,0)} \oplus W^{(4,\pm 2)} \oplus W^{(4,\pm 4)} \oplus 2W^{(5,0)} \oplus W^{(5,2)} \oplus \cdots.$$

较为启发式地，我们用圆括号括起一个 PBW 单项式，以表示对应主场向量的符号；该主场向量是对它的修正。例如，我们写作

$$(W^{4,0}) = W^{4,0}, \quad (:W^{2,2}W^{2,-2}:) =: W^{2,2}W^{2,-2}: + \cdots,$$

其中省略的项是一些涉及 H、L、W^2、$^{\pm 2}$ 以及 W^3、^{0} 的 PBW 单项式。算符乘积展开 W^n、$^\mu(z)W^m$、$^\nu(w)$ 所受的海森堡对称性和共形对称性约束，即施加雅可比恒等式$J(H,W^n,^\mu,W^m,^\nu)$ 和 $J(L,W^n,^\mu,W^m,^\nu)$，会在 (6.7) 中尚未确定的结构常数之间产生线性约束；这些约束取值于有理函数域 $\mathbb{C}(c,k)$

$$w_{\Lambda(W^{\Gamma,\gamma})}^{W^{n,\mu},W^{m,\nu}}=\beta_{\Gamma,\gamma}^{n,\mu;m,\nu}(\Lambda)w_{W^{\Gamma,\gamma}}^{W^{n,\mu},W^{m,\nu}}. \tag{6.10}$$

这里，场 $\Lambda(W^{(\Gamma,\gamma)})$ 是主场 $W_{(\Gamma,\gamma)}$ 的 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes\mathrm{Vir}^c$ 后裔，而 $\beta^{n,\mu;m,\nu}_{\Gamma,\gamma}(\Lambda)$ 是关于 c、k 的有理函数，并且是 $w^{a,\alpha;b,\beta}_{\xi}$ 的多项式，其中 $a+b\le n+m-1$，而 X 是一个 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes\mathrm{Vir}^c$-主场；根据定义，我们有 $\beta^{n,\mu;m,\nu}_{\Gamma,\gamma}(\mathbf{1})=1$。

对我们而言，重要的是，如果 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 的算符乘积展开代数中存在任何额外参数，它们必定来自结构常数 $w^{n,\mu;m,\nu}_{\Gamma,\gamma}$。因此，我们提取算符乘积展开中出现的主场的系数，即方程（6.10）中满足 $\Lambda=\mathbf{1}$ 的项，并采用简写

$$W^{n,\mu}\times W^{m,\nu}=\sum_{\Gamma,\gamma}w_{W^{\Gamma,\gamma}}^{W^{n,\mu},W^{m,\nu}}W^{(\Gamma,\gamma)}. \tag{6.11}$$

最后，我们将算符乘积展开 $W^n{}^,{}^\mu(z)W^m{}^,{}^\nu(w)$ 分为三类相互作用。

(1) 平凡与平凡。我们用 $D_r^n(1,1)$ 表示以下乘积集合

$$D_r^n(1,1)=\{H_{(r)}W^{n-1,0},W_{(r)}^{2,0}W^{n-2,0},W_{(r)}^{3,0}W^{n-3,0},\cdots\}.$$

(2) 平凡与标准。我们用 $D_r^n(1,S)$ 表示以下乘积集合

$$D_r^n(1,S)=\{W_{(r)}^{2,\pm2}W^{n-2,0},W_{(r)}^{4,\pm2}W^{n-4,0},W_{(r)}^{6,\pm2}W^{n-6,0},\cdots\}.$$

(3) 标准与标准。我们用 $D_r^{2n+2}(S,S)$ 表示以下乘积集合

$$D_r^{2n}(S,S)=\{W_{(r)}^{2,\pm2}W^{2n-2,\pm2},W_{(r)}^{2,\pm2}W^{2n-2,\mp2},W_{(r)}^{4,\pm2}W^{2n-2,\pm2},W_{(r)}^{4,\pm2}W^{2n-2,\mp2},\cdots\}$$

令 D_r^n 表示生成元之间总权重为 n 的所有 r^{th} 乘积的集合；具体而言

$$D_r^{2m}=D_r^{2m}(1,1)\cup D_r^{2m}(1,S)\cup D_r^{2m}(S,S),\quad D_r^{2m+1}=D_r^{2m+1}(1,S)\cup D_r^{2m+1}(1,1). \tag{6.12}$$

分别用 $D^n=\bigcup_{r\le n}D_r^n$ 和 $D_n=\bigcup_{m\le n}D^m$ 表示总权重为 n 且不超过 n 的场之间的算符乘积展开数据。最后，令 J^m 表示生成场 a，b，c 之间总权重恰为 m 的所有雅可比恒等式 $J_{r,s}(a,b,c)$，以及 $J_n=\bigcup_{m\le n}J^m$ 的集合。

6.1. 步骤1：基础计算。第一个并非直接由我们的假设推出的算符乘积展开为 $W^2{}^,{}^2(z)W^2{}^,{}^{-2}(w)$、$W^2{}^,{}^2(z)W^3{}^,{}^0(w)$ 和 $W^2{}^,{}^2(z)W^4{}^,{}^2(w)$；而 $W^2{}^,{}^{-2}(z)W^3{}^,{}^0(w)$ 和 $W^2{}^,{}^{-2}(z)W^4{}^,{}^{-2}(w)$ 则由自同构 (6.8) 确定。雅可比恒等式 $J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^{-2})$、$J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^2,W^3{}^,{}^0)$ 和 $J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^{-2},W^3{}^,{}^0)$ 将这些算符乘积展开中出现的所有结构常数表示为中心荷 c 和 $\mathfrak{so}_2$-层 k 的有理函数

$$\begin{aligned}
W^{2,2}\times W^{2,-2}=&\omega_{\mathbf{1}}^{W^{2,2},W^{2,-2}}\mathbf{1}+\omega_{W^{3,0}}^{W^{2,2},W^{2,-2}}W^{3,0},\quad \omega_{\mathbf{1}}^{W^{2,2},W^{2,-2}}=\frac{3ck^3\omega_2\omega_3}{8(k-1)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)},\\
W^{2,2}\times W^{3,0}=&\omega_{W^{2,2}}^{W^{2,2},W^{3,0}}W^{2,2}+\omega_{W^{4,2}}^{W^{2,2},W^{3,0}}W^{4,2},\\
W^{2,2}\times W^{4,2}=&\omega_{:W^{2,2}W^{2,2}:}^{W^{2,2},W^{4,2}}:W^{2,2}W^{2,2}:,\quad \omega_{:W^{2,2}W^{2,2}:}^{W^{2,2},W^{4,2}}=-\frac{6k\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\omega_2}{(k-1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_4},
\end{aligned}$$

其中我们选择 $\omega_{W^2}^{W^{2,2},W^{3,0}}=\omega_2$，$\omega_{W^3}^{W^{2,2},W^{2,-2}}=\omega_3$，$\omega_{W^4}^{W^{2,2},W^{3,0}}=\omega_4$ 作为缩放参数，因为条件 (6.4) 和 (6.5) 并未确定它们。

接下来，施加雅可比恒等式 $J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^2,W^4{}^,{}^0)$、$J(W^2{}^,{}^0,W^2{}^,{}^{-2},W^4{}^,{}^0)$、$J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^{-2},W^4{}^,{}^{-2})$ 和$J(W^2{}^,{}^2,W^2{}^,{}^2,W^4{}^,{}^{-2})$，即可确定算符乘积展开 $W^2{}^,{}^2(z)W^4{}^,{}^0(w)$、$W^3{}^,{}^0(z)W^3{}^,{}^0(w)$、$W^4{}^,{}^0(z)W^3{}^,{}^0(w)$，以及

$W^{2,2}(z)\ W^{4,-2}(w)$ 可由缩放参数 $\omega_2,\omega_3,\omega_4$ 和 c,k 唯一确定。具体而言，我们得到

$$
\begin{aligned}
W^{3,0}\times W^{3,0} =& w_{\mathbf{1}}^{W^{3,0},W^{3,0}}\mathbf{1}+w_{W^{4,0}}^{W^{3,0},W^{3,0}}W^{4,0}+w_{(:W^{2,2}W^{2,-2}:)}^{W^{3,0},W^{3,0}}(:W^{2,2}W^{2,-2}:),\\
W^{4,0}\times W^{3,0} =& w_{W^{3,0}}^{W^{4,0},W^{3,0}}W^{3,0}+W^{5,0}+w_{(:W^{2,2}W^{4,-2}:)}^{W^{4,0},W^{3,0}}(:W^{2,2}W^{4,-2}:),\\
W^{2,0}\times W^{5,0} =& w_{W^{3,0}}^{W^{2,0},W^{5,0}}W^{3,0}+5(W^{5,0}),\\
W^{4,0}\times W^{2,2} =& W^{4,2}+w_{:W^{2,2}W^{3,0}:}^{W^{2,2},W^{4,0}}(:W^{2,2}W^{3,0}:),\\
W^{2,2}\times W^{4,-2} =& w_{W^{3,0}}^{W^{2,2},W^{4,-2}}W^{3,0}+w_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}^{W^{2,2},W^{4,-2}}(:W^{2,2}W^{2,-2}:)+w_{W^{4,0}}^{W^{2,2},W^{4,-2}}W^{4,0}\\
&+w_{(W^{5,0})}^{W^{2,2},W^{4,-2}}(W^{5,0})+w_{(:\partial W^{2,2}W^{2,-2}:)}^{W^{2,2},W^{4,-2}}(:\partial W^{2,2}W^{2,-2}:).
\end{aligned}
$$

对于初级场

$$
\begin{aligned}
(W^{5,0}) =& W^{5,0}+\cdots, \quad (:W^{2,0}W^{3,0}:)=W^{2,2}W^{3,0}:+\cdots,\\
(:W^{2,2}W^{4,-2}:) =& :W^{2,2}W^{4,-2}:-:W^{2,-2}W^{4,2}:+\cdots,\\
(:\partial W^{2,2}W^{2,-2}:) =& :\partial W^{2,2}W^{2,-2}:-:W^{2,2}\partial W^{2,-2}:+\cdots,
\end{aligned}
$$

我们得到以下结构常数,

$$
\begin{aligned}
w_{\mathbf{1}}^{W^{3,0},W^{3,0}} =& \frac{3ck^3\omega_2^2}{8(k-1)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)},\\
w_{W^{4,0}}^{W^{3,0},W^{3,0}} =& \frac{12(k-3)k(k+2)(ck+c-2k+1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_2\omega_4}{(k-2)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)D(c,k)},\\
w_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}^{W^{3,0},W^{3,0}} =& \frac{6k^2\left(5c^2k+20c^2+16ck^2-54ck+148c-200k+200\right)\omega_2}{(k-1)D(c,k)\omega_3},\\
w_{W^{3,0}}^{W^{4,0},W^{3,0}} =& \frac{9k^2(ck-4c+4k-4)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\omega_2}{2(k-1)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_4},\\
w_{:W^{2,2}W^{4,-2}:}^{W^{4,0},W^{3,0}} =& \frac{2k\left(9c^2k^2+14c^2k-40c^2+12ck^3-65ck^2+214ck-240c-172k^2+468k-296\right)}{(k+2)(ck+c-2k+1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_3},\\
w_{W^{3,0}}^{W^{2,0},W^{5,0}} =& \frac{36k^2(ck-4c+4k-4)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\omega_2}{(k-1)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_4},\\
w_{W^{3,0}}^{W^{2,2},W^{4,-2}} =& -\frac{9k^2(ck-4c+4k-4)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\omega_2\omega_3}{2(k-1)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_4},\\
w_{W^{4,0}}^{W^{2,2},W^{4,-2}} =& \frac{12(k-3)k(k+2)(ck+c-2k+1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_2\omega_3}{(k-2)\left(ck+4c+3k^2-15k+12\right)D(c,k)},\\
w_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}^{W^{2,2},W^{4,-2}} =& \frac{6(5c+22)(k-8)k^2(ck-4c+4k-4)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\omega_2}{(k-1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)D(c,k)\omega_4},\\
w_{W^{5,0}}^{W^{2,2},W^{4,-2}} =& -\frac{4(k-3)(k+2)(ck+c-2k+1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_3}{kQ(c,k)},\\
w_{:\partial W^{2,2}W^{2,-2}:}^{W^{2,2},W^{4,-2}} =& \frac{6(k-8)k^2(ck-4c+4k-4)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)E(c,k)\omega_2}{(k-1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)D(c,k)Q(c,k)\omega_4},\\
w_{:W^{2,2}W^{3,0}:}^{W^{2,2},W^{4,0}} =& -\frac{(k-8)\left(ck+4c+8k^2-12k+4\right)\left(3ck^2-2ck-10k+12\right)}{(k-3)(k+2)(ck+c-2k+1)\left(5ck^2-4ck+44k^2-108k+64\right)\omega_4},
\end{aligned}
$$

以及 $D(c,\ k)$ $Q(c,\ k)$、 $E(c,\ k)$ 是多项式

$$
\begin{aligned}
D(c,k) =&5c^2k^3+30c^2k^2-160c^2+46ck^3-52ck^2+480ck-1024c-88k^3-264k^2+1600k-1248,\\
Q(c,k) =&25c^2k^4+28c^2k^3-196c^2k^2-144c^2k+640c^2+134ck^4+88ck^3-352ck^2-2864ck+4480c\\
&-440k^4+936k^3+2768k^2-8640k+5376,\\
E(c,k) =&25c^3k^4+60c^3k^3+130c^3k^2+20c^3k-1200c^3+110c^2k^4+454c^2k^3-518c^2k^2+7308c^2k\\
&-15680c^2-968ck^4+5764ck^3-20876ck^2+59168ck-61040c+5808k^3-48576k^2\\
&+106800k-64032.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

接下来，我们分析高权重场之间的算符乘积展开。遗憾的是，这里无法列出结构常数，因为它们过于复杂。我们可以采用类似的方法，并得到以下命题。

命题 6.1. D_9 中的所有算符乘积展开均可用中心荷 c 和 $\mathfrak{so}_2$-层 k，以及权为 *2*、*3* 和 *4* 的场的缩放参数 ω_2、ω_3、ω_4 表示。此外，此代数中的所有分母 D 均为线性因子 $(k-3)$、$(k-2)$、$(k-1)$、(k)、$(k+2)$ 的幂，并包含以下曲线集合

$$\{(ck+c-2k+1),\ (ck+4c+3k^2-15k+12),\ (5ck^2-4ck+44k^2-108k+64)\ D(c,\ k)\ Q(c,\ k)\ P(c,\ k)\ R(c,\ k)\},$$

此外，除了多项式 *(6.13)* 外，我们还有

$$
\begin{aligned}
P(c,k) =&35c^2k^4+68c^2k^3-316c^2k^2-464c^2k+1280c^2+226ck^4-200ck^3\\
&+816ck^2-6832ck+8576c-616k^4+760k^3+7024k^2-17536k+10368,\\
R(c,k) =&25c^2k^4+28c^2k^3-196c^2k^2-144c^2k+640c^2+134ck^4+88ck^3-352ck^2\\
&-2864ck+4480c-440k^4+936k^3+2768k^2-8640k+5376.
\end{aligned}
$$

˜6.2. **步骤 2：归纳**。我们首先引入经过修改的强生成元 $W^{n,\mu}$，它们是为归纳之需而调整的。在可能的情况下，我们用

$$X^{2n}=\tilde{W}^{2n,-2},\quad Y^{2n}=\tilde{W}^{2n,2},\quad H^{2n}=\tilde{W}^{2n,0},\quad W^{2n+1}=\tilde{W}^{2n+1,0},\tag{6.14}$$

以减轻语法负担。海森堡场 H、Virasoro 场 L、场 $W^{2,\pm2}$，以及 $W^{3,0}$ 保持不变，即我们有

$$W^{2,2}=X^2,\quad W^{2,-2}=Y^2,\quad W^{3,0}=W^3,$$

而场 $W^{4,0}$ 则经过修改

$$W^4=W^{4,0}+\frac{1}{k}:HW^3:-\frac{1-k\omega_{1,3}}{\omega_3}(:X^2Y^2:).\tag{6.15}$$

除重新缩放外， W^4 是对 $W^{4,0}$的唯一修正，使其海森堡荷为 0、是 L的主场，并满足 $W^4{}_{(1)}H=W^3$。此外，我们如下设定缩放常数。

$$
\begin{aligned}
\omega_2 =&-\frac{ck+c+12k^2-15k+3}{36k^2},\quad \omega_3=-3,\quad \omega_{1,3}=\frac{A(c,k)}{3k(2k-1)B(c,k)},\\
\omega_4 =&-\frac{6k(2k-1)B(c,k)}{(2k+1)(4k-3)(4ck+c-8k+1)\,(5ck^2-ck+44k^2-27k+4)},\\
A(c,k) =&60c^2k^4-12c^2k^3-19c^2k^2+11c^2k+168ck^4+376ck^3-380ck^2+69ck+6c\\
&-1056k^4+1112k^3-372k^2+16k+6,\\
B(c,k) =&10c^2k^3+15c^2k^2-5c^2+92ck^3-26ck^2+60ck-32c-176k^3-132k^2+200k-39.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

注 6.1。 ω_2 和 ω_3 的缩放条件 *(6.16)* 在某种程度上是任意的，而 ω_4 和$\omega_{1,3}$的缩放条件则是必要的。这样选择是为了使我们即将定义、并将在命题 *(6.2)* 中出现的某些结构常数，要么是非零有理常数，要么为零。

最后，我们假设升算子性质也适用于共形权更高的场

$$W^4_{(1)}\tilde{W}^{n,\mu}=\tilde{W}^{n+2,\mu},\quad n\geq 1.\tag{6.17}$$

我们继续使用（6.12）中定义的记号 $D_r^N(1,1)$ $D_r^N(1,S)$ $D_r^N(S,S)$ D_r^N, D_N，因为通过强生成元变换，这两组都包含相同的数据。现在，我们在以下一般拟设中，为归纳过程命名相关的结构常数

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{n,\mu}_{(0)}\tilde{W}^{m,\nu} =& w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-1,\mu+\nu}}\tilde{W}^{n+m-1,\mu+\nu} + w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\partial\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}\partial\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}\\ &+\sum w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{:\tilde{W}^{i,\alpha}\tilde{W}^{j,\beta}_{:}}:\tilde{W}^{i,\alpha}\tilde{W}^{j,\beta}_{:}: + W_0^{n,\mu;n,\nu},\\ \tilde{W}^{n,\mu}_{(1)}\tilde{W}^{m,\nu} =& w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu} + W_1^{n,\mu;n,\nu}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

我们接下来对这些算符乘积展开逐一进行组合分析。

- 平凡与平凡。 W^i 和 W^j 的一阶极点按照平凡的 $\mathfrak{so}_2$-模变换。当共形权的宇称相同时，我们有

$$\begin{aligned}W^i_{(0)}W^j =& w^{W^i,W^j}_{\partial W^{i+j-2}}\partial W^{i+j-2} + W_0^{i,j},\\ W^i_{(1)}W^j =& w^{W^i,W^j}_{W^{i+j-2}}W^{i+j-2} + W_1^{i,j}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

  当共形权的宇称不同时，我们有

$$\begin{aligned}W^{2i}_{(0)}W^{2j-1} =& w^{W^{2i},W^{2j-1}}_{\partial W^{2i+2j-3}}\partial W^{2i+2j-3} + w^{W^{2i},W^{2j-1}}_{:X^2Y^{2i+2j-4}_{:}}:X^2Y^{2i+2j-4}: + \cdots\\ &+ w^{W^{2i},W^{2j-1}}_{:Y^2X^{2i+2j-4}_{:}}:Y^2X^{2i+2j-4}: + W_0^{2i,2j-1},\\ W^{2i}_{(1)}W^{2j-1} =& w^{W^{2i},W^{2j-1}}_{W^{2i+2j-1}}W^{2i+2j-3} + W_1^{2i,2j-1}.\end{aligned}\tag{6.20}$$

  这里，在上述两种情形 (6.19) 和 (6.20) 中，表达式 $W^{i,\ r\ j}$是生成元 $W^{n,\ \mu}$ 关于 $n \le i+j-3$ 及其导数的某些正规序多项式。它们是 $\mathfrak{so}_2$-不变的，共形权为 $i+j-r-1$，并具有如下依赖关系。

$$\begin{aligned}W_-^{2i,2j} =& W_-^{2i,2j}(H, L, X^2, Y^2, \ldots, W^{2i+2j-4}, X^{2i+2j-4}, Y^{2i+2j-4}, W^{2i+2j-3}),\\ W_-^{2i,2j-1} =& W_-^{2i,2j-1}(H, L, X^2, Y^2, \ldots, W^{2i+2j-6}, X^{2i+2j-6}, Y^{2i+2j-6}, W^{2i+2j-5}, W^{2i+2j-4}).\end{aligned}\tag{6.21}$$

- 平凡与标准。 X^{2i} 和 W^{2j} 的一阶极点具有奇共形权 $2i+2j-1$，并按照标准 $\mathfrak{so}_2$-模变换。

$$\begin{aligned}W^{2i}_{(0)}X^{2j} =& w^{W^{2i},X^{2j}}_{\partial X^{2j+2i-2}}\partial X^{2j+2i-2} + w^{W^{2i},X^{2j}}_{:W^1X^{2i+2j-2}_{:}}:W^1X^{2i+2j-2}: + \cdots\\ &+ w^{W^{2i},X^{2j}}_{:X^2W^{2i+2j-3}_{:}}:X^2W^{2i+2j-3}: + \cdots + X_0^{2i,2j},\\ W^{2i}_{(1)}X^{2j} =& w^{W^{2i},X^{2j}}_{X^{2j+2i-2}}X^{2j+2i-2} + X_1^{2i,2j}.\end{aligned}\tag{6.22}$$

  如果共形权的宇称不相同，那么 X^{2i} 和 W^{2j-1} 的一阶极点具有偶共形权 $2i+2j-2$，同样按照标准 $\mathfrak{so}_2$-模变换。

$$W^{2i-1}_{(0)}X^{2j} = x_0^{2i-1,2j}X^{2j+2i-2} + X_0^{2i-1,2j}.\tag{6.23}$$

  在上述两种情形（6.22）和（6.23）中，表达式 $X^{i,_\ j}$ 都是由生成元 $W^{n,\mu}$ 及其导数构成的某个正则序˜多项式，适用于 $n \le i+j-4$。具体而言，我们有以下依赖关系。

$$\begin{aligned}X_-^{2i,2j} =& X_-^{2i,2j}(H, L, X^2, Y^2, \ldots, W^{2i+2j-5}, W^{2i+2j-4}, X^{2i+2j-4}, Y^{2i+2j-4}),\\ X_-^{2i-1,2j} =& X_-^{2i,2j-1}(H, L, X^2, Y^2, \ldots, W^{2i+2j-5}, X^{2i+2j-4}, Y^{2i+2j-4}).\end{aligned}\tag{6.24}$$

- 标准与标准。 X^{2i} 和 Y^{2j} 的一阶极点具有奇共形权 $2i+2j-1$，并按平凡的 $\mathfrak{so}_2$-模变换。

$$\begin{aligned}X^{2i}_{(0)}Y^{2j} =& w^{W^{2i},W^{2j}}_{W^{2i+2j-1}}W^{2i+2j-1} + w^{W^{2i},W^{2j}}_{\partial W^{2i+2j-2}}\partial W^{2i+2j-2} + M_0^{2i,2j},\\ X^{2i}_{(1)}Y^{2j} =& w^{W^{2i},W^{2j}}_{W^{2i+2j-2}}W^{2i+2j-2} + M_1^{2i,2j},\end{aligned}\tag{6.25}$$

其中，表达式 $M^{2i,\ _\ 2j}$是生成元 $\tilde{W}^{n,\ \mu}$关于 $n\ \leq 2i+2j-3$及其导数的某个正规序多项式。具体而言，我们有如下依赖关系。

$$M_{-}^{2i,2j}=M_{-}^{2i,2j}(H,L,X^2,Y^2,\ldots,W^{2i+2j-4},X^{2i+2j-4},Y^{2i+2j-4},W^{2i+2j-3}). \tag{6.26}$$

