arXiv:2512.19640v1 [hep-th] 22 Dec 2025

从 Conway 超共形场论到 K3 σ 模型的不可逆缺陷 II：对偶与斐波那契缺陷

RobertaAngius*[1]，Stefano Giaccari[2], Sarah M. Harrison[3], 和 Roberto Volpato†[4,5]

[1]II. 汉堡大学理论物理研究所，Notkestrasse 9，22607 汉堡，德国 [2]意大利国家计量研究所，Strada delle Cacce 91，I-10135 都灵，意大利 [3]物理系和数学系，东北大学，波士顿，MA 02115，美国 [4]帕多瓦大学物理与天文学系，Via Marzolo 8，35131，帕多瓦，意大利 [5]意大利国家核物理研究院帕多瓦分部，Via Marzolo 8，35131，帕多瓦，意大利

2025年12月23日

摘要

我们继续研究始于 [1], 的 Conway 模 $V^{f\natural}$ 和 K3 非线性西格玛模型（NLSM）中的拓扑缺陷线（TDL）。对于 $V^{f\natural}$，我们完整分类了保持 $\mathcal{N}=1$ （以及 $\mathcal{N}=4$）的循环 Tambara–Yamagami 范畴 TY($\mathbb{Z}_N$) 中可能存在的对偶缺陷，并注意到它们与怪兽月光的零亏格群之间存在一种有趣的联系。我们利用 [1], 中发现的与 Leech 格自同态的对应关系，在 $V^{f\natural}$中构造了若干非平凡的 TDL 实例，其中包括量子维数为无理数的实例。特别是，我们完整分类并构造了 TY($\mathbb{Z}_2$) 和 TY($\mathbb{Z}_3$) 情形中的缺陷，也给出了 TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$) 和斐波那契融合范畴中的对偶缺陷实例。对于 K3 非线性σ模型，我们描述了特定环面轨形中范畴 TY($\mathbb{Z}_2$，-1) 的一个量子维数为无理数$\sqrt{2}$ 的对偶缺陷，该缺陷存在于模空间的一个 16 维切片上。我们还详细分析了 K3 的 Gepner 模型中保持谱流的 TDL；这一分析本身也具有独立的研究价值，并且我们利用它在一些特定实例中构造了斐波那契范畴和 $Rep(S_3)$范畴的不可逆缺陷。最后，我们为 [1] 中的猜想提供了证据：$V^{f\natural}$ 中这类 TDL 的特殊子范畴对应于 $\mathcal{N}=(4,4)$以及相应 K3 非线性σ模型中保持谱流的缺陷线。特别是，我们计算了本文所构造的所有不可逆缺陷的缺陷扭曲椭圆属，表明对于在 K3 非线性σ模型中发现的每个缺陷，在 $V^{f\natural}$ 中都有一个对应缺陷，且二者的缠绕亏格相同；此外，我们还对尚未发现的 K3 非线性σ模型中的若干 TDL 作出了预测。

*roberta.angius@uni-汉堡.de
†volpato@pd.infn.it

目录

1 引言与展望 **3**

2 前期研究成果概要 12

2.1 $V^{f\natural}$ 中的拓扑缺陷.13 2.2 K3 非线性西格玛模型中的拓扑缺陷.16 2.3 猜想.17

3 D $V^{f\natural}$ 1中的对偶缺陷与Tambara-Yamagami范畴 **9**

3.1 TY 范畴的一般性质.20 3.2 $V^{f\natural}$ 中的对偶缺陷.22 3.3 自旋选择规则.29 3.4 $V^{f\natural}$ 的循环轨形与怪兽群.31

4 $\mathbb{Z}_2$的对偶缺陷 **34**

4.1 与 $\mathbb{Z}_2$对偶缺陷相关的格自同态 . . . . . 37 4.2 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷的自由费米子构造.39 4.3 对偶缺陷配分函数与缠绕亏格.43

5 一个保持 $\mathcal{N}=(4,4)$的、具有 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷的 K3 模型 **46**

5.1 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷.47 5.2 缺陷缠绕椭圆亏格.50

6 $\mathbb{Z}_3$的对偶缺陷 **52**

6.1 与 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷相关的 Leech 格自同态 . . . . . 52 6.2 被 $\mathbb{Z}_3$ 固定的仿射代数.56 6.3 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷的明确描述.61

7 D非循环群的对偶缺陷 6 **7**

7.1 轨形产生的对偶缺陷.67 7.2 $V^{f\natural}$ 中 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的 Tambara-Yamagami.71 7.3 GTVW K3 模型中非循环群的对偶缺陷.75

8 斐波那契缺陷与二十面体数 78

8.1 Leech 格的伊科西四元数构造.79 8.2 与斐波那契自同态对易的对称性.82 8.3 被 W^A 保持的仿射代数 .84 8.4 斐波那契缺陷 W^A：完整描述与扭曲函数 . . . . . 85 8.5 W^A 保持 $\mathcal{N}=1$ 超流.89

9 K3 的 Gepner 模型中保持谱流的缺陷 91

9.1 缺陷与 $\mathcal{N}=2$ 最小模型.91 9.2 Gepner 模型中的缺陷.94 9.3 Gepner 模型中拓扑缺陷线的示例.99

Leech 格的一组基及若干格自同态 101
A.1 对偶缺陷的显式结果 $\mathbb{Z}_2$ .101 A.2 对偶缺陷的显式结果 $\mathbb{Z}_3$ .102

B 模形式与特征标公式 **103**

1 引言与展望

将传统对称性重新诠释为支撑在时空余维一子流形上的拓扑缺陷，这些缺陷作用于局域算符并遵循群式融合规则，由此推动了对称性概念的多种推广。这些推广包括通过放宽对支撑流形维数的限制 [2], 而得到的高形式对称性，以及由算符之间更一般的（非可逆）融合规则所产生的非可逆对称性。这些进展推动了人们在广泛的物理背景下开展大量研究。尽管如此，完整分类的系统方法仍然难以捉摸，即便是在二维共形场论（CFT）等特殊框架中也是如此，尽管其中已有许多关键成果 [3–9]。

对于有理共形场论，保留完整手征代数的拓扑缺陷可通过对缺陷施加类 Cardy 条件来系统分类，如文献 [4]所述。这种方法的关键在于，有理代数仅具有有限多个不可约表示。由于存在无限多个不可约表示，保留非有理手征代数的缺陷并无类似构造，唯一的例外是自由玻色子的情形 [10–12]。由于有理理论仅占物理相关共形场论模空间中测度为零的子集，理解非有理背景中的缺陷是一项普遍存在且尚未解决的挑战，也是本研究的主要动机之一。本文聚焦于两个特别的理论——Conway 月光模 $V^{f\natural}$ 和 K3 非线性σ模型（NLSM）——二者各自都值得研究。

一方面，本文继续了在 [1], 中开启的对 Conway 怪兽月光模 $V^{f\natural}$ [13, 14]的研究。该模是唯一一个具有 $c = 12$ 且不存在权为 $1/2$的场的全纯超共形场论（SCFT）。通过研究保留非有理 $\mathcal{N} = 1$ 超 Virasoro 代数的拓扑缺陷线，并施加某些技术约束，我们在姊妹篇文章中提出了适用于这一情形的类 Cardy 条件推广。此方法使我们能够对相应范畴 Top 的融合环结构施加非平凡的约束。特别地，在 [1], 中，我们证明了 Top 中每个 TDL $\mathcal{L}$ 都可以关联到一个从 Leech 格 Λ 映射到自身的 $\mathbb{Z}$-线性映射 $\rho(\mathcal{L}) : \Lambda \to \Lambda$ 。关联 ρ 与缺陷的基本运算相容，即两条线的融合积（$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$）、它们的叠加 $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$，以及由改变线方向所定义的对偶 $\mathcal{L}^*$ 。这里的相容性意味着：

$$\rho(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \rho(\mathcal{L}_1)\rho(\mathcal{L}_2)\ , \qquad \rho(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = \rho(\mathcal{L}_1) + \rho(\mathcal{L}_2), \qquad \rho(\mathcal{L}^*) = \rho(\mathcal{L})^t\ , \tag{1.1}$$

其中，转置 $\rho(\mathcal{L})^t$ 是相对于 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$的一组正交归一基定义的。从物理上讲， $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ 被认作拉蒙扇区 $V_{tw}^{f\natural}$ 中 CPT自共轭基态（共形权重为 $1/2$）所张成的 24 维实空间 ${}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$，而 $\rho(\mathcal{L})$则由 $\mathcal{L}$在这些态上的作用定义。仅知道格自同态 $\rho(\mathcal{L})$并不足以完整地

重构拓扑缺陷 $\mathcal{L}$：事实上，与同一个 $\rho(\mathcal{L})$相关联的非同构拓扑缺陷线 $\mathcal{L}$ 可能有（无穷多个！）。尽管这些约束无法完全确定底层张量范畴 Top，但足以确立一系列关于可容许缺陷的一般性结果，其中包括这些元素与 Leech 格自同构群之间的对应关系，以及对其量子维数的约束。

将 ρ 限制到可逆的线 $\mathcal{L}$，即满足 $\mathcal{L}\mathcal{L}^* = 1$的线，便定义了 $V^{f\natural}$ 的对称性群 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$ 与 Conway 群 $\mathrm{Aut}(\Lambda) \cong Co_0$ 之间的同构；后者由 Leech 格Λ的自同构构成，并保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流 $\tau(z)$。事实上，这个群同构已在 [15], 中得到证明，其存在性也曾在[1]中用于将 ρ 推广到不可逆缺陷。

另一方面，同一个问题，即非有理共形场论中非可逆对称性的分类，正是 [16] 中研究保持 $\mathcal{N} = (4, 4)$超共形代数和谱流的 K3 非线性西格玛模型（NLSM）中的拓扑缺陷线（TDL）的动机。在这一背景下，研究并未采用类 Cardy 条件，而是着重分析缺陷对该理论边界态的作用。特别是，考察缺陷如何作用于这些边界态——它们对应于带电于该理论 R-R 基态的 $1/2$ BPS D膜，受 R-R 基态的 $U(1)^{24}$ 规范群支配——使得研究者得以推导出一组关于可容许缺陷及其相关融合环结构的一般约束。该分析的关键见解，是确定了满足上述条件的拓扑缺陷与该理论中 R-R D膜荷格的端同态之间存在对应关系。 [16] 与 [1], 所得结果在形式上的类比，以及 K3 非线性σ模型与 $V^{f\natural}$ [17–19] 的对称群和扭曲函数之间仍然神秘的联系，共同构成了本工作的第二个主要动机。我们旨在探究并为这种联系在张量范畴层面的潜在推广提供证据。

关于 $V^{f\natural}$ 与 K3 上的非线性σ模型中拓扑缺陷线范畴之间猜想关系的详细方案，已在 [1] 中阐述（综述见第 2.3 节）。在 $V^{f\natural}$ 中，人们考察 Top_Π 的子范畴；这些子范畴属于 Top，其缺陷在某个固定的四维子空间 $\Pi \subset \Lambda \otimes \mathbb{R}$ 中对 Ramond 基态的作用均为平凡。根据 [1], 中的猜想，每个这样的 Top_Π 都应等价于某个 K3 上的非线性 σ 模型 $\mathcal{C}$ 中拓扑缺陷所构成的范畴 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，并保持 $\mathcal{N} = (4, 4)$ 超共形代数和谱流。人们还预期，这些范畴在两个共形场论的态空间上的表示也密切相关。例如，对于每个 $\mathcal{L} \in \mathrm{Top}_\Pi$，在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上作用的端同态 $\rho(\mathcal{L})$，在对这两个共形场论中的相应空间作适当识别后，与 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 中相应缺陷在 K3 模型 $\mathcal{C}$ 的 RR 基态上的作用相吻合。一个更强的猜想涉及 K3 模型中的所谓 $\mathcal{L}$-缠绕亏格 $\phi^{\mathcal{L}}(\mathcal{C}, \tau, z)$，它们是 K3 椭圆亏格的某种 $\mathcal{L}$-等变版本（见第 2.2 节）。该猜想认为，所有这类亏格都可以由 $V^{f\natural}$ 中定义的类似函数 $\phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural}, \tau, z)$ 重现：

$$\phi^{\mathcal{L}}(\mathcal{C}, \tau, z) = \phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural}, \tau, z) \qquad \forall \mathcal{L} \in \mathrm{Top}_\Pi \ . \tag{1.2}$$

同样，这些猜想受到此前关于两个共形场论 [18] 中可逆对称性群的类似观察的启发。

本文旨在应用 [1] 中发展的方法，在 $V^{f\natural}$ 和 K3 非线性σ模型中发现若干新的非平凡拓扑缺陷线及其对应的融合范畴。此外，我们利用这些例子进一步

为 $V^{f\natural}$ 和 K3 非线性σ模型中融合范畴之间的猜想关系提供证据。本文包含许多文献中尚未出现的新结果，现概述如下。

1. 在第3节中，我们回顾了所有共轭类 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 的循环轨形分类。我们利用这一分类来确定对应于 Tambara-Yamagami 范畴 TY($\mathbb{Z}_N$) 的、可能保超对称性的对偶缺陷，其中 $N = o(g)$ 是 g 的阶；这些是表 2 中列出的具有平衡 Frame 形状的 42 个共轭类。[1] 其中有七个共轭类——2B、3B、4B、4E、5B、6K、9C（在表中以加下划线标记）——其对应的对偶缺陷可能保留 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 中的一个四维平面，并且预计某些 K3 σ模型中也存在类似的缺陷。

2. 在第3.4节中，我们描述了 $V^{f\natural}$ 的循环轨形与怪兽月光中出现的零亏格群之间一个有趣的联系。粗略地说，当 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 与其自身 $V^{f\natural}$ 同构时，轨形理论要么保留拉蒙扇区中的费米子数（表 2），要么具有相反的符号（表5）。这两种情况下的共轭类分别对应于怪兽月光中出现的、带有或不带 Fricke 对合的零亏格群。另两种可能性，即 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 与 V^{fE_8} 同构（表4）或为反常的（表6），也对应于具有特殊意义的零亏格群类。

3. 我们明确分类并构造了 $\mathcal{N}=1$ $V^{f\natural}$ 中所有保持超对称性的对偶缺陷，它们对应于循环群 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_3$ 的 TY 范畴，并源自 Co_0 中的共轭类 2B 和 3B。这些结果分别见 §4 和 §6。结论是，两种 $\mathbb{Z}_2$ Tambara–Yamagami 范畴（TY($\mathbb{Z}_2$, $+1$) 和 TY($\mathbb{Z}_2$, -1)）对应的缺陷都存在；这些缺陷在 §4.2 中构造。此外，在 $\mathbb{Z}_3$ 情形下，我们发现四种可能的 Tambara–Yamagami 范畴中有三种存在对偶缺陷，分别为 TY($\mathbb{Z}_3$, χ_+, -1)、TY($\mathbb{Z}_3$, χ_-, $+1$) 和 TY($\mathbb{Z}_3$, χ_-, -1)；这些缺陷在 §6.3 中构造。我们通过考察相应缺陷扭曲配分函数所导出的自旋选择规则（见 §3.3），验证了所有情形下的融合范畴数据。

4. 此外，由于上一点中提到的每个 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷都保留了 Co_0中的一个四维平面，因此也保留了 $V^{f\natural}$中一份 $c=6$, $\mathcal{N}=4$ 超共形代数，根据 [1], 中提出的猜想，这些缺陷都应能在相应的 K3 非线性σ模型中实现。对于这些缺陷，我们在 $V^{f\natural}$ 中计算了相应的缺陷缠绕亏格 (2.22)。方程编号汇总见表1。因此，在所有情况下，对于具有相应 TY 融合范畴的 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷的任意 K3 非线性σ模型，我们都对其缺陷扭曲椭圆属作出了预测。这些预测大多仍有待在具体例子中验证；不过，请参见下一点。

5. 在第5节中，我们在一个特定的 K3 模型中构造了范畴 TY($\mathbb{Z}_2$, -1) 的一个显式实现。该模型是由环面轨形 $T^4/\mathcal{R}$ 得到的，其中 T^4 由四个两两正交的圆的乘积给出，其中三个圆的半径为自对偶半径 R_{sd}，另一个圆的半径为$\sqrt{2}R_{sd}$。随后，我们计算了相应的对偶缠绕亏格（见式（5.33）），并验证

[1]如 §3.2 所述，尽管对于每个共轭类，都存在（通常不止一个）对应于 TY($\mathbb{Z}_N$) 的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$，但要确定这些缺陷是否保留 $\mathcal{N}=1$超共形代数，则困难得多。我们仅能在阶 2 和阶 3 的例子中完全分类各种可能性。

其与式（4.66）一致。此缺陷存在于 K3 非线性σ模型模空间的一个 16 维子轨迹上，我们预计该轨迹上的一般点是无理的。据我们所知，这是首批具有循环 Tambara–Yamagami 范畴且对偶缺陷维数为无理数的 K3 非线性σ模型实例。

6. 在第 7 节中，我们回顾通过对母理论的（一般而言非阿贝尔）对称群 G 的子群 H 进行规范化，从而在轨道理论中构造对偶缺陷的方法。我们在 $V^{f\natural}$ 中结合 $G \cong D_8$ 和 $H \cong \mathbb{Z}_2$ 实施这一方法，显式构造了五个对偶缺陷（见表1）。它们彼此之间实现了四种可能的 Tambara–Yamagami 范畴，即 TY($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，$\chi_a$，$\pm 1$) 和 TY($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，$\chi_s$，$\pm 1$)，其自旋选择规则见表 9。在第 7.3 节中，我们为 K3 模型 $\mathcal{C}_{GTVW}$ 中的 [20], 构造了属于 TY($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，$\chi_a$，$+1$) 和 TY($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$，$\chi_s$，$+1$) 这两个范畴的对偶缺陷，并计算了相应的缺陷缠绕亏格，见式 (7.57) 和 (7.54)。它们分别与 $V^{f\natural}$ 中的缠绕亏格 (7.45) 和 (7.37) 相符，与猜想一致。

7. 超越对偶缺陷的范畴，尽管其系统性构造已有所知[2]，，但实际实现往往在技术上颇为复杂。在第 8 节中，我们构造了两个相互对易的斐波那契缺陷 W^A 和 W^B。它们在 Co_0 中通过共轭相关，并且与一组可逆缺陷的子群 2.($A_5 \times J_2$)：$2 \subset Co_0$ 对易。在方程 (8.80) 中，我们计算了 W^A 缠绕分区函数。

8. 在第 9 节中，我们讨论了 Gepner 模型中保持超对称性的拓扑缺陷线的构造，这些模型是由对角 $\mathcal{N} = 2$ 最小模型的张量积轨形化得到的。我们在 §9.2 中描述了分量最小模型中作为 Verlinde 线出现的拓扑缺陷线，要在相应的 Gepner 模型中保持谱流所需满足的条件。在 §9.3 中，我们运用这些方法，在 (3)^2(8) 和 (2)(3)(18) Gepner 模型中构造斐波那契融合范畴。这些斐波那契缺陷的缠绕椭圆亏格见方程 (9.61)，与 $V^{f\natural}$ 中的斐波那契缠绕亏格在方程 (8.80) 中完全吻合，为该猜想提供了进一步证据。在同一节中，我们还给出了 $Rep(S_3)$ 在 Gepner 模型 (4)^3, (1)^2(4)^2 和 (2)(4)(10) 中的显式实现；其缠绕缺陷函数 (9.62) 与我们在姊妹篇文章 [1]中计算的 $V^{f\natural}$ 中的 $Rep(S_3)$ 范畴的结果相符。

表1总结了本文中构造的所有非可逆拓扑缺陷线，包括$V^{f\natural}$ 和 K3 非线性σ模型中的缺陷线，以及它们对应的缺陷缠绕亏格，并列出了相关参考文献。在本文考察的所有例子中，K3 的缺陷扭曲椭圆属都与 $V^{f\natural}$ 中同一融合范畴内相应非可逆拓扑缺陷线的缠绕亏格相匹配。

最后，我们将讨论本文的研究结果，以及由这些发现自然引出的开放问题。

1. 在这项工作中，我们利用将 $V^{f\natural}$ 描述为顶点算子代数及其与其他 $c = 12$ 全纯理论的关系，对范畴 Top 中的缺陷给出明确刻画。假设猜想 6，可以预期，任何属于子范畴 Top$^{\natural}$ 的缺陷，即保持 24 维

[2]至少在只要求它们保持维拉索罗对称性的情况下如此；要确定某个对偶缺陷是否保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流，还需要采用一些临时方法。

融合范畴	$V^{f\natural}$中的缺陷	$V^{f\natural}$ 缠绕	K3 非线性σ模型	K3 缠绕
TY($\mathbb{Z}_2$, $+1$)	$\mathcal{N}_g^{(1)}$, §4.2	式（4.65）	??	
TY($\mathbb{Z}_2$, -1)	$\mathcal{N}_g^{(2)}$, §4.2	式（4.66）	$T^4/\mathbb{Z}_2$, §5.1	公式 (5.33)
TY($\mathbb{Z}_3$, χ_+, -1)	$\mathcal{N}^{(b_\pm)}$, §6.3	公式 (6.103)	??	
TY($\mathbb{Z}_3$, χ_-, $+1$)	$\mathcal{N}^{(a'_\pm)}$, §6.3	式 (6.106)	??	
TY($\mathbb{Z}_3$, χ_-, -1)	$\mathcal{N}^{(a'_0)}$, §6.3	式 (6.109)	??	
TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, χ_a, $+1$) $\cong Rep(D_8)$	$\mathcal{N}_{p_2}$, §7.2 $\mathcal{N}_{p_4}$, §7.2	式（7.39） 式（7.45）	?? GTVW, §7.3	式（7.57）
TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, χ_a, -1) $\cong Rep(Q_8)$	$\mathcal{N}_{p_5}$, §7.2	式（7.48）	??	
TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2, \chi_s, +1$) $\cong Rep(H_8)$	$\mathcal{N}_{p_1}$, §7.2	式 (7.37)	GTVW，§7.3	式(7.54)
TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, χ_s, -1)	$\mathcal{N}_{p_3}$, §7.2	式（7.41）	??	
斐波那契	W, §8.4	式（8.80）	$(3)^2(8)$, §9.3 (2)(3)(18)	公式(9.61)
$Rep(S_3)$	$\mathcal{L}_\rho$ $\mathcal{L}_\mathcal{X}$, [1]中的§5.2	公式(5.33) [1]	$(4)^3, (1)^2(4)^2$ §9.3 (2)(4)(10),	公式(9.62)

表1：结果概览。第一列列出了我们在全文中明确构造的融合范畴。对于每个范畴，第二列列出了其中包含的非可逆拓扑缺陷，并注明了对其进行明确构造的章节。第三列给出了计算 $V^{f\natural}$ 中相应缠绕亏格的公式编号。最后两列分别指出实现各个融合范畴的具体 K3 模型，以及计算该模型中相应缠绕亏格的公式编号。问号 ?? 表示我们尚未在某个 K3 模型中找到与 $V^{f\natural}$ 中相应缺陷相匹配的拓扑缺陷线。

Ramond 基态空间中某个固定 4维平面的缺陷，都应对应于某个适当 K3 非线性σ模型的范畴 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 中的缺陷。特别地，对于我们在 $V^{f\natural}$ 中明确实现的每个融合范畴（见表1），我们预言应存在一个 K3 非线性σ模型（或 K3 非线性σ模型族），实现相同的范畴，并且具有相同的缺陷扭曲椭圆属。我们能否在这一关系的 K3 一侧构造相应的例子?

如表1所示，在本文中，我们只能为部分例子识别出这样的 K3 模型，并构造出相应的范畴。本文的分析并不旨在穷尽所有情况；我们当然期待，利用目前已知的方法，还能在 K3 σ模型中发现更多拓扑缺陷线的例子。然而，这也可以被理解为在显式构造 K3 一侧缺陷时存在更大困难的证据。这并不令人意外：尽管我们已经有了若干 Conway 模的显式构造，但目前已知的、能够精确求解的 K3 模型特殊族（例如环面轨形或 Gepner 模型）只有少数几类，而拓扑缺陷可以在其中得到详细研究。除潜在的计算挑战之外，这一观察还提出了这样一个问题：在 K3 一侧寻找实现之所以困难，是否是因为满足猜想条件的缺陷的 K3 模型在 K3 模空间中十分稀少；如果确实如此，那么允许出现

非平凡范畴 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$的点在该模空间中是如何分布的。在 [16] 中，已有研究表明，可能允许非平凡范畴 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$的 K3 模型在 $K3$ 模空间 $\mathcal{M}_{K3}$中构成一个稠密但测度为零的子集。确定非平凡范畴究竟是否在所有这些点上都得以实现，还是仅在一个（可能是有限的）子集上实现，将会很有意义。以及这些点是否足以实现我们在 $V^{f\natural}$ 中能够找到的所有拓扑缺陷，包括我们在本文中构造的那些缺陷。从这个意义上说，我们可以利用猜想 6 预言存在这样的 K3 模型，其中这些拓扑缺陷确实得以实现。

2. 另一个有趣的方向，仍然与理解广义对称性在 K3 模空间中的分布有关，是针对存在于某个特定 K3 模型中的任意给定缺陷 $\mathcal{L}$，研究模空间中 $\mathcal{L}$ 实际得到保留的轨迹。换言之，人们希望分析保留给定缺陷范畴的 K3 模型的形变。与 [21], 类似，可以从一个实现了 $\mathcal{L}$的 K3 模型出发，研究哪些边缘形变会保留该缺陷；这些方向应张成n 余维的子轨迹（其中 $n \geq 1$） $\mathcal{M}_{K3}$。恰边缘算符由与 80 $\left(\frac{1}{2}, 1_2; 1_2, \frac{1}{2}\right)$ 个 NS–NS 基态场通过谱流对应的二十个 R-R 基态的超共形后裔得到，这些 R-R 基态标记为$\left(\frac{1}{4}, 0; 1_4, 0\right)$。由于我们所考虑的缺陷保留超流和谱流算符，因此，使缺陷保持不变的形变方向可以从缺陷对这二十个 R-R 基态的作用中读出。等价地，在本文及 [1, 16], 所使用的格语言中，任意缺陷都会诱导 D-膜荷格 $\Gamma^{4,20}$上的一个端同态；保留方向由该端同态的特征空间给出，其特征值等于该缺陷的量子维数；随后，保留轨迹的余维由该特征值的重数决定。

例如，第 5 节中描述的环面轨形 $T^4/\langle\mathcal{R}\rangle$ 中的 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷保留了 8 个 RR 基态场，即四个谱流算符，以及来自 $\mathcal{R}$-扭曲扇区、属于 $\left(\frac{1}{4}, 0; 1_4, 0\right)$ 表示的另外四个态。这意味着，它保留了通过谱流与后四个 RR 态相关的 $4 \cdot 4 = 16$ NSNS 恰边缘算符。因此，由这类恰边缘算符生成的所有形变都会使对偶缺陷保持拓扑性，所以在 80 维模空间中存在一个 16 维的 K3 σ模型族，其中存在这条拓扑缺陷线（TDL）。此外，由于这 16 个恰边缘算符都来自扭曲扇区，任何此类形变都会使我们离开 $T^4/\mathbb{Z}_2$ 轨形轨迹。类似的推理也适用于第 9 节讨论的 (3)(3)(8) Gepner 模型中的斐波那契缺陷。在这种情况下，除了四个谱流算符之外，$\left(\frac{1}{4}, 0; 1_4, 0\right)$ 表示中还有 8 个 RR 基态场得到保留。这意味着存在一个 $4 \cdot 8 = 32$ 维的 K3 σ模型族，其中容许此类斐波那契缺陷；我们所考察的 Gepner 模型只是这一族中的一个有理点。可以合理地预期，这一族中的一般元素是非有理的。

3. Conway 模 $V^{f\natural}$ 与 K3 σ模型之间存在一种对应关系，类似的对应关系也存在于 V^{fE_8} 与基于格 E_8的顶点算子代数 V^{E_8}的 $\mathcal{N} = 1$ 超对称化版本之间，以及存在于 $\mathcal{N} =$与定义在 T^4上的 (4, 4) 非线性 σ 模型之间。在 [22] 中，作者证明， T^4 相对于保超对称性的对称性的任何缠绕椭圆亏格——

