arXiv:2512.19597v1 [math.NT] 22 Dec 2025

循环 Prym 簇的单值化

Eric M. Rains

2025年12月22日

摘要

光滑射影曲线的循环覆盖的$Prym$是雅可比簇中的“新”部分：覆盖曲线的雅可比簇除以中间覆盖的雅可比簇所得的商。给定这样一族覆盖，族的基底的基本群作用在 Prym 簇的 Tate 模上，而该表示的像是回答关于该族中随机 Prym 簇的 L-挠群结构分布的算术统计问题的关键要素。（在 $\mathbb{F}_q$ 上，弗罗贝尼乌斯的作用大致均匀分布于算术 单值群中；该群是基本群在$^-$对 $\mathbb{F}_q$ 进行基变换后的像的一个陪集（即几何 单值群）。）在本文中，我们证明，对于若干自然族（除少数例外），几何单值群夹在某个酉群与其导出子群之间。特别地，这一结论适用于如下单参数族：从任意固定覆盖出发，改变一个（温和）分歧点所得到的族。作为应用，我们通过将椭圆曲面的塞尔默群与次数分别为 6 或 4 的循环覆盖联系起来，推导出其塞尔默群单值化的类似大像性结果，其中涉及 $j = 0$ 或 $j = 1728$，这意味着它们的塞尔默群不符合标准启发式。例如，对于在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ 上、具有 $j = 0$ 且高度充分大的椭圆曲面，当 l（固定）和 q（充分大）均为模 3 同余于 1 时， l-塞尔默群的平均大小为 $l + 3 + o_q(1)$，而一般椭圆曲面中该平均大小为$l + 1 + o_q(1)$。

目录

1 引言 2 2 Jordan-Pochhammer 单值化 4 3 大像性 11 4 模素数的大像性 13 5 两两满射性 15 6 提升至 p-进数 166.1 来自 p-进群的分次李代数.16 6.2 一般情形下的非分歧提升.17 6.3 非分歧 Jordan-Pochhammer 表示.22 6.4 部分分歧情形.23 6.5 完全分歧情形.25

7 奇异曲线的 Prym 簇 **26**

8 分歧数据 **3**
1 9 推广到更高亏格的基曲线 34

10 化归到有限特征的曲线 **38**
10.1 良好特征下的单值化.38 10.2 坏特征下的单值化.39 10.3 未尽问题.41

11 塞尔默群　　具有常数 j　　41 的椭圆曲面

1 引言

本工作的起源是 [6], 的研究，该研究表明，有理椭圆曲面的塞尔默群在适当的极限下满足 [3] 的启发式。这自然引出了一个问题：对于不适用该启发式的族，能否得到类似的结果? [6] 的计算分为两部分：一是对（几何）单值化的算术计算，二是对由单值化与等分布所蕴含的极限分布进行组合计算。因此，首先要问的是：是否存在一些有趣的族，它们不满足一般的启发式，却能计算其单值化?

最自然的这类族，是 j-不变量恒为0或1728的族；其中的曲线具有非平凡的（几何）自同构群, 从而为塞尔默群带来额外结构，并迫使单值群更小。特别是，要猜出单值化的大致情况并不太难：自同构迫使它包含于某个广义酉群，而在没有任何额外结构的情况下，我们预期它包含相应的特殊酉群。（我们在下文将这种预期称为“大单值化”。）这足以提示一种修订后的启发式；不过，我们当然希望知道单值化确实如预期那样，从而实现本文的原初目标。

引出我们实际研究主题的关键进一步洞见是这样一个观察：至少在特征不为 2 和 3 时，具有 $j = 0$ 的曲线是常曲线的循环扭曲：在定义域的一个 6 次循环扩张上，它同人们最喜欢的曲线E_0同构，该曲线在素域上的 0 处具有 j-不变性。特别地， $E[l]$的伽罗瓦上同调与 $E_0[l]$的伽罗瓦上同调密切相关，而相关的限制与转移映射保持了定义塞尔默群的附加条件。因此可以发现， $E[l]$ 的塞尔默群本质上就是循环扩张上 $E_0[l]$ 的塞尔默群的不变部分。由于后一个椭圆曲面只有光滑纤维，其塞尔默群可以利用 ´étale 上同调计算；计算结果表明，它恰好是˜　　˜的 Pic(E_0) 的 l-挠部分与 Pic(C) 的 l-挠部分的张量积，其中 C 是覆盖曲线。作为循环群代数 $\mathbb{Z}[z]/(z^6 - 1)$ 上的模，Pic(E_0) 在几何上同构于 $\mathbb{Z}[\zeta_6]$，因此本质上有

$$\mathrm{Sel}_l(E) \cong \mathrm{Pic}(\tilde{C})[l] \otimes_{(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[z]/(z^6-1)} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[\zeta_6]. \tag{1.1}$$

（作为单值群的表示，这一点依然成立；但有一个例外：单值化通常会在 $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[\zeta_6]$ 上以非平凡标量作用，因此该表示也会相应地扭曲。）换言之，对一般 $j = 0$ 曲线计算塞尔默单值，经过一次扭曲后，便归结为计算一般 6-循环普里姆簇的 l-挠的单值化：

$$\mathrm{Pic}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbb{Z}[z]/(z^6-1)} \mathbb{Z}[\zeta_6], \tag{1.2}$$

$j = 1728$ 的情况也类似。

˜于是自然引出这样一个问题：给定一个带有 N 阶循环群作用的曲线族 C ，其 Prym

$$\mathrm{Pic}(\tilde{C}) \otimes_{\mathbb{Z}[z]/(z^N-1)} \mathbb{Z}[\zeta_N] \tag{1.3}$$

具有大像的 l-挠单值化？（暂且假设 l、 N 与特征两两互素。）我们证明，在相当广泛的情形下，这一结论都成立。主要结果是：即使固定商曲线和除一个分歧点以外的所有分歧点，只要 Prym 作为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-模的秩至少为 5，由此得到的单参数曲线族就已经具有大单值化。（我们还精确说明了秩为 3 和 4 时可能出现的情形。）在稍弱的形式下，对于最大公约数$(l, N) \neq 1$，甚至在特征整除 N 的一些情形中，这一结论仍然成立。

论证分为几个步骤。首先要注意，特征零下 Prym 的单值化由适当的周期积分的单值化决定。当基曲线为 $\mathbb{P}^1$ （并且在几何意义下工作，从而可以用 μ_N 替代循环群）时，这些积分关于变化的分歧点满足一个著名的微分方程（Jordan-Pochhammer方程），其单值化已得到充分理解。特别地，可以发现，除选择基以外，我们能够明确写出基本群的生成元作用所对应的矩阵（不过事实证明我们无需这样做）。因此，剩下的问题是确定由这些显式矩阵生成的群何时模 l 是大群。实际上，我们采用一种与基无关的描述：这些生成元是伪反射（逐点固定一个余维 1 子空间），其行列式已知，且它们的乘积等于一个已知标量。在某些必要的大像性条件下，这足以将该表示在共轭意义下确定。

为证明该表示的大像性，我们首先考察 $\mathbb{Q}(\zeta_N + \zeta_N^{-1})$ 的每个素数模下的大像性。为此，我们利用由伪反射生成的 ¯$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 不可约子群的一个众所周知的分类来证明（除 n 较小时的少数例外情形外）剩余群符合预期。（尽管这一分类广为人知，但似乎没有任何单一文献对其进行完整汇集，因此我们将在下文对所有 n 作出整理。）当 $\zeta_N + \zeta_N^{-1} \notin \mathbb{Q}$ 时会出现一个问题：同一个有理素数之上的不同素数会产生同构的剩余群，因此在各个素数模下具有大像性并不一定意味着在其乘积模下具有大像性。不过可以证明，只需证明两个素数的乘积模下具有大像性即可；这实质上归结为证明这两个表示并不通过剩余群的某个同构彼此关联。大像性的最后一步是提升到素数的幂。对于非分歧素数，这需要使用 [14], 的一般提升结果，不过其中给出的表述存在一些错误；我们将在下文修正该表述，并讨论修正后的证明。对于分歧素数，我们采用更为特设的方法，构造约化映射的核中足够多的元素。

以上足以证明特征零下 $\mathbb{P}^1$ 的循环覆盖的单值化具有大像性。还有两个问题需要解决：推广到高亏格基曲线，以及推广到有限特征（包括特征整除 N 的情况）。为推广到高亏格基曲线，我们利用这样一个事实：存在某些奇异曲线的覆盖，其 Prym 簇不仅光滑，而且与正规化的 Prym 簇同构。特别是，这使我们能够构造亏格为 g 的节曲线覆盖族，它们的 Prym 簇与 $\mathbb{P}^1$ 的覆盖所对应的 Prym 簇相同，因而具有大单值化。这意味着光滑基曲线的情形也具有大像性；严格来说，这仅适用于曲线和分歧数据都变化的情况，但在特征零下，子族的单值化通常是正规子群，因此证明大像性相对直接。为将结论推广到有限特征，我们通过研究单参数族来避开一些技术问题，从而将问题归结为检验某个循环覆盖是否具有良约化。

综上，对于带有一个移动的温和分歧点的循环覆盖单参数族，只要 Prym 簇作为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 模的秩（由基曲线的亏格和分歧点的数量决定）至少为 5，其单值化就具有大像性（除去 p-挠以及单值化可约的素数）；对于一般曲线族，只要基曲线的亏格为正且 N 不是 p 的幂，也有类似结果。

综上，我们最初关于塞尔默群的应用（模去验证转移映射保持塞尔默群）可归结为 Prym 单值化的情形 $N = 6$ 和 $N = 4$，因此相应的椭圆曲面单参数族具有大像的塞尔默单值。这足以证明这些塞尔默群不满足 [3]的启发式；具体而言，对于有限域上具有 $j = 0$ 且含有立方单位根的椭圆曲面，$l = 1$(3) 的l-塞尔默群的预期大小为 $l+3$，而一般曲线的预期大小为 $l+1$。（更精确的陈述见定理 11.12。）

本文的结构安排如下。第 2 节讨论 Jordan-Pochhammer 方程的单值群，包括其在一般域上的类比。第 3 节介绍证明大像性的总体策略，第 4 节则将其应用于各个素数模的情形（包括在完整分类由伪反射生成的 GL$_n(\mathbb{F}_p)$ 的不可约子群之前进行的¯讨论）；第 5 节将这一结果推广到任意无平方因子理想。第 6 节讨论提升；第 6.1 小节讨论与 p-进群自然滤过相关的分次李代数，第 6.2 小节给出 [14], 的修正版，第 6.3 小节则简要将其应用于 Jordan-Pochhammer 表示。第 6.4 和 6.5 小节接着讨论从分歧素数处的提升，后者处理模素数的群为辛群的情形。

第 7 节讨论奇异曲线的 Prym 簇，特别关注退化的 Prym 何时具有光滑的 N´eron 模型。第 8 节讨论局部分歧数据，关注温和情形下分歧节点的光滑化，以及野分歧情形下向特征零的提升。第 9 节利用这些结果，将结论推广到特征零中的高亏格基曲线；第 10 节则将所有结果推进到有限特征。最后，第 11 节给出其在常值 j 椭圆曲面的塞尔默群中的应用。

致谢。本文源于与 T. Feng 和 A. Landesman 的讨论，旨在探讨在 [6], 之后应采取的下一步；他们耐心听取了作者对 $j = 0$ 情形若干早期方法的解释。他们还帮助确定并证明了下文引理 10.3 的正确表述，并提出了进一步改善行文的建议。

2 Jordan-Pochhammer 单值化

典型的带有标记分歧点的 μ_N-覆盖 $C/\mathbb{P}^1$ 具有如下形式

$$y^N = \prod_{0\le i\le n+1} (x - x_i)^{m_i} \tag{2.1}$$

其中 $\sum_i m_i = 0$(N)，且 gcd(m_0，.....，m_{n+1}，N) $= 1$，以免覆盖曲线几何可约。（注意，我们已隐式标记了覆盖曲线上位于 $\infty \in \mathbb{P}^1$ 上方的一个非分歧点。） μ_N 在 C 上的作用诱导出其在微分形式空间上的作用，因此在微分形式空间上给出了一个 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 分次结构，其中权为 $d \mod N$ ($0 \le d < N$) 的全纯微分形式具有如下形式

$$p(x)y^{d-N}dx \tag{2.2}$$

其中 p(x) 是次数至多为 $(1 - d/N)(\sum_i m_i) - 2$ 的多项式，满足

t

$$\mathrm{ord}_{x_i} p(x) - m_i(1 - d/N) > -1 \tag{2.3}$$

对于 $0 \le i \le n+1$。

对于 $x \in \mathbb{R}$，令 $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$。

命题 2.1. 权为 $d \neq 0(N)$ 的微分形式空间的维数为

$$-1 + \sum_{0 \le i \le n+1} \{-dm_i/N\} \tag{2.4}$$

证明. 事实上，若将 p 在 x_i 处消失阶的条件向上取整，我们可见它在 x_i 处的消失阶至少为 $\lfloor m_i(1-d/N) \rfloor$，且在 ∞ 处的极点阶至多为 $-2 + \sum_i m_i(1-d/N)$。换言之， p 属于某个次数为下列数值的线丛的整体截面

$$-2 + \sum_{0 \le i \le n+1} \{-dm_i/N\}, \tag{2.5}$$

因此，除非次数为 -2，否则整体截面的数量就是所述数值。只有当对所有 i， dm_i/N 都是整数时才会出现这种情况，这意味着 $d = 0(N)$。 □

推论 2.2. 权为 d 和 $-d$ 的微分形式空间的维数之和，比满足 $m_i d/N$ 不是整数的点的数量少2。

证明。 该和为

$$-2 + \sum_{0 \le i \le n+1} \{-dm_i/N\} + \{dm_i/N\} \tag{2.6}$$

且 $\{x\} + \{-x\} = 1$ 除非 $x \in \mathbb{Z}$。 □

在 $\mathbb{C}$上，有一个自然的“周期积分”配对

$$H_1(C;\mathbb{Z}) \otimes \Gamma(C;\Omega_C) \to \mathbb{C}^* \tag{2.7}$$

它通过沿同调类对全纯微分进行积分给出，并且所诱导的映射

$$H_1(C;\mathbb{Z}) \to \Gamma(C;\Omega_C)^* \tag{2.8}$$

是单射。若令 $\Gamma^P(C;\Omega_C)$ 表示 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 以与 N互素的权作用的子空间，则我们可以考虑复合映射

$$H_1(C;\mathbb{Z}) \to \Gamma^P(C;\Omega_C)^* \tag{2.9}$$

由于周期积分映射是自然的，因而特别是 μ_N等变的，复合映射也具有同样性质。特别地，若固定一个生成元 $g \in \mu_N$，则 $\Phi_N(g)$ 消去右端，其中 Φ_N是分圆多项式，因此该映射经过 $H_1(C;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N]$分解。

命题 2.3。映射

$$H_1(C;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N] \to \Gamma^P(C;\Omega_C)^* \tag{2.10}$$

是单射的。

证明。 核中的非零元素与某个全纯微分的积分非零，而该微分必然属于次数不与 N 互素的子空间之和。但 $\Phi_N(g)$ 消去 $H_1(C;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N]$，并且在这些微分上可逆，因此产生矛盾。

□

特别地，我们看到，原则上可以从相应周期积分的单值化恢复 Prym 的单值化。构造 C 的同调基的一种方法是，在 $\mathbb{P}^1$ 中从 ∞ 出发，绕过 $\mathbb{P}^1$ 中每个标记点选取彼此不相交的简单闭合曲线（即基本群的标准生成元）。由于我们选取了 ∞ 的一个原像，每条这样的曲线在 C 中都有一个标记原像，而它又生成一个由 μ_N 个原像组成的轨道。若 γ_i 是 C 中绕 x_i 的环路的标记原像，

$$\partial\gamma_i = g^{m_i}[\infty] - [\infty], \tag{2.11}$$

此外，原始曲线将 $\mathbb{P}^1$分隔成若干区域，由这些区域还会产生边界，其生成元为

$$(\sum_{0\le j<N/\gcd(N,m_i)} g^{m_i j})\gamma_i \tag{2.12}$$

对于 $0 \le i \le n+1$ 以及

$$\gamma_0 + g^{m_0}\gamma_1 + g^{m_0+m_1}\gamma_2 + \cdots. \tag{2.13}$$

不难看出， $H^1(C;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[\zeta_N]$ 是张量积复形的中间同调，但要统一地描述这一点并不太方便。不过，在 $\mathbb{Q}[\zeta_N]$上，这类描述有很多，其依据是

$$(g^{m_i}-1)\gamma_j - (g^{m_j}-1)\gamma_i \tag{2.14}$$

对于 $i \ne j$，这些都是余循环；任取一组 n 个这样的余循环，只要相应的图中没有圈，就构成 $H^1(C;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}[\zeta_N]$的一组基。由于我们现在是在有理数域上进行计算，考虑重标度类会更方便

$$\gamma_{ij} := (\zeta_N^{m_j}-1)^{-1}\gamma_j - (\zeta_N^{m_i}-1)^{-1}\gamma_i. \tag{2.15}$$

其意义在于，全纯微分沿 γ_{ij} 的积分，等于该微分沿一条从 x_i 到x_j的曲线的（广义）积分。事实上，沿 γ_i 的积分是$\zeta_N^{m_i}-1$ 倍于沿一条曲线 γ_i' 从 ∞ 到 x_i的积分，因为 γ_i 在 C 中同伦于这样一条曲线：它先从 ∞的标记原像出发，沿着 γ_i' 的原像前行，然后沿着该 γ_i'的原像返回$g^{m_i}\infty$ 。

特别是，如果我们能够计算单值化在积分 $\int_{x_i}^{x_j}\omega$ 上的作用，就能得知 Prym 的有理单值化。（事实上，之后恢复整系数单值化并不太难，但对我们而言，有理单值化已经足够，因为在我们关心的情形中，格的相似类是唯一的。）这些都是超几何积分的特殊情形

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \prod_{0\le i\le n+1} (x-x_i)^{\alpha_i-1}dx, \tag{2.16}$$

并且尤其满足关于 x_0 的优美微分方程（本质上是 Jordan-Pochhammer方程，只差一个整体归一化因子）。因此，可以从 Jordan-Pochhammer方程的局部结构中直接读出以下结论。称 GL_n 中的一个元素 $g \in$ 为 伪反射，如果 $\mathrm{rnk}(g-1) = 1$，并将它的另一个特征值称为 “ 非平凡 ” 特征值（它也可能等于 1）。

命题 2.4. 如果量 α_i 或 $\alpha_0+\alpha_i$ 都不是整数，那么超几何积分在 x_0 中的单值化

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \prod_{0\le i\le n+1} (x-x_i)^{\alpha_i-1}dx \tag{2.17}$$

对于 $1 \le i \le n$，由元素 g_i、$1 \le i \le n+1$ 生成，其中每个 g_i 都是伪反射，且具有非平凡特征值

$$\exp(2\pi\sqrt{-1}(\alpha_0 + \alpha_i)), \tag{2.18}$$

以及 $\prod_i g_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_0)$。

事实上，我们还可以进一步说明：如果先换到一个包含 γ_{0i} 、且不含任何其他与 x_0相连的边的基，那么与那些其他边相关的积分都在绕 x_i的单值化作用下保持不变，而沿着 γ_{0i} 的积分的特征值为 $\exp(2\pi\sqrt{-1}(\alpha_0+\alpha_1))$。确实，如果我们对 $x_0 = x_i + uy$重新参数化，那么 x_0 绕 x_i 的单值化，就是 u 中绕 0 的一个小回路的单值化。那些不包含 0 的边上的积分在 $u = 0$处全纯，因此单值化平凡；而沿着 γ_{0i} 的积分则是 $u^{\alpha_0+\alpha_i}$ 乘以一个全纯函数。由于可以明确写出基变换，这使得我们能够在任意所需的基下写出单值化。（这仅直接适用于生成元可对角化且所有指数都不是整数的情形，但单值化显然关于参数亚纯，因此所得表达式可以延拓。）

特别地，我们看到，当 α_i 为有理数时，单值化定义在相应的分圆域上。此外，若 β_i 是另一组具有相同公分母的参数，且对某个固定的 d有 $\beta_i - d\alpha_i \in \mathbb{Z}$，那么其单值化在伽罗瓦群作用下彼此相关。因此我们发现，全纯微分形式的不同选取确实给出了相容的 Prym 单值化表达式。

命题2.5. 设 $C/\mathbb{P}^1$ 是 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 的一个 μ_N-覆盖，在 $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 处以权重$m_0, \dots, m_{n+1}$分歧，并考察 x_0 变化时的 μ_N-覆盖族（固定 ∞上方的一点）。那么，该族的 *Prym* 的单值化由 $g_1, \dots, g_{n+1}$ 生成，其中每个 g_i 都是伪反射，其非平凡特征值为 $\zeta_N^{m_0+m_i}$，且 $\prod_i g_i = \zeta_N^{m_0}$。

注。 注意，尽管我们知道 $\mathbb{Z}(\zeta_N)$ 上的单值化由伪反射生成，但这些伪反射原则上可能在模某个素数后变为 1。

更一般地，给定域 K（特征可能有限）上的元素 $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in K^\times$，其乘积为 1，则 *Jordan-Pochhammer*群（在共轭意义下）是 $\mathrm{GL}_n(K)$ 的子群，由满足 $\mathrm{rnk}(g_i - 1) \le 1$、$\det(g_i) = \lambda_0\lambda_i$ 的元素 $g_1, \dots, g_{n+1}$ 生成，并且

$$\prod_i g_i = \lambda_0. \tag{2.19}$$

（这迫使 $\prod_{0\le i\le n+1} \lambda_i = 1$。）当然，这里的"该"一词需要论证。事实上，[16] 证明了，存在唯一一个（在共轭意义下）这样的矩阵组，使得这些元素是伪反射，且相应的表示不可约。因此，问题归结为证明伪反射条件（即没有 g_i 为 1）和不可约性。

引理 2.6. 设 V 是一个维数为 $\ge n$ 的向量空间，并设 $g_1, \dots, g_n \in \mathrm{GL}(V)$ 满足$\mathrm{rnk}(g_i - 1) \le 1$，且 $\prod_i g_i$ 是一个标量 μ。那么 $\mu = 1$ 或 $\det(g_i) \equiv \mu$。

证明. 首先注意，若 $\mathrm{rnk}(g-1) \le a$，且 $\mathrm{rnk}(h-1) \le b$，则 $\mathrm{rnk}(gh-1) \le a+b$。特别地，由此可得

$$(\prod_{1\le i\le n-1} g_i)^{-1} - 1 \tag{2.20}$$

秩至多为 $n-1 <$ 维数(V)。但这等于 $\mu^{-1}g_n - 1$，因此 μ 必定是 g_n的一个特征值。特别地，要么 $\mu = 1$ （若 $n <$ 维数(V)，则必然如此，因为此时特征值 μ对应的特征空间至少是二维的），要么 μ 是 g_n的非平凡特征值。但循环对称性意味着其他 g_i 也同样如此。

□

引理 2.7。 设 V是一个维数为 n的向量空间，且 g_1，……， $g_{n+1} \in \mathrm{GL}(V)$ 满足秩$(g_i - 1) \leq 1$，并且 $\prod_i g_i$ 是标量 μ。若 $\mu \neq 1$ 且不是任何 g_i的特征值，则 g_i是伪反射，并生成$\mathrm{GL}(V)$的一个不可约子群。

