arXiv:2512.19571v1 [math.CV] 22 Dec 2025

# 施瓦茨-皮克引理作为阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理的推论

**Rafael Benjumea Cejas**
数学分析系 塞维利亚大学 塞维利亚，西班牙
rafbencej@alum.us.es

**Juan Carlos García Vázquez**
数学分析系 塞维利亚大学 塞维利亚，西班牙 garcia@us.es

**摘要**

本文旨在对施瓦茨-皮克引理可由阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理推出这一事实给出一个初等证明

关键词 施瓦茨-皮克引理 · 阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理 · 双曲度量 · 共形度量

## 1 引言

1907 年，Carathéodory 提出了如今所知的施瓦茨引理版本。我们来回顾一下。

**定理 1.1** (施瓦茨引理)。 设 $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ 是一个全纯函数，且满足 $f(0) = 0$。以下不等式成立：

- $|f(z)| \leq |z|$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。
- $|f'(0)| \leq 1$.

此外，以下各项等价：

*1.* 存在 $z_0 \in \mathbb{D}$，使得 $|f(z_0)| = |z_0|$ 或 $|f'(0)| = 1$。
*2.* $f$ 是一个旋转，也就是说，*where* $c \in \partial\mathbb{D}$。*3.* 对所有 $z \in \mathbb{D}$， $|f(z)| = |z|$，或 $|f'(0)| = 1$。 $f(z) = cz \ \forall z \in \mathbb{D},$

施瓦茨引理是一个关于单位圆盘上的全纯自映射之畸变的结论。尽管它十分简单，施瓦茨引理却有着影响深远的推广。其中最著名的是施瓦茨-皮克引理，由皮克于1916年建立。

**定理 1.2** (施瓦茨-皮克引理)。设 $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ 是一个全纯函数。对于任意$z, w \in \mathbb{D}$，以下不等式成立：

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq d_{\mathbb{D}}(z, w), \qquad \lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

此外，以下条件等价：

*1.* 存在 $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$ 使得

$$d_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(w_0)) = d_{\mathbb{D}}(z_0, w_0), \qquad \lambda_{\mathbb{D}}(f(z_0))|f'(z_0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z_0).$$

*2.* $f$ 是一个双全纯映射（即，$f$ 是单射、满射且全纯的）。

*3.* 对所有 $z, w \in \mathbb{D}$,

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = d_{\mathbb{D}}(z, w), \qquad \lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z).$$

在前一个结论中，$d_{\mathbb{D}}$ 表示庞加莱距离（定理 3.2），而 $\lambda_{\mathbb{D}}$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的双曲度量（定义2.3）。取一个全纯函数 $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$，满足 $f(0) = 0$，并在施瓦茨-皮克引理的不等式中令 $z = 0$，由$d_{\mathbb{D}}$ 的公式和 $\lambda_{\mathbb{D}}$ 的定义可知，施瓦茨引理是施瓦茨-皮克引理的推论。

施瓦茨-皮克引理指出，相对于庞加莱距离，单位圆盘上的每个全纯自映射都是距离缩减的。注意，假设条件 $f(0) = 0$ 被舍弃了。还要注意，施瓦茨-皮克引理关注的不是全纯映射 $f$，而是双曲度量 $\lambda_{\mathbb{D}}$。因此，施瓦茨引理的性质从分析性的转变为几何性的。

事实证明，施瓦茨引理要达到最一般形式，所采用的语言是共形度量（定义 2.1）及其曲率（定义 2.8）。阿尔福斯率先采用了这一开创性视角，并于1938年给出了以下结果。

**定理 1.3** （双曲度量的极大性原理）。设 $\rho$ 是 $\mathbb{D}$上的一个共形度量，满足 $K_\rho(z) \leq -1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。那么

$$\rho(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

这一结果的证明请参见 Beardon and Minda [2007]。因此，在 $\mathbb{D}$ 上曲率不超过 $-1$ 的所有共形度量中，双曲度量在每一点都取最大值。后来，1962年，Heins 通过刻画等号情形改进了阿尔福斯的结果。由此，他得到了阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理。

**定理 1.4** （阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理）。设 $\rho$ 是 $\mathbb{D}$ 上的共形度量，使得 $K_\rho(z) \leq -1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$ 都成立。则有以下不等式：

$$\rho(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

此外，以下各项彼此等价：

*1.* 存在 $z_0 \in \mathbb{D}$，使得 $\rho(z_0) = \lambda_{\mathbb{D}}(z_0)$。

*2.* 对所有 $z \in \mathbb{D}$，都有 $\rho(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$。