上述记号扩展了用于结构常数 (6.9) 的记号。具体而言，若以 W^{n}、$_{\mu;m}$、$_{\nu}(r)$ 表示如上在 W^{n}、$^{\mu}(z)W^{m}$、$^{\nu}(w)$ 中出现的正规排序微分多项式，则 O_2-对称性给出如下关系

$$W_r^{n,\mu;m,\nu}=(-1)^{n+m}W_r^{n,-\mu;m,-\nu},\quad r\leq n+m.$$

将双阶乘记为

$$a!!=\begin{cases}1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1) & a=2n-1,\\ 2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n) & a=2n.\end{cases}$$

命题 6.2。 记号沿用 *(6.19-6.25)* 中的约定。强生成元之间的一阶极点和二阶极点具有如下表达式。

(1) 平凡场与平凡场。

$$\begin{aligned}W_{(0)}^{i}W^{j}=&\frac{(i-1)i!!j!!}{8(i+j-2)(i+j-4)!!}\partial W^{i+j-2}+W_0^{i,j},\\ W_{(1)}^{i}W^{j}=&\frac{i!!j!!}{8(i+j-4)!!}W^{i+j-2}+W_1^{i,j},\quad i\geq 2.\end{aligned}$$

(2) 平凡场与标准场。

$$\begin{aligned}W_{(0)}^{2i-1}X^{2j}=&\frac{(2i-1)!!(2j)!!}{(2i+2j-2)!!}X^{2i+2j-2}+X_0^{2i-1,2j},\quad i\geq 2,\\ W_{(0)}^{2i}X^{2j}=&\frac{(2i-1)i!!(2j)!!}{8(2+2j-2)(2i+2j-4)!!}\partial X^{2i+2j-2}+X_0^{2i,2j},\\ W_{(1)}^{2i}X^{2j}=&\frac{(2i)!!(2j)!!}{8(2i+2j-4)!!}X^{2i+2j-2}+X_1^{2i,2j},\quad i\geq 2.\end{aligned}$$

(3) 标准场与标准场。

$$\begin{aligned}X_{(0)}^{2i}Y^{2j}=&\frac{9(2i)!!(2j)!!}{4(2i+2j-1)!!}W^{2j+2i-1}+\frac{2(2i-1)(2i)!!(2j)!!}{9(2i+2j-4)(2i+2j-4)!!}\partial W^{2i+2j-2}+M_0^{2i,2j},\\ X_{(1)}^{2i}Y^{2j}=&\frac{2(2i)!!(2j)!!}{9(2i+2j-4)!!}W^{2i+2j-2}+M_1^{2i,2j}.\end{aligned}$$

证明。 我们将对整数指标 N 进行归纳。基例可以取为命题 (6.1)。具体而言，这意味着 $D_0^7\cup D_1^7\cup D_0^8\cup D_1^8$ 中、新生成集内 (6.18) 所标出的结构常数具有所需的形式。归纳地，假设 (6.19-6.25) 中定义的所有结构常数，对于 $D_0^{2N+1}\cup D_1^{2N+1}\cup D_0^{2N+2}\cup D_1^{2N+2}$ 中的乘积，都具有命题 (6.2) 所述的形式。特别地，这意味着二次项的结构常数全部为零，即有如下结果。

$$\begin{aligned}w_{:HX^{2i+2j-2}:}^{W^{2i},X^{2j}}=&w_{:W^3X^{2i+2j-4}:}^{W^{2i},X^{2j}}=\cdots=w_{:X^2W^{2i+2j-3}:}^{W^{2i},X^{2j}}=0,\\ w_{:X^2Y^{2i+2j-4}:}^{W^{2i},W^{2j-1}}=&w_{:X^4Y^{2i+2j-6}:}^{W^{2i},W^{2j-1}}=\cdots=w_{:Y^2X^{2i+2j-4}:}^{W^{2i},W^{2j-1}}=0.\end{aligned} \tag{6.27}$$

首先，我们将证明 $w^{W^{2i+1}_{\ :\ X^{2j}:\ HX^{2i+2j}:}}$ $\cdots$，以及 $w^{W^{2i+2}_{\ :\ W^{2j-1}:\ Y^2X^{2i+2j-2}:}}$ $\cdots$，分别出现在 $D_0^{2N+3}(1,\ S)$ 和 $D_0^{2N+3}(1,\ 1)$ 中的二次项，均为零。

显然，乘积 $H_{(0)}W^{2N+2}$ 和 $L_{(0)}X^{2N}$ 中不会出现二次项。现在考虑雅可比恒等式$J_{0,\ 0}(W^{2l},\ X^{2i},\ Y^{2j})$ 和 $J_{0,\ 0}(W^{2l},\ W^{2i-1},\ X^{2j})$，其形式为

$$\begin{aligned}W_{(0)}^{2l}(X_{(0)}^{2i}Y^{2j})=&X_{(0)}^{2i}(W_{(0)}^{2l}Y^{2j})+(W_{(0)}^{2l}X^{2i})_{(0)}Y^{2j},\quad w_{W^{2i+2j-1}}^{X^{2i},Y^{2j}}\neq 0,\\ W_{(0)}^{2l}(W_{(0)}^{2i-1}X^{2j})=&W_{(0)}^{2i-1}(W_{(0)}^{2l}X^{2j})+(W_{(0)}^{2l}W^{2i-1})_{(0)}X^{2j},\quad w_{X^{2i+2j-2}}^{W^{2i-1},X^{2j}}\neq 0.\end{aligned} \tag{6.28}$$

根据归纳，只有 (6.23) 和 (6.25) 的左侧可能产生非零二次项；并且由 (6.28) 可知，乘积 $W_{(0)}^{2l}W^{2i+2j-1}$ 和 $W^{2l}{}_{(0)}X^{2i+2j-2}$ 中不会出现二次项。

现在，假设 D_0^{2N+3}(1,1) 和 $D_0^{2N+2}(1,S)$ 中都不会出现二次项，我们从恒等式 $J_{2,0}(W^{2l},\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu})$ 中提取场 $\tilde{W}^{2l+n+m-4,\mu+\nu}$ 的系数，得到一个关系

$$w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\partial\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}} w^{W^{2l},\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}_{\tilde{W}^{2l+n+m-4,\mu+\nu}} + \left(w^{W^{2l},\tilde{W}^{n,\mu}}_{\partial\tilde{W}^{2l+n-2,\mu}} - w^{W^{2l},\tilde{W}^{n,\mu}}_{\tilde{W}^{2l+n-2,\mu}}\right) w^{\tilde{W}^{2l+n-2,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{2l+n+m-4,\mu+\nu}} = 0. \tag{6.29}$$

首先，在(6.29)中设定 $l=1$，并回顾 Virasoro 作用意味着 $w^{L_{-1}W^{n,\mu}}_{\partial W^n} = 1$ 以及 $w^{L_{-1}W^{n,\mu}}_{\tilde{W}^n} = n$。因此我们得到以下关系。

$$w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\partial\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}} = \frac{n-1}{n+m-2} w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}. \tag{6.30}$$

接下来，在(6.29)中设定 $l=2$，并回顾升算子性质 $w^{W^4,\tilde{W}^{n,\mu}_{-1}\tilde{W}^{n,\mu}}_{\tilde{W}^{n+2}} = 1$。利用(6.30)，我们得到以下递推关系。

(6.31)

$$w^{\tilde{W}^{n+2,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m,\mu+\nu}} = -\frac{(n-1)w^{W^4,\tilde{W}^{n+m-2,\mu}}_{\tilde{W}^{n+m,\mu}}}{(n+m-2)(\frac{3}{n+2}w^{W^4,\tilde{W}^{n,\mu}}_{\tilde{W}^{n+2,\mu}} - w^{W^4,\tilde{W}^{n,\mu}}_{\tilde{W}^{n+2,\mu}})} w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}} = \frac{n+2}{n+m-2} w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}.$$

利用斜对称性，我们交换指标 n 和 m，得到

$$w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m+2,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m,\mu+\nu}} = \frac{m+2}{n+m-2} w^{\tilde{W}^{n,\mu},\tilde{W}^{m,\nu}}_{\tilde{W}^{n+m-2,\mu+\nu}}.$$

这证明了 $w^{W^n,\tilde{W}^{m,\nu}_{-1}\tilde{W}^{n,\mu}_{-1}\tilde{W}^{2i+2j-2}}_{\tilde{W}^{n+m,\mu+\nu}}$ 以及 $w^{W^n,\tilde{W}^{m,\nu}_{-1}\tilde{W}^{n,\mu}_{-1}\tilde{W}^{2i+2j-2}}_{\partial\tilde{W}^{n+m,\mu+\nu}}$ 的归纳假设。

最后，我们计算出现在一阶极点(6.23)和(6.25)中的剩余结构常数。提取恒等式 $J_{1,0}(W^4,\ X^{2i},\ Y^{2j})$ 和 $J_{0,1}(W^4,\ X^{2i},\ Y^{2j})$ 中由 $W^{2i+2j+1}$ 产生的系数，得到以下递归关系

$$w^{X^{2i},Y^{2j}}_{W^{2i+2j+1}} = \frac{2(i+1)}{2i+2j+1} w^{X^{2i},Y^{2j}}_{W^{2i+2j-1}}, \quad w^{X^{2i},Y^{2j+2}}_{W^{2i+2j+1}} = \frac{2(j+1)}{2i+2j+1} w^{X^{2i},Y^{2j}}_{W^{2i+2j-1}}.$$

类似地，我们提取恒等式 $J_{1,0}(W^4,W^{2i-1},X^{2j})$ 和 $J_{0,1}(W^4,W^{2i-1},X^{2j})$ 中出现的 $W^{2i+2j+1}$ 的系数，得到以下递归关系

$$w^{W^{2i+1},X^{2j}}_{X^{2i+2j}} = \frac{i+1}{i+j} w^{W^{2i-1},X^{2j}}_{X^{2i+2j-2}}, \quad w^{W^{2i-1},X^{2j+2}}_{X^{2i+2j}} = \frac{2j+1}{2i+2j} w^{W^{2i-1},X^{2j}}_{X^{2i+2j-2}}.$$

这就完成了归纳假设的证明。 □

6.3. 步骤 3：归纳。本小节的主要结果是定理 (6.1)。其证明采用归纳法，过程与 [65], [57], 和 [34] 类似。首先，回顾 (6.12) 中的记号，并通过如下设定对其加以扩充

$$D_n(1,1) = \bigcup_{r=1}^{n} D_r^n(1,1), \quad D_n(1,S) = \bigcup_{r=1}^{n} D_r^n(1,S), \quad D_n(S,S) = \bigcup_{r=1}^{n} D_r^n(S,S).$$

我们将命题 (6.1) 作为基例。所谓归纳数据，是指 $D_{2n}\cup D_{2n+1}$ 中算符乘积展开的集合，其中

$$D_{2n} = D_{2n}(S,S)\cup D_{2n}(1,S)\cup D_{2n}(1,1), \quad D_{2n+1} = D_{2n+1}(1,S)\cup D_{2n+1}(1,1),$$

并且它们完全用参数 c 和 k 表示。在这一阶段，$D^{2n+2}\cup D^{2n+3}$ 中的算符乘积展开尚未确定。我们将利用 $J^{2n+4}\cup J^{2n+5}$ 中雅可比恒等式的一个子集，将 $D^{2n+2}\cup D^{2n+3}$ 表示为归纳数据的形式。我们用 $A\equiv 0$ 表示 A 可由归纳数据 $D_{2n}\cup D_{2n+1}$ 计算得到。在引理 (6.1–6.4) 中，我们利用 W^4 的升算子性质来证明以下结论。

命题 6.3。

(1) $W^4(z)W^{2n-2}(w)$ 和 $W^3(z)W^{2n-1}(w)$ 连同归纳数据共同确定 $D^{2n+2}(1,1)$。*(2)* $W^4(z)W^{2n-1}(w)$ 连同归纳数据共同确定 $D^{2n+3}(1,1)$。*(3)* $X^2(z)W^{2n-1}(w)$ 连同归纳数据共同确定 $D^{2n+1}(1,S)$。*(4)* $W^4(z)X^{2n-2}(w)$ 连同归纳数据共同确定 $D^{2n+2}(1,S)$。*(5)* $X^2(z)Y^{2n-2}(w)$ 连同归纳数据共同确定 $D^{2n+2}(S,S)$。

概括而言，这是通过利用某些形如 $J(W^4,\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu})$ 和 $J(W^3,\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu})$ 的雅可比恒等式来证明的。首先，回顾一下 $H(z)W^{2n+2}(w)$ $L(z)W^{2n+1}(w)$ $\in D^{2n+3}(1,1)$、 $H(z)W^{2n+1}(w)$ $L(z)W^{2n}(w)$ $\in D^{2n+2}(1,1)$、 $\in D^{2n+3}(1,1)$。首先，我们说明对称代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes \mathrm{Vir}^c$ 的作用是如何确定的。

引理 6.1。 设 n 为正整数。则有如下结论。

(1) 算符乘积展开 $W^4(z)\tilde{W}^{n,\mu}(w)$ 和 $L(z)\tilde{W}^{n,\mu}(w)$ 一起确定 $L(z)\tilde{W}^{n+2,\mu}(w)$。

(2) 算符乘积展开 $W^3(z)\tilde{W}^{n,\mu}(w)$ 和 $H(z)\tilde{W}^{n,\mu}(w)$ 一起确定 $H(z)\tilde{W}^{n+2,\mu}(w)$。

证明。 雅可比恒等式 $J_{1,r}(W^4,H,\tilde{W}^{n,\mu})$ 导出如下关系

$$H_{(r)}\tilde{W}^{n+2,\mu}=W^4_{(1)}H_{(r)}\tilde{W}^{n,\mu}-rW^3_{(r)}\tilde{W}^{n,\mu}.$$

注意，将其限制到 $r=0$ 时，它还会重现仿射作用。类似地，雅可比恒等式 $J_{1,r}(W^4,L,\tilde{W}^{n,\mu})$ 导出一个关系

$$L_{(r)}\tilde{W}^{n+2,\mu}=W^4_{(1)}L_{(r)}\tilde{W}^{n,\mu}-(3r-1)W^4_{(r)}\tilde{W}^{n,\mu},$$

将其限制到 $r=1$ 和 $r=0$ 时，还会重现 Virasoro 作用。 □

现在我们说明如何确定 $D^{2n+2}\cup D^{2n+3}$ 中其余的算符乘积展开。

我们从一阶极点开始。在命题 (6.2) 中，我们已经确定了一些出现在一阶极点中的结构常数。因此，要确定一阶极点，只需分析式 (6.19、6.20)、(6.22、6.23) 和 (6.25) 中定义的正规序微分单项式 $W^{i,}{}_0{}^j$、$X^{i,}{}_0{}^j$ 和 $M^{i,}{}_0{}^j$。注意，根据命题 (6.2)，雅可比恒等式 $J_{1,\,0}(W^4,\ \tilde{W}^{i,\,\mu},\ \tilde{W}^{j,\,\nu})$ 中出现的 $\partial\tilde{W}^{i+j,\,\mu+\nu}$ 和 $\tilde{W}^{i+j+1,\,\mu+\nu}$ 的系数为零。

引理 6.2. 模去归纳数据后，以下结论成立。

(1) $W^4(0)X^{2n-2}$ 决定 $\{W^{2i+4}(0)\ X^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$。*(2)* $X^2_{(0)}Y^{2n}$、$W^4_{(0)}W^{2n-2}$ 和 $W^4(0)X^{2n-2}$ 决定 $\{X^{2i+2}(0)\ Y^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$。*(3)* $X^2_{(0)}X^{2n}$ 决定 $\{X^{2i+2}(0)\ X^{2n-2i}|i\geq 1\}$。*(4)* $W^3(0)X^{2n-1}$ 决定 $\{W^{2i+3}(0)\ X^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$。*(5)* $W^4(0)W^{2n-1}$ 决定 $\{W^{2i+4}(0)\ W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$。*(6)* $W^3(0)W^{2n-1}$ 和 $W^4(0)W^{2n-2}$ 决定 $\{W^{2i+3}(0)\ W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$。

证明。 考虑一般的雅可比恒等式 $J_{1,0}(W^4,\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu})$，其表达式为

$$\left(1-w^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}\right)W_0^{i+2,\mu;j,\nu}=w^{\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu}}_{\partial\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}}W_0^{4,0;i+j-2,\mu+\nu}-W_0^{i,\mu;j+2,\nu}+R_0^{i,\mu;j,\nu},\tag{6.32}$$

其中

$$R^{i,\mu;j,\nu}(0)=W^4_{(1)}W_0^{i,\mu;j,\nu}-W_0^{4,0;i,\mu}{}_{(1)}\tilde{W}^{j,\nu}.\tag{6.33}$$

注意，项 $R_{1,0}$ 由归纳数据已知，因此我们可以写成

$$W_0^{i+2,\mu;j,\nu}\equiv\frac{w^{\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu}}_{\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}}}{1-w^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}}W_0^{4,0;i+j-2,\mu+\nu}-\frac{1}{1-w^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}}W_0^{i,\mu;j+2,\nu}.\tag{6.34}$$

最后，我们迭代递归式 (6.34)，得到所需的关系。 □

接下来，我们考虑二阶极点。如前所述，根据命题 (6.2)，我们已经确定了二阶极点中出现的一些结构常数。因此，要确定一阶极点，只需分析正规序微分单项式 $W^{i,}{}_1{}^j$, $M^{i,}{}_1{}^j$ 和 $X^{i,}{}_1{}^j$。此外，根据命题 (6.2)，雅可比恒等式 $J_{1,1}(W^4,\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu})$ 中出现的 $\tilde{W}^{i+j,\mu+\nu}$ 的系数为零。

引理 6.3。 模去归纳数据后，以下结论成立。

(1) $W^6{}_{(1)}X^{2n-4}$ 确定 $\{W^{2i+6}{}_{(0)}\ X^{2n-2i-4}|i\geq 1\}$。(2) $X^2_{(1)}Y^{2n}$ 和 $W^4_{(0)}X^{2n-2}$ 确定 $\{X_1^{2i+2}{}_{()}\ Y^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$。(3) $X^2_{(1)}X^{2n}$ 确定 $\{X_1^{2i+2}{}_{()}\ X^{2n-2i}|i\geq 1\}$。(4) $W^3{}_{(1)}X^{2n-1}$ 确定 $\{W_1^{2i+3}{}_{()}\ X^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$。

(5) $W^4{}_{(1)}W^{2n-1}$ 确定 $\{W_1^{2i+4}{}_{()}\quad W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$。
(6) $W^3{}_{(1)}W^{2n-1}$ 确定 $\{W_1^{2i+3}{}_{()}\quad W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$。

证明。 考虑一般的雅可比恒等式 $J_{1,\ 1}(W^4,\ \tilde{W}^{i,\ \mu},\ \tilde{W}^{j,\ \nu})$，其形式为

$$\left(1-2w_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}^{\tilde{W}^4,\tilde{W}^{i,\mu}}\right)W_1^{i+2;\mu,j,\nu}=W_1^{i,\mu;j+2,\nu}+R_1^{i,\mu;j,\nu}, \tag{6.35}$$

其中

$$R_1^{i,\mu;j,\nu}=W_{(1)}^4W_1^{i,\mu;j,\nu}-W_0^{4,0;i,\mu}{}_{(2)}\tilde{W}^{j,\nu}.$$

注意，项 $R^{i,\ \mu;j,\ 1\quad\ \nu}$ 由归纳数据已知，因此我们可以写成

$$W_1^{i+2,\mu;j,\nu}\equiv\frac{1}{1-2w_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}}W_1^{i,\mu;j+2,\nu}. \tag{6.36}$$

对递归（6.34）进行迭代即可得到所需的线性关系。 □

最后，我们考虑高阶乘积。

引理 6.4。 设 $r>1$。模去归纳数据，以下结论成立。
(1) $W_{(r)}^4X^{2n-4}$ *determine* $\{W_{(0)}^{2i+6}X^{2n-2i-4}|i\geq 1\}$.
(2) $X_{(r)}^2Y^{2n}$ *and* $W_{(r)}^4W^{2n-2}$ *determine* $\{X_{(r)}^{2i+2}Y^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$.
(3) $X_{(r)}^2X^{2n}$ *determine* $\{X_{(r)}^{2i+2}X^{2n-2i}|i\geq 1\}$.
(4) $W_{(r)}^3X^{2n-1}$ *determine* $\{W_{(r)}^{2i+3}X^{2n-2i-2}|i\geq 1\}$.
(5) $W_{(r)}^4W^{2n-1}$ *determine* $\{W_{(r)}^{2i+4}W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$.
(6) $W_{(r)}^3W^{2n-1}$ *determine* $\{W_{(r)}^{2i+3}W^{2n-2i-1}|i\geq 1\}$.