证明。 根据前一个引理， g_i 是伪反射；否则实际上我们有 $\leq n$个生成元。因此，只需证明不可约性。设 W 是一个不变子空间。由此可确定自由群的两个较小表示， W和 V/W；对于每个g_i，它要么在两者上都平凡作用，要么在其中一个上为恒等变换、在另一个上为伪反射。如果至多有 $\dim(W)$ 个 g_i在 W上非平凡作用，或者至多有 $\dim(V/W)$ 个在 V/W上非平凡作用，那么前一个引理告诉我们（因为 $\mu \neq 1$），这些伪反射具有非平凡特征值μ，这与我们的假设矛盾。因此，至少有 $\dim(W)$ 个 $+1$ 元素在W上非平凡作用，且至少有 $\dim(V/W)$ 个 $+1$元素在 V/W上非平凡作用。这两组互不相交，合计至少涉及 $(\dim(W) + 1) + (\dim(V/W) + 1) = n + 2 > n + 1$ 个生成元，从而产生矛盾。 □

换言之，只要所有参数都不等于 1，Jordan-Pochhammer 表示就是良定义且不可约的。

引理 2.8。 对于每个 $1 \leq m \leq n$，在参数为 $(\lambda_0;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ 的 ***Jordan-Pochhammer*** 表示下，乘积 $g_{\{1,\ldots,m\}} := g_1 \cdots g_m$ 的像满足

$$\dim \ker(g_{\{1,\ldots,m\}} - 1) = n - m, \qquad \dim \ker(g_{\{1,\ldots,m\}} - \lambda_0) = m - 1 \tag{2.21}$$

其余特征值等于 $\lambda_0 \cdots \lambda_m$。

证明。 由于$g_{\{1,\ldots,m\}}$ 是 m个伪反射的乘积，

$$g_{\{1,\ldots,m\}} - 1 \tag{2.22}$$

的秩至多为 m，而

$$g_{m+1} \cdots g_n - 1 \tag{2.23}$$

的秩至多为 $n - m$，并且

$$g_{\{1,\ldots,m\}} g_{m+1} \cdots g_n - 1 = \lambda_0 g_{n+1}^{-1} - 1 \tag{2.24}$$

秩为 n 。由于各项秩相加至多为……，因此这些不等式必定都取等号，从而

$$\dim \ker(g_{\{1,\ldots,m\}} - 1) = n - m \tag{2.25}$$

如所需。用同样的论证，

$$\dim \ker(g_{\{1,\ldots,m\}} - \lambda_0) = m - 1, \tag{2.26}$$

而剩余的特征值为

$$\det(g_{\{1,\ldots,m\}})\lambda_0^{1-m} = \lambda_0^{1-m} \prod_{1 \leq i \leq m} \det(g_i) = \lambda_0^{1-m} \prod_{1 \leq i \leq m} \lambda_0 \lambda_i. = \prod_{0 \leq i \leq m} \lambda_i \tag{2.27}$$

如所需。 □

引理 2.9。 若 $\lambda_0 \cdots \lambda_m \neq 1$，则将 $g_1, \ldots, g_m, \lambda_0 g_{\{1,\ldots,m\}}^{-1}$ 限制到$\mathrm{im}(g_{\{1,\ldots,m\}} - 1)$ 后，得到参数为 $(\lambda_0;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m, 1/\lambda_0 \cdots \lambda_m)$的 ***Jordan-Pochhammer*** 表示。

证明。 空间 $\mathrm{im}(g_{\{1,\dots,m\}}-1)$ 在 $g_1,\dots,g_m$ 的作用下保持不变，因此它们的限制要么是伪反射，要么是平凡的， $\lambda_0 g_{\{1,\dots,m\}}^{-1}$ 也是如此，因此得到具有给定参数的 Jordan-Pochhammer 表示。由于这些参数都不为 1，这就是具有这些参数的 Jordan-Pochhammer 表示。

□

这可以大幅推广。辫群在由 $n+1$ 个生成元组成的自由群上有一个众所周知的作用，其中 σ_i 的作用为

$$(g_1,\dots,g_{i-1},g_{i+1},g_{i+1}^{-1}g_ig_{i+1},g_{i+2},\dots,g_{n+1}). \tag{2.28}$$

Jordan-Pochhammer 表示与 σ_i 复合后，仍是一个由伪反射构成、且其乘积为（相同）标量的表示，因此又是一个 Jordan-Pochhammer 表示，其中 λ_i 和 λ_{i+1} 互换。对于任意子集 $S\subset\{1,\dots,n+1\}$，我们都可以应用一系列这样的变换，得到一个相同形式的表示，其中元组以 g_i 开头，对应$i\in S$ （按顺序）。有鉴于此，定义 g_S 为 g_i （ $i\in S$）的有序 乘积，并令λ_S：$=\prod_{i\in S}\lambda_i$。

引理 2.10。 g_S 在参数为$(\lambda_0;\ \lambda_1,\dots,\lambda_{n+1})$ 的 *Jordan-Pochhammer* 表示下的像满足

$$\dim\ker(g_S-1)=n-|S|,\qquad \dim\ker(g_S-\lambda_0)=|S|-1 \tag{2.29}$$

剩余特征值为 $\lambda_0\lambda_S$。若 $\lambda_S\neq 1$，则将（$g_i:\ \ i\in S,\lambda_0 g_S^{-1}$）限制到$\mathrm{im}(g_S-1)$后，得到参数为（$\lambda_0;\ \lambda_i:\ \ i\in S,1/\lambda_0\lambda_S$）的 *Jordan-Pochhammer* 表示。

注意，由于 Jordan-Pochhammer 表示具有刚性和不可约性，辫群中任何一个对参数作用平凡的元素（例如纯辫群中的元素）都会产生一个（除标量外）唯一的矩阵，使 Jordan-Pochhammer 表示在该矩阵下保持不变。纯辫群的生成元对应于某个其他分歧点移动时形成的回路，因此它们本身也由伪反射给出。将此与基本群结合，可得到一个以 $n+2$ 股线为对象的纯辫群表示（即 Gassner 表示），并且同样可以将其明确写出。（这一点已通过 [15], 中的拓扑方法证明，但受分歧方面某项技术条件的限制。）不过，从单值化的角度来看，自然的做法似乎是关注由此产生的元素的特定共轭类，而非它们作为矩阵的具体表示。

关于 Jordan-Pochhammer 表示的另一个重要事实，可以直接从它与 Prym 簇的关系推导出来。

命题 2.11. 域的特征不为 *2* 时，带有参数 $(-1;\ -1,\dots,-1)$ 的 *Jordan-Pochhammer* 表示保持唯一的辛形式。

证明。 在特征零下，该表示作用于双曲线的中间同调，因此确实保持一个辛形式。否则，我们可以将其提升到特征零，并注意到半连续性意味着模 p 表示也保持一个交错形式。唯一性随即由不可约性得出，非退化性亦然。

□

命题 2.12。 设 L/K 是一个二次域扩张，且 λ_0、……、$\lambda_{n+1}\in L$ 是范数为 *1* 且乘积为 *1* 的元素，其中没有一个等于 *1*。那么相应的 GL_n 中的 *Jordan-Pochhammer* 表示保持一个非退化反厄米形式，且该形式在标量倍数意义下唯一。

证明。 根据前一个命题，我们可以假设至少有一个参数不为 -1。先假设 $L/K = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ 和 λ_0、……、λ_{n+1} 是单位根，因此 Jordan-Pochhammer 表示是某个 Prym 的单值化。在 $H^1(C;\mathbb{C})$上有一个自然的 $\mathbb{C}$值交错形式，它由在 C上对微分形式的楔积进行积分给出；将其与自然的共轭结合，便得到一个反厄米形式，其表达式（相差一个常数因子）为

$$\langle f_1\,dz + \bar{g}_1\,d\bar{z}, f_2\,dz + \bar{f}_2\,d\bar{z}\rangle = 2\sqrt{-1}\iint \big(\bar{f}_1 g_2 - g_1\bar{f}_2\big)dxdy. \tag{2.30}$$

由此可知，单值化保持该形式在 μ_N 的适当特征空间上的限制。相对于该形式，这个特征空间自然分解为全纯微分空间与反全纯微分形式空间的正交和。在全纯微分空间上，它是 $\sqrt{-1}$ 倍的正定形式；而在反全纯微分形式空间上，它是 $\sqrt{-1}$ 倍的负定形式，因此确实是非退化的。唯一性同样由不可约性推出。

由于参数为单位根的情形在扎里斯基意义下稠密，因此可知，该表示在任意域上至少保持一个斜双线性形式。由不可约性可知，除标量倍数外它是唯一的，因此这些形式与其共轭成比例；根据希尔伯特第90定理，它们与反厄米形式成比例，而反厄米形式除以 $K^\times$ rescaling 外唯一。 □

推论 2.13。 对于任意参数 λ_0、……、$\lambda_{n+1} \in S^1$，它们的乘积为 *1* 且均不等于 1，*Jordan-Pochhammer* 表示保持一个非退化的厄米形式，该形式为

$$-1 + \sum_{0\le i\le n+1} \{\log(\lambda_i/2\pi\sqrt{-1})\} \tag{2.31}$$

正特征值和

$$-1 + \sum_{0\le i\le n+1} \{-\log(\lambda_i/2\pi\sqrt{-1})\} \tag{2.32}$$

负特征值。

证明。 事实上，在参数为单位根的情形（在拓扑意义上）稠密的集合中，这些数恰好分别是相关特征空间中全纯微分形式和反全纯微分形式的数量。

□

Let

$$R_{JP} := \mathbb{Z}[\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}, 1/(\lambda_0 - 1)\cdots(\lambda_{n+1} - 1)]/(\lambda_0 \cdots \lambda_{n+1} - 1) \tag{2.33}$$

Jordan-Pochhammer 表示泛型定义所在的环。

命题 2.14。 *Jordan-Pochhammer* 表示可以在 R_{JP} 上整体定义，并保持一个系数取自 R_{JP} 且行列式为单位的反厄米形式。

证明。 由不可约性，Jordan-Pochhammer 表示族是 Spec(R) 上的一个 PGL$_n$-丛，而 im($g_1 - 1$) 给出了相应布劳尔-塞韦里簇的一个截面，因此该表示作用于一个向量丛上。但 R 在 $\mathbb{A}^{n+1}$ 中是开集，所以这个向量丛是平凡的。

同样，斜双线性形式的空间是秩为 1 的局部自由模，因此是平凡的，故存在一个具有单位行列式的此类形式；该形式在相差一个单位倍数的意义下唯一确定。特别地，若 β^- 是这样的形式，则存在一个单位 ζ 使得 $\beta = -\zeta\beta$；由唯一性可知，该单位的范数必为 1。此外，在对合的不动点处（所有参数均为 -1），它取值为 1；而且对合是温和分歧的，因此相应的上同调类是平凡的，于是我们可以将 β 缩放为所需的反厄米形式。 □

注。 当然，该形式仅在相差不变单位倍数的意义下唯一，例如 $(\lambda_i - 1)^2/\lambda_i$。

推论 2.15. 假设 $C/\mathbb{P}^1$ 是一个循环 N-覆盖，且其分歧次数均不是素数幂。那么 $\mathrm{Prym}(C)$ 同构于其对偶。

证明. 分歧次数的约束意味着每个 $1-\lambda_i$ 都是 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 中的单位，因此从 R_{JP} 到 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ 的映射经由 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 分解。由于 Prym(C) 的标准极化是单值化不变的，它必定是命题中给出的唯一形式的一个标量倍（倍数属于 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$），因此标准极化的核是某个自同态的核，所以经由同构 Prym(C) $\cong$ Prym(C)$^\vee$ 分解。 □

注. 这并不意味着 Prym(C) 存在主极化，因为这要求到 Prym(C)$^\vee$ 的同构作为同源必须等于其自身的对偶。

3 大像性

设 L/K 是数域的二次扩张，对应的极大阶为 O_L、 O_K，并令 $A \mapsto A^\dagger$ 表示 Mat$_n$(L) 上相应的共轭转置运算。给定一个行列式非零的反厄米矩阵 $A = -A^\dagger$ ，我们将相应的酉群 GU(A) 定义为 GL$_n$(O_L) 的子群，由满足 $gAg^\dagger = A$的矩阵 g 组成。若 $\mathfrak{p}$ 是 K 的任意素数，我们类似地将 GU($A_\mathfrak{p}$) 定义为在 $\mathfrak{p}$ 处的完备化上矩阵所构成的相应（紧致！）群。我们还将 SU 定义为相应的行列式为 1 的子群。令 S_A为 K 中不整除 det(A)det(A) 的有限素点集合。

定义 3.1。 若同态 $\phi : G \to$ SU(A) 的复合 on

$$G \to \mathrm{SU}(A) \to \prod_{\mathfrak{p} \in S_A} \mathrm{SU}(A_\mathfrak{p}) \tag{3.1}$$

具有稠密像。同态 ϕ: $G \to$ GU(A) 若其限制到 SU(A) 的原像上是大像性的，则称其为大像性。

注。 对于我们在单值化中的应用，我们不能期待在阿德尔酉群中具有稠密性，原因很简单：行列式始终是一个全局单位根。当然，要理解一个大同态的像，剩下的只是控制行列式。对于我们关于 $\mathbb{P}^1$ 的覆盖族而言，这一点是直接的；但对于高亏格族，我们的论证只能给出行列式像的一个下界。

p-进群 $U(A_\mathfrak{p})$ 根据 $\mathfrak{p}$ 在 L 中的表现分为三种类型。如果 $\mathfrak{p}$ 是分裂的，那么 GL$_n$($O_{L,\mathfrak{p}}$) $\cong$ GL$_n$($O_{K,\mathfrak{p}}$)^2 ，并且 $A_\mathfrak{p}$ 在两个自由模之间诱导出一个非退化配对，因此 GU($A_\mathfrak{p}$) $\cong$ GL$_n$($O_{K,\mathfrak{p}}$)，而 SU($A_\mathfrak{p}$) $\cong$ SL$_n$($O_{K,\mathfrak{p}}$)。类似地，如果 $\mathfrak{p}$是非分裂的，那么 $A_\mathfrak{p}$ 是一个反厄米形式，因此 SU($A_\mathfrak{p}$) 是通常的 p-进酉群，即在 O_K、$\mathfrak{p}$ 上 SU$_n$ 的一个拟分裂形式。（通过对 $\mathfrak{p}$ 的幂进行简单归纳可知，任意两个非退化反厄米形式都是等价的，因而给出同构的群。）无论哪种情形，模 $\mathfrak{p}$ 约化都会得到到相应剩余域上的 SL$_n$ 或 SU$_n$ 的一个满射。

当 $\mathfrak{p}$ 温和分歧时（我们忽略野分歧情形，因为它不会出现在我们的应用中），该群仍可视为定义在$O_{K,\ \mathfrak{p}}$上的群概形，但不再是约化的。若 $\mathfrak{p}'$ 是 L中对应的素数，那么对 $\mathfrak{p}'$ 的幂进行归纳，再次表明 $A_\mathfrak{p}$ 本质上是唯一的。特别地，我们可以令 $A_\mathfrak{p}$ 的系数属于$O_{K,\ \mathfrak{p}}$，从而使其成为一个辛形式的基变换。（特别是， n 必须是偶数！）因此我们看到，SU($A_\mathfrak{p}$)包含 Sp$_n$($O_{K,\ \mathfrak{p}}$),

因此模 $\mathfrak{p}'$ 约化给出从 $\mathrm{SU}(A_{\mathfrak{p}})$ 到 $\mathrm{Sp}_n(k_{\mathfrak{p}})$ 的满射。然而，其核模 $\mathfrak{p}$后的像非平凡，是一个维数为 $n(n-1)/2-1$ 的加法群；该群可与 $k_{\mathfrak{p}}$ 上在迹配对下正交于 A的交错形式空间等同。（准确地说，若 π 是 $\mathfrak{p}'$的一个一致化子，且满足 $\bar{\pi}=-\pi$，那么元素 $1+\pi B$ 是酉的模 $\mathfrak{p}$，当且仅当$BA=-(BA)^t$ （模 $\mathfrak{p}$）′，且其行列式为 1，当且仅当 $\mathrm{Tr}(B)=0$。）

注。 也可以考虑厄米形式的情形：在非分歧情形下，两种情形一致（乘以迹为 0 的元素）；而在分歧情形下（同样假设温和分歧），其约化将是 SO_n 与一个 $n(n+1)/2-1$ 维对称形式空间的扩张。另外请注意，尽管我们使用矩阵 A，这只是为了简化讨论；下文的所有内容同样适用于局部自由 O_K-模上的形式。

由于大像性是一个关于到乘积的（拓扑）满射性的问题，因此讨论这类满射性的一些引理会很有帮助。一个简化之处在于，除了一些我们不考虑的低秩情形外，乘积中的因子都是完美群。（这也带来一项简化：我们可以将同态限制在定义域的导出子群上，再映到 $\mathrm{GU}(A)$，而不影响大像性。）

引理 3.1。 设 $H\subset G_1\times G_2$ 是一个真子群，且两个投影都是满射。则存在真正规子群 $N_1\trianglelefteq G_1$、$N_2\trianglelefteq G_2$，使得 $G_1/N_1\cong G_2/N_2$。

证明。 令 $N_1\subsetneq G_1$ 为投影 $H\to G_2$ 的核， $N_2\subsetneq G_2$也类似。于是$N_1\times N_2\trianglelefteq H$，因此我们可以取商，得到一个子群 $H/(N_1\times N_2)\subset(G_1/N_1)\times(G_2/N_2)$，使得两个投影也都是单射。但这样一来，两个投影都是同构，结论得证。

□

引理 3.2。 设 $G_1,\dots,G_n$ 是一列完美群，且 $H\subset G_1\times\cdots\times G_n$ 是一个子群，使得任意投影 $\pi_{ij}\colon\ H\to G_i\times G_j$ 都是满射。那么 $H=G_1\times\cdots\times G_n$。

证明。 令 N_i 为投影 $H\to G_i$的核。它是 H 的正规子群，并且对所有 $i\neq j$都满射到 G_j。对于任意 $g_1,\ h_1\in G_1$和 $i,\ j>1$，存在一个 N_i中的元素，其第一个坐标为 g_1，并存在一个 N_j中的元素，其第一个坐标为 h_1，因此它们的交换子是 $N_i\cap N_j$中的一个元素，其第一个坐标为 $g_1h_1g_1^{-1}h_1^{-1}$。特别地，我们看到，对于所有 $1\notin\{i,j\},\ N_i\cap N_j$都满射到 G_1；归纳可得，$N_2\cap\cdots N_n$满射到（因而包含！） G_1。由于根据归纳假设 H满射到$G_2\times\cdots\times G_n$，结论得证。□

注意到上述论证同样适用于拓扑群的闭子群，并且可立即推广到无限乘积。因此我们看到，只要因子 $\mathrm{SU}_n(A_{\mathfrak{p}})$ 是完美的（若 $n\geq 4$，根据下面的推论 6.9，这一点是自动成立的），证明大像性就归结为证明在任意一对素数上的乘积中像是稠密的。每个因子都是由一个有限单群和一个 pro-p-群构成的扩张，并且（由于它是完美的）不存在任何 pro-p-群商。由此可知（再次避开低秩情形），对于具有不同剩余域的素数，满射到这一对素数上的问题，归结为分别满射到每个因子，以及满射到有限单群乘积的问题！（如果真子群 H 的投影都是满射的，那么对完整的 pro-p-群取商后，就会得到有限单群商之间的一个同构。）因此，我们归结为证明：(a) 满射到每个因子；(b) 满射到定义在同一剩余域上的每一对有限单群。（在我们的情形中， K 将是 $\mathbb{Q}$ 的一个阿贝尔扩张，因此“同一剩余域”简单地意味着“具有相同的特征”。）实际上，(a) 和 (b) 都从一个共同的第一步开始，即证明映射到每个剩余群都是满射的。然后，(a)（又称“提升”）归结为证明像包含约化映射的核；由于该群是幂零的，这又可归纳地归结为线性问题。另一方面，对于 (b)，只需排除像是某个同构的图像这一可能性。

4 素数模数下的大像性

证明（约化的、圆分的）Jordan-Pochhammer 表示具有大像性的第一步，是证明它模实子域的素数约化后基本上是满射的。（这已在 $n > 8$ 的 [16] 中得到证明；我们将其推广到 $n > 4$，并描述 $n = 3,\ 4$ 的有限例外，以及 $n = 2$ 中数量较少的例外。）这反过来又归结为理解模 Jordan-Pochhammer 表示的像，即参数是 $\mathbb{F}_q^\times \setminus \{1\}$ 中的元素时的情形。

由于自由群的生成元在 Jordan-Pochhammer 表示下映为伪反射，其像将是由伪反射生成的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ 的不可约子群。这类群在共轭意义下的分类广为人知，不过颇为奇怪的是，似乎从未在任何单一出处中完整陈述过。这些群分为三类：

1. 满足以下某一种情形的经典群： $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q)$,

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) \subseteq G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q), \tag{4.1}$$
$$\mathrm{SU}_n(\mathbb{F}_q) \subseteq G \subseteq \mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q), \tag{4.2}$$
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \subseteq G \subseteq \mathbb{F}_{q^2}^\times \otimes \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q), \tag{4.3}$$
$$\Omega_n(\mathbb{F}_q) \subseteq G \subseteq \mathrm{GO}_n(\mathbb{F}_q), \tag{4.4}$$

其中最后一种情形不包括不含反射的群 $\Omega_n(\mathbb{F}_q)$、$\mathrm{SO}_n(\mathbb{F}_q)$。

2. 不可约复反射群的忠实约化（按文献 [12]中的分类）。

3. 群 $S_{pn} \subset \mathrm{GL}^{pn-2}(\mathbb{F}_p)$、$3.\mathrm{Alt}_6 \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_4)$、$3.\mathrm{Alt}_7 \times 2 \subset \mathrm{GU}_3(\mathbb{F}_5)$、$4.\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4).2 \subset \mathrm{GU}_4(\mathbb{F}_3)$，以及 $3.\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_3).2_2 \subset \mathrm{GU}_6(\mathbb{F}_2)$。

关于维数 > 2 的分类，参见 [9, §2.1] 及其中的参考文献。对于 $n = 2$，在 [5] 中证明，$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$ 的任意有限不可约子群，要么可提升至特征零，要么是 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ 或 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$，其中 q。由于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的任意非恒等元素都是幂零变换或一对齐次变换的像，因此容易推出，像可提升的任意反射群也可提升，而 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的提升具有所述形式。

注。 在情形 3 中出现的群 $3.\mathrm{Alt}_6$ 和 $3.\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_3).2_2$ 分别是 ST_{27}和 ST_{34} 模 2 约化后的群；两种情况下，约化映射的核都是 μ_2。在其他所有 Shephard-Todd 群的约化不忠实的情形中，约化后的群要么可约，要么已在列表中的其他位置出现。

类型 2 的群可归结为特征零下的问题。

引理 4.1. 对于 $n > 4$，设 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, 1\}$ 是乘积为1的参数。那么 *Jordan-Pochhammer* 表示的像不可能是不可约复反射群的忠实约化。

证明。 如果不可约 Jordan-Pochhammer 表示的像是某个复反射群的忠实约化，那么生成元的原像仍是伪反射，因此该表示是特征零下某个表示的约化。有限单值群的情形已在 [13], 中分类，且不存在 $n > 4$ 的情形。（他们采用的单值化版本略有不同，其中标量被吸收到某个生成元中，但这对有限性没有影响。）

□

注。 在辫群作用和伽罗瓦作用下，满足 $n \in \{3,4\}$ 的唯一情形具有如下参数

$$(\zeta_6^2;\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6)\ [3^{1+2}.2], (\zeta_6;\zeta_6^2,\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6)\ [\mathrm{ST}_{26}] \tag{4.5}$$

对于 $n=3$ ($p\neq 3$) 或

$$(\zeta_6;\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6,\zeta_6)\ [\mathrm{ST}_{32}] \tag{4.6}$$

对于 $n=4$。对于 $n=2$，存在大量情形：任意一对生成 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 有限子群的元素，都会在 $\mathbb{C}$ 上产生 8 个有限的 Jordan-Pochhammer 表示。（将生成元提升为伪反射有两种方式，此外还可以选择乘积的哪个特征值是 λ_0。）