Kraus 和 Roth [2013] 给出了等号情形的一个初等证明。与施瓦茨引理或施瓦茨-皮克引理不同，其假设中没有任何（全纯）函数。因此，阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理纯粹是几何性的，即微分几何性的。

施瓦茨-皮克引理与阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理之间似乎除了名称之外并无关联。在 Beardon and Minda [2007]，中，A. F. Beardon 和 C. D. Minda 指出，施瓦茨-皮克引理是阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理的推论，但没有给出明确的证明。本文旨在对此事实作出初等证明。具体而言，我们将证明以下定理。

**定理 1.5**。 施瓦茨-皮克引理是阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理的推论 .

## 2 共形度量

本节将介绍与阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理相关的微分几何概念，这些概念将在定理 1.5 的证明中用到。

**定义 2.1**。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域。$\Omega$ 上的一个共形度量是一个函数

$$\rho : \Omega \longrightarrow [0, +\infty)$$

它满足以下条件：

- $\rho$ 是连续的。
- $\rho$ 在 $\Omega$ 的一个离散子集上消失。
- $\rho$ 在满足 $\rho(z) > 0$的每个点 $z \in \Omega$ 处属于 $\mathcal{C}^2$ 类。

**定义 2.2**。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域，且 $\rho$ 是 $\Omega$ 上的一个共形度量。$\xi \in \mathbb{C}$ 在$z \in \Omega$处的关于 $\rho$的长度为

$$\|\xi\|_{\rho,z} = \rho(z)|\xi|.$$

本质上，域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上的共形度量是一种函数，它提供了一种新的方式，根据向量 $\xi \in T_z\Omega \cong \mathbb{C}$ 的欧几里得范数来测量其长度。这里，$T_z\Omega$ 表示 $\Omega$ 在 $z$处的切平面。共形度量中最重要的例子之一，是单位圆盘 $\mathbb{D}$上的双曲度量。

**定义2.3.** 单位圆盘上的双曲度量 $\mathbb{D}$ 或称 庞加莱度量 为

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2} \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

不难验证，双曲度量确实是 $\mathbb{D}$ 上的共形度量。共形度量使我们能够测量分段正则曲线的长度。

**定义 2.4**。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域， $\rho$ 是 $\Omega$ 上的共形度量， $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \Omega$ 是一条分段正则曲线。 $\rho$–长度 为

$$\ell_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho,\gamma(t)}\, dt = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt.$$

前述定义与曲线 $\gamma$ 的参数化无关。此外，它使我们能够在 $\Omega$ 上引入一个距离函数。

**定义 2.5**。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域， $\rho$ 是 $\Omega$ 上的共形度量，且 $z, w \in \Omega$。 $\rho$–与 $z$ 之间的距离 $w$ 为

$$d_\rho(z,w) = \inf\{\ell_\rho(\eta) : \eta \in \mathcal{C}_\Omega(z,w)\},$$

其中 $\mathcal{C}_\Omega(z,w)$ 是 $\Omega$ 中所有连接 $z$ 与 $w$ 的分段正则曲线的集合。

关于证明 $d_\rho$ 在 $\Omega$ 上定义了距离，请参阅 Carroll [2024]。保持共形度量所对应距离函数不变的映射值得关注。

**定义 2.6**。 设 $\Omega_1$,$\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ 为域， $\rho_1$， $\rho_2$ 分别为 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$，上的共形度量，且 $f\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ 为满射。若满足以下条件，我们称 $f$ 为相对于 和 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 的等距变换:

$$d_{\rho_1}(z,w) = d_{\rho_2}(f(z), f(w)) \ \forall z, w \in \Omega_1.$$

下面的定义有助于研究等距变换。

**定义 2.7**。 设 $\Omega_1$,$\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ 为域， $\rho$ 为 $\Omega_2$ 上的共形度量，且 $f\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ 为全纯函数。 $f$ 对 $\rho$ 的拉回为

$$f^*\rho(z) = \|f'(z)\|_{\rho,f(z)} = \rho(f(z))|f'(z)| \ \forall z \in \Omega_1.$$

若前一定义中的函数 $f$ 非常数，则 $f$ 对 $\rho$ 的拉回是 $\Omega_1$ 上的共形度量。关于这一事实的证明可见 Krantz [2004]。借助共形度量的拉回，我们可以给出等距变换的刻画。