证明。 考虑雅可比恒等式 $J_{r,\ 1}(W^4,\ \tilde{W}^{i,\ \mu},\ \tilde{W}^{j,\ \nu})$，其内容为

$$\left(r-(r+1)w_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}\right)\tilde{W}_{(r)}^{i+2,\mu}\tilde{W}^{j,\nu}=w_{\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}}^{\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu}}W_{(r)}^4\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}+R^{i,\mu;j,\nu}(r), \tag{6.37}$$

其中

$$R_r^{i,\mu;j,\nu}=W_{(r)}^4W_1^{i,\mu;j,\nu}-W_0^{4,0;i\mu}{}_{(r+1)}\tilde{W}^{j,\nu}-\sum_{j=2}^{r}\binom{r}{j}(W_{(j)}^4\tilde{W}^{i,\mu})_{(r+1-j)}\tilde{W}^{j,\nu}.$$

注意到项 $R^{i,\ \mu;j,\ \nu}(r)$ 已由归纳数据确定，因此我们可以写成

$$(\tilde{W}^{i+2,\mu})_{(r)}\tilde{W}^{j,\nu}\equiv\frac{w_{\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}}^{\tilde{W}^{i,\mu},\tilde{W}^{j,\nu}}}{r-(r+1)w_{\partial\tilde{W}^{i+2,\mu}}^{W^4,\tilde{W}^{i,\mu}}}W_{(r)}^4\tilde{W}^{i+j-2,\mu+\nu}. \tag{6.38}$$

对递归关系（6.38）进行迭代即可得到所需的线性关系。 □

从现在起，我们假设命题（6.3）的证明中所使用的雅可比恒等式均已施加。在接下来的一系列引理（6.5-6.7）中，我们列出一小组雅可比恒等式，以获得所需乘积之间的线性关系。这将我们的问题归结为求解一个线性方程组。

首先，一阶极点也被唯一确定。

引理 6.5。 D_0^{2n+3}和 D_0^{2n+2}中的一阶极点由D_1^{2n+3}和 D_1^{2n+2}的归纳数据唯一确定。具体而言，假设满足引理（*6.2*）中出现的关系，则有如下结论。
(1) 雅可比关系 $J_{1,\ 0}$（W^3、W^3、W^{2n-2}）和 $J_{0,\ 1}$（W^4、W^3、W^{2n-3}）用归纳数据表示 $W^3{}_{(0)}W^{2n-1}$，以及 $W_{(0)}^4W^{2n-2}$，而 $W^{3,\ 2n-1}_{\ 1}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W_0^{3,2n-1}\equiv\frac{2(n-1)}{n(2n+1)}\partial W_1^{3,2n-1}\ mod\ D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1),$$

$$W_0^{4,2n-2}\equiv\frac{(n-1)!}{n(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_{n-1}}\partial W_1^{3,2n-1}\ mod\ D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1).$$

(2)*Jacobi* 关系 $J_{0,\ 1}(W^4、\ W^6、\ W^{2n-5})$ 用归纳数据表示 $W^{4\ (0)}\ W^{2n-1}$ 和 $W^{6,\ }{}_1{}^{\ 2n-3}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W_0^{4,2n-1} \equiv \frac{5(2n-1)}{4(n+1)(2n+1)}\partial W_1^{6,2n-3}\ mod\ D^{2n+1}(1,1).$$

(3) 雅可比关系 $J_{0,\ 1}(W^4、\ W^6、\ X^{2n-6})$ 以及 $J_{0,\ 1}(W^4、\ X^2、\ W^{2n-3})$ 分别将 $W^{4}{}_{(0)}X^{2n-2}$和 $X^2_{(0)}W^{2n-1}$表示为归纳数据 $X^{6,\ }{}_1{}^{\ 2n-4}$ 和 $X^2_{(1)}W^{2n-1}$。具体而言，我们有以下关系。

$$X_0^{4,2n-2} \equiv \frac{5(n-1)}{2n(2n+1)}\partial X_1^{6,2n-4}\ mod\ D^{2n}(1,S),$$
$$X_0^{2,2n-1} \equiv -\frac{1}{2n}\partial(X^2_{(1)}W^{2n-1})\ mod\ D^{2n+1}(1,1).$$

(4) 雅可比关系 $J_{0,\ 1}(W^4、\ X^2、\ Y^{2n-2})$ 将 $X^2_{(0)}Y^{2n}$ 表示为归纳数据 $M^{2,\ }{}_1{}^{\ 2n}$、 $W^{4,\ }{}_0{}^{\ 2n-2}$和 $X^{4,\ }{}_0{}^{\ 2n-2}$。具体而言，我们有以下关系。

$$M_0^{2,2n} \equiv \frac{1}{6}nW_0^{4,2n-2} - \frac{1}{2n+1}\partial M_1^{2,2n} - \frac{2n}{3(2n+1)}X^2_{(1)}\sigma X_0^{4,2n-2}\ mod\ D^{2n}(1,1)\cup D^{2n}(S,S).$$

接下来，二阶极点也被唯一确定。

引理 6.6。 D_1^{2n+3}和 D_1^{2n+2}中的二阶极点由满足D_2^{2n+3}和 D_2^{2n+2}的归纳数据唯一确定。具体而言，假设引理（*6.3*）中出现的关系成立，我们有如下结论。

(1) 雅可比关系 $J_{0,\ 2}(W^3,W^3,W^{2n-2})$ 和 $J_{0,\ 2}(W^4,W^3,W^{2n-3})$ 分别用归纳数据表示 $W^3{}_{(1)}W^{2n-1}$ 和 $W^4_{(1)}W^{2n-2}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W_1^{3,2n-1} \equiv \frac{1}{4(n-1)}\partial(W^3_{(2)}W^{2n-1})\ mod\ D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1),$$
$$W_1^{6,2n-4} \equiv \frac{3}{2(n-1)}\partial(W^4_{(2)}W^{2n-2})\ mod\ D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1).$$

(2) 雅可比关系 $J_{0,\ 2}(W^4,W^6,W^{2n-5})$ 用归纳数据和 $W^6{}_{(2)}W^{2n-3}$表示 $W^4{}_{(1)}W^{2n-1}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W_1^{6,2n-3} \equiv -\frac{1}{2n-1}\partial(W^6_{(2)}W^{2n-3})\ mod\ D^{2n+1}(1,1).$$

(3) 雅可比关系 $J_{0,\ 2}(W^4,W^6,X^{2n-6})$ 和 $J_{0,\ 2}(W^4,X^2,W^{2n-3})$ 分别用归纳数据、 $W^6_{(2)}X^{2n-4}$ 和 $X^2_{(2)}W^{2n-1}$表示 $W^4{}_{(1)}X^{2n-2}$ 和 $X^2_{(1)}W^{2n-1}$。具体而言，我们有以下关系。

$$X_1^{6,2n-4} \equiv -\frac{1}{2(n-1)}\partial(W^6_{(2)}X^{2n-4})\ mod\ D^{2n}(1,S),$$
$$X^2_{(1)}W^{2n-1} \equiv \frac{1}{2n-3}\partial(X^2_{(2)}W^{2n-1})\ mod\ D^{2n+1}(1,S).$$

(4) *Jacobi* 关系 $J_{0,2}(W^4,X^2,Y^{2n-2})$ 将 $X^2_{(1)}Y^{2n}$ 表示为归纳数据 $X^2_{(2)}Y^{2n}$ 和 $X^{4,0}{}^{\ 2n-2}$。具体而言，我们有如下关系。

$$M_1^{2,2n} \equiv \frac{1}{2(n-1)}\partial(X^2_{(2)}Y^{2n}) + \frac{n}{3(n-1)}X^2_{(2)}\sigma X_0^{4,2n-2}\ mod\ D^{2n}(1,1)\cup D^{2n}(S,S).$$

最后，高阶极点也被唯一确定。

引理 6.7。 设 $r \geq 2$。 D_r^{2n+3}和 D_r^{2n+2}中的 r^{th} 阶极点由归纳数据以及 D_{r+1}^{2n+3} 和 D_{r+1}^{2n+2} 唯一确定。具体而言，假设引理 *(6.4)* 中出现的关系成立，则有以下结论。

(1) 雅可比关系 $J_{r,1}(W^3,W^3,W^{2n-2})$, $J_{0,r+1}(W^4,W^3,W^{2n-3})$ 和 $J_{0,r+1}(W^4,W^4,W^{2n-4})$ 将$W^3_{(r)}W^{2n-1}$ 和 $W^4_{(r)}W^{2n-2}$ 表示为归纳数据、 $W^3_{(r+1)}W^{2n-1}$ 和 $W^4_{(r+1)}W^{2n-2}$ 的形式。具体而言，有以下关系。

$$W^3_{(r)}W^{2n-1} \equiv \frac{(r-1)(2r-3)}{3(2r-3)(n-1)!}\frac{(r+1)(2n-2r+1)}{4(r+1)\binom{1}{2}_{n-1}}(n+r-2)\partial(W^3_{(r+1)}W^{2n-1}) \text{ 模 } D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1),$$

$$W^4_{(r)}W^{2n-2} \equiv \frac{}{}\text{ 模 } D^{2n+1}(1,1)\cup D^{2n}(1,1).$$

(2) *Jacobi* 关系 $J_{0,\ r+1}(W^4,W^6,W^{2n-5})$ 将 $W^4_{(r)}W^{2n-1}$ 表示为归纳数据和 $W^6_{(r+1)}W^{2n-3}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W^4_{(r)}W^{2n-1} \equiv -\frac{(r-1)(5r-3)}{4r(r+1)}\partial(W^6_{(r+1)}W^{2n-3}) \ mod\ D^{2n+1}(1,1).$$

(3) 雅可比关系 $J_{0,r+1}(W^4,W^6,X^{2n-6})$ 和 $J_{0,r+1}(W^4,X^2,W^{2n-3})$ 分别将 $W^6_{(r)}X^{2n-4}$ 和 $X^2_{(r)}W^{2n-1}$表示为归纳数据、 $W^4_{(r+1)}X^{2n-2}$ 和 $X^2_{(r+1)}W^{2n-1}$。具体而言，我们有以下关系。

$$W^4_{(r)}X^{2n-2} \equiv -\frac{r-1}{2(r+1)}\partial(W^6_{(r+1)}X^{2n-4}) \ mod\ D^{2n}(1,S),$$

$$X^2_{(r)}W^{2n-1} \equiv -\frac{1}{r+1}\partial(X^2_{(r+1)}W^{2n-1}) \ mod\ D^{2n+1}(1,S).$$

(4) 雅可比关系 $J_{1,r}(W^4,X^2,Y^{2n-2})$ 和 $J_{0,r+1}(W^4,X^4,Y^{2n-4})$ 将 $X^2_{(r)}Y^{2n}$ 表示为归纳数据、 $X^2_{(r+1)}Y^{2n}$ 和 $W^4_{(r)}W^{2n-2}$。具体而言，我们有以下关系。

$$X^2_{(r)}Y^{2n} \equiv \frac{(n-1)(3r-1)}{6(r-1)}W^4_{(r)}W^{2n-2} - \frac{3r-1}{4(r+1)}\partial(X^2_{(r+1)}Y^{2n}) \ mod\ D^{2n}(1,1)\cup D^{2n}(S,S).$$

因此，我们证明了以下结论。

定理 6.1. 存在一个非线性共形代数 $\mathcal{L}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$，定义在多项式环$D^{-1}\mathbb{C}[c,k]$的局部化上，其中 D 是命题 *6.1* 中定义的集合，并满足性质 *(6.2-6.6)*；其万有包络顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$具有以下性质。

(1) 它具有共形权分次

$$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty = \bigoplus_{N=0}^{\infty}\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty[N], \quad \mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty[0] = D^{-1}\mathbb{C}[c,k].$$

(2) 它由场 $\{X^{2i},Y^{2i}|i\geq 1\}\cup\{H,L,W^i|i\geq 3\}$ 强生成，并满足算符乘积展开关系 *ns* 以及命题 *6.1* 中的关系、 J_{11} 中的雅可比恒等式，以及引理 *6.2 -6.7* 中出现的雅可比恒等式。(3) 它是具有上述性质的顶点代数范畴中的唯一始对象。

6.4. 步骤 4：自由生成。 雅可比恒等式比引理 (6.2-6.7) 中施加的更多。因此，目前尚不清楚所有强生成元之间的雅可比恒等式是否都是 (2.1-2.4) 的推论；等价地说，也不清楚 $\mathcal{L}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$是否为非线性李共形代数 [39]，以及 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$是否自由生成。为证明这一点，我们将考虑 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 的某些简单商。设 $I\subseteq R\cong\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty[0]$ 为一个理想，并令 $I\cdot\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$表示由 I生成的顶点代数理想。商

$$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_\infty = \mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty/I\cdot\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty \tag{6.39}$$

具有强生成元 $\{X^{2i},Y^{2i}|i\geq 1\}\cup\{H,L,W^i|i\geq 3\}$，它们满足与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 中相应生成元相同的 OPE 关系，其中 R 中的所有结构常数均替换为它们在 R/I 中的像。

现在我们考虑 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}$的局部化，$_\infty{}^{I}$。设 $E\subseteq R/I$ 是一个乘法封闭集，并令 $S=E^{-1}(R/I)$ 表示 R/I 沿 S 的局部化。

因此我们得到 R/I-模的局部化

$$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S} = S\otimes_{R/I}\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_\infty,$$

这是一个定义在 S 上的顶点代数。

定理 6.2。设 R、I、E 和 S 如上所述，并设 $\mathcal{W}$ 是定义在 S 上的单顶点代数，具有以下性质。

(1) $\mathcal{W}$ 由仿射场 $\bar{H}^1$、中心荷为 c 的 *Virasoro* 场 $\bar{L}$ 以及权 *2* 的主场$\bar{X}^2,\bar{Y}^2$生成。(2) 对所有 $i \geq 2$，令 $\bar{W}^{n+2} = \bar{W}^4{}_{(1)}\bar{W}^n$，则对于 $n+m \leq 9$，$\bar{W}^n(z)\bar{W}^m(z)$ 的 *OPE* 关系与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 中的相同，只需将结构常数替换为它们在 S 中的像。

于是，$\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}{}_{,\infty}\, S^I$，关于其极大分次理想 $\mathcal{I}$的简单商。

证明与 $\mathcal{W}_\infty$、$\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{sp}}_\infty$ 的证明类似，此处略去。

6.4.1. $\mathcal{W}$-代数的 $\mathfrak{so}_2$-矩形型。本小节将证明，$\mathcal{W}$-代数 $\mathcal{C}^\psi_{CD} = \mathcal{W}^{\psi-2n-1}(\mathfrak{sp}_{4n}, f_{2n,2n})$ 和 $\mathcal{W}^\psi_{BD} = \mathcal{W}^{\psi-4n}(\mathfrak{so}_{4n+2}, f_{2n+1,2n+1})$ 都可作为 1-参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 的商导出。为此，需要证明它们具有弱生成性质，即它们由权 1 和权 2 的场生成。

定理 6.3。对于所有 $m \geq 2$，考虑以下 $\mathcal{W}$-代数：

(1) $\mathcal{C}^\psi_{CC}(0,\ m) = \mathcal{W}^{\psi-2m-2}(\mathfrak{sp}_{4m},\ f_{2m,\ 2m})$，

(2) $\mathcal{C}^\psi_{BD}(0,\ m) = \mathcal{W}^{\psi-4n}(\mathfrak{so}_{4n+2},\ f_{2n+1,\ 2n+1})$。

对于所有 $\psi \in \mathbb{C}$，这些代数都具有弱生成性质 $\mathcal{C}^\psi_{BD}(0,\ m) = \tilde{\mathcal{C}}^\psi_{BD}(0,\ m)$ 以及 $\mathcal{C}^\psi_{CC}(0,\ m) = \tilde{\mathcal{C}}^\psi_{CC}(0,\ m)$，但以下情况除外：

(1) 临界值 $\psi = 0$，(2) ψ 的取值中，$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 中任一结构常数的分母为零的取值（这是一个有限集）。

证明。我们只给出 $\mathcal{C}^\psi_{BD}(0,\ n)$ 的证明，因为 $\mathcal{C}^\psi_{CC}(0,\ n)$ 的证明相同。固定 n，并回顾一下，$\mathcal{W}^{\psi-4n}(\mathfrak{so}_{4n+2},\ f_{2n+1,\ 2n+1})$ 具有强生成类型

$$\mathcal{W}(1, 2^3, 3, 4^3, \dots, (2n-2)^3, 2n-1, (2n)^3, 2n+1). \tag{6.40}$$

强生成集与李代数 $\mathfrak{so}^f_{4n+2}$ 的一组基一一对应。设 $\{w^i | i \leq 2n+1\} \cup \{x^{2i}, y^{2i} | i \leq n\}$ 是 $\mathfrak{so}^f_{4n+2}$ 的一组基，且 $\{W(w^i) | i \leq 2n+1\} \cup \{W(x^{2i})\ W(y^{2i}) | i \leq n\}$ 是该 $\mathcal{W}$-代数的某组选定的强生成元，使得结构常数由 ψ 的多项式函数给出。这意味着对于所有 $j \leq n-1$，我们在 $\mathcal{W}$-代数中有以下关系

$$W(w^3)_{(0)}W(x^{2j}) = c_{3,2j}W(x^{2j+2}) + \cdots, \quad W(w^3)_{(0)}W(y^{2j}) = d_{3,2j}W(y^{2j+2}) + \cdots,$$

其中结构常数 $c_{3,\ 2j}$ 和 $d_{3,\ 2j}$ 非零，且由以下李代数关系给出

$$[w^3, x^{2j}] = c_{3,2j}x^{2j+2}, \qquad [w^3, y^{2j}] = d_{3,2j}y^{2j+2},$$

其余项则是强生成元 $\{W(w^i) | i \leq 2n\} \cup \{W(x^{2i})\ W(y^{2i}) | i < n\}$ 及其导数的正规序单项式。类似地，对于 $j \leq n$，我们有

$$W(x^2)_{(0)}W(y^{2j}) = e_{2,2j}W(w^{2j+1}) + \cdots, \quad [x^2, y^{2j}] = e_{2,2j}w^{2j+1}, \quad e_{2,2j} \neq 0.$$

利用非零李代数结构常数 $\{c_{3,2j}, d_{3,2j} | j \leq n-1\} \cup \{e_{2,2j} | j \leq n\}$ 和命题 6.2，我们将证明 $\mathcal{W}$-代数的弱生成性质。

顶点代数恒等式 (2.1-2.5) 与已知的强生成类型 (6.40) 表明，对于给定的层，海森堡生成元 $W(w^1) = H$ 有唯一的选择；生成元 $W(x^2)$ 和$W(y^2)$ 是荷为 2 的主场，而 -2 是权为二的维拉索罗主场。因此我们可以写成

$$H = W(w^1), \qquad L = W(w^2), \qquad X^2 = W(x^2), \qquad Y^2 = W(y^2).$$

根据我们对强生成元的选择，$\{W(w^i)\ W(x^{2j})\ W(y^{2j}) |\ i \geq 3,\ j \geq 2\}$ 之间任何不涉及 H, L, X^2, Y^2的算符乘积展开结构常数，都是 ψ的多项式。对于 $1 \leq i \leq 2n+1$ 和 $1 \leq j \leq n$，我们可以写成

$$W^i = \lambda_{w^i}W(w^i) + \dots, \quad X^{2j} = \lambda_{x^{2j}}W(x^{2j}) + \cdots, \quad Y^{2j} = \lambda_{y^{2j}}W(y^{2j}) + \cdots,$$

其中 λ_{w^i}、$\lambda_{x^{2j}}$、$\lambda_{y^{2j}}$ 是关于 ψ 的多项式，其余项则是关于先前生成元的正规序多项式。要证明该定理，只需证明在所定义的指标范围内，λ_{w^i}、$\lambda_{x^{2i}}$、$\lambda_{y^{2i}}$ 都是非零常数。

根据命题 6.2,

$$X_{(0)}^2Y^2=\frac{9}{4}\frac{2!!2!!}{3!!}W^3+\cdots=3W^3+\cdots,$$

而另一方面

$$X_{(0)}^2Y^2=W(x^2)_{(0)}W(y^2)=e_{2,2}W(w^3)+\cdots=\frac{e_{2,2}}{\lambda_{w^3}}W^3+\cdots.$$

因此 $\frac{e_{2,2}}{\lambda_{w^3}}=3$，所以 $\lambda_{w^3}=\frac{e_{2,2}}{3}$，这是一个非零常数。

接下来，根据命题 6.2，我们有

$$W_{(0)}^3Y^{2j}=\frac{3!!(2j)!!}{(2j+2)!!}Y^{2j+2}+\cdots,$$

而另一方面

$$W_{(0)}^3Y^{2j}=\lambda_{w^3}\lambda_{y^{2j}}W(w^3)_{(0)}W(y^{2j})+\cdots=\lambda_{w^3}\lambda_{y^{2j}}d_{3,2j}W(y^{2j+2})+\cdots=\frac{\lambda_{w^3}\lambda_{y^{2j}}d_{3,2j}}{\lambda_{w^{2j+2}}}Y^{2j+2}+\cdots.$$

我们得到

$$\frac{\lambda_{w^3}\lambda_{y^{2j}}d_{3,2j}}{\lambda_{y^{2j+2}}}=\frac{3!!(2j)!!}{(2j+2)!!}.$$

归纳地，我们得到，对于所有 $2\le j\le n$， $\lambda_{y^{2j}}$ 都是非零常数。类似的论证表明，对于所有 $2\le j\le n$， $\lambda_{x^{2j}}$ 都是非零常数。

接下来，由命题 6.2，对于 $j\ge 2$，我们有

$$X_{(0)}^2Y^{2j}=\frac{9}{4}\frac{2!!(2j)!!}{(2j+1)!!}W^{2j+1}+\cdots,$$

而另一方面

$$X_{(0)}^2Y^{2j}=\lambda_{y^{2j}}W(x^2)_{(0)}W(y^{2j})+\cdots=\lambda_{y^{2j}}e_{2,2j}W(w^{2j+1})+\cdots=\frac{\lambda_{y^{2j}}e_{2,2j}}{\lambda_{w^{2j+1}}}W^{2j+1}+\cdots.$$

我们得到

$$\frac{\lambda_{y^{2j}}e_{2,2j}}{\lambda_{w^{2j+1}}}=\frac{9}{4}\frac{2!!(2j)!!}{(2j+1)!!}.$$

归纳可得，对于所有 $1\le j\le n$， $\lambda_{w^{2j+1}}$ 都是非零常数。

剩下要证明的是，对于所有 $2\le j\le n$， $\lambda_{w^{2j}}$ 都是非零常数；为此，我们需要采用不同的论证。首先，我们注意到

$$W(w^3)_{(1)}W(w^{2j})=d_{2j}W(w^{2j+1})+\cdots,$$

对于某个结构常数 d_{2j}，它先验地是关于 ψ 的多项式。于是我们有

$$W_{(1)}^3W^{2j}=\frac{3!!(2j)!!}{8(2j-1)!!}W^{2j+1}+\cdots=\frac{\lambda_{w^3}\lambda_{w^{2j}}d_{2j}}{\lambda_{w^{2j+1}}}W^{2j+1}+\cdots,$$

从而

$$\frac{\lambda_{w^3}\lambda_{w^{2j}}d_{2j}}{\lambda_{w^{2j+1}}}=\frac{3!!(2j)!!}{8(2j-1)!!}.$$

特别地， $\lambda_{w^{2j}}d_{2j}$ 是一个非零常数，并且由于 $\lambda_{w^{2j}}$ 和 d_{2j} 都是关于 ψ的多项式，因此它们都必须是非零常数。□

推论 6.1。生成元 $\{\tilde{W}^{i,\mu}|i\ge 1\}$ 之间的所有雅可比恒等式都仅由（*2.1-2.4*）推出，因此 $\mathcal{L}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$是一个以 $\{W^i|i\ge 1\}$为生成元的非线性李共形代数。等价地， $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$由偶场 $\{X^{2i},Y^{2i}|i\ge 1\}\cup\{H,L,W^i|i\ge 3\}$自由生成，并且具有分次特征

$$\chi(\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2},q)=\sum_{n=0}^\infty rank_R(\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}[n])q^n=\prod_{i,j,l=1}^\infty\frac{1}{(1-q^{2i+2j+1})(1-q^{2i+2l+2})^3}. \tag{6.41}$$

对于任意素理想 $I\subseteq R$, $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,\ \infty\ I}$作为顶点代数由 $\{W^i|i\ge 1\}$ 自由生成于 R/I 上，并且

$$\chi(\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2,I},q)=\sum_{n=0}^\infty rank_{R/I}(\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2,I}[n])q^n=\prod_{i,j,l=1}^\infty\frac{1}{(1-q^{2i+2j+1})(1-q^{2i+2l+2})^3}.$$

对于沿乘法封闭集 $E \subseteq R/I$进行的任意局部化 $S = (E^{-1}R)/I$， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}$，由 $\{W^i | i \geq 1\}$ 自由生成，并且

$$\chi(\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}, q) = \sum_{n=0}^{\infty} rank_S(\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}[n])q^n = \prod_{i,j,l=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2i+2j+1})(1-q^{2i+2l+2})^3}.$$

推论 6.2。顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$是单的。

证明。若 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$不是单的，则它会在某个权 N上有一个奇异向量 ω。设 $p \in R$ 为一个不可约多项式，I 为理想 $(p) \subseteq R$。必要时重新缩放后，我们可以假设 ω 不能被 p整除，因此它在 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$中给出一个非平凡的奇异向量。对于 R/I的任意局部化 S， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}$的简单商将有一个权 N 子模，其权小于 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}$，对所有这样的 I均如此。这与定理 6.3 矛盾，因为 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(0,m)$ 是某个 I 和 S对应的 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty,S}$的商，并且其特征与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$相同，直到权 $2m$为止。□

接下来，我们描述 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的自同构。

命题 6.4. 顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的自同构群为整个 $O_2(\mathbb{C})$。

证明。设 g 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的任意一个自同构，且不属于自同构的 SO_2-子群，因此它固定海森堡生成元 H。根据定义， g 保持 Virasoro 生成元 L不变。于是，与算符乘积展开相容的权 2 场 X^2 和 Y^2 的最一般变形

$$H(z)X^2(w) \sim X^2(w)(z-w)^{-1}, \quad H(z)Y^2(w) \sim -Y^2(w)(z-w)^{-1}, \quad X^2(z)Y^2(w) \sim (3W^3+\cdots)(w)(z-w)^{-1}+\cdots,$$

是由下式定义的缩放映射 g_+ 和 g_-

$$g_+(X^2) = xY^2, \quad g_+(Y^2) = x^{-1}X^2, \quad g_-(X^2) = xX^2, \quad g_-(Y^2) = -x^{-1}Y^2 \quad x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

由于权 2 场弱生成 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$，映射 g 完全由 x确定。利用算符乘积展开 $X^2(z)Y^2(w)$，可得 $g_+(W^3) = W^3$ 以及 $g_-(W^3) = -W^3$。□

6.5. **按 的极大理想取商** $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$。到目前为止，我们考虑的都是形如 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$的商，它们是单参数顶点代数，即 R 的 Krull 维数为 1。这里我们考虑 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$的简单商，其中 $I \subseteq R$是一个极大理想。这种理想总是具有形式 $I = (c - c_0, k - k_0)$，其中 $c_0, k_0 \in \mathbb{C}$，且 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$是定义在 $\mathbb{C}$上的顶点代数。我们首先需要一个判据，以确定两个这样的顶点代数的简单商何时同构。