注。 $n=3$ 的两种情形对应具有相同分歧、但移动的分歧点选择不同的覆盖。如果允许所有 分歧点移动，群会变大，但仍然是有限群，因为它包含单点移动的单值化群作为正规子群。

对于 3 型群和正交群，伪反射的阶全为 2，因此参数必须具有如下形式

$$(\lambda_0;-1/\lambda_0,\dots,-1/\lambda_0) \tag{4.7}$$

其中 $\lambda_0^n=(-1)^{n+1}$，但 $\lambda_0\notin\{\pm 1\}$。因此，对称群和正交群的中心阶为 ≤ 2，可立即排除。对于其余散在情形，秩 3 的情形可由以下事实排除：相应的特征零参数生成一个不可约反射群，而 $4.\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4).2$ 则需要一个阶为 4 的中心元素。最后，如果像是 $2.U_4(3).2_2\cong \mathrm{ST}_{34}/\mu_2$，那么我们可以将生成元提升为 ST_{34} 中的伪反射；这些提升的乘积仍会是一个中心元素，因此与 [13] 矛盾。

对于 Sp_{2n} 情形，所有生成元都是幺幂变换，因此参数必须是

$$(\lambda_0;1/\lambda_0,\dots,1/\lambda_0) \tag{4.8}$$

此外，由于 Sp_{2n} 的中心为 μ_2，我们必须有 $\lambda_0=-1$，因此参数全都为 -1；在这种情况下，该群确实包含于 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$，故（根据上述论证）等于 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$。

现在只需证明，在其余情形中，该群包含相应的线性群或酉群。（也就是说，我们必须排除它可定义在某个子域上的可能性。） [16] 中针对这一点的论证对 $n>2$仍然有效；事实上，我们可以证明一个推广结果，这将有助于处理两两大像性。

引理 4.2。 设 L/K 是有限 *´étale* 代数的二次扩张；对于 $n>2$，设λ_0、..、$\lambda_{n+1}\subset L$ 是范数为 *1* 且乘积为 *1* 的元素，并且对每个 i，$1-\lambda_i$ 都是单位。若 L 由 λ_0、...、λ_{n+1}生成，则不存在子代数 $L'\subset L$，使得 *Jordan-Pochhammer* 表示在 $\mathrm{GL}_n(L)$ 中的像包含于 $\mathrm{GL}_1(L)\otimes\mathrm{GL}_n(L')$的某个共轭中。

证明。 否则，在作出适当的基选择后，我们可以假设生成元都与系数属于 L' 的矩阵成比例。但随后生成元的系数实际上必须属于 L'，因为它们在 $\mathrm{Gal}(L/L')$ 下的共轭彼此成比例，因而相等（因为 1 的重数不同于任何其他特征值的重数）。特别地，生成元的非平凡特征值必须属于 L'，即对于所有 i 都有 $\lambda_0\lambda_i\in L'$。但生成元的乘积也属于 $\mathrm{GL}_n(L')$，因此 $\lambda_0\in L'$，这迫使 $L'=L$。

□

注。特别地，给定任意有限的 étale 代数 R 以及任意参数 λ_0，……，$\lambda_{n+1} \in R$，它们的乘积为 1，且对所有 i，$\lambda_i - 1$ 都是单位，我们可以取 L 为由 $(\lambda_0,\ 1/\lambda_0)$，……，$(\lambda_{n+1},\ 1/\lambda_{n+1})$ 在 $R \times R$ 中生成的子代数，并且发现 Jordan-Pochhammer 表示包含于 $\mathrm{GU}_n(L/(L \cap R))$ 中，且不包含于任何更小的酉群或线性群的共轭中。
注。对于 $n = 2$，这一论证失效，因为我们无法再可靠地区分生成元的两个特征值。相反，我们发现该群包含于 $\mathrm{GL}_1(L)$ $\mathrm{SL}_2(K')$ 的一个共轭群中，其中 K' 由 $\lambda_0 + 1/\lambda_0$、$\lambda_1 + 1/\lambda_1$、$\lambda_2 + 1/\lambda_2$ 和生成。

$$\frac{(1-\lambda_0)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)(1-\lambda_0\lambda_1\lambda_2)}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}. \tag{4.9}$$

5 两两满射性

证明分圆 Jordan-Pochhammer 表示具有大像性的下一步，是证明对于 $\mathbb{Q}(\zeta_N + \zeta_N^{-1})$ 上位于同一有理素数 p之上的任意一对（不可约）素理想，约化映射仍然是满射。由于分圆域是 $\mathbb{Q}$的阿贝尔扩张，$\mathbb{Z}[\zeta_N]$对这两个素理想取商后同构，且同构于 $\mathbb{F}_{q^2}$ 或 $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$。固定这一 étale 代数$A$ 的标准形式，并选定态射 $\mathbb{Z}[\zeta_N] \to A$，使其核为这两个素理想；由此得到 F_{n+1} 在 $\mathrm{GU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 中的一对表示（其中该群为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 或 $\mathrm{GU}_n(\mathbb{F}_q)$）。这两个态射相差一个 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$的自同构，可记作 $l \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$中的一个元素。注意，$\mathbb{Q}(\zeta_N + \zeta_N^{-1})$中的两个元素对应同一个素理想，当且仅当它们属于由 p和 -1生成的子群的同一陪集。

我们的假设 $n > 4$ 确保 $\mathrm{GU}_n(A)'/Z(\mathrm{GU}_n(A)')$ 是一个单群，因此，如果 G 是 F_{n+1} 在 $\mathrm{GU}_n(A)$ 中的像，那么 G' 在 $\mathrm{PSU}_n(A/\mathbb{F}_q)^2$ 中的像要么是整个群，要么是某个自同构的图。$\mathrm{PSU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 的自同构（事实上，任何李型单群的自同构）都已得到充分理解：它们由 $\mathrm{Gal}(A/\mathbb{F}_p)$ 在 $\mathrm{PGU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 上的作用生成。（注意，在 SL 情形中，通常的图自同构对应于交换 $\mathbb{F}_q$的两个因子的 A 的自同构。）特别地，我们看到，可以将 $\mathrm{Gal}(A/\mathbb{F}_p)$ 的作用并入上文对 l 的选择中，从而归结为 $\mathrm{PSU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 的自同构来自 $\mathrm{PGU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 的情形。

现在，更一般地考虑 $g \in F_{n+1}$ 在 $\mathrm{PGU}_n(A/\mathbb{F}_q)^2$，中的像，即 $(g_1,\ g_2)$。对于任意$h \in F'_{n+1}$，它在 $\mathrm{PSU}_n(A/\mathbb{F}_q)^2$ 中的像为 $(\phi(h)\ u\phi(h)u^{-1})$，其中某个固定元素 $u \in \mathrm{PGU}_n(A/\mathbb{F}_q)$，并且这必须与共轭作用相容：

$$g_1\phi(h)g_1^{-1} = \phi(ghg^{-1}) \tag{5.1}$$
$$g_2 u\phi(h)u^{-1}g_2^{-1} = u\phi(ghg^{-1})u^{-1} \tag{5.2}$$

由于这对所有 h 都成立，我们得出

$$g_2 = ug_2u^{-1}, \tag{5.3}$$

因此，F_{n+1} 在 $G^2 \subset \mathrm{PGU}_n(A/\mathbb{F}_q)^2$ 中的像仍是与 u 对应的自同构的图。

特别地，我们看到 F_{n+1} 在 $\mathrm{GU}_n(A/\mathbb{F}_q)^2$ 中的像包含于 $\mathrm{GU}_n(A/\mathbb{F}_q)$ 的某个共轭中。由引理 4.2，这意味着 A 的对角副本包含 $(\lambda_i,\ \lambda'_i)$，对所有 i 均如此，因此 $\lambda'_i = \lambda_i$ 对所有 i 均成立。换言之，这两个素数实际上相同！

由此我们证明了所需的两两满射性。
注。尽管我们在此假设了 $n > 4$，但实际上这一论证对 $n > 2$ 也成立（也就是说，假设两个映射都是满射，且该群不是 $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_2)$）。

6 提升到 p-进数

6.1 来自 p-进群的分次李代数

令 R 为一个混合特征离散赋值环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$ ，剩余域为 k ，特征为 p。那么，$\mathrm{GL}_n(R)$具有一个自然滤过，它来自 R 按 $\mathfrak{m}$的幂所成的滤过；也就是说，我们有一个群的逆系统

$$\cdots \to \mathrm{GL}_n(R/\mathfrak{m}^e) \to \cdots \mathrm{GL}_n(R/\mathfrak{m}^2) \to \mathrm{GL}_n(k) \to 1. \tag{6.1}$$

若 k 的特征为 p，则 $(p) = \mathfrak{m}^d$ 对某个 d 成立，并且我们对 $e > 0$, $I_{e/d}$ 定义：$= \ker(\mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(R/\mathfrak{m}^e))$，其中 $I_0 = \mathrm{GL}_n(R)$。对于 $e > 0$，存在一个本质上自然的识别，将$I_{e/d}/I_{(e+1)/d}$与 $\mathfrak{gl}_n(k)$ 对应起来（取决于一致化子的选择），并且这些识别粘合起来，形成一个带有 $\mathrm{GL}_n(k)$ 作用的分次李代数。更准确地说，考虑交换子 $(A,\ B) = A^{-1}B^{-1}AB$，其中 $A \in I_{e_1/d}, B \in I_{e_2/d}$。我们可以将其改写为

$$(A, B) = 1 + A^{-1}B^{-1}[A, B] = 1 + A^{-1}B^{-1}[A - 1, B - 1] \tag{6.2}$$

由此得到 $(A,\ B) \in I_{(e_1+e_2)/d}$，而伴随分次对象上的对应映射恰好就是通常的李括号。这个分次李代数还具有一种额外结构，它来自 GL_n 上的 p 次幂映射：若 $A \in I_{e/d}$，则 $A^p \in I_{\min(pe/d,(e/d)+1)}$。注意到和式中的第一项和最后一项，即可看出其具体作用

$$A^p - 1 = \sum_{1 \le i \le p} \binom{p}{i} (A - 1)^p \tag{6.3}$$

严格占优，因此

$$A^p - 1 = \begin{cases} (A-1)^p + o(p^{pe/d}) & e/d < 1/(p-1) \\ p(A-1) + (A-1)^p + o(p^{p/(p-1)}) & e/d = 1/(p-1) \\ p(A-1) + o(p^{1+e/d}) & e/d > 1/(p-1). \end{cases} \tag{6.4}$$

若 R 是完备的，且 $G \subset \mathrm{GL}_n(R)$是一个拓扑闭子群，则 G上存在一个诱导滤过，其中 $G/(G \cap I_{1/d})$作用于一个（在 $\mathbb{F}_p$ 上而非 k上！）分次李子代数。

$$\bigoplus_{i>0} (G \cap I_{i/d})/(G \cap I_{(i+1)/d}) \subset \bigoplus_{i>0} \mathfrak{gl}_n(k), \tag{6.5}$$

它在 p次幂运算下也封闭。当 G 是一个扎里斯基闭子群时，我们看到，这个伴随分次李代数不过是显然的分次李代数结构：每个正次数上都是 $\mathrm{Lie}(G)(k)$，因此（正如预期的那样）与忠实表示的选择无关。（此外， p次幂结构也符合预期，其$(A-1)^p$ 是利用 $\mathrm{Lie}(G)$上的受限李代数结构计算的。）

在每种我们关心的情形中，要证明单值化足够大，问题可归结为证明目标群 G的某个子群 H（它总是$\mathrm{GL}_n(R)$中的闭子群，而且通常还是扎里斯基闭的）等于 G；而这又可归结为证明它映满 $\mathrm{GL}_n(k)$，且具有相同的分次李代数。这样做的好处是，分次李代数通常由次数$1/d$的元素生成。

命题 6.1。 设 G/k 是一个单连通单仿射群概形，并假设 $2 \in k^\times$ 或 G 不具有 Sp_{2n} 的形式。那么 $[\mathrm{Lie}(G)(k),\mathrm{Lie}(G)(k)] = \mathrm{Lie}(G)(k)$。

我们还可以使用 $G(k)$的作用。

命题 6.2。 设 G/k 是一个单连通单仿射群概形，并假设$G \neq$ 特殊线性群$_2$ $/\mathbb{F}_2$。那么 $H_0(G(k)'$；李代数$(G)(k) = 0$。

6.2 一般的非分歧提升

事实证明（沿用 [14]），在非分歧情形下，提升往往是自动成立的。更准确地说，除少数低秩情形外，$H \to G_0$ 的满射性意味着相应的分次李代数也很大。

给定一个定义在 $\mathbb{Z}_p$ 的非分歧扩张上的约化群，我们总可以取限制标量，从而得到一个定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的约化群；如果原群是类型 T 群的扭曲，那么新群将是 T^m 的扭曲，其中 m 是该扩张的次数。鉴于此，我们将（对于 $X = A, \ldots\ldots, G$）记 ${}^dX_n^{(m)}$ 为 X_n^m 的扭曲：该扭曲由轮换 m 个 X 的图自同构，并结合 X 的图自同构得到，使得 ${}^dX_n^{(m)}(\mathbb{F}_p) \cong {}^dX_n(\mathbb{F}_{p^m})$。

于是主要结果如下。注意，$G(\mathbb{Z}_p)'$ 不同于导出子群 概形 G' 的 $\mathbb{Z}_p$ 点群。

定理 6.3。设 G 是定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的扎里斯基连通约化群，并且满足以下条件之一：

(i) $p > 3$。

(ii) $p = 3$ 且$\mathrm{Ad}(G)$ 没有类型为 A_1 的因子。

(iii) $p = 2$ 且$\mathrm{Ad}(G)$ 没有类型为 A_1、$A_1^{(2)}$、A_2、${}^2A_2$、B_2、G_2、A_3、${}^2A_3$、B_3 或 D_4 的因子。

那么，对于任意闭 子群 $H \subset G(\mathbb{Z}_p)$，若 $H \bmod p$ 包含 $G(\mathbb{F}_p)'$，则 H 包含 $G(\mathbb{Z}_p)'$.

注。例外包括所有这样的情形：($A_1(2)$、$A_1(3)$、${}^2A_2(2)$、$B_2(2)$、$G_2(2)$)，在这些情形中，相应的单连通李型群并非完美。特别地，结论可以加强为：$H' = G(\mathbb{Z}_p)'$。

注。这本质上是对 [14], 主要结果的重新表述，只是其中的论证并不完全有效。事实上，[14]中的陈述并不正确，因为它遗漏了一些反例：$W(E_8) \subset O_8^+(\mathbb{Z}_2)$、$W(E_7) \subset O_7(\mathbb{Z}_2)$、$S_6 \subset O_5(\mathbb{Z}_2)$，以及 $S_8 \subset O_6^+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ 的原像。（最后一个例子构造为 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^8$ 的一个不变子商，它来自取值于 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 的形式$\sum_i x_i^2$ 在 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^8$上的限制；该子商上诱导的形式是偶的，因此除以 2 后得到定义在 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 上的二次型。）

注。在本文中，我们当然只需要每个因子都属于 ${}^dA_n^{(m)}$类型且满足 $n > 4$ 的情形，但今后研究塞尔默群时将需要 D_n 情形，而一般的约化情形会使归纳论证更加简单。

经过几个步骤，这就归结为单连通单群的情形。首先，我们可以用 $\mathrm{Ad}(G)$ 替换 G。

引理 6.4. 若 G 满足假设，且$\mathrm{Ad}(G)$ 满足结论，则 G 也满足结论。

证明。假设 $H \subset G(\mathbb{Z}_p)$ 是一个反例。那么 $H' \subset G(\mathbb{Z}_p)' \subset G'(\mathbb{Z}_p)$ 仍然满射到 $G(\mathbb{F}_p)'$，因为 $G(\mathbb{F}_p)'$ 是完美的。因此 H' 也会构成一个反例，于是我们可以假设 $G = G'$。由于 H 在 $\mathrm{Ad}(G)(\mathbb{Z}_p)$ 中的像满射到 $\mathrm{Ad}(G)(\mathbb{F}_p)'$，$\tilde{H}$ 的像包含 $\mathrm{Ad}(G)(\mathbb{Z}_p)'$，因而包含 $G(\mathbb{Z}_p)$ 在 $\mathrm{Ad}(G)(\mathbb{Z}_p)$ 中的像。特别地，它包含 $G(\mathbb{Z}_p)'$ 在 $\mathrm{Ad}(G)(\mathbb{Z}_p)$ 中的像，因此 $\langle H, Z(G)(\mathbb{Z}_p)\rangle$ 包含 $G(\mathbb{Z}_p)'$。后一个群是完美的，因此

$$G(\mathbb{Z}_p)' \subset \langle H, Z(G)(\mathbb{Z}_p)\rangle' \subset H \tag{6.6}$$

如要求的那样。 □

引理 6.5。 设 G 是满足假设且结论对 G成立的伴随群˜。那么结论对 G也成立。

证明。 再次，假设 $H \subset G(\mathbb{Z}_p)$ 是一个反例。我们可以假设 H 是完美的，因此 ˜$H \subset G(\mathbb{Z}_p)'$。但这意味着 H 包含在 $G(\mathbb{Z}_p)$ 的像中，因此我们可以在 $G(\mathbb{Z}_p)$ 中取其 ˜ ˜
原像。但这是一个真闭子群，它满射到 $G(\mathbb{F}_p)$ 上，因此会给出一个关于 G 的 ˜ 反例。

□

下面的论证本质上与我们用来将大像性归约为模素数对的满射性以及单个素数的提升的论证相同。

引理 6.6。 假设该定理对 $\mathbb{Z}_p$ 上所有不属于列出的例外情形的单连通单群都成立。那么，该定理对这类群的任意（有限）乘积也成立。
证明。 设 $H \subset \prod_i G_i$ 是一个反例。那么， H 在每个因子 G_i 中的像都包含 $G_i(\mathbb{Z}_p)$，因此 H 的伴随分次李代数满射到每个 G_i 的伴随分次李代数上。由于 H 满射到 $\prod_i G_i(\mathbb{F}_p)$ 上，伴随分次对象包含所有 $g_i \in G_i(\mathbb{F}_p)$ 对应的 $\mathrm{Ad}(g_i) - 1$ 的像。根据下文的推论 6.9，这意味着 H 的伴随分次对象包含每个 G_i 的伴随分次对象，因此 H 实际上并非反例。

□

此处，我们将注意力限制在不是排除的类型之一的单连通单群情形。事实证明， [14] 的主要进一步约化仍然适用。

命题 6.7。 设 G 为任意单连通单群。真闭子群 $H \subset G(\mathbb{Z}_p)$ 在 $G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ 中的像是真子群。

证明。 如果 H 满射到 $G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$，那么其伴随分次李代数的一次分量为 $\mathrm{Lie}(G)$。对于 $p > 2$，该代数上的 p 次幂运算在相邻次数的分量之间诱导出一个同构（它只是将 $g-1$ 乘以 p），因此 H 在每个次数上都有伴随分次李代数 $\mathrm{Lie}(G)$，从而 $H = G(\mathbb{Z}_p)$。如果我们能够证明满射到 $G(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$，同样的论证也适用于 $p = 2$。一次分量上的平方映射具有如下形式： $q\colon x \mapsto x + x^2$，因此特别地，它在根元素上是恒等映射。由于 G 是单连通的， $[\mathrm{Lie}(G),\mathrm{Lie}(G)]$包含嘉当子代数，因此我们得出二次分量中的李代数同时包含嘉当子代数和根空间，因而就是全部李代数。

□

因此，我们归结为考察 $G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$中满射到 $G(\mathbb{F}_p)$的子群。若 H 是这样的一个子群，那么它将与 $\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 相交于一个 $G(\mathbb{F}_p)$-不变子空间，而我们的目标是证明该子空间不可能是真子空间。由于任意真子空间都包含于某个极大子空间中，因此只需证明 H 含有一个位于每个极大子空间之外的元素，或等价地，证明 $H \cap \mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 在 $\mathrm{cosoc}\,\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 中的像 $= \mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)/\,\mathrm{rad}(\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p))$ 与每个单直和项都有交。这一点因唯一存在这样的单直和项而大为简化；等价地说，存在唯一的极大子模，即 $\mathbb{F}_p$ 对 $G(\mathbb{F}_p)$的唯一极大¯ ¯子模作用于 $\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 的限制。这由群概形的相应结论通过下述结果推出。

引理 6.8。 对于任意单连通单群概形 $G/\mathbb{F}_q$ （ $A_1(2)$除外），$(\mathbb{F}_q)$-¯不变子模 $\mathrm{Lie}(G)$ 均为 $G(\mathbb{F}_q)$-不变。

¯ ¯证明。 （概要）事实上，我们证明一个稍强的结论，即 $\mathrm{Ad}(\mathbb{F}_q[G(\mathbb{F}_q)]) = \mathrm{Ad}(\mathbb{F}_q[G])$。我们不妨假设 $G(\mathbb{F}_q)$ 是单的，因为只有四种情形不满足这一点（$A_1(3)$、 $B_2(2)$、 ${}^2A_2(2)$、 $G_2(2)$），而这些情形可以直接验证该结论。在这种情况下，我们注意到，只需找到某个

¯ ¯非平凡的光滑连通子群概形 $H \subset G$，使得 $\mathrm{Ad}_G(\mathbb{F}_q[H(\mathbb{F}_q)]) = \mathrm{Ad}_G(\mathbb{F}_q[H])$。事实上，这样我们便可以将 $G(\mathbb{F}_q)$ 替换为由 $G(\mathbb{F}_q)$ 和 H 生成的群概形 H^+，而不改变群代数的像；又由于 $(H^+)^0(\mathbb{F}_q)$ 是$G(\mathbb{F}_q)$ 的非平凡正规子群，我们可知 $(H^+)^0(\mathbb{F}_q) = G(\mathbb{F}_q)$，从而得到 $H^+ = G$。

例如，令 H 为对应于最高根的幺幺子群。由权¯的考虑可知，$\mathbb{F}_q[H]$ 的维数为 3，并且存在一组基，使得元素 $\alpha \in \mathbb{G}_a \cong H$ 的坐标为 $(1,\ \alpha,\ \alpha^2)$。由此可得，$H(\bar{\mathbb{F}}_q)$ 中任意三个互不相同的元素都张成该空间，因此只要满足 $q > 2$，$H(\mathbb{F}_q)$ 就能张成该空间。

对于 $q = 2$ 情形，我们也可以改为取 H 为经过适当扭曲的极大环面。这样的环面由扩张魏尔群中相应陪集的一个元素确定。我们注意到¯ ¯，当且仅当 $\mathbb{F}_2[T^w(\mathbb{F}_2)] = \mathbb{F}_2[T^w]$ 时，T^w 的任意两个不同特征空间在 $T^w(\mathbb{F}_2)$ 的某个元素作用下具有不同的特征值；等价地说，满足 $wtw^{-1} = t^2$ 的 $T(\bar{\mathbb{F}}_2)$ 子群能够将各根空间彼此区分，并将它们与嘉当子代数区分开来。特别地，若 $w = -1$，即扩张魏尔群中将每个根都取反的元素，则该子群为 $T[3]$，而只要不存在某个根或根之差等于某个权的 3 倍，这一条件就成立。此条件在魏尔群作用下保持不变，因此我们可以将其中一个根限制为单根，此时检验起来很直接。特别地，我们看到，这适用于 ${}^2A_n$、$n > 2$、B_n、C_n、D_{2n}、${}^2D_{2n+1}$、${}^2E_6$、E_7、E_8 和 F_4。（所有包含 T^{-1} 的情形中，只有 ${}^2A_2$ 和 G_2 例外；它们不是单根，因此此前已直接检验过。）

对于 A_n、$n > 1$，我们在 S_{n+1} 中通过一个 $(n+1)$-循环进行扭曲；而对于 ${}^2D_{2n}$ 和 D_{2n+1}，我们通过一个带符号置换进行扭曲，该置换否定 $n-2$ 个元素，并通过 $(x,\ y) \mapsto (y,\ -x)$ 作用于剩下的两个元素。最后，对于 ${}^3D_4$ 和 E_6，我们通过一个最小多项式为 $w^2 + w + 1$ 的（扩展）魏尔群元素进行扭曲。