**定理 2.1** （等距映射的刻画）。设$\Omega_1$,$\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ 是域， $\rho_1, \rho_2$ 分别是$\Omega_1$ 和$\Omega_2$, 上的共形度量，且 $f\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ 是一个双全纯映射。以下各条件等价:

1. $f$ 是相对于 $\rho_1$ 和 $\rho_2$的等距变换。

$\rho_2$ 经 $f$ 拉回后恰好为 $\rho_1$，也就是说，以下等式成立：

$$f^*\rho_2(z) = \rho_2(f(z))|f'(z)| = \rho_1(z) \ \forall z \in \Omega_1.$$

*3.* 分段正则曲线的长度在 $f$ 下保持不变，即

$$\ell_{\rho_1}(\gamma) = \ell_{\rho_2}(f \circ \gamma)$$

对所有位于 $\Omega_1$ 中的分段正则曲线 $\gamma$ 均成立。

Krantz [2004] 中也给出了前述刻画的证明。最后，我们回顾共形度量的曲率概念。

**定义 2.8**。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 是一个域， $\rho$ 是 $\Omega$ 上的共形度量，并且 $z \in \Omega$ 满足 $\rho(z) > 0$。 $\rho$的曲率在 $z$ 处为

$$K_\rho(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2},$$

其中 $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ 表示拉普拉斯算子。

在适当的 条件下，共形度量的拉回不会改变其曲率 .

**定理 2.2** (曲率不变性)。 设 $\Omega_1$,$\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ 为域， $\rho$ 为 $\Omega_2$上的共形度量，且 $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ 为非恒定全纯函数。等式

$$K_{\Omega_1, f^*\rho}(z) = K_{\Omega_2,\rho}(f(z))$$

对所有满足 $z \in \Omega_1$ 的情形均成立，其中 $f'(z) \neq 0$且 $\rho(f(z)) > 0$。

这一结论的证明可见 Beardon and Minda [2007]。

## 3 双曲度量在 $\mathbb{D}$上的

本节陈述一些关于庞加莱度量的事实，这些事实是证明定理 1.5 所必需的。我们用 Aut($\mathbb{D}$) 表示 $\mathbb{D}$ 的所有自同构的集合，也就是说， $\mathbb{D}$ 的双全纯自映射。我们回顾一下，该集合由以下形式的函数构成：

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \ \forall z \in \mathbb{D},$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$ 和 $a \in \partial\mathbb{D}$。

**定理 3.1**。 $\mathbb{D}$ 的每个自同构都是关于庞加莱度量的等距变换。

关于这一结果的证明，请参阅 Krantz [2004]。得益于前一个定理，我们能够给出 $\mathbb{D}$ 上与双曲度量相关联的距离函数的显式公式。我们用 $d_{\mathbb{D}} = d_{\lambda_{\mathbb{D}}}$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的 $\lambda_{\mathbb{D}}$–距离，并称之为上的双曲距离或庞加莱距离。

**定理 3.2**。 $\mathbb{D}$上的双曲距离满足以下公式:

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) = \log \frac{1+\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}}{1-\dfrac{z-w}{1-\overline{w}z}} \ \forall z,w \in \mathbb{D}.$$

T参考文献 Beardon and Minda [2007] 包含前述结果的一个证明 .

## 4 定理 1.5 的证明

最后，我们证明定理 1.5。设 $f:\ \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ 是一个非常数全纯函数。根据定理 2.2, 共形度量 $f^*\lambda_{\mathbb{D}}$ 的曲率恒等于 $-1$。因此，由阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理，我们有

$$f^*\lambda_{\mathbb{D}}(z) \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

根据定义 2.7，这个不等式等价于

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

这正是施瓦茨-皮克引理中的一个不等式。另一个不等式可通过在 $\mathbb{D}$ 中任意分段正则曲线上积分轻易得到。

现在来研究等号情形。再次根据定义 12，存在 $z_0 \in \mathbb{D}$使得

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z_0))|f'(z_0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z_0)$$

当且仅当

$$f^*\lambda_{\mathbb{D}}(z_0) = \lambda_{\mathbb{D}}(z_0).$$

根据阿尔福斯-施瓦茨-皮克引理，前一个等式成立当且仅当

$$f^*\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

进而，当且仅当

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

因此，只需证明最后一个等式成立当且仅当 $f \in$ Aut($\mathbb{D}$)。

若 $f \in$ Aut($\mathbb{D}$)，则定理 3.1 保证 $f$ 是关于 $\lambda_{\mathbb{D}}$的等距变换。因此，定理 2.1 蕴含