均可由 V^{fE_8}的保超对称的带扭椭圆属重现；完整分类见 [23] 。这一对应关系与如下刻画完全一致： T^4 的离散对称群是 E_8 的偶行列式韦伊变换群的子群，且这些变换逐点固定一个秩至少为四的子格。与 $V^{f\natural}/K3$ 对应关系的情形一样，值得研究 V^{fE_8} 中的保超对称的拓扑缺陷与 T^4 σ 模型中的此类缺陷之间是否存在类似关系。此外，由于理论$V^{f\natural}$ 与 V^{fE_8} 通过保超流的循环轨形彼此关联，只要缺陷保留相应的规范化群，便可从 V^{fE_8}中的缺陷得到 $V^{f\natural}$ 中的拓扑缺陷，反之亦然。事实上，我们已验证，某些 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷，以及在 $V^{f\natural}$中确定的斐波那契缺陷，在 V^{fE_8} 中都有对应物，且具有相同的缠绕亏格。由于某些 K3 模型具有环面轨形描述，值得探究在这些情形下，其拓扑缺陷是否呈现出类似于 $V^{f\natural}$与 V^{fE_8}之间所发现的关系。

4. 拓扑缺陷 $\mathcal{L}$ 在 $V^{f\natural}$ 中可以通过标准的“倍增技巧”描述为全纯因子化共形场论 $V^{f\natural}\otimes V^{f\natural}$中的边界态，其中 $V^{f\natural}$ 是 $V^{f\natural}$的反全纯副本。换言之，可以将缺陷 $\mathcal{L}\in$ Top 解释为紧化在 $V^{f\natural}\otimes V^{f\natural}$上的 II 型超弦中的（保持 $\mathcal{N}=1$的）D膜。该弦模型中的 R-R 荷格为 $\Lambda\otimes\Lambda^*\cong$ End(Λ)，对应于 $\mathcal{L}$ 的 D 膜的荷为 $\rho(\mathcal{L})$。在这一背景下，缺陷 $\mathcal{L}$ 保持四维平面 $\Pi\subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)$这一条件对应什么？有理由推测，其中一张 D 膜上的无质量开弦态对应于该缺陷的连续形变，这表明存在一个具有相同荷 $\rho(\mathcal{L})$的 D 膜模空间。这些模空间的几何是什么？文献 [24], 研究了这类 II 型紧化，并证明时空理论具有 24，24 或 0，48 个超对称性，具体取决于 GSO 投影。时空超对称代数也可以看作一个无限维 Borcherds-Kac-Moody 超代数[25], 中的零次子代数，该超代数作用于某些 BPS 态空间上。这些 D 膜是否保留了其中任何时空超对称性？BKM 超代数是否作用于 D 膜的自由度上？

5. 虽然构造一些保留某个有理子代数的 $V^{f\natural}$ 拓扑缺陷线相当容易，但要证明 $V^{f\natural}$中的某个拓扑缺陷保留 $\mathcal{N}=1$ 超 Virasoro 代数，却是一项极具挑战性的任务。对于本文构造的每个不可逆缺陷，我们都不得不采用有时相当复杂且特设的论证，这些论证难以轻易推广到其他情形。即使已知相应的 Leech 格端同态（它决定了该缺陷对拉蒙基态的作用），情况依然如此。主要问题在于， $\mathcal{N}=1$超流 $\tau(z)$是自旋 $3/2$算符的 2048 维空间中的一个非常特殊的元素（据我们所知，目前没有简单的刻画方式）。给定一个 Leech 格端同态，是否存在一种简单且系统的方法来构造相应的、保留 $\tau(z)$的拓扑缺陷（或多个缺陷），或者排除其存在？接下来的两点或许与此有关。

6. 我们的构造意味着，在 $V^{f\natural}$ 中选定一个超流 $\tau(z)$，便确定了 Leech 格 Λ 在拉蒙基态场空间中的一个嵌入，反之亦然。然而，据我们所知，联系这两个对象的唯一方式，是通过自同构群 Aut($V^{f\natural}$) $\cong Co_0$，即 $Spin(24)$中保留 $\tau(z)$的子群；该子群与嵌入格 Λ的自同构群重合。是否存在更直接、更明确的联系？ $V^{f\natural}$ 的 NS 扇区中的自旋 $3/2$ 场空间，是基于拉蒙基态场空间 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$构造的 Clifford 代数的一个不可约模。因此，似乎有可能用由 Leech 格元素生成的“Clifford 环”来刻画 $\tau(z)$；这将有助于证明给定缺陷保留 $\mathcal{N}=1$ 超流。这些论证表明，或许存在某种特殊的 $V^{f\natural}$整形式，即将超顶点算子代数定义在整数环上，而非复数域上。其整形式定义如下。假设存在一组 $V^{f\natural}$ 的生成元，使得相对于这组生成元，所有算符乘积展开系数均为整数。那么，可以用由这些算符生成的 $\mathbb{Z}$-模 $V_{\mathbb{Z}}^{f\natural}$（实际上是一个格）替代向量空间 $V^{f\natural}$；算符乘积展开将为该模赋予定义良好的“顶点算子环”结构，并满足类似于顶点算子代数公理的公理。我们尤其关注包含$\mathcal{N}=1$ 超流 $\tau(z)$的某个倍数以及相应拉蒙基态场 Leech 格的整形式 $V_{\mathbb{Z}}^{f\natural}$。Top 中的哪些缺陷会通过端同态作用于这样的 $V_{\mathbb{Z}}^{f\natural}$？所有此类缺陷都必须具有整数值量子维数；特别是，我们预期 Aut$_\tau$($V^{f\natural}$)中的所有可逆线都包含在内。对于定义在更一般环 R上的模 $V_{\mathbb{Z}}^{f\natural}\otimes_{\mathbb{Z}} R$，也可以提出同样的问题。

7. 基于某个代数扩张 K of $\mathbb{Q}$ 中的整数环，有许多不同的 Leech 格构造。这些构造有助于定义特征值属于数域 K 的 Leech 格端同态。例如，第8节讨论的数域 $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ 中的 icosian 环，或第6节提到的 Eisenstein整数环 $\mathbb{Z}[\omega]$。能否利用 Leech 格的其他构造来定义有趣的格自同态环？能否证明存在相应的、保持 $\mathcal{N}=1$ 的拓扑缺陷融合范畴？一个颇具启发性的例子是 Craig [26]，利用环 $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{39}}]$ 构造 Leech 格。相应的数域 $K=\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{39}})$ 包含 Haagerup 融合环 [27] 的特征值。能否利用 Craig 的构造定义一个由 Leech 格自同态组成的 Haagerup 融合环？在这种情况下，是否存在与之相关的拓扑缺陷 Haagerup 融合范畴？

—　　—

8. 在第 9 节中，我们描述了 Gepner 模型中保持完整手征代数和谱流的拓扑缺陷。这一类拓扑缺陷线特别有趣，因为它对应于与时空超对称性对易的（可能不可逆的）对称性。然而，本文所作的分析并不完整。首先，我们主要关注具有 $c=6$ （K3 模型）的模型；推广到其他情形，尤其是卡拉比–丘三折叠上的 σ 模型（$c=9$），应该并不困难。最具挑战性的问题在于如何处理那些必须解析不动点的模型中的拓扑缺陷。正如第 9 节所解释的，当从 $\mathcal{N}=2$ 最小模型张量积中的 Verlinde 线诱导而来的某些拓扑缺陷，在确保 $U(1)$ 荷整性的轨形化之后，结果却并非 Gepner 模型中的简单缺陷时，就会出现这一问题。在所有这类情形中，

我们知道，Gepner 模型中由此得到的拓扑缺陷线是两个简单缺陷的叠加。我们预期能够在各种具体例子中确定这类简单缺陷的作用，但据我们所知，对这一问题进行系统处理仍是一个未解决的问题。完成这项分析并明确构造 Gepner 模型中的拓扑缺陷范畴，将为研究若干有趣问题铺平道路：研究保持某些缺陷的严格边际形变，思路可参见 [21]（另见上文第 2 点）；研究缺陷对边界态的作用，尤其是对保持某种时空超对称性的边界态的作用，从而为 [16]所作的 K3 模型分析提供新的例子并加以推广；探讨非平凡拓扑缺陷的存在与目标空间几何性质之间的关系；以及研究世界面上拓扑缺陷线的存在对时空理论所产生的影响（至少在微扰极限下）。我们希望在未来的工作中继续探讨这些问题。

符号约定

- Λ：Leech 格（24 维偶自对偶正定格，无根） [28]。
- Aut(Λ) $\cong Co_0$：阶为 $2^{22}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 23$ [29] 的 Conway 群。
- $\mathcal{L}$：共形场论（CFT）中的拓扑缺陷线（TDL）。ˆ
- $\mathcal{L}$：当共形场论定义在圆柱面 $S^1\times\mathbb{R}$ 上时，与沿 S^1 圆插入 $\mathcal{L}$ 相关联的希尔伯特态空间上的线性算子。ˆ
- $\langle\mathcal{L}\rangle$： $\mathcal{L}$ 的量子维数（定义为 $\mathcal{L}$ 的真空特征值）。
- $V^{f\natural}$：Conway 模超共形场论（NS 扇区）（见第 2.1 节）。
- $V_{tw}^{f\natural}$： $V^{f\natural}$的规范扭曲模（拉蒙扇区）。
- $V_{tw}^{f\natural}$ $(1/2)$：$V_{tw}^{f\natural}$ 中（共形权重为 $1/2$）的 24 维 Ramond 基态空间；
- ${}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}$ $(1/2)$： $V_{tw}^{f\natural}$ $(1/2)$中 CPT 自共轭算符构成的实空间。
- $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}$、 $V_{tw}^{f\natural}{}_{\mathcal{L}}$： $S^1\times\mathbb{R}$上 $V^{f\natural}$的 $\mathcal{L}$ 扭曲空间，定义为沿“时间”方向插入 $\mathcal{L}$ （分别对应 NS 扇区和拉蒙扇区）。
- τ（z）： $V^{f\natural}$的 $\mathcal{N}=1$ 超流。
- 自同构群$_\tau(V^{f\natural})$ ≅自同构群(Λ)$\cong Co_0$：保持 $V^{f\natural}$固定的（可逆）对称性群 $\tau(z)$。
- Top： $V^{f\natural}$中保持 $\tau(z)$ 且相对于费米子数具有“良好性质”的拓扑缺陷线 $\mathcal{L}$ 的张量范畴（见第 2.1 节）；Top 中的可逆线生成自同构群 $_\tau(V^{f\natural})$。
- Top$_{\Pi^\natural}$：给定四维子空间 $\Pi^\natural\subset{}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$，Top$\mathcal{L}\in$中保持 $\Pi^\natural$的线的子范畴。
- $Z^{\mathcal{L},\pm}{}_{\text{NS}}$， $Z^{\mathcal{L},\pm}{}_{\text{R}}$：沿“空间”圆插入 $\mathcal{L}$ 的环面配分函数（$\mathcal{L}$-扭绞），对应各种自旋结构的选择。
- $Z_{\mathcal{L}}^{\pm}{}_{,\text{NS}}$, $Z_{\mathcal{L}}^{\pm}{}_{,\text{R}}$：沿“时间”圆插入 $\mathcal{L}$ 的环面配分函数（$\mathcal{L}$-扭曲），对应各种自旋结构的选择。
- $\mathcal{Z}^{\mathcal{L}}(\tau)$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\tau)$: 含有分量 $(Z^{\mathcal{L},+\text{NS（纽曼-施瓦茨）}}$ $Z^{\mathcal{L},-\text{NS（纽曼-施瓦茨）}}$ $Z^{\mathcal{L},+\text{R}}$ $Z^{\mathcal{L},-\text{R}}$的向量值配分函数$)^t$以及 $(Z_{\mathcal{L}}^{+}{}_{,\text{NS（纽曼-施瓦茨）}}$ $Z_{\mathcal{L}}^{-}{}_{,\text{NS（纽曼-施瓦茨）}}$ $Z_{\mathcal{L}}^{+}{}_{,\text{R}}$ $Z_{\mathcal{L}}^{-}{}_{,\text{R}})^t$，分别。

- $TY(A,\ \chi,\ \epsilon)$：一个以阿贝尔群 A、双特征 χ 和 Frobenius-Schur 指标 ϵ 为参数的 Tambara-Yamagami 范畴（见第3节）。
- $\mathcal{C}$：K3 上的超对称非线性σ模型（NLSM）。
- $\Gamma^{4,\ 20}$：K3 非线性σ模型中的 R-R荷格（偶幺模，符号为 (4，20)）；
- Π：K3 上的非线性σ模型的 R-R扇区中由谱流算符构成的四维空间，常被视为 $\Gamma^{4,\ 20}\otimes\mathbb{R}$ 的子空间（见第 2.2 节）。
- $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$：K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$ 中保留 $\mathcal{N}=(4,\ 4)$ 超共形代数和谱流算符的拓扑缺陷线的张量范畴。
- $\phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural},\ \tau,\ z)$，$\phi^{\mathcal{L}}(\mathcal{C},\ \tau,\ z)$：分别是 $V^{f\natural}$ 和 K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{L}$-带扭椭圆属（见第 2.3 节）。

2 以往结果总结

二维共形场论通常通过一组局域算符来定义，这些算符配有满足结合律的算符乘积展开（OPE），并决定满足模不变性的关联函数。为在这一框架中纳入广义对称性，人们引入扩展算符 $\mathcal{L}_i(\gamma_i)$，称为拓扑缺陷线（TDL）；它们支撑在时空流形 Σ中的定向线 γ_i 上。只要这些线不与其他算符插入相交，对 γ_i 进行任意光滑变形，TDL 都会保持关联函数不变。由于 TDL 通常满足不可逆融合代数，因而不像普通对称性那样具有标准的群结构，而是可以自然地用张量范畴的语言来描述（关于这一主题的引言，见 [30] ）。定义这些扩展缺陷的一种具体方式，是考察它们对局域算符的作用，即规定 TDL 移过局域算符插入时关联函数如何变化。如果将线 $\mathcal{L}_i(\gamma_i)$ 移过一组局域算符（对应于全纯场 $\{T(z)\ \phi_1(z)\ \phi_2(z)\ ...\}$）后，所有关联函数都保持不变，那么就称 TDL $\mathcal{L}_i$ 保持由这些场生成的完整手征代数 $\mathcal{A}$。¯反手征代数 $\mathcal{A}$ 也有类似的说法。完整的保持代数$\mathcal{A}\times\mathcal{A}$必然包含由应力能¯张量 $T(z)$ 和 $T(\bar{z})$ 生成的维拉索罗代数 $Vir_c\times Vir_{\bar{c}}$，并且通常是非有理的。正如引言中所述，¯当 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 为有理代数时，存在一种通过对缺陷施加类 Cardy 条件来分类保持该代数的 TDL 的方法， [4]。事实上，有理代数只有有限多个不可约表示，而缺陷对相应主场的作用可由有限组复参数编码。计算迹中插入此类缺陷 $\mathcal{L}$ 后的环面配分函数，即 $\mathcal{L}$–缠绕分区函数，可得到一个依赖于这些复参数的函数。要求该函数经过模 S–变换后给出定义良好的配分函数，其所在的$\mathcal{L}$–扭曲希尔伯特空间仍分解为 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 的有限多个不可约表¯示，这会对参数空间施加离散的类格条件，而简单缺陷则对应于该格的一个适当基。

然而，由于存在无穷多个不可约表示，对于保留非有理手征代数的缺陷，并不存在这一过程的一般类比。在 [1],中，我们为 $V^{f\natural}$ 中保留非有理 $\mathcal{N}=1$超 Virasoro 代数的拓扑缺陷线提出了一种类 Cardy 构造，其中该理论的 24 个拉蒙基态发挥着有理情形下

初级态的作用。尽管这一构造无法完整确定底层的张量范畴 Top，但它使我们能够对可容许缺陷施加条件，确立它们与 Leech 格自同构群之间的对应关系，并推导出关于其量子维数的约束。

在 [16] 中，对于保留 $\mathcal{N}=(4,4)$ 超共形代数和谱流的 K3 非线性西格玛模型中的拓扑缺陷线，也得到了类似的结果。该情形下，分析没有施加类 Cardy 条件，而是利用拓扑缺陷线对理论边界态的作用，这些边界态对应于 R–R 带电 D 膜。这些 D 膜张成一个 24 维电荷格 $\Gamma^{4,20}$，其符号为 $(4,20)$，拓扑缺陷线在其上作用为端同态。在 $V^{f\natural}$ 中，与该格对应的是 Leech 格 Λ，它嵌入 Ramond 基态空间中。

本节其余部分将回顾通过实施这两种构造所获得的主要结果，并说明它们之间的相似之处如何引出一个猜想：K3 中保留 $\mathcal{N}=(4,4)$ 超共形代数和谱流的拓扑缺陷，与 $V^{f\natural}$ 中保留超对称性及 Ramond 基态空间中某个选定四维平面的缺陷之间存在对应关系。该猜想扩展了 [18] 中确立的、联系这两个理论对称性的关系。

$V^{f\natural}$中的拓扑缺陷

Conway 怪兽月光模 $V^{f\natural}$ [13, 14] 是仅有的三个全纯超共形场论（SCFT）之一，且具有 $c=12$；另外两个是 $F(24)$，即由 24 个自由手性费米子构成的理论，以及 V^{fE_8}，即基于格 E_8 的 VOA V^{E_8} 的超对称化版本。在这三者中，$V^{f\natural}$ 因其最小费米子共形权重为 $3/2$而独具特色。

对这一理论存在多种等价描述。最简单的一种是将其描述为格上 12 个手征自由玻色子的自对偶超顶点算子代数

$$D_{12}^{+}=\left\{\frac{1}{2}(x_1,x_2,...,x_{12})\in\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^{12}\,|\,x_i\equiv x_j\ \mathrm{mod}\ 2\,,\sum x_i\in 4\mathbb{Z}\right\}\tag{2.1}$$

包含 真空 V_0 和自旋量 V_s 不可约模，它们属于仿射代数 $\hat{}so(24)_1$ ：

$$V^{f\natural}=V_0\oplus V_s\,.\tag{2.2}$$

$V^{f\natural}$ 为 $\mathcal{N}=1$ 超维拉索罗 $sVir_{c=12}$提供一个不可约 NS 模，其唯一的超流 $\tau(z)$在同构于 Conway 群的有限自同构群 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$的作用下保持不变

$$Co_0\simeq \mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural}):=\left\{g\in Aut(V^{f\natural})|\,g(\tau)=\tau\right\}\subset Aut(V^{f\natural})\simeq Spin(24),\tag{2.3}$$

24 维 Leech 格的自同构群 Λ。

Ramond 扇区可以实现为 $V^{f\natural}$ 的 $(-1)^F$-扭曲模，其中费米子数对称性 $\langle(-1)^F\rangle\cong\mathbb{Z}_2\subset Aut(V^{f\natural})$ 在 V_0 上作用平凡，在 V_s 上的作用为 -1。它对应于 $\hat{}so(24)_1$ 的其余向量型和共轭旋量型不可约模：

$$V_{tw}^{f\natural}=V_v\oplus V_c\,.\tag{2.4}$$

我们将费米子数 $(-1)^F=+1$ 赋予 V_v，并将 $(-1)^F=-1$ 赋予 V_c；采用相反的赋值同样是一致的。关于 $V^{f\natural}$，其他值得注意的构造凸显了它与

$c = 12$处另外两个自对偶超顶点算子代数的联系。特别地， $V^{f\natural}$ 可以通过对F(24)进行 $\mathbb{Z}_2$ 轨形得到，其作用是反转24个权为 $1/2$的手征费米子的符号。类似地， $V^{f\natural}$ 可以实现为 V^{fE_8} 的 $\mathbb{Z}_2$ 轨形，其中对合将紧化在 E_8 上的8个自由手征玻色子及其费米超伴侣的符号翻转，同时保持 $\mathcal{N} = 1$超流不变。正如我们将在第 4.2 节中所见，这些描述对于构造 $V^{f\natural}$ 中的拓扑缺陷线特别有用，因为它们明确保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流。

在该理论中，我们考虑范畴 Top，其对象是满足以下三个性质的拓扑缺陷线 $\mathcal{L}$：

1. 对每个 $\mathcal{L} \in$Top，都关联有两个线性映射

$$\hat{\mathcal{L}} : V^{f\natural} \mapsto V^{f\natural} \qquad \hat{\mathcal{L}} : V_{tw}^{f\natural} \mapsto V_{tw}^{f\natural} \ , \tag{2.5}$$

它们与 $(-1)^F$ 以及超 Virasoro 代数的作用对易 .

2. 对每个 $\mathcal{L} \in$ Top，都关联有 $\mathcal{L}$-扭曲扇区 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}$ 和 $(-1)^F\mathcal{L}$-扭曲扇区 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}{}_{,\,tw}$，它们分别是 NS 和拉蒙 $\mathcal{N}$ =1 超 Virasoro 代数的酉表示，具有定义良好且相容的 $\mathbb{Z}_2$-分次，由 $(-1)^F$ 给出。此外， L_0 在 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}$ 和 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}{}_{,\,tw}$ 上的谱是离散的，并且每个 L_0-特征空间都是有限维的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间。

3. 对于每个缺陷 $\mathcal{L}$，我们可以定义一个向量值的 $\mathcal{L}-$ 缠绕分区函数 $\mathcal{Z}^{\mathcal{L}}(\tau) = \left(Z_{NS}^{\mathcal{L},+}, Z_{NS}^{\mathcal{L},-}, Z_{R}^{\mathcal{L},+}, Z_{R}^{\mathcal{L},-}\right)^t$，其分量为

$$Z_{NS}^{\mathcal{L},\pm} = \mathrm{Tr}_{V^{f\natural}}\left(q^{L_0-\frac{1}{2}}(\pm 1)^F\hat{\mathcal{L}}\right) \tag{2.6}$$

$$Z_{R}^{\mathcal{L},\pm} = \mathrm{Tr}_{V_{tw}^{f\natural}}\left(q^{L_0-\frac{1}{2}}(\pm 1)^F\hat{\mathcal{L}}\right) \tag{2.7}$$

以及一个向量值的 $\mathcal{L}$–扭曲分区函数 $\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(\tau) = \left(Z_{\mathcal{L},NS}^{+}, Z_{\mathcal{L},NS}^{-}, Z_{\mathcal{L},R}^{+}, Z_{\mathcal{L},R}^{-}\right)^t$，其满足

$$Z_{\mathcal{L},NS}^{\pm} = \mathrm{Tr}_{V_{\mathcal{L}}^{f\natural}}\left(q^{L_0-\frac{1}{2}}(\pm 1)^F\right) \tag{2.8}$$

$$Z_{\mathcal{L},R}^{\pm} = \mathrm{Tr}_{V_{\mathcal{L},tw}^{f\natural}}\left(q^{L_0-\frac{1}{2}}(\pm 1)^F\right) \tag{2.9}$$

它们通过模 S变换相关:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}(-1/\tau) \ = \ S\,\mathcal{Z}^{\mathcal{L}}(\tau) \tag{2.10}$$

其中 S 是全纯 $c = 12$ 超共形场论对应的 S 矩阵，即

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

根据性质 2，对于每个 $\mathcal{L} \in$ Top，扇区 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}{}_{,\,tw}$ 构成拉蒙超 Virasoro 代数 $sVir_{c=12}$ 的一个幺正表示，且具有离散 L_0 谱。由于超对称性的存在，除基态外， L_0 的每个激发能级中玻色态和费米态的数量都相等。因此，函数$Z_{\mathcal{L}}^{-}{}_{,\,R}$ 为常数且取整数值，它是一个超对称指标，用于计数扭曲希尔伯特空间中的玻色态与费米态之

间的基态数量差 $V_{\mathcal{L}}^{f\natural}{}_{,\,tw}$。此外，性质 3 意味着$\mathcal{L}$–带缠绕函数 $Z^{\mathcal{L},}{}_{R}{}^{-}$ 必定是同一个常数，因此它也取整数值：

$$Z_{\mathcal{L},R}^{-}=Z_{R}^{\mathcal{L},-}\in\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

范畴 Top 中所有可逆拓扑缺陷线均由 $\mathcal{L}_g$ 给出，对于理论的对称群 $g\in Co_0$ 中的每个元素，利用融合，对于每个缺陷 $\mathcal{L}\in$Top，都可以通过迹函数定义一组整数不变量：

$$Z_{\mathcal{L}_g\mathcal{L},R}^{-}=Z_{R}^{\mathcal{L}_g\mathcal{L},-}=Tr_{V_{tw}^{f\natural}(1/2)}\left((-1)^{F}\hat{\mathcal{L}}_g\hat{\mathcal{L}}\right)\in\mathbb{Z}\,,\qquad\forall\,g\in Co_0, \tag{2.13}$$

其中 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)\simeq\mathbb{C}^{24}$ 表示由共形权重为 $1/2$ 的 R 基态构成的 24 维希尔伯特空间。自同构群 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})\cong Co_0$ 在由 CPT 自共轭态构成的 24 维实空间$^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)\subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上的作用，将一个 Leech 晶格 $\Lambda\subset{}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 保持不变（作为集合）。对于给定的 $\mathcal{L}\in$Top，由于对所有 $g\in\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})\cong Co_0$ 而言，迹函数 (2.13) 具有整性，这意味着线性算子 $\hat{}\mathcal{L}$ 限制在 $^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上时，在 Λ上作为一个 $\mathbb{Z}$-端同态线性作用。以下定理对这一结果进行了形式化确立，该定理在 [1]的第3节中得到证明：

定理 *1.* 设 *Top* 是一个由拓扑缺陷 $\mathcal{L}$ *of* $V^{f\natural}$ 构成的张量范畴，其中包含所有可逆缺陷 $\mathcal{L}_g$，$g\in Co_0$，且所有对象 $\mathcal{L}\in$*Top* 均满足上述性质 *1*、*2* 和 *3*。那么存在 *Leech* 格 Λ 到 $^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)\subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)\cong\mathbb{C}^{24}$的嵌入 $\Lambda\hookrightarrow{}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$，使得对于每个 $\mathcal{L}\in$*Top*，$\mathbb{C}$-线性映射 $\hat{}\mathcal{L}_{|V_{tw}^{f\natural}(1/2)}:V_{tw}^{f\natural}(1/2)\to V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 都包含于 *End(*Λ*)* 中。该对应

$$\rho:\mathsf{Top}\to\mathrm{End}(\Lambda)\,, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{L}\mapsto\rho(\mathcal{L}):=\hat{\mathcal{L}}_{|V_{tw}^{f\natural}(1/2)} \tag{2.15}$$

定义了一个从格罗滕迪克环 $Gr(\mathsf{Top})$ 到$\mathrm{End}(\Lambda)$的满射、非单射环同态，并满足 $\rho(\mathcal{L}^*)=\rho(\mathcal{L})^\dagger=\rho(\mathcal{L})^t$。

该定理的主要推论包括以下两条，它们在 [1]的第3节中得到证明。

推论 2. 如果量子维数为 $\langle\mathcal{L}\rangle$ 的 $\mathcal{L}\in\mathsf{Top}$ 保留一个场 $\lambda\in\Lambda\subset{}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$，即$\hat{}$ $\hat{}$如果 $\mathcal{L}$ 通过 $\mathcal{L}|\lambda\rangle=\langle\mathcal{L}\rangle|\lambda\rangle$作用，那么必有 $\langle\mathcal{L}\rangle\in\mathbb{Z}_{\geq1}$。更一般地，如果 $\mathcal{L}$ 保留 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 中的任意一个场（不一定在 Λ中），那么量子维数 $\langle\mathcal{L}\rangle$ 必定是次数至多为24的代数整数。

推论 3. 假设$\hat{}\mathcal{L}$ 在某个 $\psi\in V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上平凡作用（即$\hat{}$ $\mathcal{L}|\psi\rangle=\langle\mathcal{L}\rangle|\psi\rangle$），且满足$\psi^\perp\cap(\Lambda\otimes\bar{\mathbb{Q}})=0$，其中 $\bar{\mathbb{Q}}$ 是 $\mathbb{Q}$的代数闭包。那么，$\mathcal{L}$ 是恒等缺陷的倍数，即 $\mathcal{L}=d\mathcal{I}$, $d\in\mathbb{N}$（特别是 $\langle\mathcal{L}\rangle=d$ 是整数）。