□

注 1。必须排除 $A_1(2)$ 的情形，因为 $\mathfrak{sl}_2$ 分解为 1 维和 2 维 $\mathrm{SL}_2(2)$-模的直和。

注 2。对于 $A_1(3)$，尽管其不再是单群，主要论证实际上仍然成立，因为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ 由幺幂元生成。对于 $B_2(2)$，由 $H(\mathbb{F}_2)$生成的正规子群是 $\mathrm{Alt}_6 \subset S_6 = B_2(2)$，但 Alt_6 不是连通约化群的点群，因此同样有 $(H^+)^0$ 就是全部，论证成立。最后，对于 ${}^2A_2(2)$ 和 $G_2(2)$，只需（通过标准计算方法）验证伴随表示是不可约的。

注 3. $\mathrm{cosocLie}(G(\mathbb{F}_q))$ 不可约这一点本质上是 [14], 的推论 3.12，尽管其中的陈述没有明确提及例外情形 $A_1(2)$。

推论 6.9. *对于任意非 $A_1(2)$ 类型的单连通简单 G，$G(\mathbb{Z}_p)'$ 是 $G(\mathbb{F}_p)'$ 的原像。*

证明。由于 $G(\mathbb{Z}_p)'$ 是 $G(\mathbb{Z}_p)$ 的一维特征的公共核，只需证明 $G(\mathbb{Z}_p)$ 的每个一维特征在约化映射的核上都是平凡的。由于约化映射的核是一个 p-群，若存在反例，就会有一个阶为 p 的反例，而它进而会诱导出一个非平凡的 $G(\mathbb{Z}_p)$-不变的齐次 线性泛函，定义在伴随分次李代数上，因而也会诱导出一个 $G(\mathbb{F}_p)$-不变的线性泛函，定义在 $\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 上。这样的泛函会经由 cosoc $\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 因子化，因此根据后者的不可约性，它只有在 cosoc $\mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$，从而 cosoc $\mathrm{Lie}(G)$ 是平凡表示时才可能存在。由于映射 $\mathrm{Lie}(G) \to \text{cosoc } \mathrm{Lie}(G)$ 在长根空间上是单射，魏尔群忠实地作用，因此 G 不可能平凡作用。

□

注 1。对于特殊线性群$_2(\mathbb{Z}_2)$，该断言不成立，因为特殊线性群$_2(\mathbb{Z}_2)'$ 的指数为 4。

注 2。 注意， $G'(\mathbb{Z}_p)$的分次李代数由那些模 p可交换的元素的交换子生成，而任意这样的元素都是形如 $(\mathrm{Ad}(g)-1)l$ 的元素之和，这就补上了上文引理 6.6 证明中缺失的一步。

以下是对 Vasiu 的一项约化结果的简化（并且在某种程度上进行了推广的：我们不要求该子群包含于分裂环面中）表述。注意， H 通常不是单连通单群，但至少是约化的。

命题 6.10。 设 G 是单连通单群，设 $\Delta \subset \mathrm{Aut}(G)$ 是一个可对角化的子群概形。若$(G^{\Delta})^0$ 满足定理的假设，$[\mathrm{Lie}(G^{\Delta})$、$\mathrm{Lie}(G^{\Delta})]$ 不包含于$\mathrm{rad}\mathrm{Lie}(G)$中，并且定理的结论对$(G^{\Delta})^0$, 成立，那么该结论对 G也成立。

证明。 首先注意到，由于 G 是单连通的，任意自同构群的可对角化群的中心化子都是连通约化的，因此讨论定理是否对 G^{Δ}成立是有意义的。现在，假设 $H \subset G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ 是一个反例，并令 H_{Δ} 为 $G^{\Delta}(\mathbb{F}_p) \subset G(\mathbb{F}_p)$ 在 $G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ 中的原像。由于 Δ 是可对角化的，自然包含映射

$$\mathrm{Lie}(G^{\Delta}) = \mathrm{Lie}(G)^{\Delta} \subset \mathrm{Lie}(G) \tag{6.7}$$

是典范分裂的。分裂的核 K （即 Δ对应的非平凡等型子空间之和）是 H_{Δ}中的正规子群，因此我们可以取商（$H+K$）$/K$，从而得到G^{Δ}（$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$）的一个子群，它满射到 G^{Δ}（$\mathbb{F}_p$）。由于对 G^{Δ}成立提升，故

$$H \cap \mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p) + K = H_{\Delta} \cap \mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p) + K \supset [\mathrm{Lie}(G^{\Delta}), \mathrm{Lie}(G^{\Delta})](\mathbb{F}_p) + K \tag{6.8}$$

由于 $[\mathrm{Lie}(G^{\Delta}),\ \mathrm{Lie}(G^{\Delta})]$ 不包含在根基中，

$$\mathrm{rad}(\mathrm{Lie}(G)) + K \neq \mathrm{Lie}(G), \tag{6.9}$$

因此 $H \cap \mathrm{Lie}(G)(\mathbb{F}_p)$ 不包含在 $\mathrm{rad}\ \mathrm{Lie}(G)$ 中，从而必有 $H = G(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$。 □

注 1. $\mathrm{Aut}(G)$ 的一般可对角化子群适合于一个短正合列

$$1 \to \Delta_{\mathrm{inn}} \to \Delta \to \Delta_{\mathrm{out}} \to 1, \tag{6.10}$$

其中 $\Delta_{\mathrm{out}} \subset \mathrm{Out}(G)$ 的阶与特征互素，且 Δ_{inn} 包含在 $\mathrm{Ad}(G)$ 的某个极大环面中，该环面由 Δ_{out}固定。当然， Δ_{inn} 本身是一个扩张：其单位连通分支（一个乘法型 p 群）被特征互素的 ´étale 群扩张。

注 2。 注意，对于任何由 G的根格的某个子格与 G 的根系相交而得到的根系，都存在 G 的一个相应的可对角化子群，使其中心化子具有该根系（通常还带有一个环面因子）；只要该子系至少包含一个长根，它在任意特征下都满足根基条件。（事实上，$\mathrm{Lie}(G)$是一个最高权表示，因此作为 G-模由任意最高权向量生成。）此外，我们应注意，如果 Δ在$\mathrm{Aut}(G)$中的正规化子不连通，那么 Δ 可以由取值于正规化子的分支群的伽罗瓦余循环来扭曲；这又会诱导 H的相应扭曲。（这对应于令 Δ 位于一个非分裂极大环面中。）

根据该命题，若存在一个序列$X = X_1, \ldots, X_m = Y$，使得 X_{i+1}是满足根基条件的 $\mathrm{Aut}(X_i)$ 的某个对角子群的中心化子的伴随群的单连通覆盖，则称类型 X “归约为”类型 Y。

命题 6.11. 任何未被该定理排除的单连通单群，都归约为以下列表中的一个群：

(a) $A_1^{(m)}$ *with* $p^m > 4$

(b) $A_2^{(m)}$, ${}^2A_2^{(m)}$ *with* $p^m \in \{3, 4\}$

(c) A_4, ${}^2A_4$ *with* $p = 2$.

证明。 对于非单键根系，我们可以约化为与长根对应的子系的适当扭曲，从而得到以下约化：

$$B_n^{(m)} \to {}^2D_{n-1}^{(m)} \qquad C_n^{(m)} \to A_1^{(mn)} \tag{6.11}$$

$$F_4^{(m)} \to {}^2D_4^{(m)} \qquad G_2^{(m)} \to A_2^{(m)}. \tag{6.12}$$

在定理适用的每种情形中，约化都会得到另一种定理适用的情形，因此命题在这些情形下成立。

对于单键情形，我们可以通过移除一个根轨道来进行约化：

$$A_n^{(m)} \to A_{n-1}^{(m)} \qquad {}^2A_{2n}^{(m)} \to {}^2A_{2n-2}^{(m)} \qquad {}^2A_{2n+1}^{(m)} \to {}^2A_n^{(2m)} \tag{6.13}$$

$$D_n^{(m)} \to A_{n-1}^{(m)} \qquad {}^2D_n^{(m)} \to {}^2D_{n-1}^{(m)} \qquad {}^3D_4^{(m)} \to A_1^{(3m)} \tag{6.14}$$

其中 $E_8^{(m)} \to E_7^{(m)} \to E_6^{(m)} \to D_5^{(m)} \to A_4^{(m)}$。最后， ${}^2D_4^{(m)}$ 有一个 μ_2，其中心化子（对应于移除仿射 Dynkin 图的中间节点）类型为 $A_1^{(2m)}A_1^{(2m)}$，还可以进一步扭曲（通过仿射图自同构），从而约化到 $A_1^{(4m)}$。

当 $p^m > 4$ 时，上述约化会将我们带到 $A^{(mm')}{}_1$，其中某个 $m' \geq 1$ 满足要求；而当 $p^m \in \{3, 4\}$ 时，则会将我们带到 $A_2^{(m)}$、${}^2A_2^{(m)}$ 或 $A^{(mm')}{}_1$ 中的一种情形，对应于 $m' > 1$。最后，对于 $p^m = 2$，我们要么约化到一个具有 $p^m > 2$ 的群，要么约化到 A_4、${}^2A_4$ 之一。 □

对于具有 $p^m > 4$ 的类型 $A_1^{(m)}$，即 $\mathrm{SL}_2(R)$，其中 R 是相应的非分歧 p-进环，提升已在 [11, Lem. 3, §IV.3.4]，中得到证明，因此只需验证其余六种情形。对于特征 2 下的四种此类情形，李代数根基为 0，因此只需证明任意提升都包含某个李代数元素。约化的证明中使用的相同论证表明，只需找到一个使扩张不分裂的中心化子，从而可将问题归结为以下事实。

命题 6.12. 同态 特殊线性群$_2(W_2(\mathbb{F}_4))$ →特殊线性群$_2(\mathbb{F}_4)$ 不分裂。

证明。 只需验证 2-西罗子群不存在模 4 的提升。若我们选取 2-西罗子群的生成元的提升：

$$\begin{pmatrix} 1+2a_1 & 1+2b_1 \\ 2c_1 & 1+2d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2a_2 & \omega+2b_2 \\ 2c_2 & 1+2d_2 \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

那么条件是，它们的提升也必须是阶为 2 的互相交换的元素。阶为 2 的条件迫使 $c_1 = a_1 + d_1 + 1 = c_2 = a_2 + d_1 + 1 = 0$，但此时交换子为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2(\omega+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{6.16}$$

□

注。 请注意，这并不意味着定理对 $G(k)$ =特殊线性群$_2(\mathbb{F}_4)$ 成立，因为我们尚未排除模中心存在提升的可能性。（事实上，这样的提升确实存在！）

还需考虑特征 3 的两种情形。在这两种情形中，李代数的余顶是模去中心所得的商。此外，在任一种情形下，我们都能在 3-西洛子群中找到两个如下形式的互相交换的元素

$$g_1 := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

其中 $d \neq 0$ 和 $(a,\ c) \neq (0,\ 0)$。交换子的非对角线系数仍必须为零，而交换子的 23 和 32 系数为零则迫使 g_2的提升的 31 项为零。但这样一来

$$g_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 9, \tag{6.18}$$

因此我们并未得到（不希望出现的）分裂。

这就完成了定理 6.3 的证明。 □

为求完整起见，我们证明所列的群确实是提升问题的反例。对于特征 3，我们有一个单射态射

$$U(\mathbb{H}) \to U(\mathbb{H} \otimes \mathbb{Z}_3) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_3) \tag{6.19}$$

它将（约化的）范数为 1 的子群映到其中，其中 $\mathbb{H}$ 是赫尔维茨四元数环，且该态射满射到特殊线性群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$，从而给出了所需的反例。

对于特征 2，我们已经注意到这些例子： $W(E_8) \subset O_8^+(\mathbb{Z}_2)$、 $W(E_7) \subset O_7(\mathbb{Z}_2)$、$S_6 \subset O_5(\mathbb{Z}_2)$ 和 $S_8 \subset O_6^+(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$；此外还可以加入以下例子： $W(E_6) \subset O_6^-(\mathbb{Z}_2)$、$S_5 \subset O_4^-(\mathbb{Z}_2)$ 和 $S_3 \subset O_3(\mathbb{Z}_2)$。通过直接计算还可以验证，子群$G_2(\mathbb{F}_2) \subset W(E_7)'$ 保持了 $\mathbb{Z}$ 上一个足够一般的[1] 3-型，因此映射到 $G_2(\mathbb{Z})$。对于 A_2，注意到复反射群 ST_{24}映射到 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[(=1+\sqrt{-7})/2])$；将此映射限制到导出子群，并在 2 上方的一个素数处完备化，便得到所需的态射 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_2)$。最后，对于 ${}^2A_2$，注意到 $\mathrm{GU}_3(2)$ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}^3)$ 中一个 3 阶特异群的正规化子，因此在 $\mathbb{Z}[\zeta_3, 1/3]$ 上有一个 3 维酉表示；将其限制后，即得到所需的 $\mathrm{SU}_3(2)$ 在 $\mathbb{Z}_2[\zeta_3]$上的酉表示。

6.3 非分歧 Jordan-Pochhammer 表示

对于非分歧素数处的分圆 Jordan-Pochhammer 表示，直接应用上述结果即可推得相应 p-进群具有大像性。对于 $n > 4$不存在困难，因为此时没有反例 A_n 或 ${}^2A_n$。对于 p 奇数，这一结论可推广到$n > 2$ （当然，前提是该表示模 p时具有大像性！）；即使对于 $p = 2$，只有在 $N \in \{3, 6\}$时才会遇到反例，而这正是分圆域的剩余域为 $\mathbb{F}_4$的唯一情形。当然，如果我们能通过其他方法证明伴随分次李代数的一次分量含有非标量元素，仍可证明大像性。最简单的方法是在整体群中展示一个幂零变换：其最小多项式为 $g^2 - 2g + 1 = 0$，因此 $g^2 = 1 + 2(g - 1)$ 映射到一个非标量李代数元素。特别地，如果介于 2 和 n 之间的任意一组参数之积为 1，那么提升成立；容易看出，在这种情况下，除去伽罗瓦群作用，提升可能失败的唯一情形为 $(\zeta_6, \ldots, \zeta_6, \zeta_6^2)$（对于 $n = 3$）以及 $(\zeta_6, \ldots, \zeta_6)$（对于$n = 4$）。在这两种情形中，整体像实际上都是有限的，因此提升确实不成立。

[1]也就是说，它模任意素数的约化都属于 $\wedge^3$ 中 SL_7 的唯一稠密轨道。

6.4 部分分歧情形

当分圆域在 p处分歧时，该论证会失效，因为它无法排除非分歧子域上的约化群。然而，至少在部分分歧情形下，一般原则仍然适用：对于 $n > 2$，如果伴随分次李代数的一次分量包含一个非标量元素，那么它就包含 $\mathfrak{sl}_n$ 或 $\mathfrak{su}_n$，从而伴随分次李代数在每个次数中都包含 $\mathfrak{sl}_n$ 或 $\mathfrak{su}_n$。

特别是，由于这涉及模素数平方的计算，我们可以先对该平方取商。极大理想的一个生成元（例如 $\pi = \zeta_{p^l} - 1$）诱导出一个同构 $R/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{F}_q[\epsilon]/(\epsilon^2) =: \bar{R}$，因此我们可以将问题改述为关于对偶数上的 Jordan-Pochhammer 表示的问题，其参数具有 $\lambda_i(1 + \epsilon\nu_i)$ 的形式。此外，由于对偶数作为 $\mathbb{F}_q$ 上的模是秩为 2 的自由模，这也诱导出 $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q)$ 中的一个表示。特别是，像中的任意元素都有 Jordan 分解 $g = g_s g_u = g_u g_s$，其中 g_s 是半单的，g_u 是幺幂的，并且 g_s 和 g_u 都是 g 的幂。（具体而言，我们可以取 $g_s = g^{q^{(2n)!}}$。）

命题 6.13. *假设 $\mathrm{GL}_n(R)$ 约化为一个半单元素，但其自身并非半单。那么 $\langle g \rangle$ 包含一个非平凡的李代数元素。*

证明。 Jordan 分解保持同态，因此 g_u 归结为所需的 $\bar{g}$ 的幺幂因子1。

□

注。 判断一个元素不是半单元素的最简单充分条件是，其特征多项式依赖于 ϵ。

推论 6.14。 *设 $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ 归结为一个半单元素，但其自身并非半单元素，且$\ker(g-1)$ 包含一个非零自由 R-模。那么 $\langle g \rangle$ 包含一个非标量李代数元素。*

证明。 这里我们注意到 g_u 保持 $\ker(g-1)$，因此相应的李代数元素湮灭 $\ker(g-1) \otimes \mathbb{F}_q$；由于它非零，所以不可能是标量。 □

推论 6.15。 *除非对所有 $1 \le i \le n+1$都有$(\lambda_0\lambda_i - 1)(\nu_0 + \nu_i) = 0$，否则 R 上的 Jordan-Pochhammer 表示包含一个非标量李代数元素。*

证明。 如果 $\lambda_0\lambda_i \neq 1$，那么生成元 g_i 具有半单约化，且 $\ker(g_i - 1)$ 的正自由秩，但它本身不可能是半单的，除非 $\nu_0 + \nu_i = 0$。因此，如果 $(\lambda_0\lambda_i - 1)(\nu_0 + \nu_i) \neq 0$ 对于某个i成立，那么 g_i 的某个幂就是所需的非标量李代数元素。 □

在特征 2 下还有另一种有用的情形。

命题 6.16。 *假设 q 是 2 的幂，且非标量元素 $g \in \mathrm{GL}_n(R)$ 满足$(g - (1+\epsilon))(g-1) = 0$。那么 $\langle g \rangle$ 包含一个非标量李代数元素。*

证明。 如果 $\bar{g} = 1$，那么 g 本身就是一个非标量李代数元素。否则，$g^2 = 1 + \epsilon(g+1) = 1 + \epsilon(\bar{g} - 1)$ 表示李代数中的一个非零幂零元素。 □

推论 6.17。 *在特征 2 下，Jordan-Pochhammer 表示中含有一个非标量李代数元素，除非 $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_{n+1}$。*

证明。 若 $\nu_0 + \nu_i \neq 0$，则要么 $\lambda_0\lambda_i \neq 1$，此时我们已经找到了一个非标量李代数元素；要么 $\lambda_0\lambda_i = 1$，此时 g_i^2 就是所需的非标量李代数元素。 □

由于至少有一个 ν_i 必须非零（否则这些参数就无法生成对偶数），因此只要 n 是奇数，就存在一个非标量李代数元素。这已经足以让我们证明所有满足 $n > 4$ 的特征 2 情形：要么 n 是奇数，且某个 g_S 可直接奏效；要么存在一对 $i < j$，满足 $\lambda_i\lambda_j \neq 1$（不失一般性，令 $\lambda_n\lambda_{n+1} \neq 1$），以及带参数的模表示

$$(\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n\lambda_{n+1}) \tag{6.20}$$

是大的，并满足提升。由 $g_1, \dots, g_{n-1}$ 生成的子群仅相差标量，因此同样是大的，并且含有非标量李代数元素，所以我们可以在该子群中找到一个元素，其半单约化没有特征值 1，且具有非平凡的幺幂部分。但原表示中相应的元素仍具有半单约化和非标量幺幂部分。

这对 $n = 4$ 不成立，因为存在一些情形，其中 $n = 4$ 使得无论如何约化到 $n = 3$，约化都不会是大的。不过这并不是大问题，我们发现（除去显然的对称情形）唯一这样的情形是

$$(\zeta_3(1+\epsilon); \zeta_3(1+\epsilon), \zeta_3(1+\epsilon), \zeta_3(1+\epsilon), \zeta_3(1+\epsilon), \zeta_3(1+\epsilon)). \tag{6.21}$$

（$n = 2$ 的情形要微妙得多。）

因此，我们可以归结为奇特征的情形。

引理 6.18. 设 $K/\mathbb{F}_q$ 是一个二次 *étale* 代数。那么对于 $n > 2$，特殊酉群$n(K/\mathbb{F}_q)$ 中的每个幂零变换都与其逆元共轭。

证明。我们首先指出，$\mathrm{GU}_2(K/\mathbb{F}_q)$中的任意幂零变换都与其逆共轭。事实上，相对于反厄米形式 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，典型的幂零变换具有如下形式

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

其中 $\beta \in \mathbb{F}_q$，而通过一个元素共轭

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

可将 β 乘以任意范数，因此特别是乘以 -1。

对于 $n > 2$，令 g 为一个幂零变换，并注意到 $\ker(g-1)$包含一个秩为$n-2$ 的自由子模，在该子模上此形式非退化。该子模的稳定子在正交补上作用为$\mathrm{GU}_2(K/\mathbb{F}_q)$，因此存在稳定子中的一个元素 h，使得 $hgh^{-1}g$ 逐点固定正交补。由于 g 和 hgh^{-1} 也都逐点固定该子模，故$hgh^{-1} = g^{-1}$，如所需。 □

特别是，如果 $\nu_0 + \nu_1 \neq 0$ 但 $\lambda_0\lambda_1 = 1$，那么 Jordan-Pochhammer 表示的像中存在一个元素 h（假设该像为 SU_n），使得 hg_1h^{-1} 与 g_1^{-1}有相同的约化。这两个元素都是伪反射，因此它们的乘积是李代数中的一个元素，其像的秩至多为 2；由于其迹为 $2(\nu_0 + \nu_1) \neq 0$，因此它给出了所需的非标量李代数元素。唯一需要注意的是，约化必须为 SU_n。在完全分歧情形下这一条件不成立，但其他情况下对所有 $n > 2$均成立：在两个不够大的情形中，所有生成元都不可能是幺幂变换！

因此，我们将问题约化到对所有 i，均有 $\nu_0+\nu_i=0$的情形。这对于 $n=4$是不可能的（因为 $4\nu_0=0$）；与特征 2 的情形一样，这会为所有更大的 n产生非标量李代数元素。对于 $p>3$，我们也可以排除 $n=3$；而对于 $p=n=3$，有几种情形无法通过上述构造得到李代数元素。（这些情形可以用其他方法处理，但我们省略细节。）

6.5 完全分歧情形

在完全分歧情形 $\lambda_0=\cdots=\lambda_{n+1}=-1$ 中（与部分分歧情形一样，这些仍是原始参数的约化，而原始参数是 p^l 次单位根的相反数），存在两个困难。首先，伴随分次李代数更为复杂，因此我们需要证明它仍由 1 次部分生成，并且在 1 次部分中，由一个非标量元素生成的不变子空间包含整个李代数。其次，幂零变换不再必然与其逆共轭。

我们先处理后一个问题，并证明李代数的 1 次部分中仍存在一个非标量元素。我们很容易验证，表示

$$(g_1,g_2,g_3)\mapsto\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}\right) \tag{6.24}$$

是一个参数为 $(-1、-1、-1、-1)$ 的 Jordan-Pochhammer 表示，因此在特征 p 下，我们有

$$g_1^{(1-p)/2}g_2^{(1-p)/2}g_1^{(1-p)/2}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

由此可得该元素

$$g_1^{(1-p)/2}g_2^{(1-p)/2}g_1^{(1-p)/2} \tag{6.26}$$

在任意参数均为 -1 的 Jordan-Pochhammer 表示中都是半稳定的，因为它保持一个滤过，而该滤过在子商上的作用具有互素的最小多项式$t-1$ 和 t^2+1。但是

$$(g_1^{(1-p)/2}g_2^{(1-p)/2}g_1^{(1-p)/2})^4 \tag{6.27}$$

是一个李代数元素，只要 $\nu_1\neq\nu_2$，它就是非平凡的（由于$\bar{}\mathrm{GL}_2(R)$ 中的元素具有非平凡行列式，故其迹非零）。