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z) \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

接下来，我们证明逆命题。首先，我们证明 $f$ 是满射。假设 $f(\mathbb{D}) \subsetneq \mathbb{D}$。特别地， $f(\mathbb{D}) \subsetneq \mathbb{D}$，由此我们推知 $\mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$ 非空。现在，取$z_0 \in f(\mathbb{D})$ 和 $z_1 \in \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$，并考虑一条连续曲线 $\eta$: $[0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$，满足 $\eta(0) = z_0$且$\eta(1) = z_1$。存在 $0 < r < s < 1$,使得 $\eta([0,r]) \subseteq f(\mathbb{D})$ 且 $\eta([s,1]) \subseteq \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D})$。容易验证,

$$\overline{\mathbb{D}} = f(\mathbb{D}) \sqcup \partial f(\mathbb{D}) \sqcup (\overline{\mathbb{D}} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}).$$

记 $\eta^* = \eta([0,1])$。若 $\eta^* \cap \partial f(\mathbb{D}) = \emptyset$，则 $\eta^* \subseteq f(\mathbb{D}) \sqcup \mathbb{D} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$，这将意味着 $\eta^*$ 不连通。然而，这是荒谬的，因为 $\eta^*$ 是连通的：$\eta$ 连续且 $[0,1]$连通。因此，$\partial f(\mathbb{D}) \cap \eta^* \neq \emptyset$。

给定 $w \in \partial f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{D}$ 以及一个满足 $g(z_n) \longrightarrow w$ 的序列 $(z_n)_{n=1}^{\infty}$，可得 $|z_n| \longrightarrow 1$。事实上，否则就存在 $R \in (0,1)$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|z_n| < R$。由于圆盘$D(0,R)$ 是紧的，Bolzano-Weierstrass定理保证存在 $z \in D(0,R)$ 以及一个子序列 $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$，使得 $z_{n_k} \longrightarrow z$。因此，$f(z_{n_k}) \longrightarrow f(z)$，所以 $f(z) = w$。根据开映射定理，$f(\mathbb{D})$ 在 $\mathbb{D}$ 中是开集，因此 $f(z) \in \mathbb{D}$。另一方面，$w \in \partial f(\mathbb{D})$，由此得到矛盾。因此，$|z_n| \longrightarrow 1$，这正是我们要证明的。

现在，我们注意到

$$\lambda_{\mathbb{D}}(f(z_n))|f'(z_n)| = \frac{2|f'(z_n)|}{1-|f(z_n)|^2} = \frac{2}{1-|z_n|^2} = \lambda_{\mathbb{D}}(z_n) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

由于 $|z_n| \longrightarrow 1$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-|z_n|^2} = +\infty.$$

此外，由柯西估计可得以下上界：

$$|f'(z_n)| \leq \frac{1}{r} \cdot \max_{|s-z_n|=r} |f(s)| \leq \frac{1}{r} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

这里，$r > 0$ 满足：对所有 $n \in \mathbb{N}$，$D(z_n, r) \subseteq \mathbb{D}$（例如，$r = d(\partial f(\mathbb{D}), \partial\mathbb{D})/2$）。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2|f'(z_n)|}{1-|f(z_n)|^2} \leq \frac{1}{r} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1-|f(z_n)|^2} = \frac{2}{r(1-|w|^2)} < +\infty.$$

这就产生了矛盾。总之，$f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$，也就是说，$f$ 是满射。

最后，我们证明 $f$ 是单射。由于对所有 $z \in \mathbb{D}$，$\lambda_{\mathbb{D}}(z) > 0$，因此对所有 $z \in \mathbb{D}$，$f'(z) \neq 0$，进而 $f$ 是局部单叶。因此，根据逆函数定理，给定$z_0 \in \mathbb{D}$和 $w_0 := f(z_0) \in f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$，存在开集 $U_0$，$V_0 \subseteq \mathbb{D}$，使得 $z_0 \in U_0$、$w_0 \in V_0$且 $f: U_0 \longrightarrow V_0$ 是双全纯映射。若 $g_0 : V_0 \longrightarrow U_0$ 是 $f$ 在 $V_0$中的局部逆映射，则可见 $f \circ g_0 = \mathrm{id}_{V_0}$ 且 $g_0 \circ f = \mathrm{id}_{U_0}$。在这些等式中，我们约定 $f$ 限制在 $U_0$上。