第一个断言直接来自同态 (2.14)，它保证线性算子 $\mathcal{L}_{|V_{tw}^{f\natural}(1/2)}$ 在格基中具有整数系数矩阵表示。因此，它们的最小多项式是整数系数的首一多项式；如果量子维数是其一个根，那么它必为代数整数。在相应特征向量与格 Λ 对齐这一特殊情形下，特征值恰好是一个整数。第二个陈述则源于这样一个事实：如果 $\hat{}\mathcal{L}$ 在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)\cong\Lambda\otimes\mathbb{C}$ 中一个足够一般的向量 ψ 上平凡作用（即仅以其量子维数为乘数），那么 $\mathcal{L}$ 本身

必与平凡缺陷成比例。ψ 一般这一假设由条件 $\psi^{\perp}\cap(\Lambda\otimes\mathbb{Q})=0$ 保证，其中 $\mathbb{Q}$ 表示 $\mathbb{Q}$ 的代数闭包。具体而言，由于 $\Lambda\otimes\overline{\mathbb{Q}}$ 是 $\Lambda\otimes\mathbb{C}$ 中相对于 $\mathbb{C}^{24}$ 上的勒贝格测度而言的一个零测可数子集，上述条件对几乎所有 ψ 都成立，因此 ψ 是一般的。

2.2 K3非线性σ模型中的拓扑缺陷

定义在 K3 [31, 32]，上以及定义在 T^4 上的非线性σ模型（NLSM），是目前已知唯一的、具有 $\mathcal{N}=(4,4)$ 超共形代数且其谱在谱流下保持不变的幺正超共形场论，参数为 $(c,\bar{c})=(6,6)$。这些模型在物理学中发挥着核心作用，它们描述了以 K3 为靶空间的微扰II型超弦的世界面动力学；在数学中也同样重要，例如，它们与某些散在单群和月光现象相关 [33, 34]。

$\mathcal{N}=4$ 超共形代数的全纯与反全纯两份副本，均由能动张量、一个 $\hat{su}(2)_1$ 流三重态以及四个超流生成。其幺正不可约表示由与表示中最高权基态相关联的数对 $\left(h,q;\tilde{h},\tilde{q}\right)$ 标记，其中 h (h) 为共形权重，q ($\tilde{q}$) 为相对于 $\hat{su}(2)_1$, 的零模 J_0^3 ($\tilde{J}_0^3$) 卡当流的特征值，该流经过归一化，使得 $q,\tilde{q}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。这些表示被组织为标准的 RR、RNS、NSR、NSNS 扇区，各扇区通过谱流变换彼此关联。

这些理论的一个特殊特征是，每个 K3 非线性σ模型都具有一个由无质量 RR 基态构成的拓扑扇区 $=\mathcal{H}_{RR,\ gr}$ 其中包含一个 $\left(\frac{1}{4}、1 2;\ 1 4,\ \frac{1}{2}\right)\mathcal{N}=(4,\ 4)$ 表示的最低权场，张成一个四维实空间 Π，以及 $20\ \left(\frac{1}{4},\ 0;\ 1 4,\ 0\right)$表示的最低权场，张成一个二十维实空间 $\mathrm{H}^{\perp}$。Π 中的四个 RR 基态场在 $SU(2)\times SU(2)$ R 对称群的双基本表示下变换。关键的是，与这些场的算符乘积展开会生成谱流变换，因此我们将这些场称为谱流生成元。

这些模型中保持 $\mathcal{N}=(4,\ 4)$ 超共形对称性的严格边际形变，张成了一个 80 维模空间

$$\mathcal{M}_{K3}=O(4,20;\mathbb{Z})\backslash O(4,20;\mathbb{R})/\left(O(4)\times O(20)\right) \tag{2.16}$$

其中，$O(4,\ 20;\ \mathbb{Z})$ 是通过自同构作用于电荷格 $\Gamma^{4,\ 20}$上的 T 对偶群；该电荷格由 RR D-膜荷构成，是一个符号为 $(4,\ 20)$ 的偶自对偶格。考虑将此格嵌入 RR 基态的 24 维实空间 $V=\Gamma^{4,\ 20}\otimes\mathbb{R}=\Pi\oplus\Pi^{\perp}\simeq\mathbb{R}^{4,\ 20}$ 中，空间 (2.16) 刻画了在 V 中选取正定四维子空间 $\Pi\simeq\mathbb{R}^{4,\ 0}$ 的各种可能方式，并对 T 对偶取商。于是，选择一个特定的 K3 模型 $\mathcal{C}\equiv\mathcal{C}_{\Pi}$，就对应于对 $\Pi\subset V$ 的一个特定选择。

给定一个 K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$，我们考虑范畴 $\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，其对象是满足以下两个性质的拓扑缺陷线 $\mathcal{L}$：

1. 它们与完整的 $\mathcal{N}=(4,\ 4)$ 超共形代数对易。2. 它们与谱流生成元对易。

文献 [16] 证明了，这两个性质意味着，对于每个缺陷 $\mathcal{L}\in\mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，相应线性算子 $\mathcal{L}$ 在 RR 基态希尔伯特空间上的限制给出

一个 $\mathbb{R}$-线性扩张，它是某个格自同态的扩张：

$$\rho \ : \ \mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3} \ \mapsto \ End\left(\Gamma^{4,20}\right) \tag{2.17}$$

它对谱流生成元的作用是平凡的，也就是说，作用等同于乘以量子维数，$^{\wedge}\ \mathcal{L}|_{\Pi} = \langle\mathcal{L}\rangle \mathrm{id}_{\Pi}$。对于一般的不可逆拓扑缺陷线 $\mathcal{L} \in \mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，映射 (2.17) 定义了一个从 $Top_{\mathcal{C}}^{K3}$ 的融合环到 $End\left(\Gamma^{4,\ 20}\right)$ 的环同态。将其限制在可逆缺陷 $\mathcal{L}_g$（其中 $g \in G_{\Pi} \simeq Aut\left(\Gamma^{4,\ 20}\right)$）上时，$G_{\Pi} \simeq \{g \in O(4,\ 20;\ \mathbb{Z}) |\ g|_{\Pi} = \mathrm{id}|_{\Pi}\} \subset Aut(\Gamma^{4,\ 20})$ 是保持 $\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{N} = (4,\ 4)$ 超代数和谱流的对称群，该映射 ρ 增强为可逆缺陷与格 $\Gamma^{4,\ 20}$ [17] 的自同构之间的同构。[16] 中借助映射 (2.17) 及性质 1 和 2 得出的关键结果与我们当前的分析尤其相关，可归纳为以下两个核心断言（对应于 [16] 中的断言 2 和 3）。

断言 4。缺陷 $\mathcal{L} \in \mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 的量子维数 $\langle\mathcal{L}\rangle$ 是一个次数至多为 *6* 的代数整数。此外，若 $\Pi \cap \Gamma^{4,20} \neq 0$，则对于所有 $\mathcal{L} \in \mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，$\langle\mathcal{L}\rangle$ 都是整数。

断言 5。对于一般的 *K3 σ*模型 $\mathcal{C}$，$\mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 中唯一的拓扑缺陷是单位元的整数倍。

$^{\wedge}$第一个断言直接源于这样一个事实：$\mathcal{L}$ 作用于 RR 基态空间 $V = \Gamma^{4,20} \otimes \mathbb{R}$ 时，在格基下具有整数系数的 24×24 矩阵表示，其最小多项式是首一的，次数为 24，且系数为整数。由于根据性质 2，量子维数 $\langle\mathcal{L}\rangle$ 是该多项式的一个根，且重数至少为 4，因此它必定是次数至多为 6 的代数整数。此外，当相应的特征向量与格 $\Gamma^{4,20}$ 中的一个向量对齐时（这在物理上对应于模型中存在使 BPS 质量最小化的 D膜构型），$\mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 中所有缺陷的量子维数都是真正的整数。第二个断言表明，对于 $\mathcal{M}_{K3}$ 中的一般 K3 非线性σ模型，范畴 $\mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 是平凡的。这推广了这样一种预期：最一般的 K3 非线性σ模型除了其 $\mathcal{N} = (4,4)$ 超共形对称性之外，不具有其他（广义）对称性。

2.3 猜想

关于 K3 非线性σ模型的理论，最初的观察 [18] 基于 $V^{f\natural}$ 它们的对称群之间的联系。具体而言，人们注意到，所有保持 $\mathcal{N} = (4,\ 4)$超共形代数和谱流的 K3 σ模型对称群，都可以实现为 $V^{f\natural}$ [17]的对称群 Conway 群Co_0的子群。该群是 Leech 格的自同构群；Leech 格是唯一一个无根的24维偶自对偶格。

对于每个 K3 非线性σ模型，相应的对称群 $G_{\Pi^{\natural}} \subset Co_0$ 在 Co_0的 **24** 表示中固定一个维数至少为 4 的子空间 $\Pi^{\natural}$。反过来，**24** 中的每个此类不变子空间 $\Pi^{\natural}$，至少定义一个对称群恰为$G_{\Pi^{\natural}}$的 K3 非线性σ模型。这种 $V^{f\natural}$ 与 K3 非线性σ模型之间的联系，不仅体现在抽象的群结构上，也体现在这些对称性对物理态的作用上。特别是，在相应的 K3 非线性σ模型中，$G_{\Pi^{\natural}}$ 的任一元素对 $1/4$ BPS 态拓扑扇区的作用（除少数例外）都能由 Co_0 中相应对称性对规范扭曲模 $V_{tw}^{f\natural}$ [18, 19]的作用精确再现。

由于 $Co_0 \subset SO(24)$以标准矢量表示作用于拉蒙基态空间 ${}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2) \simeq \mathbb{R}^{24}$，因此，固定一个四维平面 $\Pi^{\natural} \subset \mathbb{R}^{24}$的子群 $G_{\Pi^{\natural}} \subset Co_0$ 也会固定一个子代数 $so(4)_1 \simeq su(2)_1 \oplus su(2)_1 \subset so(24)_1$。这两个 $su(2)_1$ 代数是两个相互对易的 $\mathcal{N}=4$ 超共形代数副本的R对称性，其中心荷为 $c=6$；其中，由 $\tau(z)$生成的 $\mathcal{N}=1$ 超维拉索罗代数在 $c=12$ 处对角嵌入 [35]。选择两个 $su(2)_1$ 代数中的一个，即可确定该理论的分次配分函数；它是在由扭曲模 $V^{f\natural}$ 提供的拉蒙扇区上计算得到的：

$$\phi\left(V^{f\natural},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{V_{tw}^{f\natural}}\left((-1)^F q^{L_0-1/2}y^{J_0^3}\right) \tag{2.18}$$

其中 $y=e^{2\pi iz}$ 和 J_0^3 是 $su(2)_1$的 Cartan生成元。该函数精确地再现了 K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$ 的椭圆亏格 $\phi(\mathcal{C},\ \tau,\ z)$：

$$\phi\left(\mathcal{C},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{RR}\left((-1)^{F+\bar{F}} q^{L_0-1/4}\bar{q}^{\bar{L}_0-1/4}y^{J_0^3}\right) \tag{2.19}$$

它是一个在保持超对称性的边缘形变下保持不变的纯全纯函数，也是 RR 扇区中 1/4-BPS态的带符号计数。值得注意的是，对函数 (2.18) 和 (2.19) 的求值给出了相同的结果 [18]。

为了理解对称性 $G_{\Pi^{\natural}}$ 在两个理论的希尔伯特空间的这些相同扇区上的作用，可以考虑函数 (2.18) 和 (2.19) 的 g–带扭版本。特别地，对于任意 $g \in G_{\Pi^{\natural}}$，分别可以定义 g-缠绕分区函数：

$$\phi^g\left(V^{f\natural},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{V_{tw}^{f\natural}}\left(g\,(-1)^F q^{L_0-1/2}y^{J_0^3}\right) \tag{2.20}$$

在 $V^{f\natural}$中，以及 g-带扭椭圆属

$$\phi^g\left(\mathcal{C},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{RR}\left(g\,(-1)^{F+\bar{F}} q^{L_0-1/4}\bar{q}^{\bar{L}_0-1/4}y^{J_0^3}\right) \tag{2.21}$$

在 K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$ 中，其对称群为 $G_{\Pi^{\natural}}$。对于任意合适的对称性 $g \in Co_0$（它在 **24** 中固定一个四维平面 $\Pi^{\natural}$），比较这些函数，可以发现（几乎 [19]）总能得到相同的结果 [18]。尽管这些证据表明两个理论之间存在联系，但我们仍未能全面理解这种联系。

受 $V^{f\natural}$ 中拓扑缺陷性质的形式类比所启发——这些性质陈述于定理 1 以及推论2和3中；而 K3 非线性σ模型中的相应性质则见于断言4和5，并通过映射 (2.17) 的存在性得到证明——我们在 [1] 中提出了对二者关系的推广，将此前在对称群层面的关系扩展至其张量范畴层面。具体而言，对于任意缺陷 $\mathcal{L} \in \mathrm{Top}_{\Pi^{\natural}}$，其中 $\mathrm{Top}_{\Pi^{\natural}}$ 是 Top 的子范畴，由 $V^{f\natural}$ 中固定四维空间 $\Pi^{\natural} \subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 的对象构成，因此也固定相应的仿射子代数 $\hat{}so(4)_1 \subset \hat{}so(24)_1$，，可以定义广义的 $\mathcal{L}$-缠绕配分函数（或“缠绕亏格”），

$$\phi^{\mathcal{L}}\left(V^{f\natural},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{V_{tw}^{f\natural}}\left(\hat{\mathcal{L}}\,(-1)^F q^{L_0-1/2}y^{J_0^3}\right) \tag{2.22}$$

方法是取 $\mathcal{L}$ 在扭曲模 $V_{tw}^{f\natural}$ 的态上作用的迹。类似地，给定 K3 模型 $\mathcal{C}$，对于每个拓扑缺陷 $\mathcal{L} \in \mathrm{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$，都可以定义 $\mathcal{L}$-带扭椭圆亏格：

$$\phi^{\mathcal{L}}\left(\mathcal{C},\tau,z\right)=\mathrm{Tr}_{RR}\left(\hat{\mathcal{L}}\,(-1)^{F+\bar{F}} q^{L_0-1/4}\bar{q}^{\bar{L}_0-1/4}y^{J_0^3}\right). \tag{2.23}$$

人们期望这两种理论中的这些拓扑缺陷类别之间存在精确对应，这一预期被形式化为以下猜想（ [1] 中的猜想 4）。

猜想 6。 设 $\Pi^{\natural} \subset \Lambda \otimes \mathbb{R} \subset V_{tw}^{f\natural}$ 是一个维数为4 的子空间，并且$\mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}}$ 是Top的满子范畴，使得

$$Obj\left(\mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}}\right) = \left\{\mathcal{L} \in Obj(\mathsf{Top}) \,|\, \hat{\mathcal{L}}|_{\Pi^{\natural}} = \langle\mathcal{L}\rangle id_{\Pi^{\natural}}\right\}. \tag{2.24}$$

于是，存在一个定义在 *K3* 上的非线性 σ 模型 $\mathcal{C}$ ，满足：

(i) 在 $\mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}}$ 与由 $\mathcal{C}$ 保持 $\mathcal{N} = (4,\ 4)$ 和谱流的拓扑缺陷构成的范畴 $\mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$ 之间，存在张量范畴的等价 $F:\ \mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}} \longrightarrow \mathsf{Top}_{\mathcal{C}}^{K3}$;

(ii) 对于每个 $\mathcal{L} \in \mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}}$，在 $V^{f\natural}$ （式(2.22)）中计算得到的 $\mathcal{L}$-缠绕亏格 $\phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural},\ \tau,\ z)$ 与 *K3* 模型 $\mathcal{C}$ （式 (2.23) ）中的 $F(\mathcal{L})$- 缠绕亏格一致：

$$\phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural}, \tau, z) = \phi^{F(\mathcal{L})}(\mathcal{C}, \tau, z). \tag{2.25}$$

(iii) 存在希尔伯特空间的等距映射 $\varphi:\ \ V_{tw}^{f\natural}(1/2) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{RR,\ gr}^{K3}$ 使得对于每个$\mathcal{L} \in \mathsf{Top}_{\Pi^{\natural}}$

$$\varphi \circ \hat{\mathcal{L}}_{|V_{tw}^{f\natural}(1/2)} = \widehat{F(\mathcal{L})}_{|\mathcal{H}_{RR,gr}^{K3}} \circ \varphi\ . \tag{2.26}$$

在 [1], 中，我们针对 $V^{f\natural}$ 中对象具有整数值量子维数的 Top 子范畴，给出了支持这一猜想的条件性论证。在这一特殊情形下，可以证明同构 $\varphi:\ V_{tw}^{f\natural}\ (1/2) \mapsto \mathcal{H}_{RR,\ gr}^{K3}$ 的存在性，并表明所诱导的端同态 $\varphi \circ \hat{\mathcal{L}}_{|V_{tw}^{f\natural}(1/2)} \circ \varphi^{-1}$ 与特定 K3 非线性σ模型 $\mathcal{C}$ 中的拓扑缺陷建立了精确对应关系，这与该理论的已知性质一致。

这一论证只适用于某些特殊 K3 非线性σ模型的张量（子）范畴：这些范畴中仅包含量子维数为整数的缺陷，且它们在模空间中的特定点实现，并满足断言 4 中所述的几何条件 $\Pi \cap \Gamma^{4,\ 20} \neq 0$。除这些特殊情形外，关于其他 K3 模型的猜想检验仍是一个悬而未决的问题。在姊妹篇文章中，我们开始明确构造 K3 模型 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\mathrm{GTVW}}/S_3$ 中的不可逆拓扑缺陷；该模型是将 $\mathcal{C}_{\mathrm{GTVW}}$ 中引入的有理超共形场论 [20] ，按 $\mathcal{C}_{GTVW}$ 的对称群中无反常子群 $S_3 \subset \mathbb{Z}_2^8 \rtimes M_{20}$ 进行轨形化后得到的。我们还将所得结果与 Top 中的缺陷进行了比较。

更多具体实例对于检验猜想至关重要，也能为猜想两侧所定义的张量范畴中的对象之间的对应关系提供有力证据。在接下来的章节中，我们将明确构造这两种理论中的此类对象。

3 $V^{f\natural}$中的对偶缺陷与 Tambara-Yamagami 范畴

Tambara-Yamagami（TY）范畴是一种融合范畴，其简单对象由与有限群 A相关联的可逆缺陷 $\mathcal{L}_a$ ，以及单个无方向的不可逆缺陷$\mathcal{N}$（对偶缺陷） $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$构成，并满足

$$\mathcal{N}^2 = \sum_{a \in A} \mathcal{L}_a\ , \qquad \mathcal{N}\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_a\mathcal{N} = \mathcal{N}\ , \quad \forall a \in A\ . \tag{3.1}$$

特别地， $\mathcal{N}$的维数为$\sqrt{|A|}$。Tambara 和 Yamagami [36] 证明，这种融合范畴存在，当且仅当群 A 是阿贝尔群，并对所有可能的这类范畴进行了分类

对每个有限阿贝尔群 A均成立。在物理学中，尤其是在二维共形场论中，当共形场论相对于一个有限的、无反常的阿贝尔群 A为自轨形时，就会出现对偶缺陷和 TY 范畴。本节在回顾共形场论中对偶缺陷的一般性质后，将对可能保留 $V^{f\natural}$中 $\mathcal{N}=1$ 超流的循环群所对应的所有对偶缺陷进行分类。在 §3.3 中，我们回顾本文所考虑的 TY 范畴的自旋选择规则。最后，在 §3.4 中，我们描述 $V^{f\natural}$ 的循环轨形与怪兽月光中出现的零亏格群之间的关系。在接下来的章节中，我们将给出 $V^{f\natural}$中 TY($\mathbb{Z}_2$)、TY($\mathbb{Z}_3$) 和 TY($\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$) 范畴的对偶缺陷的具体例子。

3.1 TY 范畴的一般性质

设 A 是一个有限阿贝尔群；我们用加法记号表示群运算。那么，与 A 相关联的 TY 范畴由 Frobenius-Schur 指标 $\epsilon\in\{\pm1\}$ 以及一个称为双特征 χ 的对称、双线性、非退化函数 $A\times A\to U(1)$ 来确定，其性质如下：

$$\begin{aligned}\chi(a,b) &= \chi(b,a)\ ,\\ \chi(a+b,c) &= \chi(a,c)\chi(b,c)\ , \qquad \forall a,b,c\in A\ ,\\ \chi(a,b) &= 1\ ,\forall b\in A \qquad \Leftrightarrow \qquad a=0\ .\end{aligned} \tag{3.2}$$

数据 χ，ϵ 确定了该范畴的所有融合矩阵，精确到规范等价（显式公式见[36] ）；特别地，由可逆缺陷$\mathcal{L}_a$ 生成的子范畴总是非反常的。我们将相应的融合范畴记为 TY(A，χ，ϵ)；有时，如果不需要指定融合矩阵数据，我们会使用记号 TY(A)。对于同一个群 A，两个融合范畴 TY(A，χ，ϵ) 和 TY(A，χ'，ϵ') 等价，当且仅当 $\epsilon=\epsilon'$、χ 和 χ' 通过 A 的某个自同构 ϕ：$A\to A$ 相关联，即

$$\chi'(a,b)=\chi(\phi(a),\phi(b))\ , \qquad \forall a,b\in A\ . \tag{3.3}$$

在（欧几里得）二维共形场论 $\mathcal{C}$ 的背景下（我们总是假设它是幺正的，且具有唯一真空），当 A 是 $\mathcal{C}$ 的非反常对称群，并且轨形 $\mathcal{C}/A$ 与原理论同构，即 $\mathcal{C}=\mathcal{C}/A$ 时，便会出现一个拓扑缺陷的 TY(A) 范畴。在这种情况下，对偶缺陷 $\mathcal{N}$ 可以通过“半规范化”得到：也就是说，在二维空间的一半上对 $\mathcal{C}$ 按 A 进行轨形化，然后利用同构 $\mathcal{C}=\mathcal{C}/A$ 将理论映射回自身。分隔空间中这两个区域的畴壁上带有一份对偶缺陷 $\mathcal{N}$。

下面我们更明确地描述这种对偶缺陷。令 $\mathcal{H}^A$ 为由 A 固定的态／场子空间，令 $\mathcal{H}_A$ 为其正交补，也就是在 A 的非平凡不可约表示下变换的场所构成的空间。注意，空间 $\mathcal{H}^A$ 在球面上的算符乘积展开下是封闭的。融合关系 (3.1) 表明，算符 $\hat{\mathcal{N}}$ 在 $\mathcal{H}_A$ 上为零，而 $\frac{1}{\sqrt{|A|}}\hat{\mathcal{N}}$ 在 $\mathcal{H}^A$ 上的作用是一个对合

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}}\hat{\mathcal{N}}:\mathcal{H}^A\to\mathcal{H}^A\ , \qquad (\frac{1}{\sqrt{|A|}}\hat{\mathcal{N}})^2=\mathrm{id}_{\mathcal{H}^A}\ , \tag{3.4}$$

满足算符乘积展开。当共形场论 $\mathcal{C}$ 是全纯顶点算子代数或超顶点算子代数 V时，这意味着 $\frac{1}{\sqrt{|A|}}\hat{\mathcal{N}}$ 是固定子 VOA V^A的一个阶 2 自同构。

一般而言，如果共形场论 $\mathcal{C}$ 具有一个无反常有限群 A作为对称性，那么轨形共形场论 $\mathcal{C}/A$ 具有一个拓扑缺陷融合范畴（即 A的威尔逊线），该范畴与有限群 A [7, 9]的有限维表示范畴 $Rep(A)$同构。在此范畴中，单位元是平凡表示，简单对象 $\mathcal{L}_R$ 对应于不可约表示 $R \in Irr(A)$，表示 R 的对偶是共轭表示 R^*，且表示 R 可逆当且仅当它是一维的。此外，对 $\mathcal{C}/A$ 取关于此威尔逊线范畴的广义轨形，可得到原理论 $\mathcal{C}$。当群 A 为阿贝尔群时，所有不可约表示都是一维的（即它们是特征标 $A \to U(1)$），因此范畴 $Rep(A)$由可逆缺陷生成，并且相对于张量积具有群结构。其底层群 $\hat{A} := Hom(A, U(1))$称为 A 的庞特里亚金对偶，并且总是（非典范地）与阿贝尔群 A同构。选择一个同构

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\cong} \hat{A} \\ a &\mapsto R_a \end{aligned} \tag{3.5}$$

等价于选择一个非退化对称双线性形式 $\chi: A \times A \to U(1)$，如上所述。事实上，给定这样的 χ，可以为每个 $a \in A$关联一个一维表示 $R_a: A \to U(1)$，其定义为 $b \mapsto R_a(b) = \chi(a, b)$。

回忆一下，具有（有限、阿贝尔、无反常）对称群 A 的共形场论 $\mathcal{C}$ 可以分解为

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \oplus_{R \in Irr(A)} \mathcal{H}_R \ , \tag{3.6}$$

其中，$\mathcal{H}_R$ 由在 A的不可约表示 R 下变换的场生成。另一方面，轨形理论 $\mathcal{C}/A$ 分解为

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}/A} = \oplus_{a \in A} \mathcal{H}_a \ , \tag{3.7}$$

其中，$\mathcal{H}_a$ 是 a扭曲扇区中 A 不变场的空间。这两个理论共享公共子空间 $\mathcal{H}^A \equiv \mathcal{H}_{R=1} \equiv \mathcal{H}_{a=0}$，它是未扭曲的 A不变场的空间。此外，对于每个 $a \in A$ 以及每个 $R \in Irr(A)$，空间 $\mathcal{H}_R$ 和 $\mathcal{H}_a$ 都是 $\mathcal{H}^A$的模，其中将其视为关于算符乘积展开的代数。

当群 A 存在对偶缺陷时，有一个同构

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}/A \tag{3.8}$$

在此条件下，每个 $\mathcal{H}_R \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ 都映射到 $\mathcal{H}_a \subseteq \mathcal{H}_{\mathcal{C}/A}$。由（3.8）诱导的 $\mathcal{H}^A$-模之间的对应关系，建立了 A 与其 Pontryagin 对偶 $\hat{A} = Irr(A)$ 之间的群同构（3.5）。与同构（3.5）相关联的形式 χ 确定了 Tambara-Yamagami 范畴 TY(A, χ, ϵ) 的部分融合矩阵，其中 $\mathcal{N}$属于该范畴。特别地，当该范畴中的对偶缺陷 $\mathcal{N}$ 穿过一个场 $\phi \in \mathcal{H}_{R_a}$时，它会将其映射为相应的 a-扭曲场 $\mathcal{H}_a$，该场附着于由同构（3.8）确定的缺陷线 $\mathcal{L}_a$。另一方面，当 $\mathcal{N}$ 穿过 A-不变子空间 $\mathcal{H}^A$中的一个场 ϕ 时，它会将其映射为 $\frac{1}{\sqrt{|A|}} \hat{\mathcal{N}}(\phi)$。$\mathcal{N}$两侧算符乘积展开的一致性意味着，（3.4）必须是 $\mathcal{H}^A$ 的一个自同构，并将每个 $\mathcal{H}^A$-模 $\mathcal{H}_{R_a}$ 与 $\mathcal{H}^A$-模 $\mathcal{H}_a$互换。反过来，任何这样一个将 $\mathcal{H}_{R_a}$ 与

$\mathcal{H}_a$，都定义了一个对偶缺陷 $\mathcal{N}$，它将群 A 扩张为 Tambara-Yamagami 范畴 TY（A，χ，ϵ）。这一论证为显式确定对偶缺陷 $\mathcal{N}$提供了一种非常有效的方法。仅 $\epsilon \in \{\pm 1\}$ 取值不同的 TY 范畴，可以通过改变融合矩阵的符号相互关联；在这些矩阵中，四个 “ 外部 ” 缺陷全都是对偶缺陷。此外，还可以通过以下事实识别这一点：在球面上于恒等算符（真空）周围插入一条带有对偶缺陷$\mathcal{N}$ 的圆，会使关联函数乘以因子 $\epsilon\langle\mathcal{N}\rangle = \epsilon\sqrt{|A|}$。