然后，我们可以将参数全相等且满足 $n>4$ 的情形，归约到秩为 $n-2$ 的情形：秩为 $n-2$ 的群包含非标量李代数元素，将这样的元素乘以 -1，得到的元素在秩为 n 时仍具有半单约化，且带有非平凡的幺幂部分。

对于 $n=4$, $p>3$ 我们可以利用 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的另一条关系，得到一个李代数元素

$$(g_1^{(1-p)/2}g_2^{(1-p)/2})^6, \tag{6.28}$$

只要 $2\nu_0+\nu_1+\nu_2\neq0$，它就是非平凡的。但对于 $n=4$，这些方程无法对所有配对同时成立，因此在这种情况下也存在提升。

对于 $n=4$、$p=3$，当 $\nu_1=\cdots=\nu_5$（迫使 $\nu_0=\nu_1$）时，提升实际上会失败；事实上，这是参数为（$\zeta_6,\ldots,\zeta_6$）的有限情形的约化。

现在只需证明分次李代数由 1 次部分生成，且一次分量作为 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$-模由任意非标量元素生成。更准确地说，由于我们考虑的是广义酉群中的元素，而非特殊酉群中的元素，因此给定的是相应

稍大的李代数中的一个非标量元素（作为表示，它与 $\wedge^2(\mathbb{F}_p^{2n})$ 同构，而标量对应于 J^{-1} 的倍数，其中 J 是辛形式）；我们需要知道它生成的 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$-模包含真正的李代数（即迹为 $=0$ 的交错形式 AJ）。对于任意一个不与 J^{-1} 成比例的形式 A，取一个不是 AJ 特征向量的向量 v。相应的幂零变换会给 A 添上一个秩为 2 的形式，因此我们可以归结到给定的非标量元素具有 $v_1 \wedge v_2$ 这种形式的情形，其中 v_1 和 v_2 关于辛配对正交。接着，我们可以通过 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$ 的作用将 v_2 替换为任意其他与 v_1 正交的向量，再将 v_1 替换为任意其他与新的 v_2 正交的向量，由此可知，每一个 这样的形式都属于 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_p)$-模，从而证明了所需结论。

最后，为了证明分次李代数由 1 次部分生成，我们注意到分次李代数以 2 为周期：次数为 k 的部分是 $\mathfrak{g}_{k \bmod 2}$ 下的无迹矩阵空间 $\mathfrak{g}_1$，且 A 交替，而次数为 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}$ 的部分是 A 对称的矩阵空间 AJ。因此，只需证明 $\mathfrak{sp}_{2n} = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ 和 $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{g}_1]$。后者可由群由幺幂变换生成这一事实推出；对任意幺幂变换，其作用 $x \mapsto (g-1)x$ 于 $\mathfrak{sp}_{2n}$，与李代数元素 $\lim_{t\to 0}(g^t-1)/t$ 的作用相同。至于前者，由于我们处于奇特征下，$\mathfrak{sp}_{2n}$ 是一个不可约的 Sp_{2n}-模，因此只需证明 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ 非零。但 $\mathfrak{g}_1$ 的维数为 $2n(2n-1)/2-1$，而 $\mathfrak{sl}_{2n}$ 的任意阿贝尔子代数的维数至多为 $2n-1$，所以这显然成立（至少对 $2n>2$ 而言）。（注意，对 $2n=2$ 而言这一点不成立，原因很简单：在这种情况下，李代数实际上只支撑在偶数次数上，因为群对其中心取商后定义在实子域上！）

综合以上结果，我们尤其可以得出，对于任意满足$n>4$的情形，提升都成立；由此也完成了证明：对于 $n>4$，每个分圆 Jordan-Pochhammer 表示都是大的。

对于 $n=4$，唯一尚待解决的问题是，同构 $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3) \cong$ 特殊酉群$_4(\mathbb{F}_2)$ 会给两两满射性带来问题；但这只会在 $N=6$、$n=4$ 且所有参数均为$\pm\zeta_6^{\pm 1}$时出现。这要么是通常的有限情形，要么包含一个幂零变换；后者在模 2 和模 3 下的阶不同，因此两两满射性仍然成立。对于 $n=3$，特殊酉群$_3(\mathbb{F}_2)$ 并非完美这一事实会带来一些小问题，但这种情况至多出现一次，因此仍然只有有限情形不够大。对于 $n=2$，情况要复杂得多（有限情形更多，还存在一个额外的同构 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$，且像可能定义在某个子域上），不过很可能仍然可以处理。（特别是，该群由两个伪反射在其中心之上生成这一事实，很可能会有很大帮助！）

7 奇异曲线的 Prym 簇

我们希望推广 Jordan-Pochhammer 群具有大像性的结果，有两种自然的方式：一是允许更一般的基曲线，二是将结果推广到特征 p 下的相应单值群，包括野分歧情形$p|N$。在这两种情况下，一个关键事实是：即使曲线没有良约化，Prym（因而 L-Prym 扭子层）仍然可以具有良约化；在这种情况下，它与某个解奇异化的 Prym 密切相关。这使我们能够将某些 Jordan-Pochhammer族嵌入高亏格曲线上的族中，并在提升到特征零时获得显著更大的自由度。因此，我们暂时离题，考察如何理解（约化的）奇异曲线的 Prym 簇。

首先，设 C 是域 k 上的一条既约真曲线。这种曲线仍有 Picard 概形 $\mathrm{Pic}(C)$，因此仍可考虑单位连通分支 $\mathrm{Pic}^0(C)$，它对 C 的每个不可约分支上的零度线丛进行分类。（参见 [4, 第 9] 章中的讨论。）如果 $'$ 阶循环群 Z 作用于 C，我们便可将 $\mathrm{Prym}(C,\ Z)$ 定义为与

表示 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的 Z 的张量积。尽管它在族中的表现不佳（在退化到坏特征时，甚至维数都不是常数），但仍然具有实用价值。

根据 Chevalley 和 Rosenlicht 的一个结果（见 [4, 定理 1，第 9 节2]），任意定义在完美域上的光滑代数群概形 G 都有一个自然滤过 $U \subset L \subset G$，其中 U 是幺幂的，L 是线性的，L/U 是约化的，而 G/L 是阿贝尔簇。（如果基域不完美，这个滤过当然会在某个有限纯不可分扩张上存在！）当 G 是交换的时，我们由此得到一个诱导的阿贝尔簇 G/L 和一个诱导的半阿贝尔簇 G/U。在 Pic^0, 的情形下，这两个商本身都是曲线的雅可比簇。

˜引理 7.1。 *[4, 第 9 节 2]*设 C 是定义在完美域 k上的既约真曲线，C 是它的正规化，C' 由 C 通过识别位于 C 同一点之上的不同点得到（即 C 的“半正规化”）。那么 $\mathrm{Pic}^0(\tilde{C})$ 是阿贝尔的，$\mathrm{Pic}^0(C')$ 是半阿贝尔的，并且存在正合列

$$0 \to L \to \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(\tilde{C}) \to 0 \tag{7.1}$$
$$0 \to U \to \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(C') \to 0 \tag{7.2}$$
$$0 \to T \to \mathrm{Pic}^0(C') \to \mathrm{Pic}^0(C) \to 0 \tag{7.3}$$

其中，L 是光滑连通线性代数群，U 是光滑连通幺幂群，T 是环面。

注意，尽管 C' 仅定义在完美闭包上，群 Pic^0($C'_{k^{\mathrm{perf}}}$) 却自然地定义在 k上。事实上，核 U是幺幂群，因此会被 p的某个固定幂湮灭；而 p 在 Pic^0($C'_{k^{\mathrm{perf}}}$) 上的乘法是满射。因此，当 L充分大时，Pic^0($C'_{k^{\mathrm{perf}}}$) $\cong p^l$Pic^0(C_k)，且后者定义在 k上。由于 Pic^0($C'_{k^{\mathrm{perf}}}$) 是半阿贝尔的，其环面子群以及因此其阿贝尔商 Pic^0($\tilde{C}_{k^{\mathrm{perf}}}$) 也定义在 k上。

推论 7.2。 设 C 是完美域 k 上的一条既约真曲线，其上有 *´étale˜*循环群 Z的作用，因此该作用也作用于正规化 C 和半正规化 C'。那么˜$\mathrm{Prym}(C, Z)$ 是阿贝尔的，$\mathrm{Prym}(C', Z)$ 是半阿贝尔的，并且存在正合列

$$0 \to L \to \mathrm{Prym}(C, Z) \to \mathrm{Prym}(\tilde{C}, Z) \to 0 \tag{7.4}$$
$$0 \to U \to \mathrm{Prym}(C, Z) \to \mathrm{Prym}(C', Z) \to 0 \tag{7.5}$$
$$0 \to T \to \mathrm{Prym}(C', Z) \to \mathrm{Prym}(\tilde{C}, Z) \to 0 \tag{7.6}$$

其中 L 是光滑连通线性代数群，U 是光滑连通幺幂群，而 T 是环面。

证明。 与雅可比簇相关的正合列是等变的，因此存在张量积的长正合列。因此，每个群都是某种所需类型（线性、阿贝尔等）的群的像，故其自身也是该类型的群。

□

˜注。 事实上，映射到 Prym(C, Z) 的实际核与来自雅可比簇代数部分的群 $L \otimes_{\mathbb{Z}[Z]} \mathbb{Z}[\zeta_N]$ 和 $T \otimes_{\mathbb{Z}[Z]} \mathbb{Z}[\zeta_N]$ 同源，因为长正合列中的下一项是阿贝尔簇 Prym(C, Z) 的子群，因此是适当子群，故其在任何线性代数群中的像都是有限的。

命题 7.3. 设 C 是域 k上的一条半正规曲线。$\mathrm{Prym}(C, Z)$ 的环面因子的维数为 $\varphi(N)(b - n - c + i)$，其中 n 是 Z 在（几何）

˜ C的分支点的自由轨道数， b 是 Z 在其于 C中的原像上的自由轨道数， i 是 C的几何连通分支上的自由轨道数，而 i 是 C的几何不可约分支上的自由轨道数。特别地，若 $b-n-c+i=0$，则 $\mathrm{Prym}(C,Z)$是一个阿贝尔簇。

证明。 雅可比簇的环面因子 T 有一个自然的如下形式的解消

$$1 \to T_i \to T_c \times T_n \to T_b \to T \to 1 \tag{7.7}$$

˜其中， T_i 是与 C的不可约分支的 ´étale 代数相关联的环面，等等。此复形与 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ 的张量积的上同调群概形，与经 $\mathrm{Tor}_1(-, \mathbb{Z}[\zeta_N])$作用所得像的上同调群概形（相差一个移位）一致，因此被 N湮灭。因此，张量积的秩的交错和为 0，从而得到所需结果。

□

接下来，我们想了解曲线退化时 Prym 的表现。具体而言，给定一条定义在离散赋值环上的曲线，其一般纤维光滑、特殊纤维约化，那么特殊纤维的 Prym 与 Prym 的 N´eron 模型的特殊纤维有何关系?

这里要指出，Prym 构造对任意交换群概形（或群代数空间）都有意义：若 A 是一个带有 ´étale 循环群 Z作用的交换群概形，且其阶为 N，那么 Prym(A, Z)就是与 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$的张量积。因此，我们可以将此推广到带有 ´étale 循环群作用的阿贝尔簇的类似问题：N´eron 模型特殊纤维的 Prym 与 Prym 的 N´eron 模型有何关系？N´eron 模型特殊纤维的 Prym 又与其单位连通分支的 Prym 有何关系?

取单位连通分支的影响如下。

命题 7.4. 设 A 是一个带有 ´*etale* 循环群Z作用的交换群概形。那么自然映射 $\mathrm{Prym}(A^0, Z) \to \mathrm{Prym}(A, Z)^0$ 的 ´*etale* 核的次数整除$\mathrm{Prym}(A, Z)$的分支群的阶。

证明。 我们有一个短正合列

$$0 \to A^0 \to A \to A/A^0 \to 0 \tag{7.8}$$

由蛇引理可得如下形式的正合列

$$K \to \mathrm{Prym}(A^0, Z) \to \mathrm{Prym}(A, Z) \to \mathrm{Prym}(A/A^0, Z) \to 0 \tag{7.9}$$

其中 K 是 A/A^0 的自同态的核，而 Prym(A/A^0, Z) 是其余核。由于A/A^0 是 ´etale， K 和 Prym(A/A^0, Z) 是阶数相同的 ´etale 群概形，因此 Prym(A^0, Z) $\to$ Prym(A, Z) 的核是 ´etale。由于 Prym(A^0, Z) 是连通的，而 Prym(A/A^0, Z) 是´etale，Prym(A^0, Z) $\to$Prym(A, Z) 的像是 Prym(A, Z)^0，因此 Prym(A/A^0, Z) 是 Prym(A, Z) 的分支群。

□

对于取 N´eron 模型的特殊纤维所产生的影响，我们可以利用以下事实加以简化。

引理7.5。 若 A 是一个带有 ´*étale* 循环群 Z 作用的交换群概形，且$Z' \subset Z$ 是无平方因子阶的极大子群，则$\mathrm{Prym}(A, Z) \cong \mathrm{Prym}(A, Z')$。

证明。 这可归结为以下事实:

$$\mathbb{Z}[\zeta_N] \otimes_Z \mathbb{Z}[Z'] \cong \mathbb{Z}[\zeta_{N'}] \tag{7.10}$$

作为 Z'-模，其中 N' 是 N 的无平方因子部分。这反过来可以在 ´étale 局部加以验证，因此归结为 $Z \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的情形。 □

引理 7.6。 如果 Z_1、 Z_2 是阶互素的 ´*étale* 循环群概形，并且 $Z_1 \times Z_2$ 作用于交换群概形 A，那么 $\mathrm{Prym}(A, Z_1 \times Z_2) \cong \mathrm{Prym}(\mathrm{Prym}(A, Z_1)\ Z_2)$。

对于阿贝尔簇，我们可以将对偶 Prym 定义为

$$\mathrm{Prym}^\vee(A, Z) := \mathrm{Prym}(A^\vee, Z)^\vee. \tag{7.11}$$

Prym 可以计算为 $\chi_Z := |Z|e_Z$ 的余核，其中 $e_Z \in \mathbb{Q}[Z]$ 是适当的幂等元；而对偶 Prym 则是 χ_Z 的核的单位连通分支。不过，也可以将其计算为自同态 $|Z|-\chi_Z$ 的像。由于该自同态消去 χ_Z 的像，因此它可通过 Prym 分解，从而得到一个分解

$$A \to \mathrm{Prym}(A, Z) \to \mathrm{Prym}^\vee(A, Z) \to A \tag{7.12}$$

$|Z| - \chi_Z$ 的。复合

$$\mathrm{Prym}^\vee(A, Z) \to A \to \mathrm{Prym}(A, Z) \to \mathrm{Prym}^\vee(A, Z) \tag{7.13}$$

于是就是乘以 $|Z|$。由于 Prym 的两种版本维数相同，因此它们同源，且两个同源的核都被 $|Z|$ 消去。

命题 7.7. 设 R 是一个离散赋值环，其分式域为 K，剩余域为 k，并设 $f_K : A_K \to B_K$ 是阿贝尔簇之间的同源，且其核为 n-挠群。那么，*N´éron* 模型特殊纤维的诱导态射具有 n-挠核和余核。

证明。 由于 $\ker(f_K) \subset A_K[n]$，存在一个同源 g_K，使得 $g_K \circ f_K = [n]$ 且 $f_K \circ g_K = [n]$。由于态射到 N´eron 模型的延拓是唯一的，这些延拓也满足 $g \circ f = [n]$和 $f \circ g = [n]$，因此特殊纤维上的作用也满足这些关系。由此可得 $\ker(f_k) \subset A_k[n]$，且 $\mathrm{coker}(f_k)$ 是 B_k/nB_k 的一个商。 □

命题 7.8。 *[4,* 命题 *7.5*。*3]* 如果阿贝尔簇的短正合列 $0 \to A'_K \to A_K \to A''_K \to 0$ 在同源意义下分裂，且其核为 n-挠，同时 n 在 R 上可逆，那么相应的正合列

$$0 \to A'_k \to A_k \to A''_k \tag{7.14}$$

特殊纤维的正合列是正合的，且 $\mathrm{coker}(A_k \to A''_k)$ 是 n-挠的。

命题 7.9。 如果阿贝尔簇的短正合列 $0 \to A'_K \to A_K \to A''_K \to 0$ 在同源意义下以 n-挠核分裂，那么 $\ker(A'_k \to A_k)$ 和 $\ker(A_k \to A''_k)/\mathrm{im}(A'_k \to A_k)$ 是幺幂的，而 $\mathrm{coker}(A_k \to A''_k)$ 是 n-挠的。

证明。 设 $S \subset A'_K$是一个 n-挠子群，使得 $A_K/S \cong (A'_K/S) \times A''_K$。（注意，如果$B_K \subset A_K$ 是一个阿贝尔子簇，且 $B_K \to A_K \to A''_K$ 具有 n-挠核，那么我们可以取 $S = \ker(B_K \to A''_K) = B_K \cap A'_K$。）设 S_p是 S的 p-Sylow 群概形，其中 p是剩余特征。于是

$$0 \to A'_K/S_p \to A_K/S_p \to A''_K \to 0 \tag{7.15}$$

在同源意义下分裂，且其核为 n'-挠，其中 n' 是 n的 p'部分。由前一个命题可知，

$$(A'_K/S_p)_k \to (A_K/S_p)_k \to A''_k \tag{7.16}$$

N´eron 模型的特殊部分构成的复形，其上同调仅支撑在 A_k'' 项上，且该项为 n'-挠。由于这些态射

$$A_k' \to (A_K'/S_p)_k \qquad A_k \to (A_K/S_p)_k \tag{7.17}$$

具有 p 次幂（因而是幺幂）的核和余核，结论得证。 □

推论 7.10. 设 R 是一个离散赋值环，其分式域为 K，剩余域为 k，且 Z 是一个´*étale* 循环群。若 A_K 是一个阿贝尔簇，且 $\mathrm{Prym}(A_K, Z)$ 具有良约化，则自然态射 $\mathrm{Prym}((A_k)^0, Z) \to \mathrm{Prym}(A_K, Z)_k$ 是一个满射，其核是幺幂群。

证明。 态射 $A_K \to \mathbf{Prym}(A_K, Z)$ 的核是光滑的，且可由一个 $|Z|$-挠同源分裂。因此我们得出，特殊纤维之间相应的映射 $A_k \to \mathbf{Prym}(A_K, Z)_k$ 的核是幺幂群，余核是 $|Z|$-挠群。余核是 $\mathbf{Prym}(A_K, Z)_k$ 的分支群的一个商；该分支群是平凡的，因为 $\mathbf{Prym}(A_K, Z)$ 具有良约化。因此 $A_k \to \mathbf{Prym}(A_K, Z)_k$ 是一个满射，其核是幺幂群。与 A_k 的相应自同态复合后得到零（因为这在 K 上成立），故此态射经由 $\mathbf{Prym}(A_k, Z)$ 因子化。由此可得，$\mathbf{Prym}(A_k, Z) \to \mathbf{Prym}(A_K, Z)_k$ 也是一个满射，其核是幺幂群，相应的单位连通分支之间的态射也如此。

特别地，$\mathbf{Prym}(A_k, Z)$ 的分支群是幺幂的，因此映射 $\mathbf{Prym}((A_k)^0, Z) \to \mathbf{Prym}(A_k, Z)^0$ 的核是一个 ´étale 幺幂群。由此可得，复合映射的核

$$\mathrm{Prym}((A_k)^0, Z) \to \mathrm{Prym}(A_K, Z)_k^0 \to \mathrm{Prym}(A_K, Z)_k \tag{7.18}$$

是幺幂群的扩张，因此它本身也是幺幂的。 □

现在我们可以证明关于 Prym 簇良约化的主要结果，后文将用到该结果。

命题 7.11. 设 C/R 是一条具有光滑连通的一般纤维的射影曲线，并带有 ´*étale* 循环群 Z 的作用。若 $\dim \mathrm{Prym}(C_{k^{perf}}, Z) = \dim \mathrm{Prym}(C_K, Z)$，则 $\mathrm{Prym}(C_K, Z)$ 具有良约化；且对所有与 R 的剩余特征互素的 L，$\mathrm{Prym}(C_k, Z)[L] \cong \mathrm{Prym}(C_K, Z)_k[L]$。

证明。 由于 $\mathrm{Pic}^0(C_K)$ 的 N´éron 模型的特殊纤维的单位连通分支是 $\mathrm{Pic}^0(C_k)$，我们有一个自然态射

$$\mathrm{Prym}(C_k, Z) \cong \mathrm{Prym}(\mathrm{Pic}^0(C_K)_k^0, Z) \to \mathrm{Prym}(\mathrm{Pic}^0(C_K), Z)_k \cong \mathrm{Prym}(C_K, Z)_k, \tag{7.19}$$

因此（暂时将 k 替换为其完美闭包），可得到一个映射到 $\mathbf{Prym}(C_K, Z)_k$ 除以其最大光滑线性代数子群所得商 A 的复合映射。$\tilde{\mathbf{Prym}}(C_k, Z)$ 的相应商是 $\mathbf{Prym}(C_{k^{\mathrm{perf}}}, Z)$，因此我们有一个自然态射 $\mathbf{Prym}(C_{k^{\mathrm{perf}}}, Z) \to A$，其核是线性代数群。但 $\mathbf{Prym}(C_{k^{\mathrm{perf}}}, Z)$ 没有正维线性代数子群，因此

$$\dim \mathrm{Prym}(\tilde{C}_{k^{\mathrm{perf}}}, Z) \le \dim(A) \le \dim \mathrm{Prym}(C_K, Z)_k = \dim \mathrm{Prym}(C_K, Z). \tag{7.20}$$

由此我们得出 $A \cong \mathbf{Prym}(C_K, Z)_k$，从而 $\mathbf{Prym}(C_K, Z)$ 具有良约化。

由此可知，$\mathbf{Prym}(C_k, Z) \to \mathbf{Prym}(C_K, Z)_k$ 是一个核为幺幂核的满射，因此对所有与特征互素的 L，它都诱导 L-挠群的同构。 □

8 分歧数据

类似地，我们需要，以了解基曲线退化时分歧覆盖的行为 .