定理 6.4. 设 c_0、c_1、k_0、k_1 为复数，并设

$$I_0 = (c - c_0, k - k_0), \quad I_1 = (c - c_1, k - k_1)$$

为 R中的相应极大理想。设 $\mathcal{W}_0$ 和 $\mathcal{W}_1$ 分别为 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I_0}_{\infty}$和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I_1}_{\infty}$的简单商。那么，当且仅当以下条件成立时， $\mathcal{W}_0 \simeq \mathcal{W}_1$：

- $c_0 = c_1$ 和 $k_0 = k_1$，
- $c_0 = -1 = c_1$，以及 $k_0 = k_1$，
- $k_0 = 0 = k_1$，以及 $c_0 = c_1$。

证明。显然，条件 (1) 蕴含一个同构。它可能失效的唯一情况是某个参数在简单商中消失。这恰好发生在两种情形下，即 (2) 和 (3)。(2) 中， L变为奇异的，简单商为海森堡代数 π^k。(3) 中， H 变为奇异的，简单商为 Virasoro 代数 Vir^c。□

推论 6.3。设 $I = (p)$ 和 $J = (q)$ 是 R 中的素理想，且 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,J}_{\infty}$均非单。则 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,J}_{\infty}$的简单商之间的任何逐点重合，都必须对应于截断曲线 $V(I) \cap V(J)$的交点。

推论 6.4。假设 $\mathcal{A}$是一个单参数顶点代数，且为单代数，并与 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$的某个简单商同构，其中 $I \subseteq R$是素理想；必要时可先进行局部化。若 $\mathcal{A}$ 是$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$的商，其中 J是素理想，必要时可先进行局部化，则必有 $I = J$。

证明。这直接由定理（6.4）和推论（6.3）得出，因为如果 I 和 J 是不同的素理想，它们的截断曲线 $V(I)$ 和 $V(J)$ 至多在有限个点相交。因此， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,I}_{\infty}$和 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2,J}_{\infty}$的简单商不可能作为单参数族重合。□

7. One-parameter quotients of $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$

本节证明，第 4 节中引入的 Y 型的 8 族 $\mathfrak{so}_2$ 代数，以及第5节中引入的另外 4 族对角余集，均可由 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$的单参数商得到。这意味着存在局部化 $E^{-1}R/I_{XY,n,m}$ 和 $F^{-1}\mathbb{C}[\ell]$，使得我们有如下单参数顶点代数的同构

$$E^{-1}R/I_{XY,n,m}\otimes_{R/I_{XY,n,m}}\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,I_{XY,n,m}}\cong\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m),\qquad F^{-1}R/I_n\otimes_{R/I_n}\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,I_n}\cong\mathcal{C}^{\ell}(n),$$

其中，E 和 F 分别是将 c,k 替换为 ψ（分别为 ℓ）的相应函数后，$\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$的结构常数的（有限）分母集合。在本节中，我们省略记号中的这些局部化。我们已经在定理 6.3 中证明了 $\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(0,m)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(0,m)$ 的情形。剩余情形中，最简单的是以下这些。

定理7.1。 以下代数具有这一性质

(1) 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n+1})\ V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n+3}))^{\mathbb{Z}_2}$（情形 $\mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,0)$），*(2)* 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\ V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n+2}))^{\mathbb{Z}_2}$（情形 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,0)$），*(3)* 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{sp}_{2n})\ V^{\ell}(\mathfrak{osp}_{2|2n}))$（情形 $\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,0)$），*(4)* 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\ V^{\ell}(\mathfrak{osp}_{3|2n}))^{\mathbb{Z}_2}$（情形 $\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,0)$），*(5)* 对于 $n\geq 2$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{so}_n)\ V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_n)\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$，*(6)* 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{sp}_{2n})\ V^{\ell+1}(\mathfrak{sp}_{2n})\otimes\mathcal{S}(2n))$，*(7)* 对于 $n\geq 1$，$Com(V^{\ell}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\ V^{\ell+1}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\otimes\mathcal{S}(2n)\otimes\mathcal{F}(2))^{\mathbb{Z}_2}$。

证明。 在这些情况下，自由场极限如下：

(1) $\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,0)\cong\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2(2n+1),2)^{\mathrm{O}_{2n+1}}$, (2) $\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,0)\cong\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2(2n),2)^{\mathrm{O}_{2n}}$, (3) $\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,0)\cong\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(2n,2)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$, (4) $\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,0)\cong(\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(2n,2)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(2,2))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$, (5) 对于 $n\geq 2$, $\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{C}^{\ell}(n)\cong\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(2n,1)^{\mathrm{O}_n}$, (6) 对于 $n\geq 1$，$\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{C}^{\ell}(-2n)\cong\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(2n,1)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$, (7) 对于 $n\geq 1$，$\lim_{\ell\to\infty}\mathcal{C}^{\ell}(-2n+1)\cong\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(2n,1)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(2,1))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$。

容易验证，这些自由场极限具有所需的弱生成性质，因此该性质在一般水平下成立。□

然而，对于 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$，当 $m\geq 1$ 时，这种论证并不适用，因为在大层极限下弱生成性质不成立，因此我们需要采用不同的方法。

引理 7.1. 设 $\mathcal{W}$ 是一个满足对称性和强生成~要求、但不一定满足弱生成假设的 1 参数顶点代数。考虑由权不超过 4 的场生成的子代数 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$。那么 $\tilde{\mathcal{W}}$ 属于类型 $\mathcal{W}(1,\ 2_3,\ 3,\ 4_3,\ .....)$，并且是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的一个 1 参数商，它不一定是单的。

证明。 这类似于 [37]，中引理 5.10 和定理 5.4 的证明，故略去。 □

引理 7.2. 对于 $X=B$、C 和 $Y=B$、C、D、O，令 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n、\ m)\subseteq\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n、\ m)$ 为由权不超过 4 的场生成的子代数。假设 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n、\ m)$ 包含权不超过 $2m+2$ 的强生成元。那么 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n、\ m)=\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n、\ m)$，特别地，$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n、\ m)$ 是单的。

证明。 如果 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 包含权不超过 $2m+2$ 的强生成元，那么其大水平极限 $\lim_{\psi\to\infty}\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 也包含这些强生成元。我们将证明，$\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 中由权不超过 $2m+2$ 的场生成的子代数就是整个 $\lim_{\psi\to\infty}\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$，由此即可证明该引理。对于 $X=B$，在大水平极限中，权 $1,2,\ldots,2m+1$ 的场与更高权重的场相互解耦。这些高权重场是下列轨形的生成元

(1) $\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(4n+2,2m+2)^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$，当 $\mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,m)$ 时，(2) $\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}(2n,2m+2)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$，当 $\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,m)$ 时，

(3) $\mathcal{O}_{\mathrm{ev}}(4n,2m+2)^{\mathrm{SO}_{2n}}$，当 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 时，

(4) $(\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(1,2m+2)\otimes\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}(2n,2m+2))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$，当 $\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,m)$ 时。

在所有情形下，都很容易验证这些轨形由权为 $2m+2$ 的场生成。证明与 [37], 的引理 5.1–5.8 的证明类似, 故略去。同样，在 $X=C$ 的情形下，权为 1，2，...，$2m$ 的场与较高权的场彼此解耦。较高权的场是下列轨形的生成元

(1) $\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(4n+2,\ 2m+1)^{\mathrm{SO}_{2n+1}}$，对应于 $\mathcal{C}^{\psi}_{CB}(n,\ m)$；(2) $\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(2n,\ 2m+1)^{\mathrm{Sp}_{2n}}$，对应于 $\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(n,\ m)$；(3) $\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(4n,\ 2m+1)^{\mathrm{SO}_{2n}}$，对应于 $\mathcal{C}^{\psi}_{CD}(n,\ m)$；(4) $(\mathcal{S}_{\mathrm{ev}}(2n,\ 2m+1)\otimes\mathcal{O}_{\mathrm{odd}}(1,\ 2m+1))^{\mathrm{Osp}_{1|2n}}$，对应于 $\mathcal{C}^{\psi}_{CO}(n,\ m)$。

再次，容易验证，这些轨形由权 $2m+1$ 和$2m+2$中的场生成。□

定理 7.2。对于 $m\geq 1$, $X=B,C$ 和 $Y=B,C,D,O$, $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n,m)=\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 作为单参数顶点代数。特别地，$\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的一个简单单参数商，并且我们有

$$\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)\cong\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,I_{XY,n,m}}.$$

按照这一记号，$I_{XY,n,m}\subseteq\mathbb{C}[c,k]$ 是由 $c=c_{XY}$ 生成的理想，其中 c_{XY} 由 (4.8)-(4.15)给出，而 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,I_{XY,n,m}}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}/I_{XY,n,m}\cdot\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 关于其极大分次理想的简单商。

证明。首先，为了证明 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 与 $=\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 作为单参数顶点代数相同，只需找到一个层 ψ，使得它们的简单商一致，并且在权 $2m+2$以下没有奇异向量。先考虑 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 在 $n,m\geq 1$ 的情形。

$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,\ m)$ 和 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,\ r)$ 的截断曲线在满足 $\psi=\frac{1+2m+n}{1+m+r}$ 且 $\psi'=\frac{1+2r-n}{1+m+r}$ 的点相交，因此 ~~$k=\frac{1-4mn-r-2nr}{1+m+n}$~~。~~由定理 6.3 可~~知，对于无穷多个 r 的取值，这正是 $\mathcal{C}^{\psi'}_{BD}(0,\ r)$ 具有弱生成性质 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,\ r)=\mathcal{C}^{\psi'}_{BD}(0,\ r)$ 的点。

利用 SO_{2n} [78] 标准表示的不变量理论第二基本定理，可以验证，对于一般的 ψ，$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 的生成元之间的第一个关系出现在权 $w=2(1+m+2n+2mn+n^2)$ 处。只有在有限多个 k 取值时，才可能在较低权重处出现关系。因此，我们可以找到 r，使得在对应的 ψ 取值下，第一个关系出现在权 w 处。由于 $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 与 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(0,r)$ 具有相同的算符乘积展开代数，且在权 w 以下没有关系，$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 必须包含 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,m)$ 的强生成元，直至权 $w>2m+2$。根据引理 7.2，在此 ψ 取值下，$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BD}(n,m)=\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,m)$, 因此这对单参数顶点代数也成立。对于除 $\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(0,m)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(0,m)$ 以外的其他族，证明类似，并基于以下计算。

(1) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BB}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{3+4m+2n}{2\ 1+m+r}$ ( ) $\psi'=\frac{1+4r-2n}{2\ 1+m+r}$ ( ) 时相交。(2) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BC}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{1+2m-n}{1+m+r}$ 和 $\psi'=\frac{-m+r+n}{1+m+r}$ 时相交。(3) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{BO}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{3+4m-2n}{2\ 1+m+r}$ ( ) 和 $\psi'=\frac{1+4r+2n}{2\ 1+m+r}$ ( ) 时相交。(4) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{CC}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{1+2m+n}{1+2m+2r}$ 和 $\psi'=\frac{2(2r-n)}{1+2m+2r}$ 时相交。(5) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{CB}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{1+4m-2n}{2\ 1+2m+2r}$ ( ) 和 $\psi'=\frac{1+4r+2n}{1+2m+2r}$ 时相交。(6) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{CD}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{1+2m-n}{1+2m+2r}$ 和 $\psi'=\frac{2(2r+n)}{1+2m+2r}$ 时相交。(7) $\tilde{\mathcal{C}}^{\psi}_{CO}(n,m)$、$\tilde{\mathcal{C}}^{\psi'}_{BD}(0,r)$ 的截断曲线在 $\psi=\frac{1+4m+2n}{2\ 1+2m+2r}$ ( ) 和 $\psi'=\frac{1+4r-2n}{1+2m+2r}$ 时相交。

□

推论 7.1。对于 $\psi_0\in\mathbb{C}$ 的一般值，使得 $V^a(\mathfrak{a})$ 的移位层不属于 $\mathbb{Q}_{\leq 0}$、$\mathcal{C}^{\psi_0}_{XY}(n,\ m)$，后者是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的一个商。类似地，对于 $n\in\mathbb{Z}$、$\mathcal{C}^{\ell}(n)$，后者是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的一个商，其中 ℓ 取一般值。

证明。固定 $\psi_0\in\mathbb{C}$，使得 $V^a(\mathfrak{a})$ 的移位层 $\notin\mathbb{Q}_{\leq 0}$。根据 [35, 定理 8.1]，$\mathcal{C}^{\psi_0}_{XY}(n,\ m)$ 可由单参数顶点代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$ 通过令 $\psi=\psi_0$ 得到。□

推论 7.2。存在　　不存在形如 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 的不同1 参数顶点代数之间的同构.

证明。由于代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 都是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的单参数商，形式为 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,I_{XY,n,m}}$，因此只需证明理想 $I_{XY,n,m}$ 彼此不同。但利用公式 (4.8)-(4.15) 给出的这些理想，很容易验证这一点。□

8. Reconstruction

回顾第 4 节中的 $\mathfrak{so}_2$-矩形 $\mathcal{W}$-(超)代数 $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,m)$，其关于 $V^a(\mathfrak{a})$ 的余集是 $\mathfrak{so}_2$-矩形 Y-代数 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$，其中 $\mathfrak{a}$-层 a 根据表（1）由 $\mathfrak{so}_2$-层 k 确定。命题 4.1 意味着， $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 是 $V^a(\mathfrak{a})\otimes\mathcal{W}$ 的扩张，其中 $\mathcal{W}\cong\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的一个单参数商。对于 $\mathcal{W}$ 的生成元，我们使用相同的记号；特别地，我们有强生成元场 $\{X^{2i},Y^{2i}|i\geq 1\}\cup\{H,L,W^i|i\geq 3\}$，统一将其记为 W^n、$^{\mu}$，见（6.14）。该扩张由固定权和宇称的场生成（由 X 和 Y 确定），这些场作为 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$ 的模变换为 $\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}}$，见表（1）；回顾一下，对于 $\mu=\pm\frac{1}{2}$，我们将它们记为 P^{μ}、^{j}，并将 $j=1$、.....、m 记为相应对象，且按照（4.16）进行归一化。其余的算符乘积展开 W^n、$_{\nu}(z)P^{\mu}$、$^{j}(w)$ 以及 P^{μ}、$^{i}(z)P^{\nu}$、$^{j}(w)$ 被假定为在与仿射对称性、共形对称性及非退化假设（4.16）相容的前提下尽可能一般。

本节的主要结果是一个重构定理，它指出，$\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$的完整算符乘积展开代数由 $\mathcal{W}$ 的结构以及 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$ 对生成场的作用决定。

定理 8.1。设 $\mathcal{A}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$ 是一个单参数顶点（超）代数，满足以下性质；这些性质与 $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,\ m)$共有。

(1) $\mathcal{A}^{\psi}_{XY}(n,m)$是 $\mathcal{W}\otimes V^a(\mathfrak{a})$的共形扩张，其中 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的某个单参数商。*(2)* 该扩张由权为 m 的场 $P^{\mu,j}$ 生成；这些场相对于 $\mathcal{A}^{\psi}_{XY}(n,m)$的共形向量$L+L^{\mathfrak{a}}$ 是主场，相对于仿射子顶点算子代数 $V^k(\mathfrak{so}_2)\otimes V^a(\mathfrak{a})$是主场，并且在 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$下按 $\mathbb{C}^2\otimes\rho_{\mathfrak{a}}$变换。*(3)* 扩张场的宇称与表（*1*）中出现的 $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,m)$的相应场相同。代数 $\mathcal{A}^{\psi}_{XY}(n,m)$由这些场以及$\mathcal{W}\otimes V^a(\mathfrak{a})$的生成元强生成。*(4) Shapovalov* 形式在扩张场上的限制是非退化的。

那么，作为 *1* 参数顶点（超）代数， $\mathcal{A}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 与 $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,m)$ 同构。

证明。我们希望以统一的方式处理幂零元类型为 B 和 C 的情形。在上述内容中，m 是幂零元为主幺的李代数的秩，并且在我们的过程中，它作为式 (4.16) 中最高阶极点的次数出现。为证明起见，我们采用以下约定。这里，令 m 为扩张场的共形权，它是整数或半整数。

- 如果 $m=\frac{1}{2}$，那么我们处于第5节讨论的对角余集情形。
- 如果 $m\geq 1$ 是整数，那么幂零元在 $\mathfrak{so}_{2m-1}$中是主幺的。
- 如果 $m\geq\frac{3}{2}$ 是半整数，那么幂零元在 $\mathfrak{sp}_{2m-2}$中是主幺的。

在 $V^a(\mathfrak{a})$ 中，$\otimes\mathcal{W}$的总 Virasoro 场为 $T=W^{2,\ 0}+L^{\mathfrak{so}_2}+L^{\mathfrak{a}}$，因此我们得到算符乘积展开

$$W^{2,0}(z)P^{\mu,j}(w)\sim\lambda P^{\mu,j}(w)(z-w)^{-2}+(\partial P^{\mu,j}-L^{\mathfrak{so}_2}_{(0)}P^{\mu,j}-L^{\mathfrak{a}}_{(0)}P^{\mu,j})(w)(z-w)^{-1},$$

其中 λ 是常数

$$\lambda=m-\frac{1}{2k}-\frac{\mathrm{Cas}}{a+h^{\vee}_{\mathfrak{a}}},\tag{8.1}$$

且 Cas 是标准表示 $\rho_{\mathfrak{a}}$在 $U(\mathfrak{a})$ 中的卡西米尔算子的特征值。接下来，我们将为 $\mathcal{W}$ 的生成元与扩张场 $P^{\mu,\ i}$建立算符乘积展开。计算中只需要少数几个结构常数，它们定义在以下算符乘积展开中，并采用与式 (6.11) 相同的记号

$$W^{\mp 2,2}\times P^{\pm\frac{1}{2},i}=aP^{\mp\frac{1}{2},i},\quad W^{3,0}\times P^{\pm\frac{1}{2},i}=\pm vP^{\pm\frac{1}{2},i}(w)(z-w)^{-3}\pm v_{3,2}(:W^{2,\pm 2}P^{\mp\frac{1}{2},i}:),\tag{8.2}$$

其余项则由共形对称性和仿射对称性确定。现在，施加雅可比关系$J(W^{2,\ 2},\ W^{2,\ -2},\ P^{\pm\frac{1}{2},\ i})$，得到一个二次方程组。解此方程组，我们发现

$$a=-\frac{3}{8}k^3\lambda,\quad v=-\frac{3}{16}(k-2)(k-1)k^2\lambda,\quad v_{3,2}=\frac{3k(2\lambda k-k+1)}{2k(k+4)\lambda+(k-4)(k-1)},$$

以及至关重要的截断关系

$$c=\frac{4k\lambda\left((k-2)k\lambda-(k-1)^2\right)}{4k\lambda+(k-2)(k-1)}. \tag{8.3}$$

其中 λ i s 由 (8.1) 给出。这里，我们采用以下缩放方式，使根式清晰可见。

$$\omega_2=-\frac{3}{8}(k-2)(k-1)k(2k\lambda-3(k-1)),\quad \omega_3=\frac{1}{4}(2k(k+4)\lambda+(k-4)(k-1)). \tag{8.4}$$

因此， $\mathcal{W}$ 由扩张数据确定，这些数据通过参数 λ 出现在上文中，见 (8.1)。

此时，算符乘积展开 $W^{2,\pm 2}(z)P^{\mu,i}(w)$ 和 $W^{3,0}(z)P^{\mu,i}(w)$ 已表示为 $\mathfrak{so}_2$ 层 k 的有理函数。事实上，这一性质会推广到所有算符乘积展开 $W^{n,\mu}(z)P^{\nu,i}(w)$，其中 $n\geq 4, \mu=0,\pm 2$。例如，施加雅可比恒等式 $J_{r,1}(W^{3,0},\tilde{W}^{n,\mu},P^{\nu,j})$，可得一个关系

$$\tilde{W}^{n+1,\mu}_{(r)}P^{\nu,i}=\frac{1}{rw^{W^3,\tilde{W}^{n,\mu}}_{\tilde{W}^{n+1,\mu}}-(r+1)w^{W^3,\tilde{W}^{n,\mu}}_{\partial\tilde{W}^{n+1,\mu}}}\left(W^{3,0}_{(r)}\tilde{W}^{n,\mu}_{(1)}P^{\nu,i}-\tilde{W}^{n,\mu}_{(1)}W^{3,0}_{(r)}P^{\nu,i}-R\right),$$

其中

$$R=(W^{3,0;n,\mu}_0)_{(r+1)}P^{\nu,i}-\sum_{j=2}^{r}\binom{r}{j}(W^3_{(j)}\tilde{W}^{n,\mu})_{(r+1-j)}P^{\nu,i},$$

通过归纳确定所有算符乘积展开 $W^{n,\mu}(z)P^{\nu,i}(w)$。

剩下要说明的是，算符乘积展开 $P^{\mu,i}(z)P^{\nu,j}(w)$ 完全由 $W^{\mu,i}(z)P^{\nu,j}(w)$ 和 $W^{n,\mu}(z)W^{m,\nu}(w)$ 确定。为此，考虑雅可比恒等式 $J_{1,r}(W^{3,0},P^{-\frac{1}{2},i},P^{\frac{1}{2},j})$，其形式如下。

$$W^{3,0}_{(1)}P^{-\frac{1}{2},i}_{(r)}P^{\frac{1}{2},j}=(W^{3,0}_{(1)}P^{-\frac{1}{2},i})_{(r)}P^{\frac{1}{2},j}+(W^{3,0}_{(0)}P^{-\frac{1}{2},i})_{(r+1)}P^{\frac{1}{2},j}+P^{-\frac{1}{2},i}_{(r)}W^{3,0}_{(1)}P^{\frac{1}{2},j}. \tag{8.5}$$

注意，关系 (8.5) 的左边仅取决于 $P^{-\frac{1}{2},i}(r)P^{\frac{1}{2},j}$，而右边则会产生乘积 $P^{-\frac{1}{2},i}(r-1)P^{-\frac{1}{2},j}$ 的贡献；每一项这样的贡献都来自乘积 $W^{3,0}(1)P^{-\frac{1}{2},i}, W^{3,0}(0)P^{-\frac{1}{2},i}$ 和 $W^{3,0}(1)P^{\frac{1}{2},i}$ 中的单项式，它们对应于 (8.2) 中的后裔。汇总所需乘积 $P^{2,i}(r-1)P^{\frac{1}{2},j}$ 的所有贡献后，我们得到一个递归公式，用低阶极点表示高阶极点，其基例由 (4.16) 给出。证明完毕。□

注 8.1. 雅可比恒等式 $J_{1,0}(W^{3,0},P^{\mu,i},P^{\nu,j})$ 导出了关系，表明强生成元$W^{n,\mu}$ 可以用扩张场中的 $\mathfrak{a}$-不变量来表示，其中的扩张场属于 $n\geq m$。

9. $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ AS AN EXTENSION OF TWO COPIES OF $\mathcal{W}^{\mathrm{EV}}_\infty$

我们回顾一下普适二参数顶点代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$，它由 [57] 构造并记作 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}(c,\lambda)$。它由类型为 $\mathcal{W}(2,4,6,\ldots)$ 的生成元自由生成，并由一个中心荷为 c 的 Virasoro 场 L 和一个权为 4 的主场 W^4 弱生成。对于 $i\geq 3$，场 W^{2i} 通过递归方式定义为$W^{2i}=W^4_{(1)}W^{2i-2}$。第二个参数 λ 由以下算符乘积展开关系给出

$$\begin{aligned}W^4_\pm(z)W^4_\pm(w)\sim&\frac{c(5c+22)\omega_\pm}{840}(z-w)^{-8}+\frac{(5c+22)\omega_\pm}{105}L(w)(z-w)^{-6}+\frac{(5c+22)\omega_\pm}{210}\partial L(w)(z-w)^{-5}\\&+\Big(\frac{\lambda_\pm}{8}W^4_\pm+\frac{\omega_\pm}{5}:LL:+\frac{(c-4)\omega_\pm}{140}\partial^2L_\pm\Big)(w)(z-w)^{-4}\\&+\Big(\frac{\lambda_\pm}{16}W^4_\pm+\frac{\omega_\pm}{5}:\partial LL:+\frac{(c-4)\omega_\pm}{630}\partial^2L_\pm\Big)(w)(z-w)^{-3}+W^6_\pm(w)(z-w)^{-2}\\&+\Big(\frac{1}{2}\partial W^6_\pm-\frac{\omega_\pm}{60}:\partial^3LL:-\frac{\omega_\pm}{20}:\partial^2L\partial L:-\frac{\lambda_\pm}{192}\partial^3W^4_\pm-\frac{(c-4)\omega_\pm}{10080}\partial^5LL\Big)(w)(z-w)^{-1}.\end{aligned}$$