—

$V^{f\natural}$中的对偶缺陷

现在，让我们将前面对 TY 范畴的一般讨论具体应用于共形场论为全纯超顶点算子代数 $V^{f\natural}$ 的情形。我们希望了解哪些 TY 范畴 TY(A，χ，ϵ) 能作为 Top 中的子范畴出现，也就是说，其中所有缺陷都保持超流，并且对于费米子数而言表现“良好”。显然，这种 TY(A，χ，ϵ) 中的群 A 必须是自同构群 Aut$_\tau$($V^{f\natural}$) 的无反常阿贝尔子群，因此可能性只有有限种。

本节对对应于 TY 范畴 TY($\mathbb{Z}_N$，χ，ϵ) 的、保持 $\mathcal{N} = 1$ 的潜在对偶缺陷进行分类，其中 $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_N$ 是满足 $g \in Co_0$ 的循环子群。如果存在对偶缺陷 $\mathcal{N}_A$，那么 g 必须无反常，且轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 必须与 $V^{f\natural}$ 同构。哪些 Co_0 中的共轭类会产生无反常对称性，众所周知（例如参见 [37]）。对于这类共轭类，轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 是一个一致的全纯超顶点算子代数，具有 $c = 12$ 和一个特殊的超流；后者继承自母理论中的超流 $\mathcal{N} = 1$。

在 $c = 12$ 处有三种不同的全纯超共形场论：$V^{f\natural}$、V^{fE_8}，以及含有 24 个自由费米子的理论 F(24)。在后一种情况下，超流有 8 种不等价的选择。[38] 证明了，对 F(24) 施加一个保持某种超流选择的循环群轨形化后，所得理论不可能是 $V^{f\natural}$。反过来，这意味着任何一致的轨形化 $V^{f\natural}/A$，只要 $A \cong \mathbb{Z}_N$ 保持了 $\tau(z)$，就必定是 V^{fE_8} 或其自身。这两种可能性可以通过计算该轨形理论在完全周期边界条件下的环面配分函数（Witten指标）来区分。这个结果实际上只是一个数：对于 $V^{f\natural}$，它等于 ± 24（对应于扭曲模 $V_{tw}^{f\natural}$ 中的 24 个基态）；对于 V^{fE_8}，则等于 $0 = 8 - 8$。± 24 中的符号区分了拉蒙扇区 $V_{tw}^{f\natural}$ 中费米子数定义的两种不等价选择。

轨形 Witten 指数可直接根据 g 的框架形状计算。框架形状提供了一种形式化方式，用来编码特征多项式的信息，从而编码 g 在 $Co_0 \subset O(24, \mathbb{R})$ 中的共轭类。特别地，若 $g \in O(24, \mathbb{R})$ 是一个阶为 N 的元素，且存在 $\mathbb{R}^{24}$ 的一个合适基，使得 g 的矩阵表示具有有理系数，那么特征多项式可以唯一地分解为

$$p(\lambda) = \det(\lambda - g) = \prod_{k|N} (1 - \lambda^k)^{l_k} \tag{3.9}$$

其中整数 l_k 通常可以为负数。这些数据可以方便地编码在由形式符号定义的框架形状 [39]，中：

$$\pi_g \equiv \prod_{k|N} k^{l_k}. \tag{3.10}$$

根据框架形状，可以轻松确定 g 在 24 维表示中的特征值集合。由于这 24 个特征值总是成复共轭对出现，我们可以将它们参数化为 $\left\{e^{-2\pi i\beta_{g,1}}, e^{2\pi i\beta_{g,1}}, \ldots, e^{-2\pi i\beta_{g,12}}, e^{2\pi i\beta_{g,12}}\right\}$，其中 $0 \leq \beta_{g,\,i} \leq \frac{1}{2}$。与 Co_0 相关联的 167 个共轭类对应的 160 种不同框架形状，最早由 [40] 计算得出。

对于每个共轭类 $[g]$，其框架形状为 π_g，我们定义 Dedekind eta函数的乘积

$$\eta_g(\tau) := \prod_{k|N} \eta(k\tau)^{l_k} \tag{3.11}$$

以及特征值因子的乘积

$$\mathcal{C}_g := \mathrm{Tr}_{R_{spin}}(g) = \pm \prod_{i=1}^{12} \left(e^{\pi i\beta_{g,i}} - e^{-\pi i\beta_{g,i}}\right) \ , \tag{3.12}$$

其中 $R_{spin} = \mathbf{1} + \mathbf{276} + \mathbf{1771} + \mathbf{24} + \mathbf{2024}$ 是 $Co_0 \subset Spin(24)$ 的 $2^{12} = 4096$ 维自旋表示。[3] 我们用 $\mathcal{C}_{-g}$ 和 π_{-g} 表示与 $-g \in SO(24)$ 相关的类似迹。给定这些数据，现在我们可以对所有 $g \in Co_0$确定 $\mathcal{Z}^g$ 的一般公式，其形式为

$$Z^{g,\pm}_{\mathrm{NS}}(V^{f\natural}, \tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_g(\tau/2)}{\eta_g(\tau)} + \frac{\eta_{-g}(\tau/2)}{\eta_{-g}(\tau)} \pm \mathcal{C}_g\eta_g(\tau) \pm \mathcal{C}_{-g}\eta_{-g}(\tau)\right) \tag{3.13}$$

$$Z^{g,\pm}_{\mathrm{R}}(V^{f\natural}, \tau) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\eta_g(\tau/2)}{\eta_g(\tau)} + \frac{\eta_{-g}(\tau/2)}{\eta_{-g}(\tau)} \mp \mathcal{C}_g\eta_g(\tau) \pm \mathcal{C}_{-g}\eta_{-g}(\tau)\right). \tag{3.14}$$

注意，(3.13) 在框架形状 π_g 与其对偶框架形状 π_{-g}互换时保持对称，这表明只有 $Co_0/\mathbb{Z}_2 = Co_1$ 忠实地作用于 $V^{f\natural}$。特别地，g缠绕的 Witten 指标是一个常数（尤其是模不变的）

$$Z^{g,-}_{\mathrm{R}}(V^{f\natural}, \tau) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{24}}(g) = l_1 \ , \tag{3.15}$$

其中 l_1 是框架形状 $\pi_g = \prod_{k|N} k^{l_k}$中 $k = 1$ 的重数。

当 g 是阶为 N、框架形状为 $\pi_g = \prod_{k|N} k^{l_k}$的非反常对称时，轨形理论 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 的 Witten 指标可通过 [37, 41]计算

$$\begin{aligned} Z^{-}_{\mathrm{R}}(V^{f\natural}/\langle g\rangle, \tau) &= \frac{1}{N}\sum_{i,j=0}^{N-1} Z^{g^j,-}_{g^i,\mathrm{R}}(V^{f\natural}, \tau) = \frac{1}{N}\sum_{i,j=0}^{N-1} \mathrm{Tr}_{\mathbf{24}}(g^{\gcd(i,j,N)}) = \sum_{d|N} \frac{J_2(N/d)}{N}\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{24}}(g^d) \\ &= \sum_{d|N} \frac{J_2(N/d)}{N} \sum_{k|d} kl_k = \sum_{k|N} kl_k \sum_{r|\frac{N}{k}} \frac{J_2(N/(rk))}{N} = \sum_{k|N} l_k \frac{N}{k} \ , \end{aligned} \tag{3.16}$$

其中，$J_2(n)$是Jordan欧拉函数，用于计数满足$1 \leq i,\ j \leq n$ 且满足 $\gcd(i,\ j,\ n) = 1$的整数对 $(i,\ j)$ 的数量。在这一推导中，我们用到了这样一个事实：g^i-扭曲g^j-缠绕的 $Z^{g^j,\ g^i}_{-,\ \mathrm{R}}$ 经模变换后与（未扭曲的）g^d-缠绕的 $Z^{g^d,\ -}_{\mathrm{R}}$相关，其中 $d = \gcd(i,\ j,\ N)$，因此根据（3.15），它等于 $\mathrm{Tr}_{\mathbf{24}}(g^d) = \sum_{k|d} kl_k$；此外，我们还用到了恒等式 $\sum_{r|n} J_2(r) = n^2$。

Co_0	1A	2B	6A	3B	4B	4E	10A	5B
Co_1	1A	2A	3A	3B	4A	4C	5A	5B
π_g	1^{24}	$1^8 2^8$	$\frac{1^{12}6^{12}}{2^{12}3^{12}}$	$1^6 3^6$	$\frac{1^8 4^8}{2^8}$	$1^4 2^2 4^4$	$\frac{1^6 10^6}{2^6 5^6}$	$1^4 5^4$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	24	8	12	6	8	4	6	4
$\mathbb{M}$	1A	2A	6B	3A	4A	4A	10D	5A
Γ	$1+$	$2+$	$6+6$	$3+$	$4+$	$4+$	$10+10$	$5+$

Co_0	6K	14A	7B	8D	8G	18A	9C	11A
Co_1	6E	7A	7B	8C	8E	9A	9C	11A
π_g	$1^2 2^2 3^2 6^2$	$\frac{1^4 14^4}{2^4 7^4}$	$1^3 7^3$	$\frac{1^4 8^4}{2^2 4^2}$	$1^2 2.4.8^2$	$\frac{1^3 18^3}{2^3 9^3}$	$\frac{1^3 9^3}{3^2}$	$1^2 11^2$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	2	4	3	4	2	3	3	2
$\mathbb{M}$	6A	14C	7A	8A	8A	18E	9A	11A
Γ	$6+$	$14+14$	$7+$	$8+$	$8+$	$18+18$	$9+$	$11+$

Co_0	12D	12I	12Q	26A	14C	15A	30B	15D
Co_1	12A	12E	12K	13A	14B	15A	15B	15D
π_g	$\frac{1^4 12^4}{3^4 4^4}$	$\frac{1^2 3^2 4^2 12^2}{2^2 6^2}$	$\frac{1^3 12^3}{2.3.4.6}$	$\frac{1^2 26^2}{2^2 3^2}$	1.2.7.14	$\frac{1^3 15^3}{3^3 5^3}$	$\frac{1^2 5^2 6^2 30^2}{2^2 3^2 10^2 15^2}$	1.3.5.15
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	4	2	3	2	1	3	2	1
$\mathbb{M}$	12H	12A	12H	26B	14A	15C	30D	15A
Γ	$12+12$	$12+$	$12+12$	$26+26$	$14+$	$15+15$	$30+5$,6、30	$15+$

Co_0	15E	16B	20D	20G	21A	42B	23AB	24E
Co_1	15E	16B	20A	20C	21A	21B	23AB	24B
π_g	$\frac{1^2 15^2}{3.5}$	$\frac{1^2 16^2}{2.8}$	$\frac{1^2 20^2}{4^2 5^2}$	$\frac{1.2.10.20}{4.5}$	$\frac{1^2 21^2}{3^2 7^2}$	$\frac{1_{\circ}\, 3_{\circ}\, 14_{\circ}\, 42}{2.6.7.21}$	1.23	$\frac{1_{2}4.6.24_{2}}{2.3^2 8^2 12}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	2	2	2	1	2	1	1	2
$\mathbb{M}$	15C	16C	20F	20F	21D	42D	23A	24I
Γ	$15+15$	$16+$	$20+20$	$20+20$	$21+21$	$42+3,\ 14,\ 42$	$23+$	$24+24$

Co_0	24J	28B	30F	66A	35A	36B	39AB	60C
Co_1	24F	28A	30A	33A	35A	36A	39AB	60A
π_g	$\frac{1.4.6.24}{3.8}$	$\frac{1_{\circ}\, 4_{\circ}\, 7_{\circ}\, 28}{2.14}$	$\frac{1_{\circ}\, 2_{\circ}\, 15_{\circ}\, 30}{3.5.6.10}$	$\frac{1.6.11.66}{2.3.22.33}$	$\frac{1.35}{5.7}$	$\frac{1.36}{4.9}$	$\frac{1.39}{3.13}$	$\frac{1_{\circ}\, 4_{\circ}\, 6_{\circ}\, 10_{\circ}\, 15_{\circ}\, 60}{2.3.5.12.20.30}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathbb{M}$	24I	28B	30F	66B	35B	36D	39CD	60C
Γ	$24+24$	$28+$	$30+2, 15, 30$	$66+6$,11, 66	$35+35$	$36+36$	$39+39$	$60+4$,15, 60

表 2：使 $V^{f\natural}$ 成为自轨形的 42 个共轭类，对应于 40 种不同的框架形状（39A、39B 和 23A、23B 这两对具有相同的框架形状）。所有框架形状均为平衡的，且所有共轭类的 $\mathrm{Tr}_{24}\, g$ 均为正。所有这些类都对应于包含 Fricke 对合的亏格为零群（见 §3.4）。最后，有 7 个非平凡类 2B、3B、4B、4E、5B、6K、9C（以下划线标记），其对应的对偶缺陷可能保留 $V^{f\natural}_{tw}(1/2)$ 的一个四维子空间，因此可能与 K3 σ模型中的对偶缺陷有关。

Co_0	6H	6I	10G	10H	12L	12O	18F	18I	30H	30J
Co_1	6C	6D	10D	10E	12H	12I	18B	18C	30D	30E
π_g	$\frac{1^4 2.6^5}{3^4}$	$\frac{1^5 3.6^4}{2^4}$	$\frac{1^2 2.10^3}{5^2}$	$\frac{1^3 5.10^2}{2^2}$	$\frac{1,\ 2^2 3,\ 12^2}{4^2}$	$\frac{1^2 4.6^2 12}{3^2}$	$\frac{1^2 9.18}{2.3}$	$\frac{1.2.18^2}{6.9}$	$\frac{1.6.10.15}{3.5}$	$\frac{2.3.5.30}{6.10}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	4	5	2	3	1	2	2	1	1	0

表3：具有不平衡 Frame 形状的10个共轭类，在这些共轭类下， $V^{f\natural}$ 是自轨形，但不存在对偶缺陷 $\mathcal{N}$。它们构成五对阶相同的共轭类，其框架形状π_g，$\pi_{g'}$ 由 (3.17) 关联。所有这些类的 $\mathrm{Tr}_{24}\, g$均为正。没有一个类满足关系式 (3.27)，因此，我们无法将其中任何一个类与 $\mathbb{M}$ 上的某个类 $[g']$ 及一个亏格为零群 Γ 相关联。

Co_0	2C	3C	6C	4D	4F	5C	10C	6F
Co_1	2A	3C	3C	4B	4C	5C	5C	6A
π_g	$\frac{2^{16}}{1^8}$	$\frac{3^9}{1^3}$	$\frac{1^3 6^9}{2^3 3^9}$	$\frac{4^8}{2^4}$	$\frac{2^6 4^4}{1^4}$	$\frac{5^5}{1}$	$\frac{1.10^5}{2.5^5}$	$\frac{1^4 6^8}{2^8 3^4}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-8	-3	3	0	-4	-1	1	4
$\mathbb{M}$	2B	3B	6E	4C	4C	5B	10E	6E
$\Gamma_{g'}$	$2-$	$3-$	$6-$	$4-$	$4-$	$5-$	$10-$	$6-$

Co_0	6G	6L	6M	6N	8F	8H	9B	18B
Co_1	6C	6E	6F	6F	8D	8E	9B	9B
π_g	$\frac{2^5 3^4 6}{1^4}$	$\frac{2^4 6^4}{1^2 3^2}$	$\frac{3^3 6^3}{1.2}$	$\frac{1.6^6}{2^2 3^3}$	$\frac{8^4}{4^2}$	$\frac{2^3 4.8^2}{1^2}$	$\frac{9^3}{3}$	$\frac{3.18^3}{6.9^3}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-4	-2	-1	1	0	-2	0	0
$\mathbb{M}$	$\times$	6C	6D	6E	8D	8E	9B	18D
$\Gamma_{g'}$	$\times$	$6+3$	$6+2$	$6-$	$8\vert 2-$	$8-$	$9-$	$18-$

Co_0	10E	10F	12E	12G	12H	12K	12M	12N
Co_1	10A	10D	12B	12D	12D	12G	12H	12I
π_g	$\frac{1^2 10^4}{2^4 5^2}$	$\frac{2^3 5^2 10}{1^2}$	$\frac{2^2 12^4}{4^4 6^2}$	$\frac{2.3^3 12^3}{1.4.6^3}$	$\frac{1.12^3}{3^3 4}$	$\frac{4^2 12^2}{2.6}$	$\frac{2^3 6.12^2}{1.3.4^2}$	$\frac{2^2 3^2 4.12}{1^2}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	2	-2	0	-1	1	0	-1	-2
$\mathbb{M}$	10E	$\times$	12I	12B	12I	12E	12I	$\times$
$\Gamma_{g'}$	$10-$	$\times$	$12-$	$12+4$	$12-$	$12+3$	$12-$	$\times$

Co_0	14D	18E	18H	20F	24I	30G	30I	30K
Co_1	14B	18A	18C	20C	24F	30A	30D	30E
π_g	$\frac{2^2 14^2}{1.7}$	$\frac{1.18^2}{2^2 9}$	$\frac{2^2 9.18}{1.6}$	$\frac{2^2 5.20}{1.4}$	$\frac{2.3.4.24}{1.8}$	$\frac{2^2 3.5.30^2}{1.6^2 10^2 15}$	$\frac{2.3.5.30}{1.15}$	$\frac{2.30}{3.5}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0
$\mathbb{M}$	14B	18D	$\times$	20C	24C	30G	$\times$	30G
$\Gamma_{g'}$	$14+7$	$18-$	$\times$	$20+4$	$24+8$	$30+15$	$\times$	$30+15$

表4：使 $V^{f\natural}$ 的轨形得到 V^{fE_8} 的 32 个共轭类。请注意，这些框架形状均不平衡。此外，除5个类外，其余类都满足 §3.4 中所述与怪兽群共轭类的关系，并对应非 Fricke 零亏格群。

Co_0	2A	3A	6B	4C	5A	10B	6E	6J
Co_1	1A	3A	3B	4A	5A	5B	6A	6D
π_g	$\frac{2^{24}}{1^{24}}$	$\frac{3^{12}}{1^{12}}$	$\frac{2^6 6^6}{1^6 3^6}$	$\frac{4^8}{1^8}$	$\frac{5^6}{1^6}$	$\frac{2^4 10^4}{1^4 5^4}$	$\frac{3^4 6^4}{1^4 2^4}$	$\frac{2.6^5}{1^5 3}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-24	-12	-6	-8	-6	-4	-4	-5
$\mathbb{M}$	2B	3B	6C	4C	5B	10B	6D	6E
$\Gamma_{g'}$	$2-$	$3-$	$6+3$	$4-$	$5-$	$10+5$	$6+2$	$6-$
Co_0	7A	14B	8E	9A	18C	10D	10I	22A
Co_1	7A	7B	8C	9A	9C	10A	10E	11A
π_g	$\frac{7^4}{1^4}$	$\frac{2^3 14^3}{1^3 7^3}$	$\frac{2^2 8^4}{1^4 4^2}$	$\frac{9^3}{1^3}$	$\frac{2^3 3^2 18^3}{1^3 6^2 9^3}$	$\frac{5^2 10^2}{1^2 2^2}$	$\frac{2.10^3}{1^3 5}$	$\frac{2^2 22^2}{1^2 11^2}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-4	-3	-4	-3	-3	-2	-3	-2
$\mathbb{M}$	7B	14B	8E	9B	18C	10C	10E	22B
$\Gamma_{g'}$	$7-$	$14+7$	$8-$	$9-$	$18+9$	$10+2$	$10-$	$22+11$
Co_0	12C	12J	12R	13A	30A	15B	30D	30E
Co_1	12A	12E	12K	13A	15A	15B	15D	15E
π_g	$\frac{2^4 3^4 12^4}{1^4 4^4 6^4}$	$\frac{4^2 12^2}{1^2 3^2}$	$\frac{2^2 3.12^3}{1^3 4.6^2}$	$\frac{13^2}{1^2}$	$\frac{2^3 3^3 5^3 30^3}{1^3 6^3 10^3 15^3}$	$\frac{3^2 15^2}{1^2 5^2}$	$\frac{2_\circ\, 6_\circ\, 10_\circ\, 30}{1.3.5.15}$	$\frac{2^2 3.5.30^2}{1^2 6.10.15^2}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-4	-2	-3	-2	-3	-2	-1	-2
$\mathbb{M}$	12B	12E	12I	13B	30A	15B	30C	30G
$\Gamma_{g'}$	$12+4$	$12+3$	$12-$	$13-$	$30+6, 10, 15$	$15+5$	$30+3, 5, 15$	$30+15$
Co_0	16C	18D	18G	20C	42A	21B	46AB	24D
Co_1	16B	18A	18B	20A	21A	21B	23AB	24B
π_g	$\frac{2.16^2}{1^2 8}$	$\frac{9.18}{1.2}$	$\frac{2.3.18^2}{1^2 6.9}$	$\frac{2^2 5^2 20^2}{1^2 4^2 10^2}$	$\frac{2^2 3^2 7^2 42^2}{1^2 6^2 14^2 21^2}$	$\frac{7.21}{1.3}$	$\frac{2.46}{1.23}$	$\frac{2.3^2 4.24^2}{1^2 6.8^2 12}$
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-2	-1	-2	-2	-2	-1	-1	-2
$\mathbb{M}$	16B	18A	18D	20C	42B	21B	46AB	24C
$\Gamma_{g'}$	$16-$	$18+2$	$18-$	$20+4$	$42+6,\ 14,\ 21$	$21+3$	$46+23$	$24+8$
Co_0	28C	33A	70A	36A	78AB	60D		
Co_1	28A	33A	35A	36A	39AB	60A		
π_g	$\frac{4.28}{1.7}$	$\frac{3.33}{1.11}$	$\frac{2.5.7.70}{1.10.14.35}$	$\frac{2.9.36}{1_\circ\, 4_\circ\, 18}$	$\frac{2.3.13.78}{1.6.26.39}$	$\frac{3.4.5.60}{1.12.15.20}$		
$\mathrm{Tr}_{24}\, g$	-1	-1	-1	-1	-1	-1		
$\mathbb{M}$	28C	33A	70B	36B	78BC	60D		
$\Gamma_{g'}$	$28+7$	$33+11$	$70+10,\ 14,\ 35$	$36+4$	$78+6,\ 26,\ 39$	$60+12,\ 15,\ 20$		

表5：与38种不同框架形状相关的40个共轭类；在这些框架形状下，$V^{f\natural}$ 的轨形仍为 $V^{f\natural}$，但 Ramond 扇区中的费米子数相反。请注意，这些恰好是框架形状平衡且 $\mathrm{Tr}_{24}\, g$ 为负的共轭类。对应的38个亏格为零群，恰好是 $\Gamma_0(N)$ 型的群，它们由 Atkin-Lehner 对合扩张，但不含 Fricke 对合（见 §3.4）。

Co_0	4A	2D	3D	6D	4G	8A	4H	12A
Co_1	2B	2C	3D	3D	4D	4E	4F	6B
π_g	$\frac{4^{12}}{2^{12}}$	2^{12}	3^8	$\frac{6^8}{3^8}$	$2^4 4^4$	$\frac{8^6}{4^6}$	4^6	$\frac{2^6 12^6}{4^6 6^6}$
$\mathbb{M}$	4D	4A	3C	6F	4B	8F	8B	12F
$\Gamma_{g'}$	$4\|2-$	$4+$	$3\|3$	$6\|3-$	$4\|2+$	$8\|4-$	$8\|2+$	$12\|2+6$

Co_0	6O	12B	6P	8B	8C	8I	20A	20B
Co_1	6G	6H	6I	8A	8B	8F	10B	10C
π_g	$2^3 6^3$	$\frac{12^4}{6^4}$	6^4	$\frac{8^4}{2^4}$	$\frac{2^4 8^4}{4^4}$	$4^2 8^2$	$\frac{2^3 20^3}{4^3 10^3}$	$\frac{4^2 20^2}{2^2 10^2}$
$\mathbb{M}$	12A	12J	12D	8D	8B	8C	20E	20D
$\Gamma_{g'}$	$12+$	$12\|6-$	$12\|3+$	$8\|2-$	$8\|2+$	$8\|4+$	$20\|2+10$	$20\|2+5$

Co_0	10J	12F	24A	12P	24B	12S	28A	15C
Co_1	10F	12C	12F	12J	12L	12M	14A	15C
π_g	$2^2 10^2$	$\frac{6^2 12^2}{2^2 4^2}$	$\frac{4^3 24^3}{8^3 12^3}$	2.4.6.12	$\frac{24^2}{12^2}$	12^2	$\frac{2^2 28^2}{4^2 14^2}$	$\frac{15^2}{3^2}$
$\mathbb{M}$	20A	12G	24F	12C	24J	24B	28D	15D
$\Gamma_{g'}$	$20+$	$12\|2+2$	$24\|4+6$	$12\|2+$	$24\|12-$	$24\|6+$	$28\|2+14$	$15\|3-$

Co_0	30C	16A	20E	21C	42C	22BC	24C	24F
Co_1	15C	16A	20B	21C	21C	22A	24A	24C
π_g	$\frac{3^2 30^2}{6^2 15^2}$	$\frac{2^2 16^2}{4.8}$	4.20	3.21	$\frac{6.42}{3.21}$	2.22	$\frac{2^2 24^2}{6^2 8^2}$	$\frac{8.24}{2.6}$
$\mathbb{M}$	30E	16A	40B	21C	42C	44AB	24H	24D
$\Gamma_{g'}$	$30\|3+10$	$16\|2+$	$40\|2+$	$21\|3+$	$42\|3+7$	$44+$	$24\|2+12$	$24\|2+3$

Co_0	24G	24H	52A	56AB	60A	60B	40AB	84A
Co_1	24D	24E	26A	28B	30B	30C	40A	42A
π_g	$\frac{12.24}{4.8}$	$\frac{2.6.8.24}{4.12}$	$\frac{2.52}{4.26}$	$\frac{4.56}{8.28}$	$\frac{2.10.12.60}{4.6.20.30}$	$\frac{6.60}{12.30}$	$\frac{2.40}{8.10}$	$\frac{4_\circ\ 6_\circ\ 14_\circ\ 84}{2.12.28.42}$
$\mathbb{M}$	24G	24A	52B	56B	60E	60F	40CD	84B
$\Gamma_{g'}$	$24\|4+2$	$24\|2+$	$52\|2+26$	$56\|4+14$	$60\|2+5,6,30$	$60\|6+10$	$40\|2+20$	$84\|2+6,\ 14,\ 21$

表6：与 40 种不同框架形状相关的 Co_0 的 43 个异常共轭类。对于所有这些共轭类，$\mathrm{Tr}_{24}\, g = 0_\circ$ 注意，这些共轭类的框架形状全部是平衡的。除五个 Co_0 共轭类 2D、6O、10J 和 22BC 外，它们都对应于 $\Gamma_{g'}$ 的$n|h$–型亏格为零群，带有或不带有 Atkin-Lehner 对合。（见 §3.4。）

Co_0 的非异常框架形状的轨形 Witten 指数结果列于表 2、3、4 和 5 中。表 2 和表 3 包含轨形 Witten 指数为 24 的全部 52 个共轭类，因此 $V^{f\natural}$ 是自轨形的 $V^{f\natural}/\langle g\rangle \cong V^{f\natural}$。特别地，表 2 包含其中框架形状 $\prod_{k|N} k^{l_k}$, $l_k \in \mathbb{Z}$ 的 42 个共轭类；其中 N 是 g的阶，且该框架形状是平衡的，即它在以下变换下保持不变

$$\prod_{k|N} k^{l_k} \quad \to \quad \prod_{k|N} (N/k)^{l_k} \ . \tag{3.17}$$

表3列出了剩余的10个类 $[g]$，它们满足 $V^{f\natural}/\langle g\rangle \cong V^{f\natural}$，但框架形状$\pi_g$并不平衡。表4列出了所有 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 与 V^{fE_8} 同构的类。表5列出了轨形 Witten 指数为 -24 的非反常类。这意味着轨形理论与 $V^{f\natural}$ 同构，但拉蒙扇区的费米子数选择相反；特别是， $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 中的24个拉蒙基态具有负费米子数。对于这类群 $\langle g\rangle$，即使存在对偶缺陷 $\mathcal{N}$，它也不与拉蒙扇区中的费米子数对易，因此不属于范畴 Top。最后，表6列出了所有反常框架形状。在所有这类情况下，应用轨形 Witten 指数公式所得的数值都与 $c = 12$ 处任何全纯超顶点算子代数的数值不符；这证实了轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 是不一致的，正如预期的那样。