若 C/S 是一条（约化但可能奇异的）曲线，且 G/S 是一个 ´étale 群概形，那么沿除子 Z 分歧的 G-覆盖 C 在 Z 的补集上是 ´étale 的，因此确定了 $H^1(C \setminus Z; G)$ 中的一个类。（除非另有说明，所有上同调均指 ´étale 上同调。）当 G 是阿贝尔群时（尤其是在本文关注的循环情形中），这可纳入一个长正合列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(C;G) \to H^0(C \setminus Z;G) \to H^1_Z(C;G) \\ \to H^1(C;G) \to H^1(C \setminus Z;G) \to H^2_Z(C;G) \to H^2(C;G) \to \cdots \end{aligned} \tag{8.1}$$

这表明，我们应将局部上同调群 $H^2_Z(C;\ G)$ 视为对分歧的局部结构（“分歧数据”）进行分类。给定这样一个类， $H^2(C;G)$ 中便存在一个障碍，阻碍具有给定分歧数据的全局分歧覆盖的存在；若这样的覆盖存在，我们还可以用一个 ´étale 覆盖对其进行扭曲，其中 $H^1_Z(C;\ G)$ 映射到 ´étale 覆盖 C，这些覆盖在去掉 Z 后变为平凡覆盖。

这里需要提醒的是，当 C 光滑时，移除 Z 并不会丢失任何信息；但移除一个奇点可能会导致覆盖的信息丢失。不过，似乎没有办法在不破坏覆盖族上的群结构的情况下保留这部分额外信息。

事实证明，变形覆盖时，主要问题在于变形分歧数据，而非覆盖本身。

命题 8.1. 设 R 是一个 *Hensel*离散赋值环， C/R 是一条平坦真曲线，其几何ˆ连通特殊纤维上，且 $Z \subset C$ 是任意闭子集。设 $C_k \to C_k \setminus Z_k$ 是群为 G 的伽罗瓦覆盖，并设 $\phi \in H^2_Z(C;\, G)$ 是一个限制到对应于ˆ C_k的类。则ˆ存在一个 G-覆盖，其覆盖对象为 $C \setminus Z$ ，特殊纤维为 C_k ，分歧数据为 ϕ。

证明。 由于 ϕ 限制后是某个实际覆盖的分歧数据，相应障碍在 $H^2(C_R;\ G) \to H^2(C_k; G)$ 下的像是平凡的。由于 C 是完备的，且具有几何连通的特殊纤维，约化映射 $H^*(C_R; G) \to H^*(C_k; G)$ 是一个拟同构，因此该障碍是平凡的。因此，存在某个 覆盖，其覆盖对象为 C_R ，分歧数据为 ϕ。它的特殊纤维可能不正确，但与正确者相差一个属于 $H^1(C_k; G) \cong H^1(C_R; G)$ 像的类，因此我们可以通过一个全局 ´etale覆盖进行扭曲，使特殊纤维正确。 □

根据切除，在计算 $H^p_Z(C;\ G)$ 时，我们可以将 C 替换为 Z 的任意 ´étale 邻域，或取所有此类邻域上的极限。特别地，我们可以将其分解为来自 Z 的各个连通分支（或者，Z 的每个几何连通分支的 ´étale 局部）的贡献。

引理 8.2. 设 C/S 是一个定义在概形 S 上的光滑曲线，且 N 在其上可逆，并设 $z\colon\ S \to C$ 是一个截面。那么 $H^2_z(C;\ \mu_N) \cong \Gamma(S;\ \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$。

证明。 这由上同调纯性可得：由于 C 和 z 的像都是光滑的，且定义在 R 上，后者的余维为 1，故 $Rz^!\mu_N \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})[-2]$，因此 $H^2_z(C;\ \mu_N) \cong \Gamma(S;\ \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$，证毕。

□

若 C是完备的，则存在一个同态 $H^2(C; \mu_N) \to \Gamma(S; \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$，对应于这样一个障碍：光滑完备曲线上的 μ_N-覆盖的总权为 0。此障碍消失时，在 $H^1(S; \mathrm{Pic}_S(C)[N])$ 中还存在一个进一步的障碍：分歧覆盖构成一个托orsor，位于

´étale 覆盖的群之上，并映射到 $\mathrm{Pic}_S(C)[N]$。此障碍消失对应于 Picard 概形中存在一个点，其在乘以 N 下具有指定的像，因此在 $H^2(S;\ \mu_N)$ 中还剩下一个 Brauer 障碍。（这一障碍群的滤过对应于显然的谱序列所给出的滤过。）

在下面的一个论证中，我们还需要考虑一些在余维 2 处分歧的情形。以下基本上是 [2], 的一个观察，对应于有理双点是商奇点这一事实。

命题 8.3。 设 X 是域 k上的曲面， N 是一个在 k上可逆的正整数，并设 $x \in X$ 是一个分裂类型为 A_{mN-1}的有理双点。则存在一个自然态射$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to H^2_x$（$X$； μ_N）。

证明。 首先注意到， X 有一个在 x处分歧的覆盖，即一个具有分裂 A_{m-1}-奇点的曲面。事实上，具有分裂 A_{m-1}-奇点的曲面具有如下形式

$$\mathrm{Spec}(k[x,y,t]/(xy-t^m)), \tag{8.2}$$

而对于满足以下条件的 μ_N 的作用取商： x 的权为 1， y 的权为 -1 ， t的权为 0，所得结果为

$$\mathrm{Spec}(k[X,Y,t]/(XY-t^{mN})), \tag{8.3}$$

其中 $X = x^N$， $Y = y^N$。该覆盖在原点处并非 ´Etale，因此相应的 $H^1(X \setminus \{x\};\ \mu_N)$ 中的类在 $H^2_x(X;\ \mu_N)$ 中具有非平凡像。由于这同样适用于所有中间覆盖， $H^2_x(X\ ;\ \mu_N)$ 中的像具有 N 阶，正如所要求的那样。 □

注。 请注意，只需考虑 $m = 1$ 的情形，因为其他所有情形都可由该情形基变换得到。在这里这样做并不会特别简化问题，但在处理更复杂的奇点时（例如尖点的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 覆盖）或许会有用。

我们可以将其视为一个依赖于 t 的覆盖族；当 $t \neq 0$ 时，它是 ´étale 的，而当 $t = 0$ 时，它是节点曲线 $xy = 0$ 的一个分歧覆盖；在正规化上，这对应于一个权重为 ± 1 的覆盖。（事实上，每个节点曲线族在 étale 局部都具有这种形式，其中某个 m 如此。）特别地，这对应于“可容许”覆盖可平滑化这一事实，同时也使我们能够精确控制分歧和剩余域扩张。

If $C_k\hat{} \to C_k$ 是一个 μ_N 覆盖，其特征与 N 互素，且 C_k 光滑；若 x 和 y 是两个具有相反权重的分歧点，那么通过粘合 x 和 y 得到的曲线 C_k^+ 可平滑化为 Hensel 离散赋值环上的曲线 C_R^+ ，其剩余域为 k。此外，只需将 R 替换为次数整除 N 的全分歧扩张，我们便可使 C_R^+ 在 C_k^+ 的节点处具有一个 A_{mN-1} 奇点。我们可以将其他分歧点处的分歧数据延拓到 C_R^+ （将它们延拓为截面并赋予相同的权重），并在节点处赋予与命题 8.3 相对应的分歧数据的适当次幂。

要应用命题 8.1，我们需要证明所得的分歧数据在特殊纤维上是无障碍的。一般而言，这并不成立，但稍弱的结论成立：障碍在 $H^2(C_k^+;\ \mu_N)$ 中的像为零。问题在于， C_k^+ 上的分歧数据具有正确的权重，但节点处的局部上同调还包含额外的算术贡献。不过，权重正确保证了在 C_k上诱导出的分歧数据与原始分歧数据一致，因此是无障碍的；于是，在

$$\begin{array}{ccc} H^2_{Z\cup x}(C_k^+;\mu_N) & \longrightarrow & H^2_{Z\cup x\cup y}(C_k;\mu_N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(C_k^+;\mu_N) & \longrightarrow & H^2(C_k;\mu_N) \end{array} \tag{8.4}$$

消失。应用长正合列

$$\cdots \to H^1(C_k;\mu_N) \to H^1(k;\mu_N) \to H^2(C_k^+;\mu_N) \to H^2(C_k;\mu_N) \to \cdots, \tag{8.5}$$

我们看到，在 $H^1(k;\mu_N) \cong H^1(R;\mu_N)$ 中仍可能存在剩余障碍。因此，如果 R^+ 是相应 μ_N-覆盖的分裂域，那么 $H^2(C_{R^+}^+;\mu_N)$ 中的障碍便会消失，从而命题 8.1 适用，可按规定给出 $C_{R^+}^+$ 的全局 μ_N-覆盖。

注意，这里的障碍仅取决于原覆盖（以及所选的粘合点），而不取决于平滑化的选择。因此，存在一个固定的 μ_N-覆盖 k^+，其定义在 k 上，使得对于 $C_{k^+}^+$ 的任意平滑化以及剩余分歧数据的任意扩张，都存在相应的覆盖扩张。

从曲面 $k[x,y,t]/(xy-t^{nm})$（视为 $k[t]$ 上的一个族）的角度来看，发生的情况是：如果我们考虑命题 8.3 中类的 d 次幂（不失一般性地假设 $d|N$），那么特殊纤维上去掉节点所得部分的诱导分歧覆盖具有如下形式

$$z^N = x^d, \qquad w^N = y^d, \tag{8.6}$$

wh尽管具有这些权重的一般覆盖有两个参数 ζ, ω，其形式如下

$$z^N = \zeta x^d, \qquad w^N = \omega^{-1} y^d. \tag{8.7}$$

（ ω 上的逆反映了这样一个事实：我们实际上应该对 y^{-d}开根。）要给出特殊纤维上相应的分歧数据，我们必须对特殊纤维的非分歧扩张取商，这相当于将 ζ 和 ω 同时除以同一个量。由于这不会改变ζ/ω，我们需要选取 ζ/ω 的一个 N次根，才能使分歧数据相符。

注意，当节点不是全分歧时，这个 N次根的选择会影响奇异纤维的覆盖，因为它会改变两个 ´ 个原像 étale 概形之间的同一化。由于这会在等变同一化的集合上作传递作用，我们看到仍可利用 $H^1(C;R)$ 的自由度，确保在特殊纤维上得到正确的覆盖。（特别地，我们看到，同一化的改变来自 $H_x^1(C_k;G)$ 的作用，而该作用一般并不忠实。）

对于特征为 p 的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖，情况要复杂得多，因为群 $H_z^2(C;\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ 是无限维的。然而，由于 $(C,\ z)$ 在 ´étale 局部同构于 $(\mathbb{P}^1,\ 0)$，因此至少可以将每个点处的分歧数据与群 $H^1(\mathbb{P}^1\setminus\{0\};\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ 的一个元素对应起来；该群用于分类仅在 0 处分歧的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖。（这是 [7] 的一项观察。）当然，这种对应并非典范的，因为它取决于在 z 处选择的一致化子。对于 $H^1(\mathbb{P}^1\setminus\{0\};\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ 中的任一类，由其在一致化子改变时所得像张成的子群是有限维的，因此，对于每个分歧数据的“解析”同构类，我们都能得到一个性质良好的簇。特别地，给定一个带标记点的曲线族，就存在一个覆盖族，其中每个标记点都被赋予来自某个特定解析同构类的分歧数据。（也可以考虑一个更大的族，其中只指定每个分歧点对中间覆盖亏格的贡献；该更大族在多大程度上连通尚不明确。）

给定特征为 p 的 Hensel离散赋值环上的曲线 C_R，以及一个在光滑轨迹的有理点处分歧的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖 C_k，我们可以将这些分歧点延拓为 C_R 的截面，然后在每个截面上选择全局均匀化元。这样便可将每个群 $H_Z^2(C;\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ 识别为 $H^1(\mathbb{P}^1_R\setminus\{0\};\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$，从而给出分歧数据相应的常值扩张。根据命题 8.1，随后存在一个覆盖 C_R，它与 C_k 的原覆盖相一致，并且具有

标记截面上“相同”的分歧数据。对于具有 gcd$(p, N') = 1$的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \times \mu_N$-覆盖，这一结论可以自然地推广，因为额外的分歧数据是为每个标记截面指定 $\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}$ 的一个元素，而该元素可在 R 上作规范延拓。

对于混合特征，情况要复杂得多，因为特殊纤维上的每个野分歧点都是一般纤维上多个分歧点合并而成的。一个非平凡的事实是， [10]特征零下的循环群的分歧数据可以提升。这里只指出以下较弱的形式（即“奥尔特猜想”的弱形式），这已足以满足我们的目的。

ˆ**命题 8.4.** *[10]* 设 k 是特征为 p 的代数闭域，且 $C_k \to C_k$ 是一个ˆ分歧的 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-覆盖，其 C_k 光滑。则存在一个剩余域为k 的混合特征离散赋值环 R，以及一条光滑曲线ˆ C_R，其特殊纤维为ˆ C_k，并且 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$的作用可延拓。

注。 [10] 的结果允许 k 不必是代数闭域，并给出定义在维特向量环 $W(k)$的有限扩张 R 上的一个提升；该提升甚至可以取为与 $\mathbb{Z}_p$的一个代数扩张的复合域。可是，对我们的应用而言，我们需要泛纤维的分歧点定义在函数域上，这通常要求进一步扩张。因此，我们只能在无需控制剩余域扩张的情形下应用提升，所以不妨假设它们是代数闭的。

有鉴于此，我们将坏特征下分歧点的重数 定义为将其提升到特征零时位于其上方的点数。温和分歧点的重数为 1；对于野分歧数据由一个仅在 0 处分歧的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖 $C \to \mathbb{P}^1$ 给出的野分歧点，其重数为

$$\frac{g(C) - g(C/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))}{p^l - p^{l-1}} \tag{8.8}$$

（即 Prym$(C, \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$ 作为 $\mathbb{Z}[\zeta_{p^l}]$-模的秩）。

我们还注意到，只要被粘合的两个点是温和分歧点，上文讨论的节点平滑构造也适用于坏特征情形。事实上，如果 $N = p^l N'$ 的最大公约数为 p, N'，那么我们可以分别延拓 $\mu_{N'}$-覆盖（代价是对剩余域作一个 $\mu_{N'}$-覆盖）和 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖。这里的问题在于，存在一个障碍，使得无法构造节点曲线的 ´étale 覆盖，同时它在光滑曲线上的限制又是给定的 ´étale 覆盖。长正合列中相关的部分为

$$\to H^1(C; \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}) \to H^1(\tilde{C}; \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}) \to H^1(k; \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}) \to \tag{8.9}$$

因此，障碍仍可由某个固定的 ´étale 覆盖消除。由此可见，我们可以扩张 $\mu_{N'} \times \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖，代价是对剩余域作一次 $\mu_{N'} \times \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-扩张。

9 扩展到高亏格基曲线

既然我们已经证明，在特征零的情况下，对于至少有 7 个分歧点的循环 N-重曲线，Prym 簇的单值化很大，那么接下来自然要问，这一结论是否能推广到高亏格基曲线。当然，基曲线一旦具有较高亏格，就会有模空间，这会使族产生一些额外的变化。还要注意，Prym 的 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-秩会额外增加 $2g$，因此若要使秩为 n，就应有 $n+2-2g$个分歧点。

我们在亏格 0 中考察的族，最自然的类比仍然涉及改变一个点。唯一需要注意的是，正如我们所见，分歧数据不足以确定一个覆盖。实际上有两个问题：一是，对于给定的一组分歧数据，可能存在多个覆盖的几何同构

类；二是，由于存在循环扭曲，给定的几何同构类可能无法由唯一的有理同构类表示。

这些问题可以归结为一个单一的观察：对于给定的分歧数据族，相容的 μ_N-覆盖的模空间是基曲线的皮卡德栈 中 N-挠部分上的一个托orsor。更准确地说，给定点 x_0，…，$x_{n+1-2g} \in C$ 处的分歧数据 $m_0, \ldots, m_{n+1-2g} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，一个实际的覆盖需要指定一个线丛 $\mathcal{L}$ 以及一个同构 $\mathcal{L}^{\otimes N} \cong \mathcal{L}(\sum_i m_i[x_i])$（对于将 m_0，…，m_{n+1} 提升到 $\mathbb{Z}$，其选择不会影响该族）。当然，这只能确定到同构，但它仍然是给定除子的线丛在 $[N]$ 下的原像上的一个gerbe。（这确实是一个gerbe，并不令人意外：毕竟，我们正在分类的对象具有非平凡的自同构，即 μ_N 作用！）

处理这种 gerbe 结构有两种自然方式。第一种是固定 C 的某个非分歧点（类似于亏格零族中的 ∞），并在 μ_N-覆盖的一个原像上作标记。由于固定的自同构群在这些原像上严格传递地作用，相应的模空间恰好就是朴素的模空间，即 Pic$^0(C)[N]$ 上的托orsor。（通常，在给定的有理几何同构类中，线丛的存在会受到 Brauer 障碍的阻碍，但标记一个点也会消除此障碍。）需要注意的是，要求该点为非分歧点，会在模空间中引入额外的边界分支。（当然，绕这些分支的单值化只会改变标记点，因此在 Prym 上的作用属于 μ_N。）

另一种方法稍微微妙一些，它涉及这样一种观察："去 gerbe 化"本身也可以视为一个模问题。更准确地说，我们可以将 μ_N-覆盖这一概念模去循环扭曲后的 ´étale 层化定义为"伪覆盖"。特别地，一个 μ_N-伪覆盖由 Pic(C) 中的一个点 $\mathcal{L} \in$ 确定，满足 $N\mathcal{L} \cong [D]$，其中 D 由分歧数据给出。于是存在一个 ´étale 覆盖 U/S，在其上 Pic(C) 中的这个点由一个线丛表示；再选取一个同构，便得到一个实际的 μ_N-覆盖，而不同的选择对应于不同的循环扭曲。这种方法的代价是，我们无法定义伪覆盖的 Prym。不过，如果该伪覆盖被 ´étale 覆盖 U^ 分裂，那么 Prym 以及它的 L-挠都可以定义在 U 上。此外，尽管 Prym(C)$[L]$ 本身^不能下降到 U，集合的商层 Prym(C)$[L]/\mu_N$ 可以下降。基本群的一个元素在商层上的作用，决定了它在原层上的一个射影作用（即，差一个由 μ_N 缩放的作用），因此在这种情形下仍可考察大像性。

伪覆盖方法的唯一优点是其定义从来不会遇到任何困难，因此，特别是给定真基底上的一个分歧数据族，相应的伪覆盖族本身也将是真覆盖。（这包括覆盖曲线本身不平坦或变得奇异的点。）此外，伪覆盖自然构成一个群。

鉴于此，我们转而讨论与我们的亏格 0 族相对应的情形，也就是说，所有分歧点中除一个以外都固定。鉴于此，固定一个不可约的 μ_N-覆盖 C/C和一个分歧点 $x_0 \in C$。当我们改变 x_0 时，这会导出一个分歧数据族，进而得到相应的伪覆盖族，它是 C上的 Pic(C)$[N]$-托orsor。当然，这立刻引出了一个问题：这个托orsor 是否连通；若不连通，它有哪些不可约分支。事实上，只有当 x_0 全分歧时，它才可能连通：若 x_0 的分歧度为 d，则中间$\mu_{N/d}$-覆盖的变化是 ´étale 的，因此在改变 x_0时必定局部恒定。因此，我们应当只考虑中间覆盖平凡的那些不可约分支。这样，我们最终要考虑的是 C 上的 Pic(C)$[d]$-托orsor，它分类具有恰好两个全分歧点的 μ_d-伪覆盖，其中一个全分歧点是 x_0。

因此，我们需要更深入地理解这个托orsor。事实证明，它与 C 上某个通用的 Pic(C)$[d]$-托orsor 密切相关。存在一个自然映射 $C \to$Pic$^1(C)$，因此我们可以考虑

复合映射 $C \times \mathrm{Pic}^1(C) \to \mathrm{Pic}^1(C)^2 \to \mathrm{Pic}^0(C)$，其中第二个映射为 $(x,\ y) \mapsto yx^{-1}$。显然，关于 $\mathrm{Pic}^0(C)$ 在 $\mathrm{Pic}^1(C)$ 上的自然作用，该映射是 $\mathrm{Pic}^0(C)$- 等变的，因此也具有 $[d]\mathrm{Pic}^0(C)$- 等变性，从而存在一个栈之间的诱导态射

$$C \times [\mathrm{Pic}^1(C)/[d]\,\mathrm{Pic}^0(C)] \to [\mathrm{Pic}^0(C)/[d]\,\mathrm{Pic}^0(C)]. \tag{9.1}$$

由于 $[d]$ 是满射，后一个商叠无非就是分类栈 $B\mathrm{Pic}^0(C)[d]$，因此可以将其视为一个态射

$$C \times [\mathrm{Pic}^1(C)/[d]\,\mathrm{Pic}^0(C)] \to B\,\mathrm{Pic}^0(C)[d]. \tag{9.2}$$

与 $S \to B\mathrm{Pic}^0(C)[d]$ 取纤维积可得到一个由 $[\mathrm{Pic}^1(C)/[d]\mathrm{Pic}^0(C)]$参数化的、位于 C 之上的 $\mathrm{Pic}^0(C)[d]$-托orsor 万有族。注意，由于后者只有一个几何点，该族中的托orsor在几何上全都同构。

引理 9.1。 该覆盖曲线是不可约的。

证明。 由于这些托orsor在几何上同构，我们可以将问题归约为考察 f 沿 $[d]$ 的拉回： $C \to \mathrm{Pic}^0(C)$，其中 $f(x) = 0$，对于某个点 $x \in C$而言。这是一个光滑射影曲线的 ´etale 覆盖，因此不可约性由推广得到；于是我们可以提升到特征零，并在 $\mathbb{C}$上进行研究，此时问题归结为 $\pi_1(C,\ x) \to \pi_1(\mathrm{Pic}^0(C),\ 0)[d] \cong H_1(C;\ \mathbb{Z})[d]$的满射性。 □

沿态射 $C \to [\mathrm{Pic}^1(C)/[d]\mathrm{Pic}^0(C)]$ 拉回后，可得到一个覆盖 $C \times C$ 的 torsor，它对三元组 $(x,\ y,\ \mathcal{L})$ 进行分类，其中 $x,\ y \in C$ 且 $\mathcal{L}^{\otimes d} \cong \mathcal{L}(y - x)$，即具有两个指数为 ± 1 的分歧点的 μ_d-伪覆盖的模空间。（当两点重合时，该伪覆盖当然会退化为平凡覆盖。）

由于我们总可以将分歧数据中的权重乘以 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 中的单位，因此不妨假设原分歧点 x_0 的权为 N/d，于是我们需要理解的 torsor 就是上述 torsor 族在 $x = x_0$ 上的纤维，因此是覆盖 C 的不可约 ˆ $\mathrm{Pic}(C)[d]$-torsor。接下来，我们可以考虑所得伪覆盖族上的商层 $\mathrm{Pic}(C)/\mu_d$（它在固定分歧点原像的补集上是 ´étale 的），也可以标记原覆盖的一个非分歧点，并考虑相应的 ˆ层 $\mathrm{Pic}(C)$（它在固定分歧点原像及固定非分歧点的补集上是 ´étale 的）。无论采用哪种方式，我们都可以考察单值化是否足够大，而两种情形下的答案相同。

如果允许所有分歧点移动，也适用类似的考虑；在这种情况下，唯一的区别是我们应将 d 替换为分歧次数的最小公倍数。（如果该最小公倍数不是 N，那么我们不妨固定中间的 ´étale $\mu_{N/d}$-覆盖，并假设它不可约。）这给出了 C^{n+2-2g} 上（或在标记另一个非分歧点时， C^{n+3-2g} 上）的 $\mathrm{Pic}(C)[d]$-托orsor 上的一个层；同样，我们可以询问其单值化是否足够大。

最后，我们可以允许 C 本身变化。如果 $d = N$，那么相应的族是 $\mathcal{M}_g$ 上的 $\mathrm{Pic}(C)[N]$-托orsor（对于伪覆盖），或者是 $_{n+3-2g}$ 上的 $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_g)[d]$-托orsor（对于带有额外标记点的版本）；否则，我们得到一个 $\mathrm{Pic}(C)[d]$-托orsor，它位于与亏格为 g 的曲线上的不可约´étale$\mu_{N/d}$-覆盖族的纤维积上。（它包含在相对 $\mathrm{Pic}(C)[N/d]$ 中，作为该点具有恰阶 N/d 的不可约分支；众所周知，它是不可约的。）

当然，允许更多对象发生变动只会使单值化群变大，因此我们将尽可能采用单点变动族。（这也有其优点：它是一维的，因此在有限特征下进行下降会简单一些。）主要例外（除了一些野分歧问题之外）是，单点变动

族要求存在一个可变动的分歧点，因此，如果我们想考察 ´étale 覆盖，就必须允许曲线发生变动。

推广到高亏格的思路是：如果一个 ´étale 层沿离散赋值环延拓，那么一般纤维的单值化就包含特殊纤维的单值化。特别是在我们的语境中，这意味着如果 C/R 是一个带有光滑一般纤维且 Prym 具有良约化的 μ_N-伪覆盖（这与循环扭曲无关，因此仍然有意义！），那么 Prym(C_k)上的单值化作用/μ_N 会提升到 C_K，进而提升到变化的曲线族。由于 C_k 允许是奇异的，其 Prym 由低维 Prym 构成，因此可以用于归纳。当然，大多数时候，这只能得到单值化的一个相对较小的子群（不过参见 [1]，了解如何利用相容退化对来取得进展），但事实证明，存在一种退化方式，能使结果仍具有大单值化。

特别地，我们考虑这样一个边界不可约分支 Δ_0：曲线仍然不可约，但出现了一个节点。正如我们所见，该节点在退化覆盖上可能是分歧的；若如此，就不存在节点的自由轨道，因此 Prym 没有环面贡献。由此可知，沿着退化到此类覆盖的任意离散赋值环，Prym 都有良约化，因此ˆ*L*-Prym 扭子层可以扩张。反过来，设 $C_{g-1} \to C_{g-1}$ 是一个亏格为 $g-1$、带有 $n+4-2g$ 个标记分歧点的光滑曲线的 μ_N-覆盖，且其中两个分歧点具有相反权重。那么，正如命题 8.3 后的讨论所述，将这两个分歧点粘合所得的节点曲线，在某个离散赋值环上存在等变光滑化，其剩余域是 C_{g-1}的定义域的一个 μ_N-扩张。

现在，考虑一族具有大单值化的亏格 $g-1$ 覆盖，它由一个一般稳定子群平凡的栈 $\mathcal{X}/k$ 参数化；设 $C_{g-1} \to C_{g-1}$ 为该族中的一般覆盖，定义在 $k(\mathcal{X})$ 上。基本群在一个 ´étale 层上的作用与 Gal($k(\mathcal{X})$) 的作用具有相同的像 $\bar{}$ $\bar{}$，因此后者也有大的像。设 l 为命题 8.3 之后讨论的 μ_N-扩张 $k(\mathcal{X})$，并设 C_R^+ 为将节点曲线平滑化到一个剩余域为 l、分式域为 L 的 Hensel离散赋值环的任意平滑化。于是该覆盖扩张到 C_R^+，且 Gal(L) 在所得 Prym 上作用的像包含 Gal(l) 的作用像。但是 Gal(l)$^-$ 是态射 Gal($k(\mathcal{X})$) $\to \mu_N$ 的核，因此（由于我们的秩假设保证特殊酉群 SU 是完美群）仍然很大!