此外，根据 [57, 定理 3.10],，若 $\{L,W^{2i}|\ 2\leq i\leq 7\}$ 是某个顶点代数中的场，并且它们满足 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 的算符乘积展开，且取自 $\mathbb{C}[c,\lambda]$ 的某个商 $\mathbb{C}[c,\lambda]/I$，那么 $\{L,W^{2i}|\ 2\leq i\leq 7\}$ 生成 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 的一个同态像。本节的目标是证明 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$ 是两个互相对易的 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 副本的共形扩张。

回顾一下， [50] 的正交辛 Y代数在 [37], 中记作 $\mathcal{C}^{\psi}_{iZ}(a,\ b)$，其中 $i=1,\ 2$以及 $Z=B,\ C,\ D,\ O$。它们通过以下步骤作为$\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$的单参数商得到。存在一个理想

$I_{iZ,\ a,\ b} \subseteq \mathbb{C}[c,\lambda]$ ，以参数 ψ 表示，并且在 [37]中以参数形式给出。这生成一个顶点代数理想$I_{iZ,\ a,\ b} \cdot \mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$，而 $\mathcal{C}_{iZ}^{\psi}(a,\ b)$与其简单分次商同构

$$\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}} / I_{iZ,a,b} \cdot \mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}},$$

即 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 被其包含 $I_{iZ、a、b}$ 的极大理想 $\mathcal{I}_{iZ、a、b}$ 所作的商。我们回顾 [37] 中的以下例子:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{2D}^{\psi}(n,0) \cong \mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n}), V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}, && \ell = -2\psi - 2n + 3,\\
&\mathcal{C}_{2B}^{\psi}(n,0) \cong \mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n+1}), V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1))^{\mathbb{Z}_2}, && \ell = -2\psi - 2n + 2,\\
&\mathcal{C}_{2C}^{\psi}(n,0) \cong \mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{sp}_{2n}), V^{\ell+1/2}(\mathfrak{sp}_{2n}) \otimes \mathcal{S}(n)), && \ell = \psi - n - 3/2,\\
&\mathcal{C}_{2O}^{\psi}(n,0) \cong \mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{osp}_{1|2n}), V^{\ell+1/2}(\mathfrak{osp}_{1|2n}) \otimes \mathcal{S}(n) \otimes \mathcal{F}(1))^{\mathbb{Z}_2}, && \ell = \psi - n - 1,
\end{aligned} \tag{9.1}$$

引理 9.1. 对于每个 $n \geq 1$，我们有以下共形嵌入。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_{2D}^{\psi}(n,0) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi-1}(n,0) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\ell}(2n), && \ell = -2\psi - 2n + 3,\\
&\mathcal{C}_{2B}^{\psi}(n,0) \otimes \mathcal{C}_{2B}^{\psi-1}(n,0) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\ell}(2n+1), && \ell = -2\psi - 2n + 2,\\
&\mathcal{C}_{2C}^{\psi}(n,0) \otimes \mathcal{C}_{2C}^{\psi-1}(n,0) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\ell}(-2n), && \ell = \psi - n - 3/2,\\
&\mathcal{C}_{2O}^{\psi}(n,0) \otimes \mathcal{C}_{2O}^{\psi-1}(n,0) \hookrightarrow \mathcal{C}^{\ell}(-2n+1), && \ell = \psi - n - 1.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

证明。 我们只证明第一个结论，因为其余结论的证明相同。回忆 $\mathcal{C}^{\ell}(2n) = \mathrm{Com}(V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\ V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(4n))^{\mathbb{Z}_2}$, 并记

$$V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(4n) = (V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n)) \otimes \mathcal{F}(2n).$$

注意，$(V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))$ 是一个共形扩张

$$V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathrm{Com}(V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}), V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n)) = V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi-1}(n,0), \qquad \ell = -2\psi - 2n + 3.$$

因此 $V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(4n)$ 是一个共形扩张

$$V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi-1}(n,0) \otimes \mathcal{F}(2n) \cong V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi-1}(n,0). \tag{9.3}$$

由于 $V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n)$ 是 $V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi}(n,0)$ 的共形扩张，可知 $V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(4n)$ 是 $V^{\ell}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi}(n,0) \otimes \mathcal{C}_{2D}^{\psi-1}(n,0)$ 的共形扩张，证毕。□

现在我们考虑张量积 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}} \otimes \mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$。这里，第一份 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 的参数为 $c,\ \lambda$，第二份的参数为 $c',\ \lambda'$，我们在记号中省略这些参数。我们用记号 $I_{iX,\ n,\ m}$ 和$I'_{iX,\ n,\ m}$表示第一份（分别为第二份） $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$中的理想。引理 9.1 的结果可改述如下：对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都存在一个顶点代数同态

$$\Psi_n : \mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}} \otimes \mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}} \to \mathcal{W}_{\infty, I_n}^{\mathfrak{so}_2}, \tag{9.4}$$

它诱导出由 (9.1) 给出的共形嵌入。

引入一个二次无理表达式

$$\omega = \sqrt{\frac{c-(k-1)}{c-(k-1)^3}}, \quad c = \frac{(k-1)(k\omega-\omega-1)(k\omega-\omega+1)}{(\omega-1)(\omega+1)}. \tag{9.5}$$

进一步，定义一个缩放参数

$$\tilde{\omega}_3 = -\frac{(k-2)(k-1)(k\omega+2\omega-2)(k\omega+2\omega+2)}{6k^2\omega^2\omega_2\omega_3^2}.$$

这种缩放在明确描述 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 中 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 的两个互相对易的副本时会很有用，因为在我们的计算过程中出现的所有根式都会消去。

定理 9.1。 在将 ω 添加入环 $\mathbb{C}[c,k]$ 后，再将附录 A 中明确给出的有限多个多项式进行求逆，存在一个顶点代数同态

$$\Psi : \mathcal{W}_\infty^{ev} \otimes \mathcal{W}_\infty^{ev} \to \mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2} \tag{9.6}$$

使得对于所有 $n\in\mathbb{N}$，将该映射与商映射 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}\to\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2},\ I_n$ 复合后，便得到共形嵌入 (9.1)。这里，我们在记号中省略了二次扩张$\mathbb{C}[c,k][\omega]$的局部化。此外，映射 Ψ 在我们的 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 局部化扩张的如下自同构意义下是唯一的：

$$\omega\mapsto-\omega,\qquad L_\pm\mapsto L_\mp,\qquad W^4_\pm\mapsto W^4_\mp, \tag{9.7}$$

我们将其视为伽罗瓦自同构。

证明。 首先，直接通过计算机计算可知，$\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$包含两个彼此对易的 Virasoro 子代数，分别由场 L_- 和 L_+ 生成，其中心荷分别为 c_- 和 c_+，因此

$$L_\pm(z)L_\mp(w)\sim 0,\quad L_++L_-=L.$$

它们具有如下形式

$$L_\pm=\frac{1}{2}L\pm\frac{1}{2}\omega\left(\frac{k-1}{k}:HH:-\tilde{\omega}_3W^{2,-2}-\tilde{\omega}_3W^{2,2}-W^{2,0}\right),\quad c_\pm=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\pm(c-(k-1))\omega. \tag{9.8}$$

此外，除交换 L_- 和 L_+外，这就是将 L 分裂为两个彼此对易的非平凡 Virasoro 场的唯一方式。容易验证， L_+ 和 L_- 的中心荷与 $\mathcal{C}^\ell(n)$ 中由 (9.1) 给出的彼此对易的 Virasoro 场的中心荷一致，其中 $n\in\mathbb{Z}$。此外，还存在两个彼此对易的权重四场 $W^4_\pm$，它们满足

$$L_\pm(z)W^4_\pm(w)\sim 4W^4_\pm(w)(z-w)^{-2}+\partial W^4_\pm(w)(z-w)^{-1},\quad L_\pm(z)W^4_\mp(w)\sim 0.$$

这些条件在缩放参数 $\omega_\pm$的意义下唯一确定 $W^4_\pm$，其显式场见附录 A。接下来，对于 $r\geq 3$，我们定义高权重场

$$W^{2r}_\pm=(W^4_\pm)_{(1)}W^{2r-2}_\pm.$$

由于对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及所有满足 $\ell-2$ 可容许的ℓ， $\{L_\pm,W^{2r}_\pm|\ r\geq 2\}$ 在商 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 中都满足 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$的 OPE 关系，并且在适当选择 n 和 ℓ时， $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 与 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$的分次特征在任意高的共形权范围内均一致，因此这些 OPE 关系也必然在二参数顶点代数 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$中成立。最后，利用 $L_\pm$ 和 $W^4_\pm$ 的显式形式，可以验证 (9.7) 确实是一个自同构。□

我们需要明确给出情形 $\mathcal{C}^\ell(n)=\mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{so}_n)\ V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_n)\otimes\mathcal{F}(n))$ 中场 $W^4_\pm$ 的形式，因为我们需要知道，当 n 为偶数且 ℓ 为有理数时， $W^4_\pm$ 的公式是良定义的。在这种情形下，模去依赖于权为 1、2、3 的场的项后，$W^4_\pm$ 可以表示为以下形式：

$$W^4_\pm\equiv a_\pm(n,\ell)W^4\pm(X^4+Y^4).$$

系数 $a_\pm(n,\ \ell)$ 由以下明确公式给出：

(9.9)

$$\begin{aligned}
a_+(n,\ell)=&\frac{2(\ell-3)(n-3)(n+2)(\ell+n-2)(\ell+2n-3)Y(\ell,n)}{(\ell+n-3)X(\ell,n)},\\
a_-(n,\ell)=&\frac{2(\ell-3)(n-3)(n+2)(\ell+n-4)(\ell+2n-3)Y(\ell,n)}{(\ell+n-3)X(\ell,n)},\\
X(\ell,n)=&\,5\ell^4n^4+71\ell^4n^3-170\ell^4n^2-32\ell^4n+384\ell^4+20\ell^3n^5+224\ell^3n^4-1532\ell^3n^3+1912\ell^3n^2\\
&+1920\ell^3n-4608\ell^3+20\ell^2n^6+170\ell^2n^5-3012\ell^2n^4+9236\ell^2n^3-4360\ell^2n^2-16896\ell^2n\\
&+19968\ell^2+12\ell n^6-1652\ell n^5+10304\ell n^4-17456\ell n^3-9792\ell n^2+51456\ell n-36864\ell\\
&-192n^6+2464n^5-8128n^4+2688n^3+29440n^2-50176,\\
Y(\ell,n)=&\,5\ell^2n^2+40\ell^2n-64\ell^2+10\ell n^3+50\ell n^2-368\ell n+384\ell+24n^3-272n^2+704n-512n+24576.
\end{aligned}$$

注意，所有结构常数都是有理函数，其分母没有其他不可约因子，因此只要 $a_\pm(n,\ \ell)$ 有定义，它们就有定义。

引理 9.2. 当 ℓ 是有理数时，对于任意偶正整数 n， $\ell\neq 3,\ 2-n,\ 4-n$ 或 $3-2n$, $a_\pm(n,\ell)$ 均有定义且非零。

证明。我们需要证明，$X(\ell,n)=0$和$Y(\ell,n)=0$对于$\ell\in\mathbb{Q}$和$n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$均无解。首先，$X(\ell,n)=0$有如下解：

$$\ell = 3-n\pm\sqrt{\frac{p(n)\pm\sqrt{q(n)}}{384-32n-170n^2+71n^3+5n^4}},$$

$$\begin{aligned} p(n) &= 384+672n-682n^2+263n^3-147n^4+38n^5+5n^6 \\ q(n) &= 28704768-21659648n-10852352n^2+13628416n^3-2849536n^4-925824n^5+493456n^6 \\ &\quad -127360n^7+4456n^8-1112n^9+969n^{10}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

如果对于某个偶正整数n，ℓ是有理数，则必要条件是$q(n)$是完全平方数。将$q(n)$模16化简，可得

$$q(n)\equiv n^8(8-8n+9n^2) \bmod 16,$$

因此，如果$q(n)$是完全平方数，那么$\bar{q}(n)=8-8n+9n^2$必须是模16下的完全平方数。然而，模16下的完全平方数只有0、1、4、9；对于偶数n，当$n\equiv 0$模4时，我们有$\bar{q}(n)\equiv 8$模16；当$n\equiv 2$模4时，我们有$\bar{q}(n)\equiv 12$模16。因此，对于ℓ有理数和n偶正整数，$X(\ell、n)=0$没有解。

接下来，$Y(\ell，n)=0$有以下解：

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{-192+184n-25n^2-5n^3\pm\sqrt{g(n)h(n)}}{-64+40n+5n^2}, \\ g(n) &= -64+40n+5n^2, \\ h(n) &= -25152+552n+13n^2-14n^3+5n^4. \end{aligned} \tag{9.11}$$

如果ℓ对于某个偶数正整数n为有理数，$h(n)$和$g(n)$必须都是完全平方数。将$h(n)$模5化简可知，当$n\equiv 6$模10时，$h(n)\equiv 4$模5；否则，$h(n)\equiv 2$模5或$h(n)\equiv 3$模5。因此，只有当$n\equiv 6$模10时，$h(n)$才可能是完全平方数。

接下来，令$h(k)=h(6+10k)$，我们看到$h(k)\equiv k$模3，因此只有当n具有$6+10(3k)$或$6+10(3k+1)$的形式时，$h(n)$才可能是完全平方数。最后，$g(6+10(3k))=4(89+750k+1125k^2)$，并且$g(6+10(3k+1))=4(464+1500k+1125k^2)$。由于$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，二者都不可能是完全平方数，因为$g(6+10(3k))\equiv 2$模3，且$g(6+10(3k+1))\equiv 2$模3。因此，对于任意偶数正整数$n$，$g(n)$和$h(n)$不可能同时为完全平方数。□

供后续使用，我们记录如下：

推论 9.1。对于所有$n\in\mathbb{N}$和$d\geq 3$，场$W_{\pm}^{2d}\in\mathcal{C}^{\ell}(2n)$具有如下形式：

$$W_{\pm}^{2d}=a_{\pm}(n,\ell)^{d-3}(a_{\pm}(n,\ell)^2+\mu_d)H^{2d}\pm a_{\pm}(n,\ell)^{d-2}(X^{2d}+Y^{2d}), \tag{9.12}$$

其中μ_d为正有理数。特别地，当ℓ是有理数且$\ell\neq 3$、$4-n$或$3-2n$时，我们有

$$a_{d,\pm}W_{\pm}^{2d}=b_{d,\pm}H^{2d}\pm(X^{2d}+Y^{2d}),\qquad a_{d,\pm}=\frac{1}{a_{\pm}(n,\ell)^{d-2}},\qquad b_{d,\pm}=\frac{a_{\pm}(n,\ell)^2+\mu_d}{a_{\pm}(n,\ell)}. \tag{9.13}$$

这里$a_{d,\pm}$和$b_{d,\pm}$是非零有理数a_d,b_d。

证明。由以下事实可立即得到等式(9.13)：

$$(W_{\pm}^4)_{(1)}W_{\pm}^{2d-2}=W_{\pm}^{2d},\quad H_{(1)}^4H^{2d-2}=H^{2d},\quad X_{(1)}^4Y^{2d-2}=\frac{16}{9}H^{2d}=Y_{(1)}^4X^{2d-2},$$

模去由较低权重生成元构成的正规序多项式。若ℓ如上所述为有理数，我们已经看到$a_{\pm}(n,\ell)$是非零有理数，因此上面的系数b非零。同理，$a_{\pm}(n,\ell)^2+\mu_d$不可能为零，因为$a_{\pm}(n,\ell)^2$和μ_d都是正有理数。□

Let

$$\Psi_{XY,n,m}:\mathcal{W}_{\infty}^{\mathrm{ev}}\otimes\mathcal{W}_{\infty}^{\mathrm{ev}}\to\mathcal{C}_{XY}^{\psi}(n,m) \tag{9.14}$$

表示Ψ与商映射$\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}\to\mathcal{W}_{\infty}^{\mathfrak{so}_2}{}_{,I_{XY,n,m}}$的复合。

定理 9.2. 对于每个顶点 $\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m)$，存在一对正交辛 Y-代数 $\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,b_1)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,b_2)$，其中 , 和 ,, 使得 $,_{n,m}$ 下降为一参数顶点代数之间的映射

$$\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,b_1)\otimes\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,b_2)\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m). \tag{9.15}$$

它们列举如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\psi}_{1B}(n+m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1D}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,m),\\
\mathcal{C}^{\psi}_{1D}(n+m+1,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1B}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BB}(n,m),\\
\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(n+m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2C}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CC}(n,m),\\
\mathcal{C}^{\psi}_{2O}(n+m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2O}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CO}(n,m),
\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\psi}_{1B}(m-n,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1C}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,m),\qquad m\geq n,\\
\mathcal{C}^{\psi}_{1O}(n-m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1C}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BC}(n,m),\qquad m\leq n,
\end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\psi}_{1D}(m-n+1,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1O)}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,m),\qquad m\geq n-1,\\
\mathcal{C}^{\psi}_{1C}(n-m-1,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{1O)}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{BO}(n,m),\qquad m\leq n-1,
\end{aligned} \tag{9.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\psi}_{2O}(m-n,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2B}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CB}(n,m),\qquad m\geq n,\\
\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n-m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2B}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CB}(n,m),\qquad m\leq n,
\end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(m-n,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2D}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CD}(n,m),\qquad m\geq n,\\
\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n-m,m)\otimes\mathcal{C}^{\psi^{-1/2}}_{2D}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{CD}(n,m),\qquad m\leq n.
\end{aligned} \tag{9.20}$$

证明。利用附录 B 中 [37] 关于 $\mathcal{C}^{\psi}_{iZ}(a,b)$ 与 $\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n,0)$ 的截断曲线交点的数据（以及同构 $\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n,0)\cong\mathcal{C}^{\psi'}_{1O}(0,n-1)$，其中 $\frac{1}{2\psi}+\frac{1}{\psi'}=1$），我们可以验证，对于每个代数 $\mathcal{W}^{\psi}_{XY}(n,m)$，存在无穷多个 $k\in\mathbb{N}$ 的值，使得 $\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n,0)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi^{-1}}_{2D}(n,0)$ 的截断曲线，与上述列表中代数对 $\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,b_1)$ 和 $\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,b_2)$ 的截断曲线重合。这证明了映射 $\Psi_{XY,n,m}$ 的核包含上面给出的理想 $I_{i_1Z_1,a_1,b_1}\otimes I_{i_2Z_2,a_2,b_2}$。这表明我们得到了适当截断曲线的映射，因此最坏的情况下我们得到嵌入

$$\overline{\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,b_1)}\otimes\overline{\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,b_2)}\hookrightarrow\mathcal{C}^{\psi}_{XY}(n,m),$$

其中 $\overline{\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,\ b_1)}$ 和 $\overline{\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,\ b_2)}$ 分别是沿着理想 $I_{i_1Z_1,\ a_1,\ b_1}$ 和 $I_{i_2Z_2,\ a_2,\ b_2}$ 的 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_{\infty}$ 的可能的非单商。

还需证明，$\Psi_{XY,\ n,\ m}$ 的像实际上是简单商 $\mathcal{C}^{\psi'}_{i_1Z_1}(a_1,\ b_1)\otimes\mathcal{C}^{\psi''}_{i_2Z_2}(a_2,\ b_2)$。所有情形的论证都相同，因此我们只给出 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,\ m)$ 的证明。我们在 $\mathcal{C}^{\psi}_{BD}(n,\ m)$ 和 $\mathcal{C}^{\ell}(2r)$ 的截断曲线上有一个交点，该点为

$$\psi=\frac{2(2m+n+r)}{1+2m},\qquad \ell=-(2r-2)+\frac{4(m-mn+r+mr)}{1+2m}.$$

这对应于参数空间中的点

$$k=2r,\qquad c=-\frac{(-1+2r)(-2m-n+2mr)(-1+n+2r+2mr)}{(-1+n+r)(2m+n+r)}, \tag{9.21}$$

$\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$，该点位于 $\mathcal{C}_{BD}^{\psi}(n,m)$ 的截断曲线上。

注意到，对于无穷多个 r 值， $\ell-2$ 都是可容许的；并且只要 $\ell-2$ 可容许， $\mathcal{C}_\ell(2r)$ 就是单顶点代数 $\mathcal{W}_{\ell_1}(\mathfrak{so}_{2r})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_{\ell_2}(\mathfrak{so}_{2r})^{\mathbb{Z}_2}$ 的乘积的共形扩张，其中

$$\ell_1=-(2r-2)+\frac{1-2m+4mn-4r-4mr}{4(-m+mn-r-mr)},\quad \ell_2=-(2r-2)+\frac{2(1+2mn-2r-2mr)}{1-2m+4mn-4r-4mr}.$$

若 $\mathcal{C}_\ell(2r)$ 具有弱生成性质，由于像 $\Psi_{BD,\,n,\,m}(\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}\otimes\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}})\cong\mathcal{W}_{\ell_1}(\mathfrak{so}_{2r})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_{\ell_2}(\mathfrak{so}_{2r})^{\mathbb{Z}_2}$，可知第一份 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 中的极大理想 $\mathcal{I}_{1B,\,n+m,\,m}$ 以及第二份 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 中的极大理想 $\mathcal{I}_{1D,\,n,\,m}$ 在点 (9.21) 处消失。

假设对于上述某个 ℓ， $\mathcal{C}_\ell(2r)$ 不具有弱生成性质。这只有在由权不超过 2 的场生成的子代数 $\mathcal{C}_\ell(2r)\subseteq\mathcal{C}_\ell(2r)$ 是真子代数时才会发生，因此~不一定是单的。然而， $\mathcal{C}_\ell(2r)$ 沿着对应于点 (9.21) 的极大理想 $\mathcal{I}_{2r,\,c}$，满射到 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的简单商 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2,\mathcal{I}_{2r},c}$。由于 $\Psi_{BD,n,m}(\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}\otimes\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}})$ 在 $\mathcal{C}_\ell(2r)$ 中已经是单的，因此它在 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2,\mathcal{I}_{2r},c}$ 中也必定是单的。特别地，第一份 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 中的极大理想 $\mathcal{I}_{1B,n+m,m}$ 和第二份 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 中的极大理想 $\mathcal{I}_{1D,n,m}$，在 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2,\mathcal{I}_{2r},c}$ 中也都消失。由于这两个极大理想在

沿着 $\mathcal{C}_{BD}^{\psi}(n,\ m)$ 的截断曲线存在无穷多个点，因此 $\mathcal{C}_{i_1Z_1}^{\psi'}(a_1,\ b_1)$ 和 $\mathcal{C}_{i_2Z_2}^{\psi''}(a_2,\ b_2)$ 必须是单代数。□

接下来，我们回到定理 8.1 的设定，其中考虑顶点代数 $\mathcal{A}_{XY}^{\psi}(n,\ m)$，它们是 $V^a(\mathfrak{a})\otimes\mathcal{W}$ 的扩张，其中 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的某个单参数商，并且该扩张由具有固定权和宇称、以及 $\mathfrak{so}_2\oplus\mathfrak{a}$ 作用的场 $P^{\mu,\,i}$ 生成。如上所述， $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 的两个单参数商的共形扩张，我们分别将其记为 $\mathcal{W}_+$ 和 $\mathcal{W}_-$，其生成集分别为 $\{L_+,W_+^{2r}\}$ 和 $\{L_-,W_-^{2r}\}$。

定理 9.3。扩张场 $P^{\mu,\,i}$ 与 $\mathcal{W}_+$ 对易，而 $V^a(\mathfrak{s})\otimes\mathcal{W}_-$ 的生成元与 $\{P^{\mu,i}\}$ 一起在算符乘积展开下闭合，因此生成一个钩型 $\mathcal{W}$-（超）代数。

证明。首先，利用雅可比恒等式 $J(L_+,\ L_-,\ P)$，我们得到

$$L_+(z)P(w)\sim 0,\quad L_-(z)P(w)\sim\lambda P(w)(z-w)^{-2}+\partial P(w)(z-w)^{-1}. \tag{9.22}$$