现在我们将论证， Co_0 中可能与 Top 中的对偶缺陷相关联的循环子群只有表 2 中列出的那些。这意味着，不仅轨形理论 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 必须自洽，并且与 $V^{f\natural}$ 同构，且在 Ramond 扇区中的费米子数相同，框架形状 π_g 也必须是平衡的。

事实上，对偶缺陷的存在不仅意味着同构 $V^{f\natural}/\langle g\rangle \cong V^{f\natural}$，还意味着在 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 中，每个 g不变的 g^k扭曲扇区 $(V_{g^k})^g$ 都与母理论 $V^{f\natural}$中具有 $g = e^{\frac{2\pi i a}{N}}$的 g 特征空间同构，其中 $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$取某个值。$V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 中的空间 $(V_{g^k})^g$是量子对称性 Q 对应特征值 $Q = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$ 的特征空间。因此， $\mathcal{N}$的存在意味着 g 和 Q 在每个共形权重处都必须具有相同的特征值，尤其是相同的框架形状。正如 [41], 中所证明的，若 g 的框架形状为 $\prod_{k|N} k^{l_k}$，则量子对称性 Q 的框架形状由公式 $\prod_{k|N}(N/k)^{l_k}$ 给出，见式 (3.17)。因此，在表3所列的 10 个不平衡情形中，对偶缺陷 $\mathcal{N}$不可能存在，因为 g和 Q 的框架形状不同。这 10 个元素可以整理为五对 π_g, π_Q，每对的阶相同；若 g 的框架为 π_g，则量子对称性 Q 的框架形状由变换 (3.17) 给出，即 π_Q 。

因此，我们接下来要研究表 2 中具有平衡 Frame 形状的 Co_0 的 42 个共轭类。假设对于其中某些循环群 $\langle g\rangle$，对偶缺陷 $\mathcal{N}$作为 $V^{f\natural}$中的拓扑缺陷存在。那么，如前一节 $\frac{1}{\sqrt{N}}$所述，$\hat{}\mathcal{N}$必须通过一个二阶自同构作用于 g-不动子超顶点算子代数 $(V^{f\natural})^g$，并交换适当的 $(V^{f\natural})^g$-模。当子超顶点算子代数 $(V^{f\natural})^g$ 包含一个有理仿射代数时，可以利用 Kac [42] 的一个定理确定所有此类自同构；近期有人在 [43]中将这一方法用于确定玻色 E_8 格点顶点算子代数 V^{E_8} 中的对偶缺陷。若要使 $\mathcal{N}$ 成为 Top 的元素，就需要证明可以选择这样的自同构 $\frac{1}{\sqrt{N}}$，使得 $\hat{}\mathcal{N}$ 对超流 τ 的作用是平凡的；正如我们将在后续各节中展示的，这通常是确定 Top 中对偶缺陷时最困难的一步。

[3]请注意，fr 从框架形状 π_g 和 π_{-g} 可以计算出迹 $\mathcal{C}_g$ 和 $\mathcal{C}_{-g}$，但只能确定到一个符号。

最后，为了联系 K3 非线性σ模型中的非可逆对称性，我们感兴趣的是确定 $V^{f\natural}$ 中的哪些对偶缺陷能够保留 $V_{tw}^{f\natural}$（1/2）中的某个四维平面 $\Pi^{\natural}$，如引言中所述。在 K3 非线性σ模型中找到相应的保超对称对偶缺陷，将为我们的主要猜想 6 提供证据。如表 2 所示，存在 7 个非平凡的 Co_0 共轭类：2B、3B、4B、4E、5B、6K、9C，分别对应框架形状 $1_8 2_8$、$1_6 3_6$、$1^8 4^8/2^8$、$1_4 2_2 4_4$、$1_4 5_4$、$1_2 2_2 3_2 6_2$和 $1^3 9^3/3^2$，它们可能保留某种 $\mathcal{N}=4$ 超共形代数。

如果存在，令 $\mathcal{N}_g$ 表示对应于 TY 范畴 TY($\langle g\rangle$) 的对偶缺陷。对于阶 $o(g)$ 不是完全平方数的那些类，我们可以根据框架形状确定 $\frac{1}{\sqrt{o(g)}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 作用在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上的特征值。事实上，我们知道，$\hat{}\mathcal{N}_g$ 在 g-不变子空间上的可能特征值为 $\pm\sqrt{o(g)}$，而在正交补上的特征值必然为 0。$\hat{}\mathcal{N}_g$ 在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 上的迹必须是整数；如果 $o(g)$ 不是完全平方数，唯一的可能性是迹为 0，即 $+\sqrt{o(g)}$ 和 $-\sqrt{o(g)}$ 必须具有相同的重数。因此，$\mathcal{N}_g$ 保持不变的 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 子空间的维数，即特征值 $\langle\mathcal{N}_g\rangle=+\sqrt{o(g)}$ 的重数，是 g-不变子空间维数的一半。由此，$\hat{}\mathcal{N}_g$ 只有在 g 保持一个维数至少为 8 的子空间时，才能固定一个四维子空间 $\Pi^{\natural}$。

我们将在第 4 节和第 6 节分别识别出对应于由 $g=2B$ ($\pi_g=1^8 2^8$) 和 $g=3B$ ($\pi_g=1^6 3^6$) 生成的循环群的 TY 范畴的保持四维平面的对偶缺陷，并证明它们保持$\mathcal{N}=4$ 超对称性。至于能否构造保持 $\mathcal{N}=4$ 的对偶缺陷，使其对应于 $\mathbb{Z}_N$，其中 $N=4$，5、6 和 9，我们将其留作一个开放问题。

3.3 自旋选择规则

在本文中，我们将确定 TY 范畴 TY(A,χ,ϵ) 中各种对偶缺陷的 $\mathcal{N}$-缠绕和 $\mathcal{N}$-扭曲配分函数 $\mathcal{Z}^{\mathcal{N}}$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{N}}$。现在我们将回顾精确的 TY 范畴，即 χ 和 ϵ 的取值，如何决定 $\mathcal{N}$-扭曲扇区的可能共形权重（或者更一般地说，在非全纯共形场论中的自旋）；更多细节请参见例如 [8, 12]。在以下各节中，一旦已知 $\mathcal{N}$-扭曲配分函数，我们将利用这些自旋选择规则来确定给定缺陷 $\mathcal{N}$ 所对应的精确 Tambara-Yamagami 范畴。

考虑圆柱面上的一个振幅 $S^1\times\mathbb{R}$，其中缺陷线 $\mathcal{N}$ 沿欧几里得时间方向 $\mathbb{R}$ 延伸。我们取相同的 CPT 自共轭归一化态 ψ 作为入射态和出射态，该态处于 $\mathcal{N}$ 扭曲扇区中，因此得到的只是 $\langle\psi|\psi\rangle=1$。现在，我们在振幅中插入一个算符 $e^{4\pi i L_0}$（在非全纯共形场论中，我们会插入 $e^{4\pi i(L_0-\bar{L}_0)}$[4]）。这等价于缺陷线 $\mathcal{N}$ 将 S^1 圆绕两圈，同时从 $t=-\infty$ 移至 $t=+\infty$。利用融合规则 $\mathcal{N}^2=\sum_{a\in A}\mathcal{L}_a$ 和相应的融合矩阵，可得恒等式 [8, 12]

$$\langle\psi|e^{4\pi i L_0}|\psi\rangle=\frac{\epsilon}{\sqrt{|A|}}\sum_{a\in A}\langle\psi|\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}|\psi\rangle\ . \tag{3.18}$$

T算符 $\hat{}\mathcal{L}_a^{(\mathcal{N})}$, $a\in A$ 是将 $\mathcal{N}$ 扭曲的时空映射到自身的（幺正）线性算子 e

[4]准确地说，沿圆柱面上的 S^1 平移的生成元是 $L_0-\frac{c}{24}-(\bar{L}_0-\frac{\bar{c}}{24})$。但是，如果 $c\neq\bar{c}$，那么由于引力反常，应在式（3.18）右边乘上因子 $e^{-4\pi i(c-\bar{c})/24}$。这等价于直接在式（3.18）左边插入 $e^{4\pi i(L_0-\bar{L}_0)}$。

并定义了阿贝尔群 A 的射影表示，满足关系式

$$\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}\hat{\mathcal{L}}_b^{(\mathcal{N})} = \chi(a,b)\hat{\mathcal{L}}_{a+b}^{(\mathcal{N})}\,, \qquad a,b\in A\,. \tag{3.19}$$

或者，也可以把 $\mathcal{N}$-扭曲扇区上的算符 $\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}$ 看作是在阿贝尔群 A 上定义的中心扩张。注意，由于双特征 $\chi(a,\ b)\ =\ \chi(b,\ a)$ 的对称性，这个中心扩张仍然是阿贝尔的。事实上，每个 $\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}$ 的定义本身都存在一个相位不确定性，这与一个 $\mathcal{L}_a$ 缺陷和两个 $\mathcal{N}$ 缺陷之间的三重拓扑交汇算符的选取及其排序有关；我们写出的公式对应于一种标准的约定选取，其中 $\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}$ 对应于 [12] 的记号中的 $\frown(r_a)_-$。

为了了解自旋选择规则如何产生，我们来考察 $A\cong\mathbb{Z}_3$ 这个例子，它将在 §6 中派上用场。对于 $A\cong\mathbb{Z}_3$，非退化对称双特征标只有两种选取，即 $\chi(a,\ b)\ =\chi_+(a,\ b)$ 或 $\chi(a,\ b)\ =\chi_-(a,\ b)$，其中

$$\chi_\pm(1,1)=\chi_\pm(2,2)=\omega^{\pm1}\,,\quad \chi_\pm(2,1)=\chi_\pm(1,2)=\omega^{\mp1}\,,\quad \chi_\pm(0,b)=\chi_\pm(a,0)=1\,, \tag{3.20}$$

以及 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$。现在我们将群 $\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}_3$ 改用乘法记号，并作如下对应：$\mathcal{L}_a\equiv\mathcal{L}_{g^a}$。对于这个群，(3.18) 变为

$$\langle\psi|e^{4\pi iL_0}|\psi\rangle=\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\langle\psi|1+\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}+\hat{\mathcal{L}}_{g^2}^{(\mathcal{N})}|\psi\rangle=\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\langle\psi|1+\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}+\chi(1,1)^{-1}(\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})})^2|\psi\rangle\,. \tag{3.21}$$

由于 L_0 和 $\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}$ 对易，我们可以在 $\mathcal{N}$-扭曲扇区上同时将它们对角化。可以看出，作用于 $\mathcal{N}$-扭曲扇区上的算符 $\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}$ 仍为三阶，即

$$(\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})})^3=\chi(1,1)\hat{\mathcal{L}}_{g^2}^{(\mathcal{N})}\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}=\chi(1,1)\chi(2,1)\hat{\mathcal{L}}_{g^3}^{(\mathcal{N})}=\mathbf{1}\,, \tag{3.22}$$

其中我们利用双线性性质得到了 $\hat{\mathcal{L}}_{g^3}^{(\mathcal{N})}=\hat{\mathcal{L}}_1^{(\mathcal{N})}=\mathbf{1}$ 和 $\chi(1,1)\chi(2,1)\ =\chi(0,1)\ =1$。因此，$\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}$ 的可能特征值为三次单位根。若取 $|\psi\rangle$ 为特征态，使其满足$L_0|\psi\rangle=h|\psi\rangle$ 和 $\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}|\psi\rangle=\zeta|\psi\rangle$，其中 $\zeta^3=1$，则 (3.21) 变为

$$e^{4\pi ih}=\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}(1+\zeta+\chi(1,1)^{-1}\zeta^2)\,. \tag{3.23}$$

我们得出结论，对于给定的范畴 TY($\mathbb{Z}_3$，χ，ϵ)，$\mathcal{N}$-扭曲扇区中的 L_0-特征值 h 只有在存在一个第三单位根 ζ 使得式 (3.23) 成立时才可能出现。表 7 列出了 ϵ、$\chi(1,\ 1)$ 和特征值 ζ 的可能取值，以及满足式 (3.23) 的 h 所允许的相应取值。

对于情形 $A=\mathbb{Z}_2$，我们将在第 4 节中分析该情形，其中存在一个非退化对称双特征标，

$$\chi(1,1)=-1\,,\qquad \chi(1,0)=\chi(0,1)=\chi(0,0)=1\,. \tag{3.24}$$

因此，可以区分两个不同的 Tambara–Yamagami 范畴 TY($\mathbb{Z}_2$，χ，±1) ≡TY($\mathbb{Z}_2$，±1)，它们仅在 Frobenius–Schur指标 $\epsilon=\pm1$ 的符号上有所不同。由于 $(\hat{\mathcal{L}}^{(\mathcal{N})_g})^2=\chi(1,\ 1)\ =-1$，$\hat{\mathcal{L}}_g^{(\mathcal{N})}$ 在 $\mathcal{N}$-扭曲扇区中的特征值 ζ 必须满足条件 $\zeta=\pm i$。根据式 (3.18)，我们重新得到表 8 中总结的自旋选择规则。

在 §7.2 中，我们将考虑群 $A=\langle a,Q\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的对偶缺陷。在这种情况下，双特征 χ 满足 $\chi(x,y)\ \in\{\pm1\}$ 且 $\chi(aQ,aQ)\ =\chi(a,a)\chi(Q,Q)\chi(a,Q)^2\ =$

ϵ	$\chi(1,\ 1)$	ζ	$\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}(1+\zeta+\chi(1,\ 1)^{-1}\zeta^2)$	h
$+1$	ω	$1,\omega^{-1}$	$e^{-\frac{2\pi i}{12}}$	$-\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	ω	ω	$e^{\frac{2\pi i}{4}}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	ω^{-1}	$1,\omega$	$e^{\frac{2\pi i}{12}}$	$+\frac{1}{24}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	ω^{-1}	ω^{-1}	$e^{-\frac{2\pi i}{4}}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	ω	$1,\omega^{-1}$	$e^{2\pi i\frac{5}{12}}$	$\frac{5}{24}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	ω	ω	$e^{-\frac{2\pi i}{4}}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	ω^{-1}	$1,\omega$	$e^{-2\pi i\frac{5}{12}}$	$-\frac{5}{24}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	ω^{-1}	ω^{-1}	$e^{\frac{2\pi i}{4}}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$

表 7： $A=\mathbb{Z}_3$ 的自旋选择规则。

ϵ	ζ	$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}(1+\zeta)$	h
$+1$	i	$e^{\frac{2\pi i}{8}}$	$\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	$-i$	$e^{-\frac{2\pi i}{8}}$	$-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	i	$e^{-2\pi i\frac{3}{8}}$	$-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	$-i$	$e^{2\pi i\frac{3}{8}}$	$\frac{3}{16}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$

表 8： $A=\mathbb{Z}_2$ 的自旋选择规则。

$\chi(a,a)\chi(Q,Q)$。这意味着，对于三个非平凡元素 $x\in\{a,Q,aQ\}$ 中至少一个， $\chi(x,x)=+1$。在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\cong S_3$ 中的自同构下（它们对应于 Tambara-Yamagami 范畴的等价），我们可以令 $\chi(Q,Q)=1$。由 χ 的非退化性可知， $\chi(a,Q)=-1$。因此， χ 仅有两种可能： $\chi=\chi_a$ 或 $\chi=\chi_s$，其中

$$\chi_a(a,a)=+1\ ,\qquad \chi_s(a,a)=-1\ . \tag{3.25}$$

式（3.18）意味着

$$\langle\psi|e^{4\pi iL_0}|\psi\rangle=\frac{\epsilon}{2}\langle\psi|(1+\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}+\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})}+\hat{\mathcal{L}}_{aQ}^{(\mathcal{N})})|\psi\rangle=\frac{\epsilon}{2}\langle\psi|(1+\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}+\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})}-\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})}\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})})|\psi\rangle\ ,$$

其中我们使用了 $\chi(a,Q)=-1$。若 $|\psi\rangle$ 在 $\mathcal{N}$-扭曲扇区中满足 $L_0|\psi\rangle=h|\psi\rangle$、$\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})}|\psi\rangle=\zeta_Q|\psi\rangle$ 且 $\hat{\mathcal{L}}^{(\mathcal{N})}{}_a\ \ |\psi\rangle=\zeta_a|\psi\rangle$，则得到选择规则

$$e^{4\pi ih}=\frac{\epsilon}{2}(1+\zeta_a+\zeta_Q-\zeta_a\zeta_Q)\ .$$

由于 $\chi(Q,Q)=1$，有 $(\hat{\mathcal{L}}^{(\mathcal{N})}{}_Q)^2=1$，因此 $\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})}$ 的特征值为 $\zeta_Q\in\{+1,-1\}$。另一方面，$(\hat{\mathcal{L}}_a^{(\mathcal{N})})^2=\chi(a,a)$，因此若 $\chi(a,a)=+1$，则 $\hat{\mathcal{L}}_Q^{(\mathcal{N})}$ 的特征值为 $\zeta_a\in\{\pm1\}$；若 $\zeta_a\in\{\pm i\}$，则特征值为 $\chi(a,a)=-1$。所得可能性汇总于表 9。

3.4 $V^{f\natural}$ 的循环轨形与怪兽群

本节将介绍循环轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 与 $g\in Co_0$ 之间以及它们与怪兽月光之间的一种有趣关系。

$\chi(a,\ a)$	ϵ	$(\zeta_a,\ \zeta_Q)$	h
$+1$	$+1$	$(-1,\ -1)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	$+1$	$(1,-1),\ (-1,\ 1),\ (1,\ 1)$	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	-1	$(-1,\ -1)$	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
$+1$	-1	$(1,-1),(-1,1),(1,1)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	$+1$	$(+i,\ -1)$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	$+1$	$(-i,\ -1)$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	$+1$	$(\pm i,\ +1)$	$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	-1	$(+i,\ -1)$	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	-1	$(-i,\ -1)$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$
-1	-1	$(\pm i,\ +1)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$

表 9： $A=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$的自旋选择规则。

我们先简要回顾相关定义。在 [44], 中，作为怪兽月光猜想的一部分，对于每个共轭类 $[g']\in\mathbb{M}$，怪兽群、Conway 和 Norton 都会关联一个 McKay–Thompson 级数 $T_{g'}(\tau)$，它是零亏格子群 $\Gamma_{g'}<SL(2,\ \mathbb{R})$ 的权零模函数。如今我们知道，每个 McKay–Thompson 级数都可表示为由 Frenkel、Lepowsky 和 Meurman[13] 构造的月光模 $V^\natural$ 上的迹:

$$T_{g'}(\tau):=\mathrm{Tr}_{V^\natural}\,g'q^{L_0-1}. \tag{3.26}$$

另一方面，对于每个共轭类 $[g]\in Co_0$，我们都可以关联一个框架形状π_g 和一个 η商 $\eta_g(\tau)$，它们分别定义于 (3.10) 和 (3.11) 中。我们还可以通过 $g\in Co_0$ 在 Leech 格上的自然作用，定义一个 g-缠绕的格θ级数 $\Theta_g(\tau)$。这个函数本质上是对 Leech 格中 g 不变向量取迹；显式公式见 [45]。

在 [44]中，Conway 和 Norton 提出了一个有趣的猜想： Co_0 中的共轭类与 $\mathbb{M}$ 中的共轭类之间存在对应关系。他们预测，对于每个共轭类 $[g]\in Co_0$，都可以指定 $\mathbb{M}$ 中的一个共轭类 $[g']$，使得怪兽McKay-Thompson级数 $T_{g'}(\tau)$ 可以表示为

$$T_{g'}(\tau)=\frac{\Theta_g(\tau)}{\eta_g(\tau)}+c_g, \tag{3.27}$$

其中， c_g 是一个常数。在 [45], 中，Lang 证明了除恰好 15 个 $[g]\in Co_0$之外，这一结论对所有情况都成立。因此，在这一对应关系成立的情况下，还可以为 $[g]\in Co_0$关联一个亏格为零群，即与主模 $T_{g'}(\tau)$ 相关联的亏格为零群 $\Gamma_{g'}$。

现在我们需要简要回顾怪兽月光中出现的零亏格群 $\Gamma_{g'}$ 的刻画。首先，令 $\Gamma_0(N)$ 为 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 的同余子群，其定义如下:

$$\Gamma_0(N):=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\middle|\, c\equiv 0 \pmod N\right\}. \tag{3.28}$$

此外，对于 N 的所有精确因子 e，通过以下行列式为 e 的矩阵集合，定义 $\Gamma_0(N)$ 的 Atkin-Lehner 对合：

$$W_e := \left\{ \begin{pmatrix} ae & b \\ cN & de \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \ \&\ e||N \ \&\ ade^2 - bcN = e \right\}, \tag{3.29}$$

其中 $e||N$ 表示 e 是 N 的精确因子，即 $(e,\ N/e) = 1$。仿照 [44],，我们引入以下记号

- $N- = \Gamma_0(N)$，即 $SL(2,\ \mathbb{Z})$ 的同余子群
- $N + e_1,\ e_2,\ \ldots = \langle \Gamma_0(N)\ W_{e_1},\ W_{e_2},\ \ldots \rangle$，即由 $\Gamma_0(N)$ 及其 Atkin-Lehner 对合的一个子集 $e_1,\ e_2,$ .....生成的群
- $N+$，由 $\Gamma_0(N)$ 及其全部 Atkin-Lehner 对合生成的群

类似地，对于任意整除 n 的 h，我们可以考虑群，而非 $\Gamma_0(N)$ 本身

$$\Gamma_0(n|h) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b/h \\ cn & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{3.30}$$

它是通过用 $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 共轭群 $\Gamma_0(n/h)$ 构造的。在此背景下，对于 $\Gamma_0(n/h)$ 的任意 Atkin-Lehner 对合 W_e，我们定义 $\Gamma_0(n|h)$ 的一个对应对合如下

$$w_e = \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W_e \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

对于这些群，我们采用以下记号

- $n|h- = \Gamma_0(n|h)$
- $n|h + e_1, e_2, \ldots = \langle \Gamma_0(n|h)\ w_{e_1}, w_{e_2}, \ldots \rangle$。

注意，矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ 称为 Fricke 对合，并且属于集合 W_N。怪兽月光中出现的所有零亏格群 $\Gamma_{g'}$ 都属于类型 $N-, n|h-$，或者具有额外的 Atkin-Lehner 对合。

现在我们想要描述与 §3.2 中讨论的循环轨形 $V^{f\natural}/\langle g \rangle$ 之间的关系。对于满足关系式 (3.27) 的每个共轭类 $[g] \in Co_0$，我们也可以关联一个相应的零亏格群 $\Gamma_{g'}$。此外，我们可以将循环轨形划分为以下四类，对应于表 2–6：$(-1)^F$–保持自轨形、产生 V^{fE_8} 的轨形、$(-1)^F$–破缺自轨形，以及反常轨形。在每种情况下，我们都能看到它们与不同类型的零亏格群之间存在对应关系。

1. 表 2 中列出的所有 42 个共轭类 $[g] \in Co_0$，满足 $V^{f\natural}/\langle g \rangle \cong V^{f\natural}$，且可能存在对偶缺陷；对于某个共轭类 $[g'] \in \mathbb{M}$，它们都满足关系式 (3.27)。此外，所有对应的亏格为零群 $\Gamma_{g'}$ 均属于 $\Gamma_0(o(g)) + e_1,\ e_2,\ \ldots$ 这一类型，其中包含 Fricke 对合。

2. 对于表3中列出的框架形状不平衡的10个共轭类，这些性质并不成立。对于这些共轭类，$V^{f\natural}/\langle g \rangle \cong V^{f\natural}$，但对偶缺陷不可能存在，因为 $V^{f\natural}$ 中的对称性 g 与 $V^{f\natural}/\langle g \rangle$ 中相应的量子对称性 Q 具有不同的框架形状。

3. 对于表4中列出的满足 $V^{f\natural}/\langle g\rangle \cong V^{fE_8}$的共轭类 $[g]\in Co_0$，除5个共轭类外，其余都对某个 $[g']\in\mathbb{M}$满足关系式 (3.27)。除一种情况外，相应的亏格为零群$\Gamma_{g'}$ 都是非 Fricke 型群，即具有 $\Gamma_0(o(g))$的形式，并且可能扩张为一组不包含 Fricke 对合的 Atkin-Lehner 对合。[5]

4. 在 Ramond 扇区中，有 40 个共轭类满足 $V^{f\natural}/\langle g\rangle \cong V^{f\natural}$，但 $(-1)^F$ 的符号相反。如表5所示，所有这类共轭类都满足关系式 (3.27)，由此得到 38 个共轭类[6] $[g']\in\mathbb{M}$，其对应的零亏格群$\Gamma_{g'}$ 均为 $\Gamma_0(o(g))$ 经一组（可能为空的）Atkin–Lehner 对合扩张而成的非 Fricke 扩张。值得注意的是，这些群对应于此类 39 个非 Fricke 零亏格群中的 38 个；唯一缺少的是群 $25-$，它在怪兽月光中也不起作用，因为 $\mathbb{M}$ 中不存在阶 25 的共轭类。有趣的是，这 39 个零亏格群恰好标记了一组所谓的“最优模拟 Jacobi 形式” [46], 23，它们与伞影月光现象 [47]有关。这些 $V^{f\natural}$ 的循环轨形与最优模拟 Jacobi 形式之间是否存在联系?