例如，若我们从代数闭域上的一个固定覆盖出发，并选定一个不参与粘合的分歧点，那么可以先在原域上选取一个等变光滑化，再基变换到相应单点变动族的定义域。这个修改后的覆盖也能（在定义域的一个 μ_N-覆盖上）延拓，其泛纤维是单点变动族的基变换，因此其单值化至多与该族一样小。由此我们归纳得出（并利用特征零时单值化在族中保持不变这一事实），单点变动族总是具有大单值化。

ˆ**定理 9.2**。 固定 $N>1$, $n \geq \max(5, 2g-1)$，设 $C \to C$ 是一个光滑的亏格为 g、特征为零的曲线的 μ_N-覆盖，具有 $n+2-2g$ 个分歧点。设 x_1 是其中一个分歧点，其分歧度为 d。那么，通过改变 x_1 所得到的覆盖族具有大单值化。

注。 需要注意的一个技术问题是，如果我们不谨慎处理被粘合点上的分歧次数，亏格为 $g-1$ 的族的单值化可能会获得额外的可约素数。当然，我们可以只粘合全分歧点，从而避免这种可能性。

注。 注意到我们在 $n=4$ 中遇到的反例不存在指数之和为 0 的成对指数，因此可以将上面的 5 替换为 4。

这意味着，除了非分歧覆盖的情形外，其他所有值得关注的情形都适用。对于非分歧覆盖，唯一的区别在于，由于被粘合的点之一必须是可动的，平滑化无法

下降，因此我们得不到常曲线族。

定理 9.3。 对于任意 $N > 1$ 和 $g > 3$，特征零下光滑亏格为 g 的曲线上一般不可约´无分歧 μ_N 覆盖的 *Prym* 的单值化是大的。

注。 类似地，这可以不费太大力气地推广到 $g \geq 3$ 。

10 化归到有限特征的曲线

10.1 良好特征下的单值化

尽管得知特征零下 Prym 簇的单值化是大的本身就很有意义，但最有趣的应用需要理解有限特征下的单值化。正如预期的那样，这一问题的复杂程度很大程度上取决于该特征是否整除 N。请注意，无论如何，我们都必须修改特征 p 下“大”的定义，以排除对应于 p 次幂挠的因子。（ Prym 的 p^l-挠在 p 处严重分歧，因此尽管仍有合理的单值化概念，但无法从特征零的情形加以研究。）

由于单点变化族和固定曲线族的单值化不再必然独立于固定的输入数据，我们首先聚焦于单点变化情形。这不仅能得到最强的结果（至少对于分歧覆盖而言！），还使论证更为简洁，因为这样我们就能从一条光滑曲线下降单值化，而不是从高维概形甚至栈下降。

定理 10.1. 设 $N > 1$, $n \geq \max(5, 2g-1)$，并令 $C \to C$ 为一条亏格为 g、特征为 $p \nmid N$ 的光滑曲线上的几何连通 μ_N- 覆盖，其具有 $n+2-2g$ 个分歧点。设 x_1 为其中一个分歧点，分歧度为 d。则通过改变 x_1 得到的覆盖族的单值化是大的。

证明。 在混合特征离散赋值环 R 上，选取元组 $(C, x_1, \ldots, x_{n+2-2g})$ 的一个提升。通过改变 x_1 得到的伪覆盖族，是自然的 Pic(C)[d]-托orsor 在 C 上的一个去心版本。围绕 x_i 的原像的分歧表现为特征值为 $\zeta_N^{m_1+m_i}$ 的伪反射。若此类伪反射是同调，则其阶整除 N，故为温和分歧；若其为幂零变换，则其在 L-挠上的作用阶为 L，因此同样是温和分歧。因此，该层具有温和分歧，且分歧除子彼此不交，故构成正规交叉除子，从而特征 p 下的单值化与特征零下的单值化同构。

□

根据单值群半连续性，这立即推出固定曲线族的类似结论，也适用于任何具有分歧点的变化曲线族。因此，只需考虑（几何连通的）非分歧 μ_N-伪覆盖的情形。这里我们注意到，我们用来将亏格 $g-1$ 推广到亏格 g 的论证在良好特征下同样适用，因此可以将非分歧亏格 g 的情形归结为具有两个分歧点的任意分歧亏格$g-1$ 情形。

推论 10.2. 对于 $g > 3$，光滑亏格 g 曲线的几何连通非分歧 μ_N-覆盖的 *Prym* 簇具有大单值化。

注。 如前所述，这可以较为容易地推广到 $g = 3$ 的情形。

10.2 坏特征下的单值化

坏特征下变点族的主要问题在于，尽管 C 中不同点处的分歧数据空间之间存在同构，但该同构并非典范的（除非 $g(C) = 1$），因此通常无法定义这个族。当然，例外情形是移动点温和分歧的时候，因为此时数据只是一个整数。事实证明，这些情形仍可由特征零中的 largness 推导出来，不过论证要精细得多。最大的问题是，étale 层具有野分歧，并且（相关地）分歧除子不具有正规交叉。我们可以通过适当的循环覆盖消除野分歧；对于温和部分的适当选择，可以得到一个具有正规交叉分歧的新族。这样的温和部分选择往往不会产生具有良约化的覆盖，但我们仍然可以安排得到正确的$Prym$。

在本节中，我们假设 N分解为 $p^l N'$，且 $\gcd(p, N') = 1$。

注意，由于该点具有温和分歧，我们只改变覆盖的温和部分，因此覆盖族是通常的 $\mathrm{Pic}(C)[d]$-托orsor，定义在 C上。

引理 10.3. 设 R 为一个离散赋值环，C_R 为一条光滑射影曲线，其几何不可约纤维带有 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的作用，商为 C_R，且 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 在 C_k上忠实地作用。进一步假设 C_K 的分歧点在 K上有定义，并设 C_k 的一个分歧点 $\bar{x}$ 的次数为 m。那么，位于 $\bar{x}$ 之上的分歧点的次数整除 m，且至少有一个的次数为 m。

证明. 记 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 的生成元为 g，因此关于 $\bar{x}$ 的假设是，它是 C_k 上一个点的像，该点被 $g^{N/m}$ 固定，但不被 g的任何更小次幂固定。设 C' 为 C 对$\langle g^{N/m}\rangle$取商所得的商。那么 C' 是 C的一个 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$- 覆盖，我们可以将所需结论分成两部分：(1) C_K/C'_K 在映到 $\bar{x}$ 的原像的点处非分歧；(2) C'_K/C_K在某个映到 $\bar{x}$的点处分全分歧。在第一种情形中，不失一般性地设 $C' = C$，于是 $m = 1$；在第二种情形中，不失一般性地设 $C = C'$，于是 $m = N$。

对于这两个断言，我们注意到是对于任意非平凡有限其同构，我们可以将该子概形表示为 $C_R \times_R C_R$ 中的对角线与 h的图的交；由于 C_R 是光滑的二者都是 Cartier除子。由于 h 在 C_R 上非平凡作用，且 C_R 不可约，该交本身就是一个 Cartier除子。

对于第一个断言，我们注意到，由于 Cartier除子是闭的，对于任意非恒等元素 $h \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，以及 h在 C_K上的任意不动点，其在 C_R中的闭包也被 h固定，因此到 C_k 的约化也被固定。特别地，如果存在一个极限为 $\bar{x}$的分歧点，那么其在 C_K 中的原像由某个 h固定，因而 $\bar{x}$也是如此。

对于第二个断言，由于 Cartier除子的余维为 1，$\bar{x}$ 的原像 $\bar{y}$ 不可能是 C_R 中 g 的一个孤立不动点；但是，由于 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 忠实地作用在 C_k 上，它是 C_k 中 g 的一个孤立不动点。特别地，包含 $\bar{y}$ 的 g-不动子概形的任一不可约分支的泛点，都是 K 上的分歧点，正如所需。 □

我们需要知道 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z} \times \mu_{N'}$-覆盖何时具有良约化。由于这对于 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖而言很难处理，我们将注意力限制在以下问题上：已知中间的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖具有良约化时，哪些附加条件足以确保这一点。

引理 10.4。 设 R 是剩余特征为 p 的混合特征离散赋值环，并设 $C_R \to C_R$ 是一个光滑的 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$-覆盖，使得 C_K 中的分歧点均定义在 K 上。进一步设$C'_R \to C_R$ 是一个分歧的 $\mu_{N'}$-覆盖，使得 C'_k 光滑，且 C_K 中的分歧点均定义在 K 上。此外，假设对于 $C'_K \to C_K$ 的每个分歧点 $x \in C_K$，

ˆ ˆ $\bar{x}$ 关于 $C_k \to C_k$ 的分歧度与 x 关于 $C_K \to C_K$ 的分歧度相同。那么ˆ $C \times_C \hat{C}'$ 的正规化具有良约化。

ˆ证明。 我们可以将复合域视为 C_K 的一个 $\mu_{N'}$-覆盖，只要分歧点在特殊纤维上仍然彼此不同，该覆盖就具有良约化。由于 ˆC'_K 具有良约化，分歧点在 C_K 中的像约化后彼此不同，因此只需证明这一性质在 C_K上仍然成立，或者等价地，证明 C_K 中的原像数与ˆ C_k中的相同。但这由分歧次数的条件立即可得。 □

ˆ**定理 10.5**。 设 C/k 是特征 p 的域上的一条光滑射影曲线， $C \to C$是 C 的一个光滑 $\mathbb{Z}/p^l Z \times \mu_{N'}$-覆盖，其中 $\gcd(N', p) = 1$。进一步假设 ˆ$C \to C$ 至少有一个温和分歧点，并考虑通过改变该点得到的覆盖族。若 C 的分歧点的总重数至少为 $7 - 2g$，则相应的 *Prym* 簇族具有大的几何单值群。

ˆ证明。 令 C/R 为到特征零的提升。由于我们一直在考虑几何单值群，因此可以自由地假设 R 包含 ζ_{p^l} ，从而可以将 C_K 视为一个$\mu_{p^l N'}$-覆盖。同样，我们可以根据需要扩张 R ，以确保 C_K 的分歧点定义在 K上，因此将其扩张为 C_R的截面 x_i 。每个这样的截面都与 C_k 相交于一个分歧点，而 C 光滑这一事实确保中间$\mu_{N'}$-覆盖光滑，因此中间覆盖的分歧点在 C_k中仍然彼此不同。

现在，假设我们修改 C_K 的权重，使得 (a) 中间μ_{p^l}-覆盖保持不变，且 (b) 对于 C_k中的每个点 $\bar{x}$ ，约化到 $\bar{x}$ 的分歧点的权重之和保持不变。由于 $\bar{x}$ 要么在其上方只有一个点，且该点对μ_{p^l}-覆盖是非分歧的；要么在其上方有多个分歧点，且这些点对μ_{p^l}-覆盖全都为分歧点，因此我们看到，修改后的覆盖ˆ C'_Kˆ 与 C_K 具有相同数量的分歧点，因而具有相同的 Prym 维数。当然， R 上方的正规化的特殊纤维可能变得相当奇异，但特殊纤维的正规化仍与相同，因此它也具有相同的 Prym 维数。如果允许驯分歧点移动，这一结论仍然成立，因此这为我们提供了大量不同的变点族，其中 Prym 具有所需的模 p约化。

我们选择 $\hat{C}_K$。对于每组正在合并的分歧点，选择一个使其分歧度的 p 部分最大的点（根据引理 10.3，这个最大值等于极限的分歧度的 p 部分）。然后，我们可以任意设定其他点处指数的温和部分（即模 N' 的约化），因此尤其可以确保每个这样的点处有 $m_1 + m'_i = 0 (N')$。令ˆ C'_K 为所得曲线。

现在，令 X_R 为相应的变点族；注意，它是 C/R 的一个 ´étale 覆盖。 X_K 上的 Prym 扭子层在固定分歧点的原像处分歧，其中 x_i 处的分歧阶为 $N/\gcd(m_1 + m'_i,\ N)$。现在，令 Y:$= X \times_C \hat{C}_{p^l}$，其中ˆ C_{p^l} 是中间的 p^l-覆盖。因此， x_i 处 Y/X 的分歧度为

$$p^l / \gcd(m_i, p^l) = p^l / \gcd(m'_i, p^l) = p^l / \gcd(m_1 + m'_i, p^l). \tag{10.1}$$

因此，若 y_i 是 Y 上位于 x_i 之上的一点，那么 Y_K 上的 Prym 扭子层在 y_i 处的分歧阶数为

$$(N/\gcd(m_1 + m'_i, N))/(p^l/\gcd(m_1 + m'_i, p^l)) = N'/\gcd(m_1 + m'_1, N'), \tag{10.2}$$

因此与 p 互素。此外，我们对指数的选择保证了每个合并集合中，除至多一个分歧点外，在所有分歧点处该次数均为 1（因此层可以延拓！）。

换言之，在 Y_K 上有一个 ´étale 层，其驯性单值沿着在 Y_k 上始终彼此不同的截面发生分歧，因此两个单值群相同。此外，由于 Y/X 是伽罗瓦的， Y_K 上的单值群是一个到伽罗瓦群 $\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$ 的态射的核，因此仍然很大，所以 Y_k 也同样如此。由于我们已经证明，将层延拓到 X_k （从而延拓到 Y_k）后，所得对象与所需变点族的 Prym 相同，故结论得证。 □

注。 对分歧重数的界，转化为通常的界，即 Prym 作为 $\mathbb{Z}[\zeta_N]$-模的秩至少为 5。

通过节点平滑构造，我们也可以得到没有驯分歧点的情形（包括非分歧情形）。主要的代价是，所粘合的节点必须是温和分歧的，因此至少要允许一个节点变化。因此，我们只能得到变曲线情形下的结果，无法处理 N 是 p的幂的情形。此外，如果$N = p^l q^m$，那么相关亏格为 $g-1$ 的族的单值化模q上的素数可约，因此必须排除该 Tate模。

定理10.6。 设 $g > 0$, $N' > 1$。对于任意的 $n \geq 0$ 以及 H_0^1（$\mathbb{A}^1$； $\mu_{N'} \times \mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z}$）中的任意 n元类组，考虑光滑亏格为 g 的曲线的全局覆盖族，其中有 n 个分歧点具有指定的解析同构类。那么，只要总分歧重数至少为 $7-2g$，且当 N' 是 q的幂时排除q-进 *Tate*模，相应 *Prym*簇族的单值化就是大的。

注。 同样，我们可以不太费力地将重数的上界降至 $6-2g$。

注。 排除 q-进 Tate模大概只是一个技术问题：亏格 $g-1$的族具有与特征零时相同的单值化，因此它的 q-进单值化包含一个在余秩2子格上具有大像的子群（这是通过考察特征零时两个粘合点合并的退化纤维得到的）。（这里假设亏格 g 时的分歧重数至少为 $9-2g$，这样余秩2子格仍会具有大单值化。）因此， q-进单值化不够大的唯一可能原因，就是它实际上是可约的。

10.3 未尽问题

我们注意到，对于野分歧覆盖，我们的论述还存在若干缺口。最重要的一点是，由于我们将所有情况都归结为至少有一个温和分歧点的情形，因此无法处理纯野分歧覆盖；特别是，对于特征 p 下的非分歧 p^l-覆盖，我们得不出任何结果。此外，当基曲线固定时，我们对一般的 $p^l N'$-覆盖也无能为力（即使在 $\mathbb{P}^1$ 情形下也是如此！）。最后，当 N' 是 q的幂时，还存在一个大概只是技术性的问题：我们先验上可能无法得到足够大的 q-进单值化。

对于这些问题， [1] 的方法可能会大有裨益。他们的方法使得对单值化的 不可约性给出归纳证明变得相当直接；在特征零的情形下，即使单值化并不具有大单值化，这种不可约性往往仍然成立，从而原则上使基础情形更易处理。一旦有了不可约性，对于任何退化到秩超过一半且具有大单值化的情形，都应当可以推出大像性。（这比寻找 [1]所要求的两个具有大单值化的相容退化更容易。）

11 具有常数 j的椭圆曲面上的塞尔默群

设 $E/C/\mathbb{F}_q$ 是一个具有常值 j-不变量 j_0 的椭圆曲面，其中若 $j_0 = 0$ ，我们假设特征不为 2 或 3。若 $E_{j_0}/\mathbb{F}_q$ 是具有该 j-不变量的某条固定曲线，那么

存在一个 C 的诱导循环覆盖；在 E 具有良约化的几何点处，它是给定纤维与 E_{j_0} 之间同构的 $\mathrm{Aut}(E_{j_0,\bar{\mathbb{F}}_q})$-torsor。当然，这取决于 E_{j_0} 的选择，但我们看到 C 的 伪覆盖 与这一选择无关，因此完全ˆ内禀于 E。此外，给定伪覆盖上的任意覆盖选择都会给出一条曲线 C，使得ˆ ˆ $E \times_C C$ 的极小适当正则模型同构于某个 E_{j_0} 的 $E_{j_0} \times C$ ；随后可将 E 恢复为这个乘积关于 ´étale 群概形 $\mathrm{Aut}(E_{j_0}) \cong \mu_N$, $N \in \{2,4,6\}$ 的商。

换言之，对于每条具有循环自同构群的椭圆曲线 E_{j_0}，椭圆曲面模叠（其具有 j-不变的 j_0）与循环覆盖模叠之间存在自然的对应。对于任意一族这样的覆盖，我们可以利用相应的椭圆曲面族，构造该族基本群的其他表示。特别地，我们可以考虑曲面的塞尔默群；在适当条件下，它们对应于该族上的´étale 层。我们还可以考虑将集合层按循环群作用取商后得到的层，并发现该层下降到相应的伪覆盖族。

事实证明，这个集合层与我们已经考虑过的一个集合层典范同构：对于与 N 互素的 L 素数，与 L-塞尔默群对应的集合层，恰好就是与 Prym 的 L-挠对应的集合层。换言之，这两个单值群表示射影同构。我们已经看到，射影大像性蕴含大像性，因此这将使我们看到 L-塞尔默群的单值化具有大像（除某些非常小的情形外）。

关键思想是，阿贝尔簇的塞尔默群与其基变换的塞尔默群之间存在映射，在许多情况下，我们可以用后者来表示前者。因此，在许多情况下，等平凡族的塞尔默群计算可以归约为平凡族的类似计算。

第一步是注意到，如果我们允许阿贝尔簇，那么在 K上的塞尔默群可以写成某个（有限可分）域扩张上的塞尔默群。

引理11.1。设 L/K 是整体域的有限可分扩张，且 $\phi : A \to B$ 是 L上的阿贝尔簇之间的同源。令$\mathrm{Res}_{L/K}\,\phi$ 表示到 K的魏尔限制所对应的同源。那么存在一个典范同构

$$\mathrm{Sel}(\phi) \cong \mathrm{Sel}(\mathrm{Res}_{L/K}\,\phi). \tag{11.1}$$

证明。我们 首先注意到，对于任意扩张 K' 的域 K，我们都有典范同构

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{fl}}(K'; \ker \mathrm{Res}_{L/K}\,\phi) &\cong H^1_{\mathrm{fl}}(K'; \ker \mathrm{Res}_{L\otimes_K K'/K'}\,\phi) \\ &\cong H^1_{\mathrm{fl}}(K'; \mathrm{Res}_{L\otimes_K K'/K'} \ker \phi) \\ &\cong H^1_{\mathrm{fl}}(L \otimes_K K'; \ker \phi). \end{aligned} \tag{11.2}$$

特别地，对于 K的任意赋值 v，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{fl}}(K; \ker \mathrm{Res}_{L/K}\,\phi) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{fl}}(K_v; \ker \mathrm{Res}_{L/K}\,\phi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\mathrm{fl}}(L; \ker \phi) & \longrightarrow & \prod_{w/v} H^1_{\mathrm{fl}}(L_w; \ker \phi) \end{array} \tag{11.3}$$

其中竖直映射是典范同构。由于 $\mathrm{Sel}(\mathrm{Res}_{L/K}\,\phi)$ 按定义是该态射的核

$$H^1_{\mathrm{fl}}(K; \ker \mathrm{Res}_{L/K}\,\phi) \to \prod_v H^1_{\mathrm{fl}}(K_v; \ker \mathrm{Res}_{L/K}\,\phi), \tag{11.4}$$

这些同构将其与该态射的核对应起来

$$H^1_{\text{fl}}(L;\ker\phi)\to\prod_v\prod_{w/v}H^1_{\text{fl}}(L_w;\ker\phi)=\prod_w H^1_{\text{fl}}(L_w;\ker\phi),\tag{11.5}$$

这正是所需的 Sel(ϕ)。 □

对于定义在 K 上的 A，我们有一个典范对角线态射 $A\to\text{Res}_{L/K}A$，以及一个典范迹态射 $\text{Res}_{L/K}A\to A$，使得其复合为乘以 deg(L/K)。由函子性，这诱导出态射

$$\text{Sel}(\phi)\to\text{Sel}(\phi_L)\to\text{Sel}(\phi),\tag{11.6}$$

复合后为乘以 deg(L/K)。（注意，伽罗瓦上同调上的对应映射不过就是限制和转移。）如果 L/K 是伽罗瓦的，则 Gal(L/K) 在 $\text{Res}_{L/K}A$ 上诱导出一个作用，并且映射 $A\to\text{Res}_{L/K}A\to A$ 关于此作用和 A 上的平凡作用是等变的。这意味着我们有态射

$$H_0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\to\text{Sel}(\phi)\to H^0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\tag{11.7}$$

其中复合是典范映射

$$H_0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\to H^0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\tag{11.8}$$

该映射由对称化诱导，从而得到一个映射三角形

$$H_0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\to\text{Sel}(\phi)\to H^0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\to H_0(\text{Gal}(L/K);\text{Sel}(\phi_L))\to\cdots\tag{11.9}$$