接下来，我们使用雅可比恒等式 $J(L_+,\ W_-^4,\ P)$；具体来说，只需考虑 $J_{4,\,0}(L_+,\ W_-^4,\ P)$。利用 (9.22)，我们得出

$$W_+^4(z)P(w)\sim 0,\quad W_-^4(z)P(w)\sim\lambda P(w)(z-w)^{-4}+\cdots. \tag{9.23}$$

由于 $\mathcal{W}_+$ 由 L_+ 和 W_+^4弱生成，关系 (9.22) 和 (9.23) 表明， $\mathcal{W}_+$ 与扩张场 P对易。现在我们可以应用正交辛类型钩型（超）代数的重构定理 6.3] $\mathcal{W}$，从而得出存在一个钩型子顶点算子代数。□

推论 9.2。由定理 *9.2* 给出的共形嵌入 $\mathcal{C}_{i_1Z_1}^{\psi'}(a_1,b_1)\otimes\mathcal{C}_{i_2Z_2}^{\psi''}(a_2,b_2)\hookrightarrow\mathcal{C}_{XY}^{\psi}(n,m)$ 扩张为共形嵌入

$$\mathcal{C}_{i_1Z_1}^{\psi'}(a_1,b_1)\otimes\mathcal{W}_{i_2Z_2}^{\psi''}(a_2,b_2)\hookrightarrow\mathcal{W}_{XY}^{\psi}(n,m). \tag{9.24}$$

它们列举如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{1B}^{\psi}(n+m,m)\otimes\mathcal{W}_{1D}^{\psi^{-1}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{BD}^{\psi}(n,m),\\
\mathcal{C}_{1D}^{\psi}(n+m+1,m)\otimes\mathcal{W}_{1B}^{\psi^{-1}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{BB}^{\psi}(n,m),\\
\mathcal{C}_{2C}^{\psi}(n+m,m)\otimes\mathcal{W}_{2C}^{\psi^{-1/2}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{CC}^{\psi}(n,m),\\
\mathcal{C}_{2O}^{\psi}(n+m,m)\otimes\mathcal{W}_{2O}^{\psi^{-1/2}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{CO}^{\psi}(n,m),
\end{aligned} \tag{9.25}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{1B}^{\psi}(m-n,m)\otimes\mathcal{W}_{1C}^{\psi^{-1}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{BC}^{\psi}(n,m),\qquad m\geq n,\\
\mathcal{C}_{1O}^{\psi}(n-m,m)\otimes\mathcal{W}_{1C}^{\psi^{-1}}(n,m)&\hookrightarrow\mathcal{W}_{BC}^{\psi}(n,m),\qquad m\leq n,
\end{aligned} \tag{9.26}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}^{\psi}_{1D}(m-n+1,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{1O)}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{BO}(n,m),\qquad m\geq n-1,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{1C}(n-m-1,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{1O)}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{BO}(n,m),\qquad m\leq n-1,
\end{aligned}\tag{9.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}^{\psi}_{2O}(m-n,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1/2}_{2B}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{CB}(n,m),\qquad m\geq n,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n-m,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1/2}_{2B}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{CB}(n,m),\qquad m\leq n,
\end{aligned}\tag{9.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(m-n,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1/2}_{2D}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{CD}(n,m),\qquad m\geq n,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n-m,m)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1/2}_{2D}(n,m)\hookrightarrow\mathcal{W}^{\psi}_{CD}(n,m),\qquad m\leq n.
\end{aligned}\tag{9.29}
$$

同样，来自引理 *9.1* 的映射 (9.2) 扩展为共形嵌入

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}^{\psi}_{2D}(n,0)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{2D}(n,0)\hookrightarrow V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n),\qquad \ell=-2\psi-2n+3,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n,0)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{2B}(n,0)\hookrightarrow V^{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n+1})\otimes\mathcal{F}(4n+1),\qquad \ell=-2\psi-2n+2,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{2C}(n,0)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{2C}(n,0)\hookrightarrow V^{\ell+1}(\mathfrak{sp}_{2n})\otimes\mathcal{S}(n),\qquad \ell=\psi-n-3/2,\\
&\mathcal{C}^{\psi}_{2O}(n,0)\otimes\mathcal{W}^{\psi-1}_{2O}(n,0)\hookrightarrow V^{\ell+1}(\mathfrak{osp}_{1|2n})\otimes\mathcal{S}(n)\otimes\mathcal{F}(2),\qquad \ell=\psi-n-1.
\end{aligned}\tag{9.30}
$$

10. Rationality results

本节将证明， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$有许多强有理的商，并利用这一点证明一些关于 $\mathcal{W}$-超代数的强有理性新结果。

引理 10.1。 对于 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，若 $\ell-2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$的可容许层，则 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)=Com(L_{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n))^{\mathbb{Z}_2}$ 是强有理的。

证明。 若 $\ell-2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$的可容许层，则 $\ell-1$也是，并且我们有单顶点代数的嵌入

$$
L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\hookrightarrow L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n),\qquad L_{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\hookrightarrow L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n),
$$

以及同构 [11]

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Com}(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}),L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}\cong\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2},\qquad \frac{1}{\ell+2n-3}+\frac{1}{k+2n-2}=1,\\
&\mathrm{Com}(L_{\ell}(\mathfrak{so}_{2n}),L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}\cong\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2},\qquad \frac{1}{\ell+2n-2}+\frac{1}{m+2n-2}=1.
\end{aligned}\tag{10.1}
$$

根据引理 9.1 证明中的相同论证， $L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n)$ 是 $L_{\ell}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 的共形扩张，因此 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 是 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 的共形扩张。由于 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})$ 和 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 都是强有理的， [8, 9], 其 $\mathbb{Z}_2$-轨形 [69, 68]也都是强有理的。因此， $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 是强有理顶点代数的共形扩张，故其强有理 [32]。□

尽管 $\mathcal{C}^{\ell}(2n)$ 是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 的单参数商，但在 ℓ 的某个特定取值下， $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$ 在 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 中的像可能是一个真~子代数；其中 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 是由场 $\{H,X^2,Y^2,H^2\}$ 生成的子代数 $\tilde{\mathcal{C}}_{\ell}(2n)$。此外，即使 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 是单的， $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 也不一定是单的。对于 $\ell-2$ 的一个可容许层，令 $M_{\ell}\subseteq\mathbb{C}[c,t]$ 为由 $c-\frac{(-2+t)(-1+2n)(-4+t+4n)}{(-2+t+2n)}\frac{(-4+t+2n)}{}$ 和 $t-\ell$ 生成的极大理想，从而 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}/M_{\ell}\cdot\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$的简单~商 $\widetilde{\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,M_{\ell}}}$ 与 $\mathcal{C}_{\ell}(2n)$ 的简单商重合。我们需要一个判据来确定 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,M_{\ell}}$ 何时是强有理的。

回想一下，对于所有的 k, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})$，它都是由类型为 $\mathcal{W}(2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 2n-2,\ n)$ 的生成元自由生成的，并具有一个 $\mathbb{Z}_2$-作用，该作用固定权为 $2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 2n-2$ 的生成元，并在权为 n 的场 P 上以 -1 作用。于是， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$由权为 $2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 2n-2$ 的生成元以及以下复合场强生成

$$
\omega^{2n+2d}=:\partial^{2d}PP:,\qquad d\geq 0.
$$

事实上，对于一般的 k，只需取 $0 \le d \le n$ 即可，但我们不需要用到这一事实。

回顾一下，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$ 的单参数商，因此对于参数 k 的一般值，它由权 2 和权 4 的场弱生成。我们取权 2 的场为 Virasoro 场 L，取权 4 的场为主场，并按 [57], 中的方式归一化；此外，按照 [57] 中的方式，我们递归地定义 $\{W^{2i} \mid i = 3, \dots, n-1\}$ 为 $W^{2i} = W^4_{(1)} W^{2i-2}$。在 [33], 的定理3.3的证明中，错误地声称对于所有非临界层 k，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 都由 $\{L, W^4\}$ 弱生成。我们将此说法更正如下。

定理 10.1。 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 对于除以下情况外的所有非临界 k，均由 $\{L, W^4\}$ 弱生成：(1) $k = -(2n-2) + \frac{d}{d-1}$ 以及 $k = -(2n-2) + \frac{d-1}{d}$，其中 $d \ge 2$为整数；(2) $2k^2(2n^2 - 2n - 3) + k(16n^3 - 40n^2 + 29) + 2(8n^4 - 32n^3 + 30n^2 + 11n - 20)$ 的两个根。
因此，在这些 k 取值下，简单商 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 也由 $\{L, W^4\}$ 弱生成。

证明。 Zhu交换代数 $R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})}$ 上的泊松括号 $\{\bar{a}, b\} = a_{(0)}b$ 显然是平凡的。 $\{\bar{a}, b\}\overline{\ } = \overline{a_{(1)}b}$ 给出的精化泊松括号是非平凡的，并且根据与 [14], 的命题A.3相同的论证，它与层 k 无关。此外，对于非临界值 k，所有场 W^{2i}（其中 $2 < i \le n-1$）都可以由 L, W^4 生成。对于 $r \ge n$，我们可以写出

$$W^{2r} = \lambda_{2r}\omega^{2r} + \cdots,$$

其中，其余项仅取决于 L，W^4，……，W^{2s}（对于 $s < r$），而 λ_{2r} 是 k 的有理函数。由于 $\omega^{2n} =: PP:$ 在 $R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})}$ 中非平凡，且 $R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})}$ 上的上述泊松结构与 k 无关，因此 λ_{2n} 必定与 k 无关。此外，由于 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 是由 L，W^4 生成的，对于 k 的一般值，λ_{2n} 必定非零。对于 $r > n$，λ_{2r} 不再独立于 k。不过，利用 OPE $W^4(z)P(w)$，它在 [37], 中对于 $d \ge 2$ 已完全确定，我们可以计算

(10.2)

$$W^4_{(1)}\omega^{2d-2+2n} = \frac{16(d+n)(k+2n-2)(1-6d+2dk+4dn)(2-6d-k+2dk-2n+4dn)}{21d(2d-1)(n-1)(2-k-8n+2kn+4n^2)f(n,k)g(n,k)}\omega^{2d+2n} + \dots,$$

$$f(n,\ k) = 1 - 6n + 2kn + 4n^2,$$

$$g(n,\ k) = 2k^2(2n^2 - 2n - 3) + k(16n^3 - 40n^2 + 29) + 2(8n^4 - 32n^3 + 30n^2 + 11n - 20)。$$

特别地，这表明 $\lambda_{2d+2n} \ne 0$，但上述有理函数为零或无定义的层除外。证明至此完成。□

推论 10.1. 设 $\ell - 2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 和 $\ell = -2\psi - 2n + 3$的一个可容许层。若 $(2n-2) + \ell \notin \mathbb{Z}_{\ge 1}$，$\mathcal{C}_{\psi,2D}(n, 0) = Com(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$，则它由场 L, W^4弱生成。
证明。 这显然成立，因为同构

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{C}^\psi_{2D}(n, 0), \qquad \ell = -2\psi - 2n + 3, \qquad \frac{1}{k + 2n - 2} + \frac{1}{\ell + 2n - 2} = 1,$$

在一般情形下成立，而相应的简单商同构在 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 和$\mathcal{C}_{\psi,2D}(n,0)$ 均为单参数代数特化的商时成立。当 k 为非临界时，$\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 总是如此；根据 [35, 定理 8.1], ，只要 $\ell + 2n - 2$ 不是负有理数，对于 $\mathcal{C}_{\psi,2D}(n, 0)$ 也成立。□

推论 10.2. 对于所有满足$(2n-2) + \ell \notin \mathbb{Z}_{\ge 1}$的可容许层 $\ell - 2$（$\mathfrak{so}_{2n}$），$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty, M_\ell}$同构于 $\mathcal{C}_\ell(2n)$的简单商，且是强有理的。

证明。 回忆一下，$\mathcal{C}_\ell(2n)$ 是一个共形扩张

(10.3) $$\mathrm{Com}(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n}), L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2} \otimes \mathrm{Com}(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}), L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2},$$

我们将用记号 $\{L_+, W^{2d}_+ \mid d \ge 2\}$和 $\{L_-, W^{2d}_- \mid d \ge 2\}$ 分别表示$\mathcal{W}^{\mathrm{ev}}_\infty$在 $Com(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$和 $Com(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}) \otimes \mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$中生成元的像。

假设 $\ell - 2$ 是可容许的，且 $(2n-2) + \ell \notin \mathbb{Z}_{\ge 1}$。根据定理 9.1 和引理 9.2，这些子代数的生成元 $L_\pm$，$W^4_\pm$ 属于由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$生成的子代数，而根据推论

10.1， $\{L_+, W^4_+\}$和 $\{L_-, W^4_-\}$弱生成了 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 中的子代数 $\mathrm{Com}(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$和 $\mathrm{Com}(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\ L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n))^{\mathbb{Z}_2}$。由此可知， $\tilde{\mathcal{C}}_\ell(2n)$ 是 (10.3) 的共形扩张，而 (10.3) 是单且强有理的。尽管 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 未必是单的，其简单商仍是 (10.3) 的共形扩张，因而是强有理的。□

10.1. **一些新的有理 $\mathcal{W}$-超代数**。我们考虑 $\mathcal{C}_{\psi,\ CO}(0,\ m)=\mathcal{W}_{\psi-h^\vee}(\mathfrak{osp}_{1|4m},\ f_{2m,\ 2m})^{\mathbb{Z}_2}$，其中 $h^\vee=2m+\frac{1}{2}$。

定理 10.2。设 m、$2n-1$ 互素，$m\geq n-1$，且 $\psi=\frac{4m+2n-1}{4m}$。则 $\mathcal{C}_{\psi,\ CO}(0,\ m)$ 是强有理的。

证明。在 $\mathcal{C}^\psi_{CO}(0,\ m)$ 和 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 的截断曲线上存在一个交点，此处

$$\ell=-2n+2+\frac{4m+2n-1}{2m},\qquad \psi=\frac{4m+2n-1}{4m}.$$

尽管此处 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 未必与简单商 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,\ M_\ell}$ 重合，但推论 10.2 表明$\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,\ M_\ell}$ 是强有理的。因此，只需证明 $\mathcal{C}_{\psi,\ CO}(0,\ m)$ 由权 1 和权 2 中的场弱生成，因为这将意味着 $\mathcal{C}_{\psi,\ CO}(0,\ m)\cong\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty,\ M_\ell}$。

回顾一下， $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m},f_{1|2m,2m})$由类型为 $\mathcal{W}(1、23、3、\ldots\ldots、2m-1、(2m)^3;\ \binom{2m+1}{2}^2)$的生成元自由生成，其中权为$\frac{2m+1}{2}$的两个奇场记为 $P^\pm$。轨形 $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m},f_{1|2m,2m})^{\mathbb{Z}_2}$是 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$的一个单参数商。根据定理 6.3 的证明中相同的论证，只要 r 是非临界的，且不属于使 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$的某个结构常数分母为零的（有限）点集，权不超过 3 的场就弱生成 $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m},f_{1|2m,2m})$的所有生成元，但 $P^\pm$除外；这些生成元相对于 $\mathbb{Z}_2$作用的特征值为 -1。轨形 $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m},f_{2m,2m})^{\mathbb{Z}_2}$ 由权为 1、2、……、$2m$ 的场以及以下复合场强生成（适用于 $n\geq 0$）：

$$\begin{aligned}
&w^{2n+2m+1}=:\partial^{2n}P^+P^-:\ -\ :P^+\partial^{2n}P^-:,\qquad h^{2n+2m+2}=:\partial^{2n+1}P^+P^-:\ +\ :P^+\partial^{2n+1}P^-:,\\
&x^{2n+2m+2}=:\partial^{2n+1}P^+P^+:,\qquad y^{2n+2m+2}=:\partial^{2n+1}P^-P^-:.
\end{aligned}\tag{10.4}$$

令 $W^{2n+2m+1}$、$X^{2n+2m+2}$、$Y^{2n+2m+2}$、$H^{2n+2m+2}$为 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_\infty$中相应生成元在$\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m}$、$f_{1|2m、\ 2m})^{\mathbb{Z}_2}$中的像。我们有

$$\begin{aligned}
&W^{2n+2m+1}=\lambda_{2n+2m+1}w^{2n+2m+1}+\cdots,\qquad H^{2n+2m+2}=\lambda_{2n+2m+2}h^{2n+2m+2}+\cdots,\\
&X^{2n+2m+2}=\lambda_{2n+2m+2}x^{2n+2m+2}+\cdots,\qquad Y^{2n+2m+2}=\lambda_{2n+2m+2}y^{2n+2m+2}+\cdots,
\end{aligned}\tag{10.5}$$

对于某些结构常数 $\lambda_{2n+2m+1}$、$\lambda_{2n+2m+2}$，其中其余项仅取决于权为 1、2、……、$2m$ 的生成元及其导数。

由于场 w^{2m+1} 在 $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m}$、$f_{1|2m、\ 2m})$的Zhu交换代数中是非平凡的，且泊松结构与 r无关，利用证明定理 6.3 中表明 λ_{2m+1} 对所有 $i<m$都是非零常数的同一论证，我们还可得到 λ_{2m+1} 是非零常数。因此，w^{2m+1} 由权至多为 3 的场生成。

对于 $n\geq 0$，$\lambda_{2n+2m+3},\lambda_{2n+2m+2}$ 并不独立于 ℓ。不过，利用算符乘积展开 $W^3(z)P^\pm(w)$ 和 $X^2(z)P^\pm(w)$，我们计算得

$$\begin{aligned}
W^3_{(1)}w^{2n+2m+1}=&\frac{9(k-1)k^3(m+n+1)(2kn+k-2n+2m-1)}{16(2n+1)(km+k+4m-1)}h^{2n+2m+2}+\cdots\\
W^3_{(1)}h^{2n+2m+2}=&\frac{9k^3(kn+k-n-m-1)(2kn+2km+3k-2n+10m-3)}{32(n+1)(km+k+4m-1)}w^{2n+2m+3}+\cdots\\
X^2_{(0)}w^{2n+2m+1}=&\frac{3k^2(2kn+k-2n+2m-1)}{4(2n+1)}x^{2n+2m+2}+\cdots,\\
X^2_{(0)}y^{2n+2m+2}=&\frac{3k^2(kn+k-n-m-1)}{8(n+1)}w^{2n+2m+3}+\cdots.
\end{aligned}\tag{10.6}$$

这里，k 是海森堡场 H 的层。再次使用定理 6.3 证明中的相同论证，$\lambda_{2n+2m+3}$，$\lambda_{2n+2m+2}$ 对于 $n\geq 0$ 均非零，只要上述表达式中的分子和分母不为零。对于 $k=2n$ 的正整数值，这种情况从未发生，因此所有场

(10.4) 中的 $\mathcal{W}^r(\mathfrak{osp}_{1|4m},\ f_{1|2m,\ 2m})^{\mathbb{Z}_2}$，均由 $r=\frac{k+4m-1}{4m}-h^\vee$ 中权不超过 3 的场生成。因此，单商 $\mathcal{W}_r(\mathfrak{osp}_{1|4m},\ f_{1|2m,\ 2m})^{\mathbb{Z}_2}$ 具有弱生成性质，因而同构于 $\mathcal{C}_\ell(2m)$。由于 $\mathcal{W}_r(\mathfrak{osp}_{1|4m},\ f_{1|2m,\ 2m})$ 是 $\mathcal{C}_\ell(2m)$ 的简单流扩张，因此它也是强有理的。□

10.2. **的弱生成** $\mathcal{C}_\ell(2n)$。现在我们来讨论一个更困难的问题：何时 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 具有弱生成性质，从而是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的一个商。我们首先证明该代数的一个弱生成结论

$$\mathcal{D}_\ell(2n)=\mathrm{Com}\left(L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n}),L_\ell(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n)\right),$$

它是 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 的简单流扩张。由定理 9.1 的证明中的相同论证可知，$\mathcal{D}_\ell(2n)$ 是张量积

$$\mathrm{Com}(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n}),L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n))\otimes\mathrm{Com}(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n}),L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n)),$$

它同构于 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})$，其中 $k,\ m$ 满足

$$\frac{1}{\ell-1+h^\vee}+\frac{1}{k+h^\vee}=1,\qquad \frac{1}{\ell+h^\vee}+\frac{1}{m+h^\vee}=1. \tag{10.7}$$

定理 10.3。设 $\ell-2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的一个可容许层。那么 $\mathcal{D}_\ell(2n)$ 由 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{W}_{k'}(\mathfrak{so}_{2n})$ 的弱生成元，以及权一场 H 弱生成。

证明。回顾 $\mathcal{F}(2n)$ 作为 $L_1(\mathfrak{so}_{2n})$-模的分解，即 $\mathcal{F}(2n)\cong L_1(\mathfrak{so}_{2n})\oplus L_1(\omega_1)$，其中 ω_1 是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的第一个基本权。另请注意，根格 Q 是格 $\mathbb{Z}^n$ 中指数为二的子格，并且 $\mathbb{Z}^n=Q\cup(Q+\omega_1)$。我们将使用 [11, 主定理 3], ，因此先引入记号。

- $L_k(\lambda)$表示最高权为 λ of $L_k(\mathfrak{so}_{2n})$的简单模。
- P_+^k 表示支配权集合 $\lambda\in P_+$ of $\mathfrak{so}_{2n}$，满足 $L_k(\lambda)$是 $L_k(\mathfrak{so}_{2n})$的模。
- $R_+^k=P_k^+\cap\mathbb{Z}$。
- $\mathbf{L}_k(\chi_\mu)$表示在层 k 上、最高权为χ_μ的简单主幺 $\mathcal{W}$-代数 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的简单模。这里，χ_μ 是与最高权 μ相关联的中心特征。

- $h^\vee=2n-2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$的对偶考克斯特数。

那么，对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n}$ 和 $\ell-2$ 的一个可容许层，[11, 主要定理 3] 表述如下

$$L_{\ell-2}(\mu)\otimes\mathcal{F}(2n)\cong\bigoplus_{\lambda\in R_+^{\ell-1}}L_{\ell-1}(\lambda)\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{\mu-(k+h^\vee)\lambda}),\qquad \frac{1}{\ell-1+h^\vee}+\frac{1}{k+h^\vee}=1. \tag{10.8}$$

[27], 的引理 2.4（这是对 [31], 的一项主要结果的重新表述）指出：设 $V,\ W$ 为顶点算子代数，且 $\mathcal{C}$ 是由 V-模构成的半单刚性顶点张量范畴的一个子范畴，并且

$$A=\bigoplus_{X\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})}X\otimes\tau(X)^*$$

$V\otimes W$ 的一个共形扩张是一个顶点算子超代数。这里，τ 是从 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ 到 W 的模的一个映射。假设 W 是强有理的。那么 $\mathcal{C}$ 实际上在张量积下封闭。令 $U\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$，则 A 弱生成于 $V\otimes W$，以及 U 中的任意场，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的 Grothendieck 环由 U 生成。此外，在此情形下，[31] 的主要结果是：$\mathcal{C}$ 与 W-模范畴之间存在辫反转等价，其中这些模的不可约对象出现在 A 的分解中。在对象上，此等价由映射 τ 给出。

在我们的情形中，$A=L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n)$、$V=L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})$、$W=\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$。$L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})$ 在可容许层 $\ell-1$ 上的普通模范畴是顶点张量范畴，这一点是 [30], ；它是半单的，这一点是[8] ；它具有刚性，这一点是 [21]。$\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$ 的强有理性是 [8, 9]。$L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n)$ 甚至由 $L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})$ 的权一场与 $\mathcal{F}(2n)$ 的权一场强生成。因此，特别地，简单对象为满足 $\lambda\in R_+^{\ell-1}$ 的 $L_{\ell-1}(\lambda)$ 的 $L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n})$ 的融合环由 $L_{\ell-1}(\omega_1)$ 生成；由此，不可约对象为满足$\lambda\in R_+^{\ell-1}$的 $\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\lambda})$ 的 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$ 的融合环由 $\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\omega_1})$ 生成。

现在我们两次应用 [11,主定理 3]：

$$\begin{aligned} L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(4n) &\cong L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n})\otimes\mathcal{F}(2n)\otimes\mathcal{F}(2n)\\ &\cong \bigoplus_{\lambda\in R_+^{\ell-1}} L_{\ell-1}(\lambda)\otimes\mathcal{F}(2n)\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{\mu-(k+h^\vee)\lambda})\\ &\cong \bigoplus_{\lambda\in R_+^{\ell-1}}\bigoplus_{\nu\in R_+^{\ell}} L_\ell(\nu)\otimes\mathbf{L}_m(\chi_{\lambda-(m+h^\vee)\nu})\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\lambda}) \end{aligned} \tag{10.9}$$

与 $\frac{1}{m+h^\vee}+\frac{1}{\ell+h^\vee}=1$。我们验证，这一点连同式 (10.8) 给出的层之间的关系，推出

$$\frac{1}{k+h^\vee}+(m+h^\vee)=2.$$

Thus

$$\mathcal{D}_\ell(2n)\cong\bigoplus_{\lambda\in R_+^{\ell-1}}\mathbf{L}_m(\chi_\lambda)\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\lambda}).$$

我们可以再次应用 [27] 的引理 2.4，也就是说，由于 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n},\ f_{\rm prin})$ 的融合环（其不可约对象为 $\chi_{-(k+h^\vee)\lambda}$）中的 $\mathbf{L}_k$，且 $\lambda\in R_+^{\ell-1}$ 由 $\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\omega_1}$ 生成，可得 $\mathcal{D}_\ell(2n)$ 由 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n},\ f_{\rm prin})\otimes\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$ 与 $\mathbf{L}_m(\chi_{\omega_1})\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\omega_1}$ 中的任意元素弱生成。我们可以选择该向量为顶层向量。$\mathbf{L}_m(\chi_\lambda)$ 的顶层的共形权为 [11,(30)]

$$h_\lambda=\frac{(\lambda+\rho)^2-\rho^2}{2(m+h^\vee)}-\lambda\rho^\vee$$

以及 ρ，$\rho^\vee$ 韦尔向量和对偶韦尔向量。对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_{2n}$ 二者重合，并计算 $\omega_1^2=1$，$\rho\omega_1=n-1$，$2\rho^2=n(n-1)$ 可知，$\mathbf{L}_m(\chi_{\omega_1})\otimes\mathbf{L}_k(\chi_{-(k+h^\vee)\omega_1})$ 的顶层确实具有共形权一。□

对于子代数 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})$ 和 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$，我们分别用 P^+ 和 P^- 表示权 n 生成元。对于相应的场，我们在 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 中也使用相同的记号。经过缩放后，不难看出它们具有如下形式

$$P^+=:\phi^{1,1}\phi^{1,2}\cdots\phi^{1,2n}:+\cdots,\qquad P^-=:\phi^{2,1}\phi^{2,2}\cdots\phi^{2,2n}:+\cdots,$$

其中其余 项在极限 $\ell\to\infty$ 下消失。我们得到定理 10.3 的以下推论 .