5. 表 6 中列出的 Co_0 所有 43 个异常共轭类，都满足关系式 (3.27)，其中某个 $[g']\in\mathbb{M}$ 存在。此外，对于这 43 个共轭类中的除 5 个以外的所有共轭类，[7] 相应的零亏格群 $\Gamma_{g'}$ 均属于 $n|h$–型，无论是否带有额外的 Atkin–Lehner 对合。

若能为这些事实找到更深层的解释，将会很有意思；我们将此留作一个开放问题。

4 $\mathbb{Z}_2$ 的对偶缺陷

如 §3.2 所述， $V^{f\natural}$ 在由共轭类（列于表 2）中具有平衡 Frame 形状的元素生成的循环群 G 作用下是自轨形。因此，预计每个这样的共轭类都对应一个对偶缺陷。我们尤其关注保持 $\mathcal{N}=1$ 超流的对偶缺陷。此外，为了研究与 K3 非线性σ模型的联系，我们希望了解哪些对偶缺陷保持 $c=6,\mathcal{N}=4$ 超共形代数。

在本节中，我们讨论 $G=\mathbb{Z}_2=\langle g\rangle$ 的对偶缺陷这一情形下的这个问题，其中 g 的框架形状为 $1^8 2^8,$，即 Co_0 中的 2B 类，如表 2 所列。考虑 $V^{f\natural}$ 被 $\langle g\rangle$ 轨形化后的理论。与 g 对易的 $SO(24)=SO(\Lambda\otimes\mathbb{R})$ 子群为

$$SO(24)\supset SO(16)\times SO(8)\ , \tag{4.1}$$

相应的 $so(24)_1$ 中由 g 保持的子代数为:

$$so(24)_1 \quad\supset\quad so(16)_1\oplus so(8)_1. \tag{4.2}$$

在描述轨形化过程的细节时，我们将同时采用 $V^{f\natural}$ 基于奇格 D_{12}^+的格点顶点算子代数描述，以及采用具有手征代数的有理共形场论描述

[5]唯一的例外是 Co_0 共轭类 8F，它对应于零亏格群 $8|2-$。[6]这是因为 Co_0 中的共轭类 46AB 和 78AB 会得到相同的迹函数。[7]五个例外是 2D、6O、10J 和 22BC。它们分别对应于 Fricke 型零亏格群$4+$，$12+$，$20+$ 和 $44+$。

$so(24)_1$。在 $Spin(24)$中的共轭意义下， $\mathbb{Z}_2$ 对称性 g 可以取为作用于顶点算符$V_{(x_1,\ldots,x_{12})}(z)$、$(x_1,\ldots,x_{12})\in D_{12}^+$，通过乘以一个 $U(1)$相位

$$V_{(x_1,\ldots,x_{12})} \qquad \mapsto \qquad e^{2\pi i\alpha_k x_k}V_{(x_1,\ldots,x_{12})} \tag{4.3}$$

with

$$\alpha=(\underbrace{0,\ldots,0}_{8},\underbrace{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{4}). \tag{4.4}$$

现在考虑 $V^{f\natural}$ 被 $\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ 取轨形。要将谱投影到态的 $\mathbb{Z}_2$-不变子集中，我们需要按照保持的子代数 (4.2) 分解 $V^{f\natural}$ 中的表示，如表 10 所示。

	$\widehat{so}(24)_1$	$g=+1$	$g=-1$
NS_+	0	$(0,\ 0)$	$(v,\ v)$
NS_-	s	$(s,\ s)$	$(c,\ c)$
R_+	v	$(v,\ 0)$	$(0,\ v)$
R_-	c	$(c,\ s)$	$(s,\ c)$

表 10： $so(24)_1$ 表示在 $\mathbb{Z}_2$-保持的子代数 $so(16)_1\oplus so(8)_1$,下的分解，以及相应的 $\mathbb{Z}_2=\langle g\rangle$ 作用。

从表 10 的第三列可以读出由$\mathbb{Z}_2$ 作用保持的表示。具体而言，它们是:

$$\left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{NS,untw}=(0,0)_+\oplus(s,s)_- \qquad \left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{R,untw}=(v,0)_+\oplus(c,s)_- \tag{4.5}$$

其中，下标 $\pm$ 表示费米子数算符（-1）的相应特征值 $\pm1^F$。注意， $V^{f\natural}$的超流包含在表示（$s,\ s$）中，该表示在轨形化过程中保持不变。

定义 $\mathrm{ch}_\rho^{(n)}(\tau):=\mathrm{Tr}_{\rho^{(n)}}\,q^{L_0-c/24}$ 为 $\widehat{so}(n)_1$ 表示的特征标，其中$\rho\in\{0,v,s,c\}$。其具体形式见附录 B 中的 (B.13)–(B.15)。

根据表 10， g-缠绕配分函数可用 $so(16)_1\oplus so(8)_1$ 代数的特征标表示如下（参数 τ 在所有地方均省略）：

$$Z_{NS}^{g,\pm}=\mathrm{ch}_0^{(16)}\,\mathrm{ch}_0^{(8)}-\mathrm{ch}_v^{(16)}\,\mathrm{ch}_v^{(8)}\pm\mathrm{ch}_s^{(16)}\,\mathrm{ch}_s^{(8)}\mp\mathrm{ch}_c^{(16)}\,\mathrm{ch}_c^{(8)}\ , \tag{4.6}$$

$$Z_{R}^{g,\pm}=\mathrm{ch}_v^{(16)}\,\mathrm{ch}_0^{(8)}-\mathrm{ch}_0^{(16)}\,\mathrm{ch}_v^{(8)}\pm\mathrm{ch}_c^{(16)}\,\mathrm{ch}_s^{(8)}\mp\mathrm{ch}_s^{(16)}\,\mathrm{ch}_c^{(8)}\ . \tag{4.7}$$

这些公式的 S 变换给出 g-扭曲配分函数:

$$Z_{g,NS}^{\pm}=\mathrm{ch}_0^{(16)}\,\mathrm{ch}_s^{(8)}+\mathrm{ch}_v^{(16)}\,\mathrm{ch}_c^{(8)}\pm(\mathrm{ch}_s^{(16)}\,\mathrm{ch}_0^{(8)}+\mathrm{ch}_c^{(16)}\,\mathrm{ch}_v^{(8)}) \tag{4.8}$$

$$Z_{g,R}^{\pm}=\mathrm{ch}_0^{(16)}\,\mathrm{ch}_c^{(8)}+\mathrm{ch}_v^{(16)}\,\mathrm{ch}_s^{(8)}\pm(\mathrm{ch}_s^{(16)}\,\mathrm{ch}_v^{(8)}+\mathrm{ch}_c^{(16)}\,\mathrm{ch}_0^{(8)})\ . \tag{4.9}$$

g-扭曲扇区中的表示也可以通过用式 (4.4) 中定义的向量 α 平移相应的格，从非扭曲扇区中的表示推导出来。在代数 (4.2) 的层面上， α 是 $(0,\ s)$ 中的一个向量。

g 在 g-扭曲扇区上的作用，由其在原理论中的作用决定，但相差一个相位因子；该因子对所有扭曲态都相同。通过要求

扭曲算符之间的算符乘积展开是局域的，并确保配分函数具有适当的模变换性质，即可确定这一相位。特别是，由于 $Z_{g}^{\pm}{}_{,\ NS}(\tau+1) = -Z^{g}{}_{,\ g}{}^{\mp}{}_{,\ NS}(\tau)$ 和 $Z_{g}^{\pm}{}_{,\ R}(\tau+1) = Z^{g}{}_{,\ g}{}_{R}^{\pm}{}_{,}(\tau)$，我们得到表 11 中所述的作用。

g-扭曲	$g=+1$	$g=-1$
NS_+	(v,c)	$(0,\ s)$
NS_-	(c,v)	$(s,\ 0)$
R_+	$(0,\ c)$	$(v,\ s)$
R_-	(s,v)	$(c,\ 0)$

表 11：相对于保持的子代数 $so(16)_1 \oplus so(8)_1$， g-扭曲扇区中表示的分解，以及相应的 $\mathbb{Z}_2 = \langle g \rangle$ 作用。

C因此， g-扭曲扇区中在 g 作用下保持不变的表示为 :

$$\left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{NS,g-tw} = (v,c)_+ \oplus (c,v)_- \qquad \left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{R,g-tw} = (0,c)_+ \oplus (s,v)_- \ , \tag{4.10}$$

其中下标仍表示费米子数 $(-1)^F$。轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 由两个保留下来的子扇区 (4.5) 和 (4.10) 的直和给出：

$$\left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{NS} = \underbrace{(0,0)_+ \oplus (s,s)_-}_{\text{untwisted}} \oplus \underbrace{(v,c)_+ \oplus (c,v)_-}_{g-\text{twisted}} \tag{4.11}$$

$$\left(V^{f\natural}/\langle g\rangle\right)_{R} = \underbrace{(v,0)_+ \oplus (c,s)_-}_{\text{untwisted}} \oplus \underbrace{(0,c)_+ \oplus (s,v)_-}_{g-\text{twisted}} . \tag{4.12}$$

通过计算其完全周期性的环面配分函数，可以直接验证该构造是自轨形的。这一性质已经编码在第3.2节表格所列的 Witten指标中。因此，必然存在一个对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$，它将母理论映射到子轨道折叠模型，反之亦然。

比较子理论中出现的表示与母理论中的表示，我们可以推断算符 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 必须在 $\widehat{so}(8)_1$ 上作为外自同构发挥作用，交换两个模型的表示 $c \leftrightarrow v$，并通过非平凡作用将 s 映射到自身。每个这样的自同构都可以表示为一个 8×8 实正交矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(8)} \in O(8,\ \mathbb{R})$，该矩阵描述其对 s 表示的 8 个基态的作用；自同构为外自同构并交换 v 和 c，等价于要求 $\det O_{\mathcal{N}}^{(8)} = -1$。为了保持 $\mathcal{N}=1$ 超流，算符 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 必须在 $\widehat{so}(16)_1$ 上作为内自同构发挥作用，以补偿表示 s 在 $(s,\ s)$ 中的 $\widehat{so}(8)_1$ 变化。这样的内自同构对应于自旋群中由 $\widehat{so}(16)_1$ 生成的一个对合 $S_{\mathcal{N}}^{(16)} \in Spin(16)$。因此，每个对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 都由一对 $\frac{}{=}$

$$\mathcal{N}_g \quad \leftrightarrow \quad (S_{\mathcal{N}}^{(16)}, O_{\mathcal{N}}^{(8)}) \in Spin(16)\times O(8)\ , \tag{4.13}$$

使得 $(S_{\mathcal{N}}^{(16)})^{\,2} = 1 = (O_{\mathcal{N}}^{(8)})^{\,2}$ 且 $\det O_{\mathcal{N}}^{(8)} = -1$。

在第 4.2 节中，我们将证明，可以选择对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$，使其保持 $\mathcal{N}=1$ 超共形对称性。即使有这一要求，给定一个框架形状为 $1^8 2^8$ 的对称性 g，其对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 也并非唯一。事实上，对于任意这样的$\mathcal{N}_g$，都可以通过与可逆缺陷取融合积来得到另一个对偶缺陷

$$\mathcal{L}_{h_1}\mathcal{N}_g\mathcal{L}_{h_2}\ , \tag{4.14}$$

其中 $h_1,\ h_2 \in C_{Co_0}(g) \subset Co_0$ 是中心化子 $C_{Co_0}(g)$ 中的任意元素，也就是说，它们与 g 对易，并且满足

$$(\mathcal{L}_{h_1}\mathcal{N}_g\mathcal{L}_{h_2})^2 = \mathcal{N}_g^2 = \mathcal{I} + \mathcal{L}_g \ . \tag{4.15}$$

特别地，对于每个 g框架形状为 $1^8 2^8$,的情形，我们将找到两个例子： $\mathcal{N}_{(1)^g}$和 $\mathcal{N}_g^{(2)}$，它们是生成 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(\mathbb{Z}_2,\ +)$和 $TY(\mathbb{Z}_2,\ -)$的对偶缺陷。此外，对于 g的任何其他对偶缺陷 (4.14)，都可通过与群 $SO(16)\times SO(8)$中与 g对易的 $SO(24)$的共轭，与 $\mathcal{N}_{(1)^g}$或 $\mathcal{N}_g^{(2)}$中的任一个相关，详见第 (4.2) 节的讨论。

4.1 与 $\mathbb{Z}_2$-对偶缺陷相关的格端同态

回顾一下，群 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural}) \cong Co_0$ 由固定 $\mathcal{N}=1$ 超流 $\tau(z)$的 $V^{f\natural}$ 自同构组成，并通过 Leech 格 $\Lambda \subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)$的自同构作用在 24 维空间 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$的 Ramond 基态上。我们关于 $\mathcal{N}=1$ 保持不变的对偶缺陷的一般结果表明，$\hat{}\,\mathcal{N}_g$ 在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$上的作用会将 $\Lambda \subset V_{tw}^{f\natural}(1/2)$的向量映射为 Λ的向量。在下文中，我们将说明这一性质如何施加约束，从而确定定义 $\mathcal{N}_g$的自同构对 $\left(\mathcal{S}_{\mathcal{N}}^{(16)}, \mathcal{O}_{\mathcal{N}}^{(8)}\right)$。

在 $V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 中，群 $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ 的作用固定一个 $16-$维子空间。 Λ中被框架形状为 $1^8 2^8$ 的元素 $g \in Co_0$ 固定的子格是 $16-$维 Barnes-Wall 格$\Lambda_{16} \subset \Lambda$ [28]。根据定义，我们有：

$$\hat{\mathcal{N}_g^2}|v\rangle = (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_g)\,|v\rangle, \qquad \forall |v\rangle \in V_{tw}^{f\natural}(1/2) \tag{4.16}$$

其中， $\mathcal{L}_e$ 是平凡缺陷， $\mathcal{L}_g$ 是与对称性 $g \in \mathbb{Z}_2$相关联的可逆缺陷。如果 $v \in \Lambda_{16}$ ，我们有：

$$\hat{\mathcal{N}_g^2}|v\rangle = 2|v\rangle, \tag{4.17}$$

这意味着，$\hat{}\,\mathcal{N}_g$ 在空间 $\Lambda_{16}\otimes\mathbb{R}$ 上的特征值为 $\pm\sqrt{2}$ ，并将互补的正交 $8-$维格 $\Lambda_8 = \Lambda_{16}^{\perp}\cap\Lambda$中的向量映为零。虽然保持 $\mathcal{N}=1$ 超流的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$并不唯一（见第 4.2 节中的式 (4.14)），但结合这项分析与条件 $\mathrm{Tr}_{V_{tw}^{f\natural}(1/2)}(\hat{}\,\mathcal{N}_g) \in \mathbb{Z}$，可知 $\hat{}\,\mathcal{N}_g$ 在$V_{tw}^{f\natural}(1/2)$上的特征值总是

$$8\times\sqrt{2}\ , \qquad 8\times(-\sqrt{2})\ , \qquad 8\times 0\ . \tag{4.18}$$

这也意味着， $\mathcal{N}_g$ 所保持的 $\widehat{so}(16)_1$ 的子代数为 $\widehat{so}(8)_1^+ \oplus \widehat{so}(8)_1^-$，对应于 $\underline{\underline{V_{tw}^{f\natural}}}(1/2)$上$\hat{}\,\mathcal{N}_g$ 的特征子空间，其特征值为 $+\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$。

现在考虑一个向量 $v = v_\parallel + v_\perp \in \Lambda$ ，其一条支臂$v_\parallel$ 延伸到不变的$16-$维空间 $\Lambda_{16}\otimes\mathbb{R}$ 中，另一条支臂 $v_\perp$ 延伸到其 $8-$维正交补空间 $\Lambda_8\otimes\mathbb{R}$中。对于所有 $\lambda\in\Lambda_{16}$，均有 $v_\perp\cdot\lambda = 0$和 $v_\parallel\cdot\lambda = v\cdot\lambda\in\mathbb{Z}$，因此 $v_\parallel \in \Lambda_{16}^\star$，其中

$$\Lambda_{16}^\star = \{v\in\Lambda_{16}\otimes\mathbb{R} \mid v\cdot\lambda\in\mathbb{Z},\ \forall\lambda\in\Lambda_{16}\} \tag{4.19}$$

是对偶格。此外，由于 Λ 是自对偶的，对于每个本原向量 $\lambda\in\Lambda_{16}\subset\Lambda$，必定存在一个向量 $v\in\Lambda$ ，使得 $v\cdot\lambda = v_\parallel\cdot\lambda = 1$，因此向量 $v_\parallel$ 张成整个 $\Lambda_{16}^\star$。$\hat{}\,\mathcal{N}_g$ 对 $v = v_\parallel + v_\perp$ 的作用会消去其沿 $\Lambda_8\otimes\mathbb{R}$ 的分量 $v_\perp$，并产生一个向量 $\hat{}\,\mathcal{N}_g(v) = \hat{}\,\mathcal{N}_g(v_\parallel)$，该向量必定属于 Λ_{16}，因此

$$\hat{\mathcal{N}_g}(v_\parallel)\in\Lambda_{16}\ , \qquad \forall v_\parallel\in\Lambda_{16}^\star\ . \tag{4.20}$$

格 Λ_{16} 是一个 2-模格，即它与缩放了 $\sqrt{2}$的对偶格 $\Lambda_{16}^\star$ 同构，

$$\Lambda_{16} = \sqrt{2} O_{\mathcal{N}}^{(16)} \Lambda_{16}^\star \ , \tag{4.21}$$

其中， $O_{\mathcal{N}}^{(16)} \in SO(16)$ 是一个合适的正交矩阵，除以格自同构从左侧或右侧作用于 $Aut(\Lambda_{16}) = Aut(\Lambda_{16}^\star)$ 外，它是唯一的。格 Λ_{16} 的显式描述以及提供同构 (4.21) 的矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 见附录 A。

因此，除去 Λ_{16} 的自同构外，$\hat{\mathcal{N}}_g$ 在 $v_\parallel \in \Lambda_{16}^\star$ 上唯一可能的、与 (4.21) 及特征值 $\pm\sqrt{2}$ 相容的作用是

$$\hat{\mathcal{N}}_g(v_\parallel) = \sqrt{2} O_{\mathcal{N}}^{(16)} v_\parallel \in \Lambda_{16} \ , \qquad \forall v_\parallel \in \Lambda_{16}^\star \ . \tag{4.22}$$

在 $\widehat{so}(16)_1$ 代数中，由 g 固定的 g-不变拉蒙基态与 NS 流之间的算符乘积展开相容性意味着，(4.21) 中的 $O_{\mathcal{N}}^{(16)} \in SO(16)$ 必须是对合 $S_{\mathcal{N}}^{(16)} \in Spin(16)$ 在投影 $Spin(16) \to SO(16)$ 下的像；该对合决定了 (4.13) 中 $\widehat{so}(16)_1$ 流的内自同构。给定自同构 (4.21)，$O_{\mathcal{N}}^{(16)} \in SO(16)$ 到自旋群 $Spin(16)$ 存在两种可能的提升，它们彼此相差与费米子数 $(-1)^F$ 的复合。因此，这些提升至多有一个能保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流。注意，子群

$$C_{Co_0}(g) := \{h \in Co_0 \mid gh = hg\} \subset Co_0 \tag{4.23}$$

与 g 对易的 Co_0 中的元素在 g-不变子格 Λ_{16}上通过自同构作用，因此必然存在一个群同态 $C_{Co_0}(g) \to \mathrm{Aut}(\Lambda_{16})$，其核为 $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ （ Co_0 中没有其他元素固定同一个子格）。由于 $C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$ 和 $\mathrm{Aut}(\Lambda_{16})$具有相同的阶 $2^{21}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7 = 89181388800$ [28, 29]，所以它们必然同构

$$C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle \cong \mathrm{Aut}(\Lambda_{16}) \ . \tag{4.24}$$

这一观察的一个重要推论如下。设对于自同构 (4.21) 的某个选择，其中 $O_{\mathcal{N}}^{(16)} \in SO(16)$的阶为 2，存在一个 $O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 的提升 $S_{\mathcal{N}}^{(16)} \in Spin(16)$以及一个矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(8)} \in O(8)$，使得与这一对 $(S_{\mathcal{N}}^{(16)}, O_{\mathcal{N}}^{(8)})$ 相关联的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流不变。那么，任意其他格自同构 (4.21)

$$h_1 O_{\mathcal{N}}^{(16)} h_2 \ , \tag{4.25}$$

其中 $h_1, h_2 \in \mathrm{Aut}(\Lambda_{16}) \cong C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$ 满足 $(h_1 O_{\mathcal{N}}^{(16)} h_2)^2 = 1$，也与一个 $\mathcal{N} = 1$-保持对偶缺陷 $(h_1 S_{\mathcal{N}}^{(16)} h_2, h_1 O_{\mathcal{N}}^{(8)} h_2)$ 相关联。 [8]

正如我们将在下一节看到的，确实存在一些保持 $\mathcal{N} = 1$ 的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ ；那么，本节的分析表明，它们与满足 $O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 是对合的格自同构（4.21）一一对应。作为对这些结论的交叉验证，我们通过（繁琐的）计算机计算，成功显式找到了保持 $\mathcal{N} = 1$ 超流的一对 $(S_{\mathcal{N}}^{(16)}, O_{\mathcal{N}}^{(8)})$，它对应于式（A.2）中的矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 。

[8]人们可能会担心这些定义中存在潜在的歧义，这些歧义源于将 h_1, h_2从商群 $C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$ 提升到群 $C_{Co_0}(g) \subset Co_0 \cong \mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$ 时所作的选择；该群实际上作用于 $V^{f\natural}$ 和$V_{tw}^{f\natural}$。然而请注意， $S_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 和 $O_{\mathcal{N}}^{(8)}$ 的作用仅定义在 $V^{f\natural}$的 g-不变子空间上，而 $\hat{\mathcal{N}}$在非 g-不变的态上为零。因此，对于商群 $C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$中的 h_1, h_2， $h_1 S_{\mathcal{N}}^{(16)} h_2$ 和 $h_1 O_{\mathcal{N}}^{(8)} h_2$ 都有明确良定义，无需进行任何提升。

4.2 自由费米子构造 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷

本节将显式证明，对于具有框架形状 $1^8 2^8$ 的对称性 $g \in Co_0$，可以选择一个对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$，使其保持 $\mathcal{N}=1$ 超流。最简单的做法是将 $V^{f\natural}$ 描述为理论 F（24）的一个 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 轨形；该理论由 24 个 NS 手征自由费米子 ψ^1、.....、ψ^{24} 构成，并具有一个 $\mathcal{N}=1$ 超流

$$\tau(z) := -i \sum_{k=1}^{8} : \psi^i \psi^{i+8} \psi^{i+16} : (z) \ . \tag{4.26}$$

这是 F(24)中 $\mathcal{N}=1$ 超流的 8 种不等价选择之一，在 [38]中记作 A_1^8。在该理论中，我们考虑以下保持 $\mathcal{N}=1$不变的对称性

$$Q_1 : \begin{cases} \psi^i \to \psi^i & i = 1, \dots, 8 \ , \\ \psi^i \to -\psi^i & i = 9, \dots, 24 \ , \end{cases} \qquad Q_2 : \begin{cases} \psi^i \to \psi^i & i = 9, \dots, 16 \ , \\ \psi^i \to -\psi^i & i = 1, \dots, 8, 17, \dots, 24 \ , \end{cases} \tag{4.27}$$

$$Q_3 : \begin{cases} \psi^i \to \psi^i & i = 17, \dots, 24 \ , \\ \psi^i \to -\psi^i & i = 1, \dots, 16 \ , \end{cases} \tag{4.28}$$

因此，$\langle Q_1,\ Q_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 其中 $Q_1 Q_2 = Q_3$。这些对称性没有反常，下面我们将证明 F(24)$/\langle Q_1 \rangle \cong V^{fE_8}$ 以及 F(24)$/\langle Q_1,\ Q_2 \rangle \cong V^{f\natural}$。

理论 F(24)具有由费米子双线性乘积生成的 $\widehat{so}(24)_1$ 仿射代数：$\psi^i \psi^j$:，而在 $\langle Q_1$下不变的子代数为，$Q_2 \rangle$

$$\widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b \oplus \widehat{so}(8)_1^c \ . \tag{4.29}$$

回想一下，v、s、c这三个表示通过外部 S_3“triality”自同构彼此关联。为方便后续讨论，不妨认为自由费米子 ψ^i 变换为某个 $\widehat{so}(8)_1$ 代数的 s表示。因此，F(24)的 NS 扇区由以下表示给出

$$\begin{aligned} &(0,0,0)_+ \oplus (s,0,0)_- \oplus (0,s,0)_- \oplus (0,0,s)_- \oplus \\ &\oplus (s,s,0)_+ \oplus (0,s,s)_+ \oplus (s,0,s)_+ \oplus (s,s,s)_- \ , \end{aligned} \tag{4.30}$$

$\widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b \oplus \widehat{so}(8)_1^c$，而 Ramond 扇区为

$$\begin{aligned} &(v,v,v)_+ \oplus (c,c,c)_- \oplus (v,c,c)_+ \oplus (c,v,v)_- \oplus \\ &\oplus (c,v,c)_+ \oplus (v,c,v)_- \oplus (c,c,v)_+ \oplus (v,v,c)_- \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

这里，下标 $\pm$ 表示费米子数。对于三个代数 $\widehat{so}(8)_1^a$、$\widehat{so}(8)_1^b$和 $\widehat{so}(8)_1^c$，令 ξ_8^a、ξ_8^b、ξ_8^c 分别为对应自旋群$Spin(8)$中的中心元，它在 $\widehat{so}(8)_1$, 的 0 和 v 表示上作用平凡，在 s 和 c上作用为 -1。那么，我们可以将 Q_1、Q_2和 Q_3 解释为

$$Q_1 = \xi_8^b \xi_8^c \ , \qquad Q_2 = \xi_8^a \xi_8^c \ , \qquad Q_3 = \xi_8^a \xi_8^b \ . \tag{4.32}$$

现在将 Q_1、Q_2和 Q_3扭曲扇区分解为 (4.29) 的表示。结果汇总于表12。

扇区	NS 表示	Ramond 表示	Q_1	Q_2	Q_3
未扭曲	$(0,\ 0,\ 0)_+ \oplus (s,\ s,\ s)_-$	$(v,\ v,\ v)_+ \oplus (c,\ c,\ c)_-$	+	+	+
	$(0,s,s)_+ \oplus (s,0,0)_-$	$(v,c,c)_+ \oplus (c,v,v)_-$	+	-	-
	$(s,\ 0,\ s)_+ \oplus (0,\ s,\ 0)_-$	$(c,\ v,\ c)_+ \oplus (v,\ c,\ v)_-$	-	+	-
	$(s,\ s,\ 0)_+ \oplus (0,\ 0,\ s)_-$	$(c,c,v)_+ \oplus (v,v,c)_-$	-	-	+
Q_1-扭曲	$(0,\ v,\ v)_+ \oplus (s,\ c,\ c)_-$	$(v,\ 0,\ 0)_+ \oplus (c,\ s,\ s)_-$	+	+	+
	$(0,\ c,\ c)_+ \oplus (s,\ v,\ v)_-$	$(v,\ s,\ s)_+ \oplus (c,\ 0,\ 0)_-$	+	-	-
	$(0,\ v,\ c)_+ \oplus (s,\ c,\ v)_-$	$(c,s,0)_+ \oplus (v,0,s)_-$	-	-	+
	$(0,\ c,\ v)_+ \oplus (s,\ v,\ c)_-$	$(c,\ 0,\ s)_+ \oplus (v,\ s,\ 0)_-$	-	+	-
Q_2 扭曲	$(v,\ 0,\ v)_+ \oplus (c,\ s,\ c)_-$	$(0,\ v,\ 0)_+ \oplus (s,\ c,\ s)_-$	+	+	+
	$(c,\ 0,\ c)_+ \oplus (v,\ s,\ v)_-$	$(s,\ v,\ s)_+ \oplus (0,\ c,\ 0)_-$	-	+	-
	$(v,\ 0,\ c)_+ \oplus (c,\ s,\ v)_-$	$(s,c,0)_+ \oplus (0,v,s)_-$	-	-	+
	$(c,\ 0,\ v)_+ \oplus (v,\ s,\ c)_-$	$(0,\ c,\ s)_+ \oplus (s,\ v,\ 0)_-$	+	-	-
Q_3-扭曲	$(v,\ v,\ 0)_+ \oplus (c,\ c,\ s)_-$	$(0,\ 0,\ v)_+ \oplus (s,\ s,\ c)_-$	+	+	+
	$(c,c,0)_+ \oplus (v,v,s)_-$	$(s,\ s,\ v)_+ \oplus (0,\ 0,\ c)_-$	-	-	+
	$(v,c,0)_+ \oplus (c,v,s)_-$	$(s,\ 0,\ c)_+ \oplus (0,\ s,\ v)_-$	-	+	-
	$(c,v,0)_+ \oplus (v,c,s)_-$	$(0,\ s,\ c)_+ \oplus (s,\ 0,\ v)_-$	+	-	-

表12：将未扭曲、 Q_1-、 Q_2-和 Q_3-扭曲扇区分解为$\hat{}so(8)_1^a \oplus \hat{}so(8)_1^b \oplus \hat{}so(8)_1^c$表示。

轨形 $F(24)/\langle Q_1\rangle$ 包含未扭曲表示以及 Q_1 不变的 Q_1 扭曲表示。对称性 Q_1 对前 8 个 NS自由费米子 ψ^1，……， ψ^8 的作用是平凡的；这些费米子生成 $F(24)/\langle Q_1\rangle$ 的一个 $F(8)$ 子超顶点算子代数，其中包含仿射代数 $\hat{so}(8)_1^a$。另一方面，其余 16 个自由费米子 ψ^9，……， ψ^{24} 被投影掉，而 $\hat{so}(8)_1^b \oplus \hat{so}(8)_1^c$ 代数则由以下扇区中的流增强

$$(0,v,v)_+, \qquad (0,s,s)_+, \qquad (0,c,c)_+ \tag{4.33}$$

到$\hat{}e_{8,\ 1}$仿射代数。总之，轨形理论为 $F(24)/\langle Q_1\rangle \cong F(8)\otimes V^{E_8} \cong V^{fE_8}$。

另一方面，轨形 $F(24)/\langle Q_1,\ Q_2\rangle = V^{fE_8}/\langle Q_2\rangle$ 包含在 Q_1、 Q_2和 Q_3作用下保持不变的未扭曲、 Q_1-、Q_2-和 Q_3-扭曲表示。具体而言，轨形 $F(24)/\langle Q_1,\ Q_2\rangle \cong V^{f\natural}$ 包含以下代数 $\hat{so}(8)_1^a \oplus \hat{so}(8)_1^b \oplus \hat{so}(8)_1^c$ 在（4.29）中的表示:

$$F(24)/\langle Q_1,Q_2\rangle \cong V^{f\natural}: \begin{cases} \text{NS}+: & (0,0,0)_+ \oplus (v,v,0)_+ \oplus (0,v,v)_+ \oplus (v,0,v)_+ \\ \text{NS}-: & (s,s,s)_- \oplus (c,c,s)_- \oplus (s,c,c)_- \oplus (c,s,c)_- \\ \text{R}+: & (v,0,0)_+ \oplus (0,v,0)_+ \oplus (0,0,v)_+ \oplus (v,v,v)_+ \\ \text{R}-: & (c,s,s)_- \oplus (s,c,s)_- \oplus (s,s,c)_- \oplus (c,c,c)_- \end{cases} \tag{4.34}$$