使得从三角形上任意一点出发绕行一周的复合都是乘以 deg(L/K)。

在所关注的应用中，ϕ_L 是常阿贝尔簇之间的一个同源。

命题 11.2. 设 $\phi:A\to B$ 是定义在可分闭域 k上的阿贝尔簇之间的一个同源，C/k 是一条曲线，并且假设度 ϕ 在 k中可逆。那么存在一个典范同构

$$\text{Sel}_\phi(A_{k(C)})\cong J(C)[\deg\phi]\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{\deg\phi}^{-1}\otimes_{\mathbb{Z}}\ker\phi.\tag{11.10}$$

证明。 由于 $A_{k(C)}$ 是常的，它处处具有良约化，因此对于任意赋值 v，使一个上同调类属于塞尔默群的局部条件，无非是要求它是非分歧的。换言之，我们有

$$\text{Sel}_\phi(A_{k(C)})\cong H^1_{\text{fl}}(C;\ker\phi).\tag{11.11}$$

由于 $\ker\phi$ 是一个被 $L=$度 ϕ湮灭的常 étale 层，我们有

$$H^1_{\text{fl}}(C;\ker\phi)\cong H^1_{\text{fl}}(C;\mu_L)\otimes\mu_L^{-1}\otimes\ker\phi\cong\text{Pic}(C)[L]\otimes\mu_L^{-1}\otimes\ker\phi.\tag{11.12}$$

□

如果 ϕ和 C 定义在非代数闭域 k上，那么该命题给出了一个伽罗瓦群(k)-模的同构。在良好的情形下，我们可以从相应的伽罗瓦群(k)-模恢复 k 上的塞尔默群。

命题 11.3. 设 $\phi\colon A \to B$ 是定义在全局函数域 K上的阿贝尔簇同源，˜表示该域；令 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 表示相应的 *N´eron* 模型之间的态射。如果 ϕ 在分支群上诱导一个同构，那么$\mathrm{Sel}\phi(A)$ 可视为复形 ϕ 的第一超上同调˜，其中该复形被视为 *´etale* 层的复形。

证明。 上同调群 $H^1_{\mathrm{fl}}(K;\ker\ \phi)$ 与 ϕ 的第一超上同调一致；后者分类 A-等变态射 $X \to B$，其中 X 是一个 A-托orsor，且 A 在 B 上的作用由 ϕ 诱导。（也就是说，它分类 A-托orsor，以及对诱导的 B-托orsor 的一个显式平凡化。）因此，塞尔默群分类满足如下条件的态射：X 在每个完备化处都是平凡的。这尤其意味着 X 是非分歧的，因而可延拓为一个 $\mathcal{A}$-托orsor；根据 N´eron 模型的泛性质，这给出一个态射 $\mathcal{X} \to \mathcal{B}$，即上超同调群 $H^1_{\text{ét}}(C;\tilde{\phi})$ 中的一个类。这样的类可能不属于塞尔默群：当且仅当 $X(K_v^{\mathrm{unr}})$ 非空时， X 在赋值 v 处非分歧；而要属于塞尔默群，则要求 $X(K_v)$ 本身非空。在给定赋值 v 处的障碍无非是

$$H^1_{\text{ét}}(k_v;\mathcal{A}) \cong H^1_{\text{ét}}(k_v;\pi_0(\mathcal{A})) \tag{11.13}$$

因此，我们通常可以看到，塞尔默群是该态射的核

$$H^1_{\text{ét}}(C;\tilde{\phi}) \to H^1_{\text{ét}}(C;\pi_0(\mathcal{A})), \tag{11.14}$$

注意到层 $\pi_0(\mathcal{A})$支撑在有限多个点上。复形的态射来自链映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0\mathcal{A} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array} \tag{11.15}$$

该映射可分解为经过链映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_0(\tilde{\phi})} & \pi_0(\mathcal{B}). \end{array} \tag{11.16}$$

˜特别地，我们看到，如果 $\pi_0(\phi)$是同构，那么后一个链映射为 0，从而迫使

$$H^1_{\text{ét}}(C;\tilde{\phi}) \to H^1_{\text{ét}}(C;\pi_0(\mathcal{A})) \tag{11.17}$$

消失。 □

˜注。 对于椭圆曲线的等变族，我们发现，使 $\pi_0(\phi)$成为同构的条件，恰好与 Prym 的单值化不可约的条件相同。例如，对于 $j = 0$，分歧点 x 处权为 1、2、3、4、5 的分支群为 1， C_3， C_2^2， C_3， 1（对应于 Kodaira 类型 II、IV、I_0^*、IV^*、II^*）。

命题 11.4。 设 $\phi\colon A \to B$ 是定义在全局函数˜域 $K = k(C)$ 上的阿贝尔簇之间的同源，并令 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 表示相应的 *N´éron* 模型态射。我们假设该态射在分支群上诱导同构。若 $\ker\phi(k^{sep}(C) = 0$，则

$$\mathrm{Sel}_\phi(C) \cong \mathrm{Sel}_\phi(C_{k^{sep}})^{\mathrm{Gal}(k)}. \tag{11.18}$$

证明。 Lyndon-Hochschild-Serre谱序列给出了一个五项正合序列，将˜关于 ϕ 在 $k(C)$上的超上同调与关于 k^{sep}在 $C(C)$上的超上同调联系起来：

$$0 \to H^1(k; H^0_{\text{ét}}(C_{k^{\mathrm{sep}}}; \tilde{\phi})) \to H^1_{\text{ét}}(C_k; \tilde{\phi}) \to H^0(k; H^1_{\text{ét}}(C_{k^{\mathrm{sep}}}; \tilde{\phi})) \to H^2(k; H^0_{\text{ét}}(C_{k^{\mathrm{sep}}}; \tilde{\phi})). \quad (11.19)$$

因此我们看到，只要

$$H^0_{\text{ét}}(C_{k^{\mathrm{sep}}}; \tilde{\phi}) = 0, \quad (11.20)$$

这等价于（根据 N´eron 模型的延拓性质）$\ker \phi(k^{\mathrm{sep}}(C))$ 消失。

□

注。 请注意，对于平凡族，附加假设通常不成立。对于等变族，该条件往往成立；特别是当 deg ϕ 与使该族变为平凡族的伽罗瓦扩张的次数互素时。即使如此，该条件通常也是多余的：例如，对于 $j = 0$ 族，若中间 3 覆盖非平凡，则无需满足 2 处的条件；若中间 2 覆盖非平凡，则无需满足 3 处的条件。

回到椭圆曲线的例子，设 $A = E_0$ 是一条固定曲线，满足 $j = 0$，比如说 $y^2 = x^3 + 1$，并假设 L 与 6 互素。那么，关于 C 的 j-不变量为 0 的椭圆曲面（或者，当 $p|6$ 时，此类曲面中的某个子族）与 C 的 μ_6-覆盖 C 存在自然对应（给定我们对 ˆE_0 的选择），并且我们发现，对于这样的曲面 E，其几何塞尔默群 ¯（即基变换至 $\mathbb{F}_q$ 后的塞尔默群）

$$\mathrm{Sel}_L(E) = (J(\hat{C})[L] \otimes_{\mathbb{Z}} E_0[L] \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_L^{-1})^{\mu_6} \quad (11.21)$$

由于 μ_6 在 μ_L^{-1} 上作用平凡，我们可以将该层移到外面（它所做的只是扭曲伽罗瓦作用）。作为 $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$- 模， $E_0[L]$ 是秩为 2 的自由模；它还是忠实的 μ_6- 模，因此无非就是

$$\mathbb{Z}[\zeta_6]/L\mathbb{Z}[\zeta_6]. \quad (11.22)$$

换言之，如果忽略伽罗瓦作用，我们有

$$(J(\hat{C})[L] \otimes_{\mathbb{Z}} E_0[L] \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_L^{-1})^{\mu_6} \cong J(\hat{C})[L] \otimes_{\mathbb{Z}[t]/(t^6-1)} \mathbb{Z}[t]/(t^2 - t + 1) \cong \mathrm{Prym}(\hat{C}, \mu_6)[L]. \quad (11.23)$$

由于同构

$$E_0[L] \cong \mathbb{Z}[\zeta_6]/L\mathbb{Z}[\zeta_6] \quad (11.24)$$

在某个有限扩张 $\mathbb{F}_q$ 上有效，因此我们看到，伽罗瓦作用与算术单值化有关，但与几何单值化无关。

ˆ 换言之，给定一个由 μ_6-覆盖 C/C 构成的族 以及其关联的、定义在 C 上的 $j = 0$ 椭圆曲面族 E，我们有一个 ´étale 层的同构

$$\mathrm{Sel}_L(E_{\overline{\mathbb{F}}_q(C)}) \cong \mathrm{Prym}(\hat{C}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mu_6)[L] \quad (11.25)$$

该同构与某个有限扩张 $\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q$ 上的伽罗瓦作用相容。特别地，我们发现几何单值群彼此同构。

ˆ**定理11.5**。 取 $n \geq \max(5, 2g - 1)$，设 $C \to C$ 是一个光滑、亏格为 g、特征为 $p \nmid 6$ 的曲线的几何连通 μ_6-覆盖，且有 $n + 2 - 2g$ 个分歧点。设 x_1 是其中一个分歧点。那么，通过改变 x_1 所得到的 $j = 0$ 曲线的塞尔默群族的单值化，除 2和3外都很大。

注 1。 当然，只要允许基曲线变化，我们也能对 ′的 $g \geq 3$无分歧覆盖得到类似结果。

类似的论证可得如下结论。

ˆ**定理 11.6.** 固定 $n \geq \max(5, 2g-1)$，设 $C \to C$ 是一个光滑、亏格为 g、特征为 $p \nmid 4$ 且有 $n+2-2g$ 个分歧点的曲线的几何连通 μ_4- 覆盖。设 x_1 是其中一个分歧点。那么，通过改变 x_1 得到的 $j = 1728$ 曲线的塞尔默群族的单值化很大。

O我们还可以考虑 $y^2 = x^3 + 1$ 的三次扭曲，从而得到以下结 ng.

ˆ**定理 11.7.** 固定 $n \geq \max(5, 2g-1)$，设 $C \to C$ 是一个光滑、亏格为 g、特征为 $p \nmid 3$ 且有 $n+2-2g$ 个分歧点的曲线的几何连通 μ_3-覆盖。设 x_1 是其中一个分歧点。那么，通过改变 x_1 得到的 $j = 0$ 曲线的塞尔默群族的单值化很大。

对于具有常数 $j \notin \{0, 1728\}$ 的曲面，也可以说类似的话。在这里，自然也允许 j 不变量变化；此时会发现，单值化在 $\mathsf{Sp}_n \otimes \mathsf{Sp}_2$ 中很大。

在最自然的情形下，我们可以加强 $j = 0$ 结果： $C \to C$ 的所有分歧点 ˆ 的权均为 1（或者说，均为 5）。在这种情况下，对于任意 L， L-塞尔默群是某个 L^∞-塞尔默群的 L-挠部分，因此单值化不仅有意义，而且属于一个适当的阿德尔群。

ˆ**定理 11.8.** 固定 $n \geq \max(5, 2g-1)$，设 $C \to C$ 是一条光滑的、亏格为 g、特征为 $p \nmid 6$ 的曲线上的几何连通 μ_6-覆盖，且有 $n+2-2g$ 个分歧点，其权均为 *1* 或 *5*。设 x_1 是其中一个点。那么，随着 x_1 变化而得到的 $j = 0$ 曲线的塞尔默群族的单值化很大。

证明。 在 2 和 3 处我们仍然有转移映射与限制，但现在这些映射不再是同构：相反，按适当情况，它们的复合是对称化或乘以 6。不过，这足以证明相应的 2-adic 格和 3-adic 格至少是可比的。换言之，这两个单值群表示在 $\mathbb{Q}_2$ 和 $\mathbb{Q}_3$上同构。然而，Prym 的单值化在模 2 和 $\sqrt{-3}$意义下是不可约的，这意味着这两个格至少是相似的，从而表示实际上是同构的!—

□

注意，正如 Prym 的情形一样，这里仍有一些遗留问题：对于 $g > 0$，我们通常不知道行列式映射的像。此外，算术 单值化在其正规化子中属于几何单值群的某个陪集，但该陪集将取决于 $E_0[L] \otimes \mu_L^{-1}$ 的伽罗瓦模结构。（如果我们扩大族，允许E_0 变化，情况大概会变得更简单。）

对行列式的理解不足应该只是一个相对次要的问题：从实验结果看，给定的一个酉群陪集中的特殊酉群陪集，对不变子模形状的分布要么相同，要么极为接近；所有这些分布都包含在一个 L^1 球内，且当秩趋于无穷时，球的半径迅速趋于 0。若情况确实如此，那么用酉群相应陪集上的平均值替代几何单值群某个陪集上的平均值所引入的误差就会很小。此外，我们可以轻易判断算术单值群属于酉群的哪个陪集：在塞尔默情形中，算术单值群保持一个二次型，因此，根据伽罗瓦群 $\mathsf{Gal}(\mathbb{F}_q)$ 对 μ_6 的作用，它要么包含在酉群中，要么包含在使反厄米形式变号的半线性变换的陪集中。

不过，我们没有尝试计算实际的极限分布，因为这仍涉及四种情形（若将 $j = 0$ 的 3 次幂塞尔默群也纳入，则有六种）： l 次幂的行为取决于 l 是否在 $\mathbb{Q}(\zeta_6)$ 中分裂，也取决于 q 模 3 是 1 还是 2。注意，当 $q = 1(3)$ 时，利用上述单值群计算来估算 l-塞尔默群的预期大小很直接。关键在于以下这个（想必众所周知的）伯恩赛德引理的类似结果。

引理 11.9. 设 G 是作用在有限集 X 上的有限群， $N \trianglelefteq G$ 是正规子群， C 是 G 中的一个 N 陪集。那么

$$\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}|\{x : x \in X|gx = x\}| \tag{11.26}$$

等于 X 中被 C 保持不变的 N-轨道数。

证明。 我们可以将 $|\{x\colon\ x \in X|gx = x\}|$ 写成 $\mathrm{Tr}(\pi(g))$，其中 π 是 G 对应的置换表示，因此只需计算

$$\mathrm{Tr}(\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\pi(g)). \tag{11.27}$$

若定义

$$\Pi_N := \frac{1}{|N|}\sum_{g\in N}\pi(n), \tag{11.28}$$

使得 Π_N 投影到 N 不变子空间上，则有

$$\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\pi(g) = \pi_N\big(\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\pi(g)\big)\pi_N, \tag{11.29}$$

因此，我们可以改为计算其在 N 不变子空间上的限制的迹。该子空间的一组基由 X 中 N 的各轨道上的元素之和构成。在这组基下， $g \in C$ 通过置换作用，因此， g 在该子空间上的迹恰好就是该置换的不动点数。

□

引理11.10. 设 $G/\mathbb{F}_q$ 是光滑连通群概形，且 $X/\mathbb{F}_q$ 是一个 G-集，其中 $X(\mathbb{F}_q)$ 中的每个点都有光滑连通稳定子。那么， $G(\mathbb{F}_q)$-轨道在 $X(\mathbb{F}_q)^-$ $^-$中的集合，与 $G(\mathbb{F}_q)$-轨道在 $X(\mathbb{F}_q)$ 中受弗罗贝尼乌斯作用保持不变的轨道集合之间，存在自然双射。

$^-$证明。 设 $x \in X(\mathbb{F}_q)$是一个受伽罗瓦群作用保持不变的轨道代表元，因此对某个 $g \in G(\bar{\mathbb{F}}_q)$有$\sigma_q(x) = gx$。这确定了 $H^1(\mathbb{F}_q; G)$的一个伽罗瓦1-余循环，由于 G 是连通的 [8]，该余循环是平凡的。因此存在某个 $h \in G(\bar{\mathbb{F}}_q)$，使得 $g = \sigma_q(h)^{-1}h$ ，从而$\sigma_q(hx) = hx$，故存在一个定义在 $\mathbb{F}_q$上的轨道代表元。

还需证明，在 $G(\mathbb{F}_q)$ 的作用下，该轨道代表元是唯一的；换言之，若 $\sigma_q(x) = x$ 且 $\sigma_q(gx) = gx$，我们需要证明对于某个 $g' \in G(\mathbb{F}_q)$，有 $gx = g'x$ 。根据假设， $g^{-1}\sigma_q(g) \in G_x$，而 G_x 的连通性再次推出，对于某个 $h \in G_x$，有 $g^{-1}\sigma_q(g) = h\sigma_q(h)^{-1}$ ，因此我们可以取 $g' = gh$。 □

引理 11.11. 对于 $n \geq 3$，特殊线性群$_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ 在 $V_n \oplus V_n^\perp$上的轨道由求值映射 $(v, \lambda) \mapsto \lambda(v)$区分；但若该映射为 0，则根据 v、 λ 中哪一个为 0，或二者是否都为 0，可分为四个轨道。在每种情况下，轨道稳定子都是光滑且连通的，并且每个轨道都在 $^-$下被$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$保持不变。

证明. 显然，SL_n 在非零向量上传递，因此每个满足 $v \neq 0$ 的轨道都有一个代表元，其 $v = e_1$ 相对于选定的基给出。由于 SL_n 在非零线性泛函上传递，满足 $v = 0$的轨道恰有两个，结论得证。

若 λ 相对于对偶基的展开为 $cf_1 + \sum_{i>1} a_i f_i$，其中 $c \neq 0$，则 $e_i \mapsto e_i + (a_i/c)e_1$ 消去 a_i，因此我们得到一个轨道代表元 $(e_1,\ cf_1)$，这证明对于 $\lambda(v)$ 的每个非零取值，确实恰有一个轨道。类似地，若 $c \neq 0$，则要么 $\lambda = 0$，要么我们可以利用特殊线性群 $_{n-1}$ 在非零线性泛函上的传递性，将其化为轨道代表元 $(e_1,\ f_n)$。

¯ ¯由于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 是由特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ 与标量生成的，而标量在两个¯直和项上的作用方式相反，因此 $\lambda(v)$ 是 GL_n 不变量，故所有轨道确实都在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的作用下保持不变。对于满足 $\lambda(v) \neq 0$ 的轨道，标准代表元的稳定子恰为特殊线性群 SL_{n-1}；而对于满足 $\lambda(v) = 0$ 的轨道，稳定子为抛物型。在这两种情形下，稳定子都是所需的连通群概形。 □

定理 11.12。 固定一个整数 $n > 1$，并设 q_m 为一列与1 模3 同余的奇素数幂，且满足$\lim_{m\to\infty} q_m = \infty$。对每个 m，令 $X_m/\mathbb{P}^1$ 遍历高度为 n（即判别式属于 $O_{\mathbb{P}^1}(12n)$）且 j-不变量为0 的所有椭圆曲面，并要求其 *N´eron* 模型没有可约纤维。那么对所有素数 $l \neq 3$，当 $m \to \infty$ 时，

$$E|\operatorname{Sel}_l(X_m)| = l + 2 + \left(\frac{l}{3}\right) + O(q_m^{-1/2}) \tag{11.30}$$

证明。 由等分布，这归结为证明 $|\ker(g-1)|$ 在算术单值群上的平均值为 $l+2+\left(\frac{l}{3}\right)$。由于算术单值群包含相应的酉群（或线性群），只需证明这对特殊酉群的任意陪集都成立，或者等价地证明特殊酉群有那么多个轨道，且这些轨道都在一般酉群作用下保持不变。特殊酉群是某个在几何上同构于 SL_n的群概形的 $\mathbb{F}_{l^r}$点，因此我们可以应用前面的引理，将问题归结为计数在 $\mathbb{F}_l$ 上由弗罗贝尼乌斯保持不变的轨道数¯。其中 v 和 λ 均非零的轨道由 $\lambda(v)$分类，弗罗贝尼乌斯在其上的作用符合预期，因此这类 $\mathbb{F}_{l^r}$有理轨道与 $\mathbb{F}_l$一一对应。类似地，单点轨道 $(v,\lambda) = (0,\ 0)$ 在弗罗贝尼乌斯作用下保持不变。其余两个轨道是否有贡献，取决于弗罗贝尼乌斯是否交换 V_n 和$V_n^{\perp}$，而这恰好发生在 $l = 2(3)$ 时。因此，当 $l = 2(3)$ 时，我们得到 $l+1$ 个轨道；当 $l = 1(3)$ 时，则有 $l+1+2$ 个轨道。

□

注。 可以证明，该公式对 $l = 3$ 仍然成立。

因此，我们发现，对于一半的素数 l，其分布已经有了显著差异。

这些结果也应当可以用于证明各种一般曲线族具有大的塞尔默单值。事实上，对于任意一般曲线族，若其具有大单值化的子族满足 $j = 0$，则较大族的单值化包含该子族的单值化，因而包含相关特殊酉群 SU_n 的一个共轭群。对于每个 l，这是 $\mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}_l)$ 的一个极大子群的近似，因此，几乎任何证明单值化不包含于 $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_l)$ 的方法都能推出其具有大像性。（对每个素数 l 模下都具有大像性就足够了，原因与 Prym 簇的情形大致相同。）例如，若一般曲线族的单值化包含一个反射（例如，若该族包含恰有一个可约纤维、类型为 II 或 I_2 的曲线），便可立即推出其单值化具有大像性。事实上，定理 11.12 的证明表明，特殊酉群在任意给定范数的各向异性向量上是传递的；因此，若单值化包含任意一个反射，它就包含整个反射共轭类。

参考文献

[1] J. D. Achter 和 R. Pries. 双曲线与三椭圆曲线的整系数单值化. 《数学年刊》, 338(1):187–206, 2007.[2] M. Artin. 特征 p 下有理双点的覆盖. 载于《复分析与代数几何》, 第 11–22 页. 岩波书店，东京，1977 年.[3] M. Bhargava、D. M. Kane、H. W. Lenstra, Jr.、B. Poonen 和 E. Rains. 椭圆曲线的秩、塞尔默群及沙法列维奇-泰特群分布的建模. 《剑桥数学杂志》, 3(3):275–321, 2015.[4] S. Bosch、W. L¨utkebohmert 和 M. Raynaud. N´eron 模型, 《数学及其边界领域成果》(3) 第 21 卷. 施普林格出版社，柏林，1990 年.[5] L. E. Dickson. 线性群：附伽罗瓦域论阐述. 多佛出版社，纽约，1958 年. W. Magnus 作序，原著发表于 1901 年.[6] T. Feng、A. Landesman 和 E. M. Rains. 函数域上椭圆曲线的塞尔默群几何分布. 《数学年刊》, 387(1-2):615–687, 2023.[7] N. M. Katz. 基本群表示的局部到整体扩张. 《傅里叶研究所年刊》(格勒诺布尔), 36(4):69–106, 1986.[8] S. Lang. 有限域上的代数群. 《美国数学杂志》, 78:555–563, 1956.[9] G. Malle 和 B. H. Matzat. 逆伽罗瓦理论. 《施普林格数学专著》. 施普林格出版社，柏林, 第二版，2018 年.[10] F. Pop. 曲线覆盖提升的奥尔特猜想. 《数学年刊》(2), 180(1):285–322, 2014.[11] J.-P. Serre. 阿贝尔 l-进表示与椭圆曲线, 《数学研究札记》第 7 卷. A K Peters 出版社, 韦尔斯利，马萨诸塞州，1998 年. W. Kuyk 和 J. Labute 协助编写；1968 年原版的修订重印本.[12] G. C. Shephard 和 J. A. Todd. 有限酉反射群. 《加拿大数学杂志》, 6:274–304, 1954.[13] K. Takano 和 E. Bannai. 约当-波赫哈默微分方程的整体研究. 《函数方程》, 19(1):85–99, 1976.[14] A. Vasiu. p-进表示的满射判据 I. 《数学手稿》, 112(3):325–355, 2003.[15] T. N. Venkataramana. 射影直线循环覆盖的单值化. 《数学创刊》, 197(1):1–45, 2014.[16] H. V¨olklein. 经典群的刚性生成元. 《数学年刊》, 311(3):421–438, 1998.