现在，令 $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$ 为一条连续曲线，且 $\gamma(0) = w_0$。给定 $t \in [0,1]$，如果 $W_t$ 是 $\gamma(t)$ 的开邻域，那么 $\{W_t : t \in [0,1]\}$ 是 $\gamma^*$ 的开覆盖。由于 $\gamma^*$ 是紧的，存在满足以下条件的 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$

$$\gamma^* \subseteq W_0 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_n,$$

其中，对所有 $k = 0, 1, ....., n$，都有 $W_k := W_{t_k}$。不失一般性，我们可以假设 $W_0 = V_0$。我们断言，对所有 $k = 0, 1, ....., n$，都有 $W_k \cap W_{k+1} \neq \emptyset$。事实上，否则，$\gamma^*$就不是一个连通集，这显然荒谬。

接下来，根据逆函数定理，存在开集 $U_1, ....., U_n \subseteq f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$，使得这些函数

$$g_1 : W_1 \longrightarrow U_1, \quad g_2 : W_2 \longrightarrow U_2, \quad ..., \quad g_n : W_n \longrightarrow U_n$$

是 $f$ 的局部逆映射。在 $V_0 \cap W_1$ 中， $g_0$ 和 $g_1$ 都是 $f$ 的局部逆映射，因此

$$f(g_0(w)) = w = f(g_1(w)) \ \forall w \in V_0 \cap W_1.$$

因此，由于 $f$ 是局部单叶的，我们推得对所有 $w \in V_0 \cap W_1$， $g_0(w) = g_1(w)$。此外，根据解析延拓，$g_0$ 和 $g_1$ 都延拓为函数 $G_{0,1}$，它在 $V_0 \cup W_1$中全纯。函数 $G_{0,1}$ 是 $f$ 在 $V_0 \cup W_1$中的局部逆映射。事实上，给定任意但固定的 $v \in V_0$，

$$(G_{0,1} \circ f)(v) = (g_0 \circ f)(v) = v \quad \text{y} \quad (f \circ G_{0,1})(v) = (f \circ g_0)(v) = v.$$

当 $v \in W_1$ 或 $v \in V_0 \cap W_1$成立时，结论也相同。通过类似的推理，我们得到对所有 $w \in W_1 \cap W_2$， $G_{0,1}(w) = g_2(w)$。因此，再次根据解析延拓，$G_{0,1}$ 和 $g_2$ 延拓为函数$G_{0,1,2}$，它在 $V_0 \cup W_1 \cup W_2$中全纯，并且是 $g$ 在 $V_0 \cup W_1 \cup W_2$中的局部逆映射。继续这一过程，我们说明 $g_0$ 可解析延拓为函数 $G$，它在由 $\gamma^*$ 给出的管状邻域内全纯

$$B := V_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n.$$

此外， $G$ 是 $B$中的 $f$ 的一个局部逆映射。因此，由于 $\mathbb{D}$ 是单连通域且 $\gamma$ 任意，单值化定理保证 $g_0$ 可延拓为 $\mathbb{D}$中的全纯函数，我们仍将其记为 $G$。

最后，我们来证明 $G$ 是 $f$的全局逆函数。任取 $z \in \mathbb{D}$ 并固定，设 $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}$ 是一条连接 $w_0$ 与 $z$的连续曲线。按照上述相同步骤，可得 $\alpha^*$ 的一个管状邻域 $A \subseteq \mathbb{D}$，以及一个函数 $k$，它在 $A$ 中全纯，是 $g_0$的解析延拓，同时也是 $A$中 $f$ 的一个局部逆映射。因此，

$$(G \circ f)(z) = (k \circ f)(z) = z \quad \text{y} \quad (f \circ G)(z) = (f \circ k)(z) = z,$$

因此， $G$ 是 $f$的全局逆函数。综上， $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$，这正是我们要证明的。

## 参考文献

A Beardon 和 C Minda。双曲度量与几何函数论。载于拟共形映射及其应用，第 9–56 页。Narosa Publishing House，新德里，2007。D Kraus 和 O Roth。共形度量。载于现代函数论专题，拉马努金数学学会讲义系列第 19 卷，第 41–83 页。拉马努金数学学会，印度迈索尔，2013。T Carroll。几何函数论：复分析进阶教程。施普林格，2024。S Krantz。复分析：几何视角。美国数学会，2004。