推论 10.3。设 $\ell-2$ 对 $\mathfrak{so}_{2n}$ 是可容许的。那么 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 作为模由权 1 场 H 连同权 $2n$ 场： P_+P_-： 在 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 上生成。

证明。由于 $\mathcal{C}_\ell(2n)=\mathcal{D}_\ell(2n)^{\mathbb{Z}_2}$，它是以下 4 个分量的直和：

(1) $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$，(2) 由 H 生成的 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$-模，(3) 由形如 $A_{(r)}B_{(s)}1$ 的元素张成的空间，其中 A 和 B 分别属于 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})$ 和 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$ 的 -1-特征空间，(4) 由形如 $A_{(r)}B_{(s)}H$ 的元素张成的空间，其中 A 和 B 分别属于 $\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})$ 和 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})$ 的 -1-特征空间。

显然， A 和 B 可以分别写成以下元素的线性组合： $A_i\partial^iP_+$ ： 和： $B_i\partial^iP_-$ ，其中 $A_i\in\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 和 $B_i\in\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$。任意形如

$$(:A_i\partial^iP_+:)_{(r)}(:B_i\partial^iP_-):_{(s)}1,$$

属于由以下形式的元素生成的 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$-模

$$:(\partial^iP_+)\partial^jP_-:=((L_+)_{(0)})^i((L_-)_{(0)})^j(:P_+P_-:),$$

因此它属于由： P_+P_- :生成的 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$-模。同样的论证表明，$A_{(r)}B_{(s)}H$ 属于由 (: P_+P_- :)$_{(s)}H$ 生成的 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}\otimes\mathcal{W}_m(\mathfrak{so}_{2n})^{\mathbb{Z}_2}$-模，其中 $s\le1$，由此完成证明。□

回忆一下，对于一般的 ℓ， $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 是单的，且由 $\{H, X^{2i}, Y^{2i}, H^{2i}, W^{2i+1} |\ i \geq 1\}$ 强生成。此外，对于一般的 ℓ，这些生成元及其导数之间的第一个正规序关系出现在权 $4n+2$ 处，因此只有有限多个层 ℓ 会在权 $d \leq 2n$ 处存在这些生成元及其导数之间的正规序关系。这些层恰好是与权 $2n$ 空间 $\mathcal{C}^\ell(2n)[2n]$ 上的双线性形式 $B(u,\ v) = u_{(4n-1)}v$ 相关联的矩阵行列式的根。对于 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，令 $S_d \subseteq \mathcal{C}^\ell(2n)$ 为 $\{H, X^{2i}, Y^{2i}, H^{2i}, W^{2i+1} |\ 1 \leq i < d\}$ 及其导数的所有正规序单项式所张成的空间。该空间在 $H_{(0)}$ 的作用下保持不变，因此商 $\mathcal{C}^\ell(2n)[d]/S_d$ 也具有良定义的 $H_{(0)}$ 作用。在权 $2n$ 处，$\dim\ \mathcal{C}^\ell(2n)[2n]/S_{2n} = 3$，且 $H_{(0)}$ 的作用的特征值为 0，± 2。

由 (9.13)，我们得到一个关系

$$a_{n,+}W_+^{2n} + a_{n,-}W_-^{2n} \equiv (b_{n,+} + b_{n,-})H^{2n} \bmod S_{2n},$$

其中 $a_{n,\pm}$ 和 $b_{n,\pm}$ 是非零常数。由于 $H_{(0)}H^{2n} = 0$, $a_{n,+}H_{(0)}W_+^{2n} \equiv -a_{n,-}H_{(0)}W_-^{2n}$ 模 S_{2n}。我们定义

$$U^{2n} = H_{(0)}W_+^{2n}. \tag{10.10}$$

引理 10.2. 对于 ℓ 的一般值，我们有一个关系

$$U^{2n} \equiv h(\ell) : P_+P_- :\ mod\ S_{2n}, \tag{10.11}$$

对于某个非零有理函数 $\mu(\ell)$。

证明。 我们对 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 中的场及大水平极限 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}$ 中对应的场使用相同的记号，并且也像上文一样，用记号 S_d 表示 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}[d]$ 中对应的子空间。注意，在 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}$ 中，我们有

$$W_+^{2n} \equiv \lambda \sum_{i=1}^{2n} : (\partial^{2n-1}\phi^{1,i})\phi^{i,i} :\ \bmod S_{2n},$$

对于某个非零常数 λ。这是由定理 10.1 得出的，因为 $\mathcal{F}(2n)^{\mathrm{O}_{2n}} \cong \mathcal{W}_{-h^\vee+1}(\mathfrak{so}_{2n})$，且 W_+^{2n} 和 $\sum_{i=1}^{2n} : (\partial^{2n-1}\phi^{1,}{}^i)\phi^{1,}{}^i$ 均不属于 S_{2n}。应用 $H_{(0)}$ 得

$$U^{2n} \equiv \lambda \sum_{i=1}^{2n} : (\partial^{2n-1}\phi^{1,i})\phi^{2,i} :\ \bmod S_{2n},$$

在 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}$ 中。最后，我们声称，在 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}$ 中，有

$$: P_+P_- : = \mu \sum_{i=1}^{2n} : (\partial^{2n-1}\phi^{1,i})\phi^{2,i} :\ \bmod S_{2n},$$

其中某个非零常数为 μ。通过调整 [64, Section 11], 中的方法可以看出这一点，具体细节从略。特别地，由此可知，在 $\mathcal{F}(4n)^{\mathrm{O}_{2n}}$ 中，我们有关系

$$U^{2n} \equiv \frac{\lambda}{\mu} : P_+P_- :\ \bmod S_{2n}.$$

这意味着关系 (10.11) 存在于 $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 中。 □

Theo注 10.4. 假设 $\ell - 2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的一个可容许层，并且还选择得使其 at

(1) $(2n-2) + \ell \notin \mathbb{Z}_{\geq 1}$,(2) $\mathcal{C}^\ell(2n)$ 的权 $2n$ 空间上的配对是非退化的，因此在权 $d \leq 2n$ 上不存在正规序关系。

T因此 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$ 弱生成，因而是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的一个商。

证明。 首先，我们断言，对于每个 $d < 2n$，由 $\{H, X^{2i}, Y^{2i}, H^{2i}, W^{2i+1}\}$ 中正规序单项式及其总权重为 d 的导数张成的空间，恰好是权为 d 的子空间 $\mathcal{C}_\ell(2n)[d]$。否则，这些单项式之间就会存在关系，这与我们的假设矛盾。因此，对于 $d < 2n$， $\mathcal{C}_\ell(2n)[d]$ 中的所有元素都可以由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$ 生成。

接下来，将 (10.11) 视为 ℓ 的有理函数域上的一个关系，我们可以清除分母，并除去结构常数中出现的任何公因子线性因子，从而得到一个关系

$$a(\ell)U^{2n} = b(\ell) : P_+P_- : +Q, \tag{10.12}$$

其中 $a(\ell)$ $b(\ell)$ 是 ℓ 中的多项式，而 Q 是 $\{H, X^{2i}, Y^{2i}, H^{2i}, W^{2i+1} | \, 1 \leq i < n\}$ 及其导数的一个正规序多项式，其中所有系数都是 ℓ 中的多项式。此外，这些系数与 $a(\ell)$ $b(\ell)$ 没有公共根。将层 ℓ 固定后，有四种可能：

(1) $a(\ell) = 0 = b(\ell)$, (2) $a(\ell) = 0$ 以及 $b(\ell) \neq 0$, (3) $a(\ell) \neq 0$ 以及 $b(\ell) = 0$, (4) $a(\ell) \neq 0$ 以及 $b(\ell) \neq 0$。

在情形（1）中，我们将得到 $Q = 0$，这会在权 $2n$ 的生成元$\{H, X^{2i}, Y^{2i}, H^{2i}, W^{2i+1} | \, 1 \leq i < n\}$之间产生一个非平凡关系，与我们的假设相矛盾。如果 $a(\ell) = 0$ 以及 $b(\ell) \neq 0$，那么我们有一个关系：$P_+P_- := -_{b}{}^{1}{}_{\ell()} Q$。由于 $Q \in S_{2n}$，这意味着：P_+P_- : 由$\{H, X^2, Y^2, H^2\}$生成，因此根据推论 10.3，我们的结论成立。如果 $a(\ell) \neq 0$ 以及 $b(\ell) = 0$，那么我们有一个关系$U^{2n} = {}^{1}_{a\,\ell()} Q$。由（9.13）可知

$$a_{n,\pm} W^{2n}_{\pm} = b_{n,\pm} H^{2n} \pm (X^{2n} + Y^{2n}) \bmod S_{2n},$$

其中 $a_{n,\pm}$，$b_{n,\pm} \neq 0$。应用 $H_{(0)}$，我们得到

$$a_{n,+} U^{2n} \equiv 2b_{n,+}(X^{2n} - Y^{2n}) \bmod S_{2n}.$$

由于$U^{2n} = {}^{1}_{a\ell()} Q \equiv 0$模 S_{2n}，我们有 $X^{2n} \equiv Y^{2n}$模 S_{2n}。由于 $H_{(0)}$保持 S_{2n}，且 X^{2n}，Y^{2n}具有 $H_{(0)}$-特征值 2，-2，这只有在 $X^{2n} \equiv 0$ 模 S_{2n} 且 $Y^{2n} \equiv 0$ 模 S_{2n}时才可能发生。但此时我们有 $a_{n,\pm} W^{2n}_{\pm} \equiv b_{n,\pm} H^{2n}$模 S_{2n}，因此 ${}^{a_n}_{\cdot\, b_n}{}^{+}_{\cdot\, +} W^{2n}_{+} \equiv {}^{a_n}_{\cdot\, b_n}{}^{-}_{\cdot\, -} W^{2n}_{-}$模 S_{2n}，这是不可能的。

因此只剩下情形（4），即我们有一个关系

$$: P_+P_- : = \frac{a(\ell)}{b(\ell)} U^{2n} - \frac{1}{b(\ell)} Q.$$

由于 $W^{2n}_{\pm}$由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$和 $U^{2n} = H_{(0)} W^{2n}_{+}$生成，$: P_+P_- :$属于由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$生成的子代数，根据推论 10.3 即得证。□

10.3. 的更多有理商 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$及一些进一步的猜想。除了 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$, M_ℓ之外，M_ℓ是当 $\ell - 2$ 对 $\mathfrak{so}_{2n}$ 可容许时 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 的简单商；人们还预期 $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty}$拥有另一大类强有理商。回想 [37] ,

(1) $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{C}^{\psi}_{2B}(0, n)$ for $\psi = k = n + \frac{1}{2}$,
(2) $\mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}), V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1))^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{C}^{\phi}_{2B}(n, 0)$ for $\ell = -2\phi - 2n + 2$.
(3) We have the isomorphism

$$\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n, 0) \cong \mathcal{C}^{\phi}_{2B}(0, n), \qquad \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\phi} = 2, \tag{10.13}$$

单参数顶点代数的，它可以扩展为余集实现

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n}) \cong \mathrm{Com}(V^\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}), V^{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1)),$$

其中 k 和 ℓ 如上所述相关。

此外，当 $\ell - 1$ 对 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 可容许时，我们有单顶点代数的嵌入 $L_\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}) \hookrightarrow L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1))$，并且有单顶点代数的同构

$$\mathcal{W}_k(\mathfrak{osp}_{1|2n}) \cong \mathrm{Com}(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}), L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1)).$$

此外，[37, 猜想 7.1] 指出，只要 $\ell - 1$ 对 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 可容许，$\mathcal{C}^{\psi}_{2B}(n, 0)$ 就应当是强有理的，这将推出 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{osp}_{1|2n})$ 的强有理性。通过与引理 10.1 的证明相同的论证，这将推出

猜想 10.1. 对于 $\ell - 2$ $\mathfrak{so}_{2n+1}$的一个可容许层，

$$\mathcal{C}_\ell(2n+1) = Com(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}), L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2(2n+1)))^{\mathbb{Z}_2},$$

它是.....的扩张

$$Com(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n+1}), L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1))^{\mathbb{Z}_2} \otimes Com(L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1}), L_{\ell-2}(\mathfrak{so}_{2n+1}) \otimes \mathcal{F}(2n+1))^{\mathbb{Z}_2},$$

is strongly rational.

与 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 的情形一样， $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 在 $\mathcal{C}_\ell(2n+1)$ 中的像（即由 $\{H, X^2, Y^2, H^2\}$ 生成的子代数 $\tilde{\mathcal{C}}_\ell(2n+1)$）可能是真子代数，也可能不是单代数。对于 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 的可容许 $\ell-2$，令 $N_\ell \subseteq \mathbb{C}[c,t]$ 为由 $c-\ ^{2\ (-2+t)\ n}_{(-2+t+4n)\ (-3+t+2n)\ (-1+t+2n)}$ 和 $t-\ell$ 生成的极大理想，使得 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}/N_\ell \cdot \mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}$ 的简单商 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}{}_{,\ N_\ell}$ 与 $\tilde{\mathcal{C}}_\ell(2n+1)$ 的简单商相同。与上文一样，我们需要一个判据来确定 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}{}_{,\ N_\ell}$ 何时是强有理的。

回顾一下， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})$由 $\mathcal{W}(2,\ 4,\ \ldots\ldots,\ 2n;\ n+\frac{1}{2})$ 自由生成，并具有一个 $\mathbb{Z}_2$ 作用，该作用固定权 2，4，……，$2n$ 上的生成元，并在权为 $n+\frac{1}{2}$ 的奇场 P 上作用为 -1。轨形$\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 由权 2，4，……，$2n$ 上的生成元以及以下复合场强生成

$$\omega^{2n+2d+2} =: \partial^{2d+1}PP:, \qquad d \geq 0.$$

回顾一下， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 是 $\mathcal{W}_\infty^{\mathrm{ev}}$ 的一个单参数商，因此对于 k 的一般值，它由权 2 和 4 上的场弱生成。和之前一样，我们令权 2 场为 Virasoro 场L，令权 4 场为主场，并按 [57], 中的方式归一化；$\{W^{2i} |\ i=3,\ldots,n-1\}$ 则由 $W^{2i} = W^4_{(1)}W^{2i-2}$ 递归定义。我们需要确定使得 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 不会由 L, W^4 弱生成的 k 的取值。首先，对于某个非平凡多项式 $p(k)$，有 $W^4_{(1)}W^{2n} = p(k)\omega^{2n+2}$，但我们无法在一般情形下计算该多项式。

定理 10.5。 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 对于所有非临界的 k（以下情况除外），均由 L、W^4 弱生成：

(1) $p(k)$ 的根，(2) $k=-(n+\frac{1}{2})+\ ^{d-1}_{2d-1}$ 和 $k=-(n+\frac{1}{2})+\ ^{2d-1}_{4\ d-1}$（其中整数 $d\geq 2$），

(3) $4k^2(4n^2-7)+2k(16n^3-28n-7)+16n^4-28n^2-14n-7$ 的两个根。

因此，在 k 的这些取值处，简单商 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 也由 L、W^4 弱生成。

证明。 Zhu交换代数 $R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})}$ 上的泊松括号由 $\{\bar{a},b\}=a_{(0)}b$ 给出，且为平凡的；而由 $\overline{\{a,b\}}=a_{(1)}b$ 给出的精化泊松括号非平凡，并且与 s 无关。此外，对于 $2<i\leq n$，所有场 W^{2i} 在 k 的非临界值处都可由 L, W^4 生成。

只要 k 不是 $p(k)$ 的根， ω^{2n+2} 也由 L, W^4生成。类似地，对于 $r>n+1$，我们有一个关系

$$W^{2r} = \lambda_{2r}\omega^{2r}+\cdots,$$

其中其余各项仅依赖于 $L, W^4, \ldots, W^{2s}$（对于 $s<r$），而 λ_{2r}是 k的有理函数；由于当 k取一般值时， $\mathcal{W}^k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$由 L, W^4生成，因此该有理函数非平凡。利用算符乘积展开 $W^4(z)P(w)$（它在 [37], 中针对 $d\geq 2$ 已完全确定），我们可以计算

(10.14)

$$W^4_{(1)}\omega^{2d-2+2n} = \frac{32(d+n)(1+2k+2n)(-1-4k+4dk-4n+4dn)(1-2k+4dk-2n+4dn)}{21(-1+d)(-1+2d)(-1+2n)(-1+4kn+4n^2)f(n,k)g(n,k)}\omega^{2d+2n}+\ldots,$$

$f(n,\ k)=1+2k+2n+4kn+4n^2$,

$g(n,\ k)=4k^2(4n^2-7)+2k(16n^3-28n-7)+16n^4-28n^2-14n-7.$

特别地，这表明 $\lambda_{2d+2n}\neq 0$，但上述有理函数为零或未定义时对应的层除外。□

推论 10.4. 设 $\ell-2$ 是 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ 的一个可容许层，满足

(1) $2n-1+\ell\neq 2d-1$ 对于 $d\in\mathbb{Z}_{\geq 2}(2)$ p

$(k)\ \neq 0$，其中 k、ℓ 如上所述相关。

那么 $\mathcal{C}_{\psi,\ 2B}(n、0)=Com(L_\ell(\mathfrak{so}_{2n+1})\ L_{\ell-1}(\mathfrak{so}_{2n+1})\otimes\mathcal{F}(2n+1))^{\mathbb{Z}_2}$ 由 $\{L, W^4\}$弱生成。

证明。 这是显然的，因为同构 (10.13) 泛型成立，而相应的简单商同构在 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 和 $\mathcal{C}_{\psi,\ 2B}(n,\ 0)$ 均为单参数代数特化的商时成立。当 k 为非临界时，对于 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{osp}_{1|2n})^{\mathbb{Z}_2}$ 总是如此；根据 [35, 定理 8.1],，只要 $\ell+2n-1$ 不是负有理数，对于$\mathcal{C}_{\psi,\ 2B}(n,\ 0)$ 也成立。□

根据推论 10.2 的证明所用的相同论证，推论 10.4 和猜想 10.1 推出以下结论

猜想10.2。 对于所有满足 $-(2n-2)+\ell \notin \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathcal{W}^{\mathfrak{so}_2}_{\infty},_{N_\ell}$ 的 $\mathfrak{so}_{2n+1}$ $\ell-2$ 可容许层，其中 ˜是 $\mathcal{C}_\ell(2n)$ 的同构简单商，且为强有理。

最后，我们注意到， $\mathcal{C}^{\psi}_{CO}(0,\ m)$ 和 $\mathcal{C}^{\ell}(2n+1)$ 的截断曲线相交于 t

$$\ell = -(2n-1)+\frac{2m+n}{m}, \qquad \psi = \frac{2m+n}{2m}.$$

By 与定理 10.2 的证明相同的论证表明，猜想10.2 意味着以下 g.