代数 (4.29) 由 $(0,v,v)_+$、$(v,0,v)_+$和$(v,v,0)_+$ 中的权 1 基态场扩展为 $\hat{so}(24)_1$ 仿射代数，其流生成了 $F(24)/\langle Q_1,Q_2\rangle$ 中的所有玻色 NS 算符。费米 NS 场结合成 $\hat{so}(24)_1$ 的旋量表示。

这表明 $F(24)/\langle Q_1, Q_2\rangle \cong V^{f\natural}$。特别是， $V^{f\natural}$ 中 24 维的 Ramond 基态空间包含在表示 $(v, 0, 0)_+$、$(0, v, 0)_+$ 和 $(0, 0, v)_+$ 中，它们通常组合成 $\widehat{so}(24)_1$，的向量表示。

在这种描述中，我们可以将框架形状为 $1^8 2^8$ 的 $V^{f\natural}$ 的对称性 g 识别为群 $Spin(8)^c$ 的一个中心元；该群由子代数 $\widehat{so}(8)_1^c$ 中的流生成，而这些流对应于 (4.29) 中的第三分量。更准确地说， $g \in Spin(8)^c$ 是一个在 $\widehat{so}(8)_1^c$ 的 v 和 c 表示上作用为 -1、而在 0 和 s 表示上平凡作用的元素。$\widehat{so}(24)_1$ 中由 g 保持的 NS 仿射子代数由 (4.29) 及其表示 $(v, v, 0)_+$ 给出；它们组合成 $\widehat{so}(16)_1 \oplus \widehat{so}(8)_1^c$。因此，第 4 节开头的分析表明， g-轨形 $V^{f\natural}/\langle g\rangle$ 包含 (4.29) 中 $\widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b \oplus \widehat{so}(8)_1^c$ 的以下表示：

$$V^{f\natural}/\langle g\rangle : \begin{cases} \text{NS untwisted:} & (0,0,0)_+ \oplus (v,v,0)_+ \oplus (s,s,s)_- \oplus (c,c,s)_- \\ \text{NS } g\text{-twisted:} & (0,v,c)_+ \oplus (v,0,c)_+ \oplus (s,c,v)_- \oplus (c,s,v)_- \\ \text{R untwisted:} & (v,0,0)_+ \oplus (0,v,0)_+ \oplus (c,s,s)_- \oplus (s,c,s)_- \\ \text{R } g\text{-twisted:} & (0,0,c)_+ \oplus (v,v,c)_+ \oplus (s,s,v)_- \oplus (c,c,v)_- \end{cases} \tag{4.35}$$

下面构造两个不同的对偶缺陷 $\mathcal{N}_{(1)g}$和 $\mathcal{N}_g^{(2)}$，它们显式地保持 g 的超流（4.26）。如上所述，算符 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(i)}$ 必须在代数 $\widehat{so}(16)_1 \supset \widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b$ 上以内部自同构的方式作用，并在 $\widehat{so}(8)_1^c$ 上以外自同构的方式作用，交换 v 和 c 表示。此外，它在 g- 不变场空间上的作用必须具有阶 2。定义这类算符时，描述它们在 24 个自由费米子 $\psi^1, \ldots, \psi^{24}$ 上的作用会更为简便，具体如下

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(1)} : \begin{cases} \psi^1 \leftrightarrow \psi^2 & \psi^3 \to -\psi^3 & \psi^4 \to -\psi^4 & \psi^5 \to -\psi^5 \\ \psi^9 \leftrightarrow \psi^{10}, & \psi^{11} \to -\psi^{11} & \psi^{12} \to -\psi^{12} & \psi^{13} \to -\psi^{13} \\ \psi^{17} \leftrightarrow \psi^{18} & & & \\ \psi^i \to \psi^i \quad \text{otherwise} & & & \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(2)} : \begin{cases} \psi^1 \leftrightarrow \psi^2, & & \psi^4 \to -\psi^4 & \psi^5 \to -\psi^5 & \psi^6 \to -\psi^6\ , \\ \psi^9 \leftrightarrow \psi^{10}, & \psi^{11} \to -\psi^{11} & & \psi^{13} \to -\psi^{13} & \psi^{14} \to -\psi^{14} \\ \psi^{17} \leftrightarrow \psi^{18}, & \psi^{19} \to -\psi^{19} & \psi^{20} \to -\psi^{20} & & \\ \psi^i \to \psi^i \quad \text{otherwise} & & & & \end{cases} \tag{4.37}$$

严格来说，24 个费米子 $\psi^1, \ldots, \psi^{24}$ 并非 $V^{f\natural}$ 中的场，因此我们实际上将 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(i)}$ 定义为由这些算符在费米子上的作用所诱导的 $\widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b \oplus \widehat{so}(8)_1^c$ 的自同构。对合 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(i)}$ 的选取方式确保子超流（4.26）保持不变。下面通过将作用（4.36）和（4.37）与（4.13）中的对 $(S_{\mathcal{N}}^{(16)}, O_{\mathcal{N}}^{(8)})$ 以及格自同构（4.21）联系起来，说明这些公式给出了 g 的良定义对偶缺陷。表13列出了 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(1)}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(2)}$ 在由 $\{\psi^1, \ldots, \psi^8\}$、$\{\psi^9, \ldots, \psi^{16}\}$ 和 $\{\psi^{17}, \ldots, \psi^{24}\}$ 张成的三个费米子空间上的特征值。

回想一下，这三组自由费米子分别按 $s, 0, 0)$、$(0, s, 0)$ 和 $(0, 0, s)$ 表示变换。因此，对 $\psi^{17}, \ldots, \psi^{24}$ 的作用直接给出

	$\{\psi^1,\dots,\psi^8\}$	$\{\psi^9,\dots,\psi^{16}\}$	$\{\psi^{17},\dots,\psi^{24}\}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \hat{g}^{\mathcal{N}^{(1)}}$	$(+1)^4,(-1)^4$	$(+1)^4,(-1)^4$	$(+1)^7,(-1)^1$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\ \hat{g}^{\mathcal{N}^{(2)}}$	$(+1)^4,(-1)^4$	$(+1)^4,(-1)^4$	$(+1)^5,(-1)^3$

表13：三个自由费米子集合上 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(1)}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}^{(2)g}$ 的特征值。

式 (4.13) 中的矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(8)}$，其中 $(O_{\mathcal{N}}^{(8)})^2=1$。此外，$\psi^{17},\dots,\psi^{24}$ 上的 -1 特征值个数为奇数，这意味着 $\det O_{\mathcal{N}}^{(8)}=-1$，因此在 $\widehat{so}(8)_1^c$ 上诱导的自同构是外自同构，并交换 v 表示与 c 表示，正如对偶缺陷所要求的那样。我们还可以考虑算符 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(1)}Q_1$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}^{(2)}{}_g\ Q_1$，使得由 $\psi^{17},\dots,\psi^{24}$ 生成的空间上 (-1)-特征值的重数分别为 7 和 5。然而，由于 Q_1 在 $V^{f\natural}$ 上是平凡的，我们不会得到任何新的对偶缺陷。

另一方面，如 (4.36) 或 (4.37) 中所示，$\{\psi^1,\dots,\psi^8\}$ 和 $\{\psi^9,\dots,\psi^{16}\}$ 上的作用分别确定了 $Spin(8)^a/\langle(-1)_8^a\rangle$ 和 $Spin(8)^b/\langle(-1)_8^b\rangle$ 中的元素，其中 $(-1)_8^a$ 和 $(-1)_8^b$ 是 $Spin(8)^a$ 和 $Spin(8)^b$ 的中心元，它们在 s 表示上作用平凡。这些自由费米子集合张成的空间中，(-1)-特征值的数量是 4 的倍数（见表13），这确保了 $Spin(8)^a/\langle(-1)_8^a\rangle$ 和 $Spin(8)^b/\langle(-1)_8^b\rangle$ 中的这两个对合可提升为相应群 $Spin(8)^a$ 和 $Spin(8)^b$ 中的阶 2 元素。相反，若我们选择 $\{\psi^1,\dots,\psi^8\}$ 和 $\{\psi^9,\dots,\psi^{16}\}$ 上 (-1)-特征值的重数为模 4 同余于 2，它们就会提升为 $Spin(8)$ 中的阶 4 元素。一般而言，可以验证，给定 $Spin(8)/\langle(-1)_8\rangle$ 中的一个元素，它在 s 表示上的特征值为 $(+1)^4$,$(-1)^4$，那么它在 $Spin(8)$ 中的两个提升作用于向量表示时，都具有相同的特征值重数，即 $(-1)^4$,$(+1)^4$,；这两个提升彼此相关，只需在 v 表示中交换 $+1$ 和 -1 特征子空间即可。由于它们在 s 和 v 表示上的特征值都相同，因此这两个提升在 $Spin(8)$ 中共轭。

对于 $\{\psi^1,\dots,\psi^8\}$ 和 $\{\psi^9,\dots,\psi^{16}\}$ 上的作用 (4.36) 和 (4.37)，我们分别选择从 $Spin(8)^a/\langle(-1)_8^a\rangle$ 和 $Spin(8)^b/\langle(-1)_8^b\rangle$ 到 $Spin(8)^a$ 和 $Spin(8)^b$ 的提升。通过同态 $Spin(8)^a\times Spin(8)^b\to Spin(16)$，这对提升映射为 (4.13) 中的一个对合 $S_{\mathcal{N}}^{(16)}\in Spin(16)$，从而在 $\widehat{so}(16)_1\supset\widehat{so}(8)_1^a\oplus\widehat{so}(8)_1^b$ 上确定一个阶 2 的内自同构。这一论证完成了证明：作用 (4.36) 和 (4.37) 确定了 $\widehat{so}(16)_1\supset\widehat{so}(8)_1$ 上两对不同的自同构 $(S_{\mathcal{N}}^{(16)},\ O_{\mathcal{N}}^{(8)})$，它们保持 $\mathcal{N}=1$ 超流，并满足 $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathcal{N}}_g$ 的所有必要性质。

正如前一节所强调的，这里构造的保持 $\mathcal{N}=1$ 不变的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 并不唯一。事实上，从其中任意一个开始，例如 $\mathcal{N}_g^{(1)}\equiv(S_{\mathcal{N}}^{(16)},\ O_{\mathcal{N}}^{(8)})$，都可以通过将 $(h_1S_{\mathcal{N}}^{(16)}h_2,\ h_1O_{\mathcal{N}}^{(8)}h_2)$ 与元素$h_1,\ h_2\in C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$ 复合，得到其他所有缺陷，包括 $\mathcal{N}_g^{(2)}$，其中 $h_1S_{\mathcal{N}}^{(16)}h_2$ 和 $h_1O_{\mathcal{N}}^{(8)}h_2$ 仍然是对合。另一方面，我们可以论证，所有这类对合 $h_1S_{\mathcal{N}}^{(16)}h_2$ 和 $h_1O_{\mathcal{N}}^{(8)}h_2$ 在 $Spin(16)\times O(8)$ 的所有 g-不变表示上的特征值，都分别与 $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 或 $\mathcal{N}^{(2)}{}_g$ 相同，因此它们可通过在 $Spin(16)\times Spin(8)$ 内进行共轭，与这两个缺陷之一建立联系。例如，对于任意对偶缺陷 $\mathcal{N}$，相应的对合 $S_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 在 $Spin(16)$ 的向量表示中必须具有特征值 $(+1)^8$,$(-1)^8$，才能与其在 $\Lambda^g\otimes\mathbb{R}$ 上的预期作用（4.18）相匹配。这样的 $Spin(16)$ 元素必然同时作用于 s 和

c 表示，其中一半具有特征值 $+1$ ，另一半具有 -1。至于 $O_{\mathcal{N}}^{(8)}$ ，由于其在 s-表示上的作用必须是具有负行列式的对合， -1 特征值的重数必为 1、3、5 或 7。注意，($S_{\mathcal{N}}^{(16)}$,$O_{\mathcal{N}}^{(8)}$) 和 ($\xi_{16}S_{\mathcal{N}}^{(16)}$,$\xi_8 O_{\mathcal{N}}^{(8)}$) 在所有 g- 不变场上的作用相同，其中 $\xi_{16} \in Spin(16)$ 和 $\xi_8 \in Spin(8)$ 是中心元，分别在相应自旋群的 s 和 c 表示上非平凡作用。因此，不失一般性，我们可以假设 $O_{\mathcal{N}}^{(8)}$ 在s-表示上的 -1 特征值数量为 1 或 3，分别与 $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 和 $\mathcal{N}(2)_g$ 的情形相同。对 ($S_{\mathcal{N}}^{(16)}$,$O_{\mathcal{N}}^{(8)}$) 特征值的分析表明， g 的所有可能对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ ，都可通过在 $Spin(16) \times SO(8)$ 内共轭，与 $\mathcal{N}(1)_g$ 或 $\mathcal{N}(2)_g$ 中的一个建立联系。因此，它们的缠绕配分函数以及由其生成的融合范畴，与 $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 或 $\mathcal{N}(2)_g$ 相同。通过计算机计算，我们验证了式（A.2）中的矩阵 $O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 对应于一个与 $\mathcal{N}_g^{(2)}$ 具有相同特征值的缺陷。另一方面，一个与$\mathcal{N}_g^{(1)}$具有相同特征值的缺陷可表示为矩阵 $h_1 O_{\mathcal{N}}^{(16)}$ ，其中 $h_1 \in C_{Co_0}(g)$ 由下式给出

$$h_1 = (\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1), \mathrm{diag}(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1)) \ , \tag{4.38}$$

其中，第一个分量是子格 $\Lambda_{16} \subset \Lambda$ 的自同构，第二个分量是其正交补 $\Lambda_{16}^{\perp} \cap \Lambda$ 的自同构。

最后，让我们确定场 $V^{f\natural}$ 的子空间中分别被两个缺陷 $\mathcal{N}(1)_g$ 和 $\mathcal{N}(2)_g$ 保持不变的部分。缺陷 $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 保持子代数 $\widehat{so}(4)_1^{a+} \oplus \widehat{so}(4)_1^{a-} \subset \widehat{so}(8)_1^a$、 $\widehat{so}(4)_1^{b+} \oplus \widehat{so}(4)_1^{b-} \subset \widehat{so}(8)_1^b$ 和 $\widehat{so}(7)_1^c \oplus \subset \widehat{so}(8)_1^c$ 不变。它还保持 $\widehat{so}(8)_1^a \oplus \widehat{so}(8)_1^b \oplus \widehat{so}(8)_1^c$ 的 $(v,v,0)$ 表示中 64 个流里的 32 个不变。具体而言，其中 16 个使 $\widehat{so}(4)_1^{a+} \oplus \widehat{so}(4)_1^{b+}$ 增强为 $\widehat{so}(8)_1^+$，另 16 个则使 $\widehat{so}(4)_1^{a-} \oplus \widehat{so}(4)_1^{b-}$ 增强为 $\widehat{so}(8)_1^-$。此外， $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 还保持 $\widehat{so}(8)_1^c$ 的 Sugawara 应力张量与其子代数 $\widehat{so}(7)_1^c$ 的 Sugawara 应力张量之差不变；这是一个权为 2 的算子，可生成一份 $Vir_{c=1/2}$ 代数。总而言之， $\mathcal{N}_g^{(1)}$ 保持不变的玻色子代数为

$$V(\widehat{so}(8)_1^+ \oplus \widehat{so}(8)_1^- \oplus \widehat{so}(7)_1^c) \otimes Vir_{c=1/2} \ . \tag{4.39}$$

类似的论证表明， $\mathcal{N}_g^{(2)}$保留了仿射代数

$$\widehat{so}(8)_1^+ \oplus \widehat{so}(8)_1^- \oplus \widehat{so}(5)_1^c \oplus \widehat{so}(3)_1^c \tag{4.40}$$

其 Sugawara 应力张量与 $V^{f\natural}$的应力张量一致。

最后，我们注意到，对称性 g 和对偶缺陷$\mathcal{N}_g^{(i)}$在理论$F_{24}/\langle Q_1 \rangle \cong V^{fE_8}$上也有良好定义。在原理论 $F(24)$上， g 对应于在 NS 场上平凡作用、并在 Ramond 扇区上通过 -1 作用的对称性，因此轨形 $F(24)/\langle g \rangle$ 与 $F(24)$同构，但 Ramond 扇区上的费米子数选择相反。

4.3 对偶缺陷配分函数与缠绕亏格

本节中，我们计算前一节定义的缺陷$\mathcal{N}_g^{(1)}$和 $\mathcal{N}_{(2)^g}$的缠绕配分函数和缠绕亏格

利用公式 (B.13)、(B.14) 和 (B.15)，以及表 10 中关于 g-保留的仿射代数 $\widehat{so}(16)_1 \oplus \widehat{so}(8)_1$，的分解，可以直接验证， $V^{f\natural}$ 的配分函数 $\mathcal{Z}(V^{f\natural}, \ \tau) := (Z^+{}_{\mathrm{NS}}$（纽曼-施瓦茨） $Z^-{}_{\mathrm{NS}}$（纽曼-施瓦茨） $Z^+{}_{\mathrm{R}} \ Z^-{}_{\mathrm{R}})^t$，其定义如 (2.6) 和 (2.7) 中所示，对于

$\mathcal{L}$ 恒等缺陷，可以通过以下公式重现

$$Z^{\pm}_{\rm NS}(\tau) = {\rm ch}_{[0,0]}(\tau)+{\rm ch}_{[v,v]}(\tau)\pm{\rm ch}_{[s,s]}(\tau)\pm{\rm ch}_{[c,c]}(\tau) \quad (4.41)$$

$$Z^{\pm}_{\rm R}(\tau) = {\rm ch}_{[v,0]}(\tau)+{\rm ch}_{[0,v]}(\tau)\pm{\rm ch}_{[c,s]}(\tau)\pm{\rm ch}_{[s,c]}(\tau) \quad (4.42)$$

其中我们定义了 ${\rm ch}_{[i,j]}:={\rm ch}^{(16)}_i(\tau)\,{\rm ch}^{(8)}_j(\tau)$，其中 i、$j\in\{0,v,s,c\}$。现在我们考虑缺陷缠绕配分函数 $\mathcal{Z}^{\mathcal{N}}(V^{f\natural},\tau)$：$=(Z^{\mathcal{N},+{\rm NS}}\ Z^{\mathcal{N},+{\rm NS}}\ Z^{\mathcal{N},+{\rm R}}\ Z^{\mathcal{N},-{\rm R}})^t$，其定义见方程（2.6）和（2.7），其中 $\mathcal{N}=\mathcal{N}^{(1)}_g$或 $\mathcal{N}(2)_g$。对偶缺陷 $\mathcal{N}$湮灭所有属于 v 或 c 表示的 $\widehat{so}(8)_1$, 中的场，因此我们只需考虑 $\widehat{so}(16)_1\oplus\widehat{so}(8)_1$的 $(0,0)$、(s,s)、$(v,0)$ 和 (c,s) 表示的贡献。对于由一对 $(S^{(16)}_{\mathcal{N}},O^{(8)}_{\mathcal{N}})$ 定义的 $\mathcal{N}$，如前一节所述（见方程（4.13）），相应的缺陷缠绕配分函数在形式上将写成

$$Z^{\mathcal{N},\pm}_{\rm NS}(\tau) = \sqrt{2}\,{\rm ch}^{\mathcal{N}}_{[0,0]}(\tau) \quad (4.43)$$

$$Z^{\mathcal{N},\pm}_{\rm R}(\tau) = \sqrt{2}\,{\rm ch}^{\mathcal{N}}_{[v,0]}(\tau) \quad (4.44)$$

其中我们引入了 ${\rm ch}^{\mathcal{N}}_{[i,j]}(\tau):=\sqrt{2}\,{\rm ch}^{(16)\ S_{\mathcal{N}}}_i(\tau)\,{\rm ch}^{(8)\ O_{\mathcal{N}}}_j(\tau)$，其中

$${\rm ch}^{(16),S_{\mathcal{N}}}_{\rho}(\tau):={\rm Tr}_{\rho^{(16)}}S^{(16)}_{\mathcal{N}}q^{L_0-1/3},\qquad {\rm ch}^{(8),O_{\mathcal{N}}}_{\rho}(\tau):={\rm Tr}_{\rho^{(8)}}O^{(8)}_{\mathcal{N}}q^{L_0-1/6}. \quad (4.45)$$

为了理解为什么所有其他扇区都不对缺陷缠绕配分函数作出贡献，我们需要显式计算特征标。让我们考虑由 $2n$ 自由费米子描述的一般 $\hat{}so(2n)_1$ 代数。设 $\mathcal{O}\in SO(2n)$ 是一个作用于自由费米子上的 $2n\times 2n$矩阵，其特征值为 $(\zeta_{\mathcal{N},\,i},\ \zeta^{-1}_{\mathcal{N},\,i})$，$i=1,\ .....,\ n$，其中$\zeta_{\mathcal{N},\,i}=e^{-2\pi i\beta_{\mathcal{N},\,i}}$，且对 $\beta_{\mathcal{N},\,i}\in[0,\frac{1}{2}]$ 成立。不同表示中的扭曲特征标可以表示为

$${\rm ch}^{(2n),\mathcal{O}}_0(\tau) = \frac{1}{2\eta(\tau)^n}\left(\prod_{i=1}^n\theta_3(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})+\prod_{i=1}^n\theta_4(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})\right) \quad (4.46)$$

$${\rm ch}^{(2n),\mathcal{O}}_v(\tau) = \frac{1}{2\eta(\tau)^n}\left(\prod_{i=1}^n\theta_3(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})-\prod_{i=1}^n\theta_4(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})\right) \quad (4.47)$$

$${\rm ch}^{(2n),\mathcal{O}}_s(\tau) = {\rm ch}^{(2n),\mathcal{O}_{\mathcal{N}}}_c(\tau)=\pm\frac{1}{2}\prod_{i=1}^n\frac{\theta_2(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})}{\eta(\tau)^n}. \quad (4.48)$$

现在，在我们所关注的情形中，我们考虑代数 $\hat{}so(16)_1$，矩阵 $\mathcal{O}=\mathcal{O}^{(16)}_{\mathcal{N}}$ 是 $SO(16)$ 中对应于前一节所描述的自同构 $S^{(16)}_{\mathcal{N}}$ 的元素，对于 $\mathcal{N}^{(1)}_g$和 $\mathcal{N}(2)_g$ 均成立，在投影 $Spin(16)\to SO(16)$ 下。$\mathcal{O}^{(16)}_{\mathcal{N}}$ 以八个特征值 $+1$ 和八个特征值 -1 作用于费米子。等价地，对于 $i=1,\ .....,\ 4$，我们有 $\beta_{\mathcal{N},i}=0$；对于 $i=5,\ .....,\ 8$，我们有 $\beta_{\mathcal{N},i}=1/2$；对于 $O^{(16)}_{\mathcal{N}^{\,1}}(\,)_g$ 和 $O^{(16)}_{\mathcal{N}^{\,2}}(\,)_g$ 均如此。由于 $\theta_2(\tau,\beta_{\mathcal{N},i})$ 中 $i=5,\ .....,\ 8$ 所对应的因子 $(e^{-\pi i\beta_{\mathcal{N},\,i}}-e^{\pi i\beta_{\mathcal{N},i}})$（它们源自费米子零模），方程 (4.48) 中的迹随即为零。此外，对于这一特征值集合，显然 ${\rm ch}^{(16)\ \mathcal{O}_{\mathcal{N}}}_{v,}(\tau)=0$，因为 θ_3 和 θ_4 的贡献恰好相消。因此，甚至配分函数 $Z^{\mathcal{N}}(1)_{g,\pm{\rm R}}(\tau)=Z^{\mathcal{N}^{(2)}_g,\pm{\rm R}}(\tau)=0$ 也恒等为零。

因此，我们只需确定 $O^{(8)}_{\mathcal{N}}$ 在 $\widehat{so}(8)_1$的 0 表示上的迹。如前一节所述，$\widehat{so}(8)_1$ 的外自同构有两种情况：$O^{(8)}_{\mathcal{N}^{\,(1)g}}$保留一个 $\widehat{so}(7)_1\oplus\widehat{so}(1)_1$,，而 $O^{(8)}_{\mathcal{N}^{(2)}_g}$保留一个 $\widehat{so}(5)_1\oplus\widehat{so}(3)_1$。

通过$\hat{so}(8)_1$ 代数的费米子表示，我们可以计算相应的缠绕迹。在 $\mathcal{O}^{(8)}_{\mathcal{N}_g^{(1)}}$的情况下，有一个特征值等于 -1 ，另有七个特征值等于 $+1$，由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_0^{(8),O_{\mathcal{N}_g^{(1)}}}(\tau) &= \frac{\sqrt{\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)}(\theta_3^3(\tau)+\theta_4^3(\tau))}{2\eta^4(\tau)} &(4.49)\\ &= q^{-1/6}+14q^{5/6}+36q^{11/6}+120q^{17/6}+\ldots, &(4.50)\end{aligned}$$

对于 $\mathcal{O}^{(8)}_{\mathcal{N}_g^{(3)}}$，有三个特征值等于 -1 ，五个特征值等于 $+1$。相应的特征标形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_0^{(8),O_{\mathcal{N}_g^{(2)}}}(\tau) &= \frac{\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)\sqrt{\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)}(\theta_3(\tau)+\theta_4(\tau))}{2\eta^4(\tau)} &(4.51)\\ &= q^{-1/6}-2q^{5/6}+4q^{11/6}-8q^{17/6}+\ldots. &(4.52)\end{aligned}$$

将这些特征标组合起来，我们计算得到 (4.41) 中的缺陷缠绕配分函数：$\mathcal{N}_{(1)g}$

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{NS}}^{\mathcal{N}_g^{(1)},\pm}(\tau) &= \sqrt{2}\,\mathrm{ch}_0^{(16),O_{\mathcal{N}}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(8),\mathcal{O}_{\mathcal{N}_g^{(1)}}}(\tau) &(4.53)\\ &= \sqrt{2}\frac{(\theta_3^3+\theta_4^3)(\theta_3\theta_4)^{9/2}}{2\eta^{12}} &(4.54)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}+6q^{1/2}-48q^{3/2}+160q^{5/2}-447q^{7/2}+\ldots\right), &(4.55)\end{aligned}$$

以及对于 $\mathcal{N}_g^{(2)}$

$$\begin{aligned}Z_{\mathrm{NS}}^{\mathcal{N}_g^{(2)},\pm}(\tau) &= \sqrt{2}\,\mathrm{ch}_0^{(16),O_{\mathcal{N}}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(8),\mathcal{O}_{\mathcal{N}_g^{(2)}}}(\tau) &(4.56)\\ &= \sqrt{2}\frac{(\theta_3+\theta_4)(\theta_3\theta_4)^{11/2}}{2\eta^{12}} &(4.57)\\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{q}}-10q^{1/2}+48q^{3/2}-160q^{5/2}+449q^{7/2}+\ldots\right) &(4.58)\end{aligned}$$

利用 η 和 θ_i 在 S 变换 $\tau\to-1/\tau$ 下的模性质（见附录 B），我们得到以下缺陷扭曲配分函数

$$\begin{aligned}Z^{\pm}_{\mathcal{N}_g^{(1)},\mathrm{NS}}(\tau) &= \sqrt{2}\frac{(\theta_3^3+\theta_2^3)(\theta_3\theta_2)^{9/2}}{2\eta^{12}} &(4.59)\\ &= 16q^{1/16}+128q^{7/16}+240q^{9/16}+1152q^{15/16}+1824q^{17/16}+\ldots &(4.60)\\ Z^{\pm}_{\mathcal{N}_g^{(2)},\mathrm{NS}}(\tau) &= \sqrt{2}\frac{(\theta_3+\theta_2)(\theta_3\theta_2)^{11/2}}{2\eta^{12}} &(4.61)\\ &= 32q^{3/16}+64q^{5/16}+416q^{11/16}+704q^{13/16}+2848q^{19/16}+\ldots. &(4.62)\end{aligned}$$