猜想10.3。 假设 m、 n 互素。对于 $m \geq 2n-1$ 和 $\psi = \frac{2m+n}{2m}$， $\mathcal{C}_{\psi,\ CO}(0,\ \cancel{m)}$ 是强有理的。这将意味着 $\mathcal{W}_{\frac{n+2m}{2m}-(2m+\frac{1}{2})}(\mathfrak{osp}_{1|4m}$、 $f_{2m,\ 2m})$ 的强有理性。 —— -

Appendix A. Generators of commuting even-spin subVOAs of weights four

权重四生成元具有以下形式，

$$W^4_{\pm} = (k-3)(k-2)(k-1)(k+2)\omega_{\pm} \sum_{\Omega \in PBW[4]} \xi_\Omega \Omega,$$

其中 PBW[4] 是张成子空间 $\mathcal{W}_\infty^{\mathfrak{so}_2}[4]$的 28 个单项式。结构常数 $\{\xi_\Omega\}_{\Omega\in\mathrm{PBW}[4]}$如下,

$$
\begin{aligned}
\xi_{W^{4,0}} =&1,\\
\xi_{W^{4,-2}} =&\frac{(k-2)(k-1)\omega\omega_3 N_{W^{4,-2}}}{2(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)D_2},\quad \xi_{W^{4,2}}=\xi_{W^{4,-2}},\\
\xi_{:HW^{3,0}:} =&\frac{(k-2)(k-1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)N_{:HW^{3,0}:}}{(\omega-1)\omega_4(k\omega-1)(k\omega+1)D_2}\\
\xi_{\partial W^{3,0}} =&\frac{(k-8)(k-2)(k-1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)(k\omega+2\omega+2)N_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}}{4(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:W^{2,2}W^{2,-2}:} =&\frac{3(k-8)k^2\omega^2(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2\omega_3^2 N_{:W^{2,-2}W^{2,2}:}}{(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2}\\
\xi_{:W^{2,0}W^{2,0}:} =&\frac{3(k-8)k^2(\omega-1)(\omega+1)^2(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:W^{2,0}W^{2,0}:}}{4(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2}\\
\xi_{:W^{2,0}W^{2,-2}:} =&\frac{3(k-8)k^2\omega(\omega+1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)(11k\omega-16\omega-6)\omega_2\omega_3 N_{W^{4,-2}}}{(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2^2},\quad \xi_{:W^{2,0}W^{2,2}:}=\xi_{:W^{2,0}W^{2,-2}:},\\
\xi_{:W^{2,-2}W^{2,-2}:} =&-\frac{3k^2\omega^2(k\omega+\omega+3)(5k\omega-12\omega-7)\omega_2\omega_3^2 N_{W^{4,-2}}}{2(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\quad \xi_{:W^{2,2}W^{2,2}:}=\xi_{:W^{2,-2}W^{2,-2}:},\\
\xi_{:HHW^{2,0}:} =&-\frac{3(k-8)k(\omega+1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{W^{2,-2}W^{2,2}}}{(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:H\partial W^{2,0}:} =&-\frac{3(k-8)k(\omega+1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}}{2(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\quad \xi_{:\partial HW^{2,0}:}=\xi_{:H\partial W^{2,0}:},\\
\xi_{\partial^2 W^{2,0}} =&\frac{9(k-8)k^2(\omega+1)(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{\partial^2 W^{2,0}}}{1(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)6\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:HHW^{2,-2}:} =&\frac{6k\omega(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2\omega_3 N_{W(4,-1)}N_{:HHW^{2,0}:}}{(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2^2},\quad \xi_{:HHW^{2,2}:}=\xi_{:HHW^{2,-2}:},\\
\xi_{:H\partial W^{2,-2}:} =&-\frac{3(k-8)k^2\omega(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2\omega_3 N_{W^{4,-2}}N_{:H\partial W^{2,-2}:}}{2(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2^2},\quad \xi_{:H\partial W^{2,2}:}=-\xi_{:H\partial W^{2,-2}:},\\
\xi_{:\partial HW^{2,-2}:} =&\frac{3k\omega(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2\omega_3 N_{W^{4,-2}}N_{\partial HW^{2,-2}}}{(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2^2},\quad \xi_{:\partial HW^{2,2}:}=-\xi_{:\partial HW^{2,-2}:},\\
\xi_{:\partial^2 W^{2,-2}:} =&-\frac{3(k-8)k^2\omega(k\omega-3\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2\omega_3 N_{W^{4,-2}}N_{\partial^2 W^{2,-2}}}{4(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2^2},\quad \xi_{:\partial^2 W^{2,2}:}=\xi_{:\partial^2 W^{2,-2}:},\\
\xi_{:HHHH:} =&-\frac{(k\omega-3\omega+1)(k\omega-\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:HHHH:}}{(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:\partial HHH:} =&\frac{3(k-8)(k\omega-3\omega+1)(k\omega-\omega-1)(k\omega-\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}}{(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:\partial^2 HH:} =&\frac{k(k\omega-3\omega+1)(k\omega-\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:\partial^2 HH:}}{4(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{:\partial H\partial H:} =&-\frac{3k(k\omega-3\omega+1)(k\omega-\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:\partial H\partial H:}}{8(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2},\\
\xi_{\partial^3 H} =&\frac{(k-8)k^2(k\omega-3\omega+1)(k\omega-\omega-1)(k\omega-\omega+1)(k\omega+\omega+3)\omega_2 N_{:W^{2,2}W^{2,-2}:}}{32(\omega-1)(k\omega-1)(k\omega+1)(k\omega+2\omega-2)\omega_4 D_1D_2}.
\end{aligned}
$$

分母和分子如下,

$$
\begin{aligned}
D_1 =&5k^3\omega^2-15k^2\omega^2+10k\omega^2-5k\omega-5k-44\omega-44,\\
D_2 =&5k^4\omega^2-14k^3\omega^2+13k^2\omega^2-5k^2+40k\omega^2-40k-64\omega^2+64,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

$$N_{:W^{2,2}W^{2,-2}:} =25k^7\omega^4 - 120k^6\omega^4 - 60k^6\omega^3 + 120k^5\omega^4 + 265k^5\omega^3 + 10k^5\omega^2 + 340k^4\omega^4 - 405k^4\omega^3$$
$$- 135k^4\omega^2 + 60k^4\omega - 703k^3\omega^4 - 39k^3\omega^3 + 238k^3\omega^2 + 119k^3\omega - 35k^3 - 186k^2\omega^4$$
$$+ 379k^2\omega^3 + 575k^2\omega^2 - 319k^2\omega - 129k^2 + 736k\omega^4 + 102k\omega^3 - 870k\omega^2 - 102k\omega + 134k + 192\omega^4 - 384\omega^2 + 192,$$
$$N_{:\partial^2 HH:} =5k^{10}\omega^5 + 30k^9\omega^5 - 5k^9\omega^4 - 795k^8\omega^5 - 170k^8\omega^4 - 10k^8\omega^3 + 3456k^7\omega^5 + 2355k^7\omega^4$$
$$+ 114k^7\omega^3 + 10k^7\omega^2 - 4099k^6\omega^5 - 8936k^6\omega^4 - 1306k^6\omega^3 + 166k^6\omega^2 + 5k^6\omega - 7792k^5\omega^5$$
$$+ 12447k^5\omega^4 + 5816k^5\omega^3 - 782k^5\omega^2 - 144k^5\omega - 5k^5 + 22817k^4\omega^5 + 3032k^4\omega^4 - 6526k^4\omega^3$$
$$- 3636k^4\omega^2 + 589k^4\omega + 4k^4 - 5582k^3\omega^5 - 18389k^3\omega^4 - 19932k^3\omega^3 + 8210k^3\omega^2$$
$$+ 5674k^3\omega - 61k^3 - 24552k^2\omega^5 - 2150k^2\omega^4 + 41360k^2\omega^3 + 10380k^2\omega^2 - 9128k^2\omega$$
$$- 2470k^2 + 11904k\omega^5 + 14016k\omega^4 - 6912k\omega^3 - 15360k\omega^2 - 4992k\omega + 1344k$$
$$+ 4608\omega^5 + 3456\omega^4 - 9216\omega^3 - 6912\omega^2 + 4608\omega + 3456,$$
$$N_{:\partial H\partial H:} =5k^{10}\omega^5 - 45k^9\omega^5 - 5k^9\omega^4 + 240k^8\omega^5 + 85k^8\omega^4 - 10k^8\omega^3 - 744k^7\omega^5 - 1020k^7\omega^4 - 96k^7\omega^3$$
$$+ 10k^7\omega^2 + 1001k^6\omega^5 + 4114k^6\omega^4 + 1604k^6\omega^3 + 16k^6\omega^2 + 5k^6\omega + 617k^5\omega^5 - 6591k^5\omega^4$$
$$- 6358k^5\omega^3 - 164k^5\omega^2 + 141k^5\omega - 5k^5 - 3766k^4\omega^5 + 293k^4\omega^4 + 11018k^4\omega^3 + 3048k^4\omega^2$$
$$- 1052k^4\omega - 101k^4 + 4060k^3\omega^5 + 8788k^3\omega^4 - 5436k^3\omega^3 - 6940k^3\omega^2 - 1184k^3\omega + 392k^3$$
$$- 792k^2\omega^5 - 1820k^2\omega^4 - 3568k^2\omega^3 - 1128k^2\omega^2 + 4360k^2\omega + 1028k^2 - 576k\omega^5 - 5520k\omega^4$$
$$+ 1152k\omega^3 + 6816k\omega^2 - 576k\omega - 1296k - 1152\omega^4 + 2304\omega^2 - 1152, N_{\partial^2 W^{2,}}$$
$$_0 =5k^7\omega^4 - 24k^6\omega^4 - 12k^6\omega^3 + 24k^5\omega^4 + 53k^5\omega^3 + 2k^5\omega^2 + 44k^4\omega^4 - 81k^4\omega^3 - 3k^4\omega^2 + 12k^4\omega$$
$$- 89k^3\omega^4 + 45k^3\omega^3 - 4k^3\omega^2 - 29k^3\omega - 7k^3 + 28k^2\omega^4 - 47k^2\omega^3 + 21k^2\omega^2 + 59k^2\omega + 3k^2$$
$$+ 12k\omega^4 + 62k\omega^3 + 2k\omega^2 - 62k\omega - 14k + 24\omega^3 - 24\omega^2 - 24\omega + 24,$$
$$N_{:HHHH:} =25k^9\omega^5 - 90k^8\omega^5 - 40k^8\omega^4 + 165k^7\omega^5 + 170k^7\omega^4 - 50k^7\omega^3 - 780k^6\omega^5 - 1410k^6\omega^4$$
$$- 390k^6\omega^3 + 80k^6\omega^2 + 2737k^5\omega^5 + 6812k^5\omega^4 + 4318k^5\omega^3 + 428k^5\omega^2 + 25k^5\omega - 2384k^4\omega^5$$
$$- 14652k^4\omega^4 - 15176k^4\omega^3 - 2548k^4\omega^2 + 480k^4\omega - 40k^4 - 6719k^3\omega^5 + 7822k^3\omega^4$$
$$+ 27706k^3\omega^3 + 11016k^3\omega^2 - 2827k^3\omega - 598k^3 + 13910k^2\omega^5 + 15950k^2\omega^4 - 18996k^2\omega^3$$
$$- 25220k^2\omega^2 - 1954k^2\omega + 2230k^2 - 4560k\omega^5 - 15220k\omega^4 - 5408k\omega^3$$
$$+ 13992k\omega^2 + 9968k\omega + 1228k - 2304\omega^5 - 5088\omega^4 + 4608\omega^3 + 10176\omega^2 - 2304, N_{:HW^{3,0}:}$$
$$=5k^6\omega^3 - 5k^5\omega^2 - 28k^4\omega^3 - 27k^4\omega^2 - 5k^4\omega + 60k^3\omega^3 + 63k^3\omega^2 + 12k^3\omega + 5k^3 + 49k^2\omega^3$$
$$- 51k^2\omega^2 - 93k^2\omega + 15k^2 - 130k\omega^3 - 46k\omega^2 + 130k\omega + 46k - 48\omega^3 + 48\omega^2 + 48\omega - 48\omega - 5088$$

$$N_{W^{4,-2}} =5k^8\omega^4 + 5k^7\omega^4 - 100k^6\omega^4 - 10k^6\omega^2 + 136k^5\omega^4 - 76k^5\omega^2 + 381k^4\omega^4 + 294k^4\omega^2 + 5k^4$$
$$- 825k^3\omega^4 - 526k^3\omega^2 + 71k^3 - 554k^2\omega^4 + 1364k^2\omega^2 - 170k^2 + 1376k\omega^4 - 1344k\omega^2$$
$$- 32k + 384\omega^4 - 768\omega^2 + 384, \quad N_{:HHW^{2,0}:}$$
$$=5k^7\omega^4 - 45k^6\omega^4 + 140k^5\omega^4 + 120k^5\omega^3 - 10k^5\omega^2 - 104k^4\omega^4 - 530k^4\omega^3 - 96k^4\omega^2 - 299k^3\omega^4$$
$$+ 810k^3\omega^3 + 564k^3\omega^2 - 120k^3\omega + 5k^3 + 581k^2\omega^4 + 78k^2\omega^3 - 1002k^2\omega^2 - 238k^2\omega + 141k^2$$
$$- 182k\omega^4 - 758k\omega^3 + 214k\omega^2 + 638k\omega + 88k - 96\omega^4 - 204\omega^3 + 396\omega^2 + 204\omega - 300, \quad N_{:W^{2,0}W^{2,0}:}$$
$$=60k^4\omega^2 - 129k^3\omega^2 - 132k^3\omega - 163k^2\omega^2 + 307k^2\omega + 72k^2 + 338k\omega^2 - 104k\omega - 102k + 96\omega^2 - 60\omega - 36,$$
$$N_{:\partial HW^{2,-2}:} =5k^6\omega^3 - 40k^5\omega^3 - 5k^5\omega^2 + 115k^4\omega^3 + 20k^4\omega^2 - 5k^4\omega - 118k^3\omega^3 - 37k^3\omega^2 - 14k^3\omega + 5k^3$$
$$- 192k^2\omega^3 - 10k^2\omega^2 + 256k^2\omega + 34k^2 + 672k\omega^3 + 112k\omega^2 - 672k\omega - 112k - 512\omega^3 - 192\omega^2 + 512\omega + 192,$$
$$N_{\partial^2 W^{2,-2}} =k^4\omega^3 - 4k^3\omega^3 - k^3\omega^2 + 5k^2\omega^3 + 2k^2\omega^2 - k^2\omega + 20k\omega^3 - k\omega^2 - 20k\omega + k - 32\omega^3 - 16\omega^2 + 32\omega +$$

16.

References

[1] D. Adamovic、V. G. Kac、P. M
¨
Conformal embeddings of affine vertex algebras in minimal W -algebras II: decompositions 12 2017 2, 261 315

oseneder Frajria 和 P. Papi、O. Perse, , 《日本数学杂志》 (), 第 - 期。[2] D. Adamovic、V. G. Kac、P. M
¨
Conformal embeddings of affine vertex algebras in minimal W -algebras I: structural results 500 2018 117 152

oseneder Frajria 和 P. Papi、O. Perse, , 《代数杂志》 (), -。[3] D. Adamovic、P. M
¨
New approaches for studying conformal embeddings and collapsing levels for $\mathcal{W}$-algebras 2023, 22, 19431 19475

oseneder Frajria 和 P. Papi, 《国际数学研究论文集》IMRN 第 - 期。[4] D. Adamovic、T. Arakawa、T. Creutzig、A. Linshaw、A. Moreau、P. M
¨
$\mathcal{W}$-algebras as conformal extensions of affine VOAs 2508
18889

oseneder Frajria 和 P. Papi, arXiv:。[5] M. Al-Ali 和 A. Linshaw,

《代数杂志》，625，1-27，2023年。[6] L. Alday、D. Gaiotto 和 Y. Tachikawa, 《数学物理通讯》，91(2):167-197，2010年。[7] M. Aganagic、E. Frenkel 和 A. Okounkov, 《莫斯科数学会会刊》79（2018年）。[8] T. Arakawa, 《国际数学研究论文集》（2015年）第2015卷，11605-11666。[9] T. Arakawa, 《数学年刊》182（2015年），第2期，565-694。[10] T. Arakawa、T. Creutzig、K. Kawasetsu 和 A. Linshaw, 《数学物理通讯》355，339-372，2017年。[11] T. Arakawa、T. Creutzig 和 A. Linshaw, 《数学年刊》218（2019年），145-195。[12] T. Arakawa、J. van Ekeren 和 A. Moreau, 《Forum Mathematicum Sigma》12（2024年），论文编号e95，共92页。[13] T. Arakawa 和 E. Frenkel, 《组合数学》155，第12期（2019年），2235-2262。[14] T. Arakawa、C. H. Lam 和 H. Yamada, 《美国数学会会刊》371（2019年），第6期，4277-4301。[15] B. Bakalov 和 T. Milanov, 《组合数学》149（2013年），第5期，840-888。[16] A. A. Belavin, 《量子场论中的可积系统》。纯数学进展研究丛书19，Academic Press，圣迭戈，1989年，第117-125页。[17] A. A. Belavin、A. M. Polyakov、A. B. Zamolodchikov, 《核物理B》, () (), -。[18] A. Braverman、M. Finkelberg 和 H. Nakajima, 《Ast´erisque》, （385）: vii+128，2016年。[19] J. Brown, 《变换群》14（2009年），第1期，87-114。[20] J. Brundan 和 A. Kleshchev, 《数学进展》200（1）（2006年），136-195。

[21] *Fusion categories for affine vertex algebras at admissible levels* 2019 25, 1 21 T.

[22] *Even spin minimal model holography* 1301 2013
Creutzig, 《Selecta Mathematica》 ()第 - 期 C. Candu、M. Gaberdiel、M. Kelm、C. Vollenweider, 《高能物理杂志》 ()185。[23] Collingwood, D. H., McGovern, W. M.,《幂零轨道的李理论》, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series，1992年。[24] T. Creutzig、J. Fasquel、V. Kovalchuk、A. Linshaw 和 S. Nakatsuka，arXiv:2506.15605。[25] T. Creutzig、J. Fasquel、A. Linshaw 和 S. Nakatsuka, 《日本数学杂志》20, （2025年），1-111。[26] T. Creutzig 和 D. Gaiotto, 《数学物理通讯》379（2020年），第3期，785-845。[27] T. Creutzig、N. Genra 和 A. Linshaw, 《纯数学与应用数学杂志》817（2024年）1-31。[28] T. Creutzig 和 Y. Hikida, 《高能物理杂志》147（2019年）。[29] T. Creutzig、Y. Hikida 和 T. Uetoko $M(2M)$ *and dual coset CFTs*, 《高能物理杂志》10（2019年），023。[30] T. Creutzig、Y. Z. Huang 和 J. Yang, 《数学物理通讯》362（2018年）第3期，827-854。[31] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae, 《数学进展》396（2022年），108174。[32] T. Creutzig、R. McRae、K. Shimizu 和 H. Yadav, *Commutative algebras in Grothendieck-Verdier categories rigidity and vertex operator algebras* [2409 14618 [ ]] ,
arXiv:。math.QA。[33] T. Creutzig、V. Kovalchuk 和 A. Linshaw, 《代数杂志》593（2022年），178-192。[34] T. Creutzig、V. Kovalchuk 和 A. Linshaw，arXiv:2409.03465。[35] T. Creutzig 和 A. Linshaw, 《代数杂志》，517，396-438，2019年。[36] T. Creutzig 和 A. Linshaw, 《剑桥数学杂志》第10卷第1期（2022年），69-194。[37] T. Creutzig 和 A. Linshaw, 《数学进展》409（2022年），108678，共79页。[38] T. Creutzig、A. Linshaw 和 S. Naktsuka，编写中。[39] A. De Sole 和 V. Kac, 《数学物理通讯》254（2005年），第3期，659-694。[40] A. de Sole、V. Kac、D. Valeri, 《Selecta Mathematica》（新系列）()，第 - 期。

[41] V. Drinfeld 和 V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, 《数学当前问题》, 第 24 卷, 81-180 页, Itogi Nauki i Tekhniki, 苏联科学院, 全苏科学技术信息研究所, 莫斯科, 1984年。[42] J. Fasquel、Z. Fehily、E. Fursman 和 S. Nakatsuka, *Connecting affine $\mathcal{W}$-algebras: A case study on $\mathfrak{sl}_4$*, arXiv:2408.13785。[43] J. Fasquel、V. Kovalchuk 和 S. Nakatsuka, *On Virasoro-type reductions and inverse Hamiltonian reductions for $\mathcal{W}$-algebras and $\mathcal{W}_\infty$-algebras* 2411 10694, arXiv:..

[44] B. Feigin 和 E. Frenkel, *Duality in $\mathcal{W}$-algebras*, 《国际数学研究论文集》1991（1991）, 第 6 期, 75-82 页。[45] B. Feigin 和 E. Frenkel, *Quantization of the Drinfeld-Sokolov reduction*, 《物理快报 B》246（1990）, 75–81 页。[46] B. Feigin 和 E. Frenkel, *Integrals of motion and quantum groups*, 载于: 《可积系统与量子群》（蒙特卡蒂尼泰尔梅, 1993）, 349–418 页, 《数学讲义》1620, 施普普林格, 柏林, 1996年。[47] E. Frenkel, *Langlands correspondence for loop groups*, 《剑桥高等数学研究》第 103 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2007年。[48] E. Frenkel 和 D. Gaiotto, *Quantum Langlands Dualities of Boundary Conditions, D-modules, and conformal blocks*, 《数论与物理通讯》14（2020）, 第 2 期, 199-313 页。[49] M. Gaberdiel 和 R. Gopakumar, *An AdS_3 Dual for Minimal Model CFTs*, 《物理评论 D》83（2011）066007。[50] D. Gaiotto 和 M. Rapčák, *Vertex Algebras at the Corner*, 《高能物理学杂志》2019, 第 1 期, 160, 正文+85页。[51] D. Gaiotto、M. Rapčák 和 T. Zhou, *Deformed Double Current Algebras, Matrix Extended $\mathcal{W}_\infty$ Algebras, Coproducts, and Intertwiners from the M2-M5 Intersection* 2309 16929, arXiv:..

[52] D. Gaitsgory, *Quantum Langlands Correspondence*, `arXiv:1601.05279`。[53] I. Gelfand 和 L. Dickey, *A family of Hamiltonian structures connected with integrable nonlinear differential equations*, 苏联科学院应用数学研究所预印本第 136 号（1978年）。[54] N. Genra 和 T. Juillard, *Reduction by stages for finite W-algebras*, 《数学杂志》308（2024年）, 第 1 期, 论文第 15 号, 共 36 页。[55] P. Goddard、A. Kent、D. Olive, *Virasoro algebras and coset space models*, 《物理快报 B》152（1985）88-93 页。[56] S. Harako 和 M. Ueda, *New presentation of the twisted Yangian of type D*, arXiv:2507.00350。[57] S. Kanade 和 A. Linshaw, *Universal two-parameter even spin $\mathcal{W}_\infty$-algebra*, 《数学进展》355（2019年）, 106774。[58] V. Kac、S. Roan 和 M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, 《数学物理通讯》241（2003年）, 第 2-3 期, 307–342 页。[59] V. Kac 和 M. Wakimoto, *Classification of modular invariant representations of affine algebras* *Infinite-dimensional*, 载于, *Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)* 7 138 177 《数学物理高级丛书》, 第 卷, 页码 – 。World Sci. Publ., 蒂内克, 新泽西州, 1989年。[60] V. Kac 和 M. Wakimoto。*Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras*, 《数学进展》185, 第 2 期（2004年）: 400-458 页。[61] V. Kac 和 M. Wakimoto, *On rationality of $\mathcal{W}$-algebras*, 《变换群》13（2008年）, 第 3-4 期, 671-713 页。[62] R. Kodera 和 M. Ueda, *Coproduct for affine Yangians and parabolic induction for rectangular $\mathcal{W}$-algebras*, 《数学物理通讯》112（2022年）, 第 1 期, 论文第 3 号, 共 37 页。[63] H. Li, *Vertex algebras and vertex Poisson algebras*, 《当代数学通讯》6(01), 61-110 页, 2004年。[64] A. Linshaw, *The structure of the Kac-Wang-Yan algebra*, 《数学物理通讯》345, 第 2 期（2016年）, 545-585 页。[65] A. Linshaw, *Universal two-parameter $\mathcal{W}_\infty$-algebra and vertex algebras of type $\mathcal{W}(2, 3, \ldots, N)$*, 《组合数学》157, 第 1 期（2021年）, 12-82 页。[66] K. Lu、Y. N. Peng、L. Tappeiner、L. Topley、W. Wang, *Shifted twisted Yangians and finite W-algebras of classical type*, arXiv:2505.03316。[67] R. McRae, *On rationality for C_2-cofinite vertex operator algebras*, arXiv:2108.01898。[68] R. McRae, *Twisted modules and G-equivariantization in logarithmic conformal field theory*, 《数学物理通讯》383（2021年）第 3 期, 1939-2019 页。[69] M. Miyamoto, *C_2-cofiniteness of cyclic-orbifold models*, 《数学物理通讯》335（2015年）, 第 3 期, 1279–1286 页。[70] T. Procházka 和 Rapčák, *Webs of $\mathcal{W}$-algebras*, 《高能物理学杂志》2018, 第 11 期, 109, 正文+87 页。[71] E. Ragoucy 和 P. Sorba, *Yangian realisations from finite $\mathcal{W}$-algebras*, 《数学物理通讯》203（1999年）, 第 3 期, 551-572 页。[72] O. Schiffmann 和 E. Vasserot, *Cherednik algebras $\mathcal{W}$-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of*, , 高等研究院数学出版物（）, –。*instantons on $\mathbb{A}^2$* 118 2013 213 342 [73] A. Sergeev, *An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras*, 《密歇根数学杂志》49（2001年）, 第 1 期, 113-146 页。[74] A. Sergeev, *An analog of the classical invariant theory for Lie superalgebras*, 《密歇根数学杂志》49（2001年）, 第 1 期, 147-168 页。[75] M. Ueda, *Twisted Affine Yangian and Rectangular W-algebra of type D*, arXiv:2211.14968。[76] M. Ueda, *Suggestion of a definition of the twisted affine Yangian of type D*, arXiv:2512.06340。[77] K. Thielemans, *A Mathematica package for computeing operator product expansions*, 《国际现代物理学杂志 C²》（1991年）第 787 页。[78] H. Weyl, *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*, 普林斯顿大学出版社, 1946年。

Department Mathematik, FAU Erlangen
Email address: `creutzigt@math.fau.de`

Department Mathematik, FAU Erlangen
Email address: `v.dexter97@gmail.com`

Department of Mathematics, University of Denver
Email address: `andrew.linshaw@du.edu`