请注意，二者都具有正的整数简并度，这与预期相符。如 [8], 中所述， $\mathcal{N}$ 扭曲扇区中态的自旋与参数 $\epsilon\in\{\pm1\}$ 直接相关，该参数决定相应的 Tambara-Yamagami 范畴 TY($\mathbb{Z}_2$, ϵ)。根据表 8 总结的自旋选择规则，我们看到 $\mathcal{N}_{(1)g}$ 生成 TY($\mathbb{Z}_2$,+1)，而 $\mathcal{N}_g^{(2)}$ 生成 TY($\mathbb{Z}_2$, -1)。

最后，我们来计算 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷的缺陷缠绕亏格 (2.18)。首先介绍表中所列的 $V^{f\natural}$ 由 $\widehat{so}(16)_1\oplus\widehat{so}(8)_1$ 模给出的表示

10。Ramond 扇区（记作 $V_{tw}^{f\natural}$）由 $(v,\ 0)\oplus(0,\ v)\oplus(c,\ s)\oplus(s,\ c)$ 给出，其中 $(-1)^F$ 算符在 $(v,\ 0)$ 和 $(0,\ v)$ 上的特征值为 $+1$，在 $(c,\ s)$ 和 $(s,\ c)$ 上的特征值为 -1。如第 2.3 节所述，若我们选取一个 $c=6$ $\mathcal{N}=4$ 超共形代数，其中 $\widehat{su}(2)_1$ 包含在 $\widehat{so}(16)_1$, 中，则分次迹 (2.18) 应当重现 K3 的椭圆亏格。

我们选择四平面位于由 g 保持不变的 $\widehat{su}(2)_1\subset\widehat{so}(4)_1\subset\widehat{so}(16)_1$ 中。因此，我们可以按照 $\widehat{su}(2)_1$ 的 Cartan子代数对 $\widehat{so}(16)_1$ 进行分次，使得 $\mathrm{ch}_\rho^{(16)}(\tau,z):=\mathrm{Tr}_{\rho^{(16)}}\, y^{J_0^3}q^{L_0-1/3}$ for $\rho\in\{0,v,s,c\}$。相应特征标的显式形式见 (B.16)–(B.18)。椭圆亏格公式 (2.18) 可用这些特征标表示为

$$\begin{aligned}\phi(V^{f\natural},\tau,z)=&\,\mathrm{ch}_v^{(16)}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_0^{(8)}(\tau)+\mathrm{ch}_0^{(16)}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_v^{(8)}(\tau)-\mathrm{ch}_c^{(16)}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_s^{(8)}(\tau)-\mathrm{ch}_s^{(16)}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_c^{(8)}(\tau)\\ =&\frac{2}{y}+20+2y+\left(\frac{20}{y^2}-\frac{128}{y}+216-128y+20y^2\right)q+\ldots\end{aligned}\tag{4.63}$$

现在我们考虑相应的缺陷缠绕属 $\phi^{\mathcal{N}}(V^{f\natural},\tau,z)$，其中 $\mathcal{N}=\mathcal{N}_g^{(1)},\mathcal{N}_{(2)^g}$。纳入 $y^{J_0^3}$ 分次后，公式由 (4.44) 给出。在此情况下，缠绕的 $\widehat{so}(16)_1$ 特征标不再为零；其表达式为

$$\mathrm{ch}_v^{(16),S_{\mathcal{N}}}(\tau,z):=\mathrm{Tr}_v(S_{\mathcal{N}}y^{J_0^3}q^{L_0-1/3})=\frac{1}{2}\frac{\left(\theta_3^2(\tau,z)\theta_3^2(\tau)\theta_4^4(\tau)-\theta_4^2(\tau,z)\theta_4^2(\tau)\theta_3^4(\tau)\right)}{\eta^8(\tau)},\tag{4.64}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}_g^{(1)}}(V^{f\natural},\tau,z)&=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}_v^{(16),S_{\mathcal{N}_g^{(1)}}}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_0^{(8),O_{\mathcal{N}_g^{(1)}}}(\tau)\\&=\sqrt{2}\frac{\left(\theta_3^2(\tau,z)\theta_4^2-\theta_4^2(\tau,z)\theta_3^2\right)(\theta_3^3+\theta_4^3)(\theta_3\theta_4)^{5/2}}{4\eta^{12}(\tau)}\\&=\sqrt{2}\left(\frac{2}{y}-4+2y+\left(-\frac{4}{y^2}+\frac{36}{y}-64+36y-4y^2\right)q+\ldots\right)\end{aligned}\tag{4.65}$$

and

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}_g^{(2)}}(V^{f\natural},\tau,z)&=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}_v^{(16),S_{\mathcal{N}_g^{(2)}}}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_0^{(8),O_{\mathcal{N}_g^{(2)}}}(\tau)\\&=\sqrt{2}\frac{\left(\theta_3^2(\tau,z)\theta_4^2-\theta_4^2(\tau,z)\theta_3^2\right)(\theta_3+\theta_4)(\theta_3\theta_4)^{7/2}}{4\eta^{12}(\tau)}\\&=\sqrt{2}\left(\frac{2}{y}-4+2y+\left(-\frac{4}{y^2}+\frac{4}{y}+4y-4y^2\right)q+\ldots\right).\end{aligned}\tag{4.66}$$

在下一节中，我们将在一个 K3 非线性σ模型中构造一个 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷，其缺陷带扭椭圆属与 $\phi^{\mathcal{N}_g^{(2)}}(V^{f\natural},\ \tau,\ z)$相匹配。

5 一个保留 $\mathcal{N}=(4,\ 4)$的具有 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷的 K3 模型

在本节中，我们构造一个具有 $\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami融合范畴对称性的 K3 非线性σ模型，该对称性保留 $\mathcal{N}=(4,\ 4)$超共形代数。我们的构造推广了圆上的自由玻色子 S^1 这一情形；该情形曾在例如 [12], 中被研究过，下面我们将对此作简要回顾。

设目标空间圆 S^1 的半径为 $\sqrt{2}R_{sd}$，其中 R_{sd} 是 T对偶下的自对偶半径（在此半径处，$u(1)$ 流代数增强为 $\widehat{su}(2)_1$）。在 [12],

文中证明，在这一特定半径下， S^1 模型存在一些生成 $\mathbb{Z}_2$ Tambara-Yamagami 范畴的拓扑缺陷。特别是，该范畴中的 $\mathbb{Z}_2$ 可逆缺陷对应于沿圆对自由玻色子进行半周期平移。对 S^1 模型施加这种 $\mathbb{Z}_2$ 对称性的轨形化，再次得到圆上的自由玻色子，但其半径是原来的一半 $R' = R_{sd}/\sqrt{2}$。因此，原模型与其 $\mathbb{Z}_2$ 轨形化模型在 T对偶下等价。这意味着存在一个对偶缺陷，也揭示了这种缺陷如何作用于该理论的算符。

受此例启发，我们现在将构造这样一个具有 $TY(\mathbb{Z}_2)$ 个拓扑缺陷的 K3 模型，它是特定 σ 模型在 T^4 上的轨形 $T^4/\mathbb{Z}_2$。设 $\mathcal{R}$ 为 T^4 的 $\mathbb{Z}_2$ 反射对称性，其对 T^4 坐标的作用为 $X^k \to -X^k$，对这些坐标的费米超伴侣的作用为 $\psi^k \to -\psi^k, \bar{\psi}^k \to -\bar{\psi}^k$。设 g 为沿环面某一周向的半周期平移。任意 T^4 模型按半周期平移 g 取轨形后，仍是环面T^4/g上的 σ 模型，它通过平移 g 对点进行识别而得到。此外， g 与 $\mathcal{R}$ 对易，并在 K3 模型 $T^4/\mathcal{R}$ 上产生具有框架形状 $1^8 2^8$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。

现在，我们的思路是选择环面的几何，使得对于适当的半周期平移 g，原来的 T^4 与商 T^4/g 在四个方向上由 T 对偶联系起来。这意味着，作为一个共形场论，定义在这种 T^4 上的 σ 模型相对于群 $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ 是自轨形的。显然，当相应的对偶缺陷 $\mathcal{N}$ 穿过任意 g 不变局域算符时，其作用方式与 T 对偶相同。由于四重 T 对偶在 $\mathcal{N} = (4,4)$ 超共形代数上作用平凡，[9] 因此 $\mathcal{N}$ 保持这一代数。最后，可以选择 g 和 $\mathcal{N}$，使它们与 $\mathbb{Z}_2$ 反射对称性 $\mathcal{R}$ 对易。因此，它们在 K3 模型 $T^4/\mathcal{R}$ 中产生拓扑缺陷，构成一个保持 $\mathcal{N} = (4,4)$ 超共形代数的 Tambara-Yamagami $\mathbb{Z}_2$ 范畴。

5.1 Z_2 对偶缺陷

现在让我们更详细地描述定义在 T^4 上的 σ 模型。要定义这样的模型，只需指定其顶点算符集合 $\mathcal{V}_{(\lambda_L,\lambda_R)}(z,\bar{z})$，其中 $\lambda_L \equiv (\lambda_L^1,\ldots,\lambda_L^4)$ 和$\lambda_R \equiv (\lambda_R^1,\ldots,\lambda_R^4)$ 分别是 $U(1)$ 流 $i\partial X^k$ 和 $i\bar{\partial} X^k$ 的特征值向量。$V_{(\lambda_L,\lambda_R)}(z,\bar{z})$ 的共形权重 (h_L, h_R) 为

$$h_L = \frac{\lambda_L \cdot \lambda_L}{2}\ , \qquad h_R = \frac{\lambda_R \cdot \lambda_R}{2}\ . \tag{5.1}$$

允许的向量集合 (λ_L, λ_R)，其二次型为

$$\lambda_L \cdot \lambda_L - \lambda_R \cdot \lambda_R \tag{5.2}$$

构成一个符号为 (4,4) 的偶自对偶格 $\Gamma^{4,4}$，即绕数-动量的 Narain 格。

现在考虑 T^4 目标空间由四个彼此正交的圆的乘积构成，且 B场为零；其中三个圆的半径为自对偶半径 $R_i = R_{sd}$, $i = 2,3,4$，而最后一个 S^1 的半径为 $R_1 = \sqrt{2}R_{sd}$。

[9] 4重T对偶在 ∂X^k、 ψ^k 上平凡作用，在 $\bar{\partial} X^k \to -\bar{\partial} X^k$、 $\bar{\psi}^k \to -\bar{\psi}^k$上则以.....作用。全纯代数和反全纯代数分别可用 $\psi^j \partial X^k$、 $\psi^j \psi^k$ 和 $\bar{\psi}^j \bar{\partial} X^k$、 $\bar{\psi}^j \bar{\psi}^k$构造，因此保持不变。

对于这一几何和B场，绕数-动量的 Narain 格由（λ_L， λ_R）给出，其中

$$\lambda_L = (\frac{n_1}{2} + w_1, \frac{n_2+w_2}{\sqrt{2}}, \frac{n_3+w_3}{\sqrt{2}}, \frac{n_4+w_4}{\sqrt{2}}), \quad \lambda_R = (\frac{n_1}{2} - w_1, \frac{n_2-w_2}{\sqrt{2}}, \frac{n_3-w_3}{\sqrt{2}}, \frac{n_4-w_4}{\sqrt{2}}), \tag{5.3}$$

其中， $w \equiv (w_1, \ldots, w_4) \in \mathbb{Z}^4$ 和 $n \equiv (n_1, \ldots, n_4) \in \mathbb{Z}^4$ 分别是绕数和动量量子数。

我们考虑对应于沿第一圆进行半周期平移的对称性 g。这意味着它对所有 ∂X^k、 $\bar{\partial} X^k$ 及其费米超伴侣 ψ^k、 $\bar{\psi}^k$的作用都是平凡的，而它将顶点算符 $\mathcal{V}_{(\lambda_L,\lambda_R)} \equiv \mathcal{V}_{n,w}$ 乘以一个符号

$$g(\mathcal{V}_{n,w}) = (-1)^{n_1} \mathcal{V}_{n,w} \ . \tag{5.4}$$

该 g 是 $U(1)^4 \times U(1)^4$ 对称群中的一个元素，其作用为 $\mathcal{V}_{n,w} \mapsto e^{2\pi i(\alpha\cdot n - \beta\cdot w)}\mathcal{V}_{n,w}$，其中 $\alpha, \beta \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^4$。特别地， g 对应于 $\alpha_g = (1/2, 0, 0, 0)$，而 $\beta_g =$ 对应于 $(0, 0, 0, 0)$。

轨形 $T^4/\langle g \rangle$ 是通过首先加入 g 扭曲扇区得到的，该扇区包含具有分数绕数 $w \in \alpha_g + \mathbb{Z}^4$ 的顶点算符，即具有 $w_1 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ 和 w_2， w_3， $w_4 \in \mathbb{Z}$ 的顶点算符；然后投影到具有偶数$n_1 \in 2\mathbb{Z}$的（未扭曲和 g 扭曲）顶点算符子空间。因此，定义 $\tilde{n}_1 := n_1/2$, $\tilde{w}_1 := 2w_1$ 后，轨形模型中的 Narain 格为

$$(\lambda_L, \lambda_R) = (\tilde{n}_1 + \frac{\tilde{w}_1}{2}, \frac{n_2+w_2}{\sqrt{2}}, \frac{n_3+w_3}{\sqrt{2}}, \frac{n_4+w_4}{\sqrt{2}}, \ \tilde{n}_1 - \frac{\tilde{w}_1}{2}, \frac{n_2-w_2}{\sqrt{2}}, \frac{n_3-w_3}{\sqrt{2}}, \frac{n_4-w_4}{\sqrt{2}}), \tag{5.5}$$

其中 $\tilde{n}_1$， $\tilde{w}_1$， n_i， $w_i \in \mathbb{Z}$。显然，轨形模型 $T^4/\langle g \rangle$ 通过 T 对偶与原模型等价。因此，可以定义一个对偶缺陷 $\mathcal{N}$，其对应算符 $\hat{\mathcal{N}}$ 在 g 不变算符上的作用与四重 T 对偶相同：

$$\hat{\mathcal{N}} : \begin{cases} \partial X^k, \psi^k \to \sqrt{2}\partial X^k, \sqrt{2}\psi^k \ , & \\ \bar{\partial} X^k, \bar{\psi}^k \to -\sqrt{2}\bar{\partial} X^k, -\sqrt{2}\bar{\psi}^k \ , & \\ \mathcal{V}_{n,w} \to 0 & \text{if } n_1 \text{ is odd}, \\ \mathcal{V}_{n,w} \to (-1)^{n\cdot w}\sqrt{2}\mathcal{V}_{\tilde{w},\tilde{n}} & \text{if } n_1 \text{ is even}, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $\tilde{w} = (2w_1, \ w_2, \ w_3, \ w_4)$ 和 $\tilde{n} = (n_1/2, \ n_2, \ n_3, \ n_4)$。如上所述，这种作用保持 $\mathcal{N} = (4, \ 4)$ 超共形代数。此外， $\hat{\mathcal{N}}$ 和 $\hat{g}$ 均与 $\mathbb{Z}_2$ 对称性 $\mathcal{R}$ 对易，其作用为

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \partial X^k, \psi^k \to -\partial X^k, -\psi^k \ , \\ \bar{\partial} X^k, \bar{\psi}^k \to -\bar{\partial} X^k, -\bar{\psi}^k \ , \\ \mathcal{V}_{n,w} \to \mathcal{V}_{-n,-w} \ . \end{cases} \tag{5.7}$$

因此， g 和 $\mathcal{N}$ 应在通过轨形 $T^4/\langle \mathcal{R} \rangle$ 得到的 K3 模型中诱导具有相同融合规则的拓扑缺陷。现在来确定相应算符 g 和 $\hat{\mathcal{N}}$ 在该 K3 模型上的作用。在非扭曲扇区中， $\hat{\mathcal{N}}$ 和 g 显然由它们在环面模型上的作用决定。

我们来考虑（未投影的） $\mathcal{R}$ 扭曲扇区 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$。作用于任意 $\mathcal{R}$ 扭曲态 $|\theta\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ 时，算符 $\partial X^k(z)$ 和 $\bar{\partial} X^k(\bar{z})$ 具有半整数模；特别是，这些流没有零模。另一方面，费米子算符 $\psi^k(z)$

和 $\tilde{\psi}^k(\bar{z})$ 在 NS-NS $\mathcal{R}$ 扭曲扇区中具有整数模，而在 R-R $\mathcal{R}$ 扭曲扇区中具有半整数模。我们将被所有（玻色或费米）正模湮灭的态定义为 $\mathcal{R}$ 扭曲基态 $|\theta_{gr}\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ 。

顶点算子 $\mathcal{V}_\lambda(z,\ \bar{z})$、 $\lambda \in \Gamma^{4,\ 4}_{w-m}$ 通常定义为

$$\mathcal{V}_\lambda(z,\bar{z}) = c_\lambda :e^{i\lambda\cdot X}: (z,\bar{z}) \ . \tag{5.8}$$

算符 c_λ、 $\lambda \in \Gamma^{4,\ 4}$ 满足代数关系

$$c_\lambda c_\mu = \epsilon(\lambda,\mu)c_{\lambda+\mu} \ , \tag{5.9}$$

其中 $\epsilon(\lambda,\ \mu) \in \{\pm 1\}$ 满足

$$\epsilon(\lambda,\mu)\epsilon(\lambda+\mu,\nu) = \epsilon(\lambda,\mu+\nu)\epsilon(\mu,\nu), \qquad \epsilon(\lambda,\mu) = (-1)^{\lambda\cdot\mu}\epsilon(\mu,\lambda) \ . \tag{5.10}$$

算符 c_λ 是必需的，这样顶点算子 $\mathcal{V}_\lambda$ 的算符乘积展开才是局域的。

作用于扭曲基态时，有

$$\lim_{z\to 0} \mathcal{V}_\lambda(z,\bar{z})|\theta_{gr}\rangle = c_\lambda|\theta_{gr}\rangle \ . \tag{5.11}$$

因此， $\mathcal{R}$-扭曲基态空间是算符 c_λ所构成代数的一个表示。我们可以取一个基，由 $\Gamma^{4,\ 4}$ 组成，它们是沿某个圆携带一个单位绕数或动量的顶点算子。我们将相应的算符记为 c_{n_1}、……、c_{n_4}、 c_{w_1}、……、 c_{w_4}，它们满足

$$c^2_{n_i} = 1 = c^2_{w_i} \ , \quad c_{w_i}c_{n_j} = (-1)^{\delta_{ij}}c_{n_j}c_{w_i} \ , \quad c_{n_i}c_{n_j} = c_{n_j}c_{n_i} \ , \quad c_{w_i}c_{w_j} = c_{w_j}c_{w_i}, \tag{5.12}$$

其中 $c^2_{n_i} = 1 = c^2_{w_i}$。对于任意其他的 $\lambda \in \Gamma^{4,\ 4}$，对应于 n_1、……、n_4， w_1、……、$w_4 \in \mathbb{Z}$，我们只需令 $c_\lambda := c^{n_1}_{n_1}\cdots c^{n_4}_{n_4}c^{w_1}_{w_1}\cdots c^{w_4}_{w_4}$。该代数的一个不可约表示是 16 维的，我们可以取 c_{w_1}、……、 c_{w_4} 的特征向量作为一组基 $|\theta_1$、……、 $\theta_4\rangle$, $\theta_i \in \{\pm 1\}$:

$$c_{w_i}|\theta_1,\ldots,\theta_4\rangle = \theta_i|\theta_1,\ldots,\theta_4\rangle \ , \tag{5.13}$$

而算符 c_{n_i} 的作用为

$$c_{n_1}|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle = |-\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \ , \qquad \ldots \qquad c_{n_4}|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle = |\theta_1,\theta_2,\theta_3,-\theta_4\rangle \ . \tag{5.14}$$

因此，R-R $\mathcal{R}$-扭曲基态空间是 16 维的，并承载着 c_λ 的这种表示。另一方面，NS-NS $\mathcal{R}$-扭曲基态构成一个 16^2 维空间，因为还需要与 8 个费米子 $\psi^k(z)$、 $\tilde{\psi}^k(\bar{z})$ 的零模所生成的 Clifford代数的一个 16 维不可约表示作张量积。整个 $\mathcal{R}$-扭曲扇区由基态经玻色与费米振子的负模作用而得到。

对称性 g 通过酉算符 $\rho(g)$作用于 $\mathcal{R}$-扭曲扇区，并满足 $\rho(g)^2 =1$。它必须与所有振子对易，并对算符 c_{n_i}, c_{w_i} 的作用为

$$\begin{aligned} &\rho(g)c_{n_1}\rho(g) = -c_{n_1} \qquad \rho(g)c_{n_i}\rho(g) = c_{n_i} \ , \quad i = 2,3,4 \\ &\rho(g)c_{w_j}\rho(g) = c_{w_j} \ , \qquad j = 1,\ldots,4 \ . \end{aligned} \tag{5.15}$$

这些条件由以下对象满足

$$\rho(g)(\text{oscillators})|\pm,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle = \pm(\text{oscillators})|\pm,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \ , \tag{5.16}$$

我们将此作为 $\rho(g)$ 的定义。另一种可能是定义 $\rho(g)$ 以相对于（5.16）符号相反的方式作用于 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$。这两种可能性通过与量子对称性 $\mathcal{Q}$ 的复合彼此关联。事实上， g 在环面模型 T^4 上的作用会在 $T^4/\langle\mathcal{R}\rangle$ 上诱导出两种不同的对称性；至于将其中哪一种称为 g 、哪一种称为 $g\mathcal{Q}$，纯粹取决于约定。

对偶缺陷 $\hat{\mathcal{N}}$ 必须湮灭所有不具 g 不变性的态，从而

$$\hat{\mathcal{N}}(\text{oscillators})|-,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle = 0\ . \tag{5.17}$$

此外，它必须满足

$$\hat{\mathcal{N}}c_{n_i} = c_{w_i}\hat{\mathcal{N}}\ , \qquad i=2,\dots,4\ , \tag{5.18}$$

并且它必须与左移振子对易，与右移振子反对易。最后，它必须在 g 不变的态上满足 $\hat{\mathcal{N}}^2 = 2$ 。注意到 c_{w_1} 在 g 不变的基态上平凡作用，因此它必然与 $\hat{\mathcal{N}}$对易。

由此可知， $\mathcal{N}$ 必须将 c_{w_2},c_{w_3},c_{w_4} 的特征向量映射为具有相同特征值的 c_{n_2},c_{n_3}, c_{n_4}的特征向量：

$$\hat{\mathcal{N}}|+,+,+,+\rangle = (const)\sum_{\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}|+,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \tag{5.19}$$

$$\hat{\mathcal{N}}|+,-,+,+\rangle = (const)\sum_{\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}|+,+,\theta_3,\theta_4\rangle - |+,-,\theta_3,\theta_4\rangle \tag{5.20}$$

依此类推。通过要求 $\hat{\mathcal{N}}^2 = 2$ 在这些 g 不变的态上，可以将归一化固定到一个整体符号的程度。更准确地说，我们得到：

$$\hat{\mathcal{N}}|+,+,+,+\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}|+,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \tag{5.21}$$

$$\hat{\mathcal{N}}|+,-,+,+\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}(\theta_2)|+,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \tag{5.22}$$

以及它的 2 个置换，

$$\hat{\mathcal{N}}|+,+,-,-\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}(\theta_3\theta_4)|+,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle \tag{5.23}$$

及其 2 种置换，

$$\hat{\mathcal{N}}|+,-,-,-\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\{\pm1\}}(\theta_2\theta_3\theta_4)|+,\theta_2,\theta_3,\theta_4\rangle\ . \tag{5.24}$$

5.2 缺陷缠绕椭圆亏格

我们希望计算

$$\phi^{\mathcal{N}}(T^4/\langle\mathcal{R}\rangle,\tau,z) = \mathrm{Tr}_{RR}\mathcal{N}(-1)^F y^{J_L} q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}, \tag{5.25}$$

它对应于插入 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷 $\hat{\mathcal{N}}$ 后模型的椭圆亏格。令 $\mathcal{H}$ 为轨形模型 $T^4/\langle\mathcal{R}\rangle$的非扭曲扇区，$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ 为扭曲扇区。于是，我们可以将带扭椭圆属表示为四项之和，

$$\phi^{\mathcal{N}}(T^4/\langle\mathcal{R}\rangle,\tau,z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{RR}}((1+\mathcal{R})\hat{\mathcal{N}}(-1)^F y^{J_L} q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}) \tag{5.26}$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{RR}_{\mathcal{R}}}((1+\mathcal{R})\hat{\mathcal{N}}(-1)^F y^{J_L} q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}), \tag{5.27}$$

对应于将扭曲和未扭曲的 RR 希尔伯特空间投影到 $\mathcal{R}$-不变态上。

首先，在扭曲扇区中，$\hat{\mathcal{N}}$ 作用于 16 $\mathcal{R}$-扭曲基态时，有八个零特征值，以及四个各为 ±1 的特征值，如 §5.1 所述。因此，投影希尔伯特空间 $\mathcal{H}^{RR}_{\mathcal{R}}$中的迹为零，扭曲扇区对上述表达式的贡献也将消失。

在未扭曲扇区中，从 (5.6) 和 (5.7) 可以清楚看出，$\mathcal{R}\mathcal{N}$ 的作用使右动费米子保持不变，因此额外插入 $(-1)^F$ 将使第二项消失。

因此，带扭椭圆属中唯一非零的贡献，只剩下在（未投影的）未扭曲扇区中插入 $\hat{\mathcal{N}}$：

$$\phi^{\mathcal{N}}(T^4/\langle\mathcal{R}\rangle,\tau,z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{RR}}(\hat{\mathcal{N}}(-1)^F y^{J_L} q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}). \tag{5.28}$$

我们可以将其表示为三个项的乘积

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\phi^{gd}_{\mathcal{N}}(\tau,z)\phi^{osc}_{\mathcal{N}}(\tau,z)\phi^{w-m}_{\mathcal{N}}(\tau), \tag{5.29}$$

其中

$$\phi^{gd}_{\mathcal{N}}(\tau,z) = y^{-1}(1-\zeta_L y)(1-\zeta_L^{-1}y)(1-\zeta_R)(1-\zeta_R^{-1}) \tag{5.30}$$

是来自具有 $\zeta_L=1$、$\zeta_R=-1$ 的 RR 基态的贡献，

$$\phi^{osc}_{\mathcal{N}}(\tau,z) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\zeta_L y q^n)(1-\zeta_L^{-1}yq^n)(1-\zeta_L y^{-1}q^n)(1-\zeta_L^{-1}y^{-1}q^n)}{(1-\zeta_L q^n)^2(1-\zeta_L^{-1}q^n)^2} \tag{5.31}$$

是来自左动玻色振子和费米振子的贡献，以及

$$\begin{aligned}\phi^{w-m}_{\mathcal{N}}(\tau) \;&=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}^4}(-1)^{n_2^2+n_3^2+n_4^2}q^{2n_1^2+n_2^2+n_3^2+n_4^2} \;= \\ &= 1-6q+14q^2-20q^3+\ldots = \theta_4(2\tau)^3\theta_3(4\tau)\end{aligned} \tag{5.32}$$

是来自插入了 $\hat{\mathcal{N}}$ 作用的绕数-动量模的贡献。

这种形式源于对 $i=2,3,4$ 施加 $n_1=2w_1$ 和 $n_i=w_i$，这对应于对作为 $\hat{\mathcal{N}}$ 的特征态、特征值为 $(-1)^{n\cdot w}=(-1)^{n_2^2+n_3^2+n_4^2}$（如 $n_1\in2\mathbb{Z}$）的顶点算符取迹。

综合以上各项，我们得到

$$\phi^{\mathcal{N}}(T^4/\langle\mathcal{R}\rangle,\tau,z) \;=\; -2\sqrt{2}\frac{\theta_1(\tau,z)^2\theta_4(2\tau)^3\theta_3(4\tau)}{\eta^6(\tau)} \tag{5.33}$$

$$\;=\; \sqrt{2}\left(\frac{2}{y}-4+2y+\left(-\frac{4}{y^2}+\frac{4}{y}+4y-4y^2\right)q+\ldots\right) \tag{5.34}$$

这与 (4.66) 完全吻合，正如我们的普遍猜想所预期的那样。

6 $\mathbb{Z}_3$的对偶缺陷

本节中，我们将描述与具有框架形状 $1^6 3^6$的 $\mathbb{Z}_3$ 对称性 $g \in$ 自同构群$_\tau(V^{f\natural})$ 相关的对偶缺陷。

根据第3节中的一般讨论，可以推知，与循环群 $\mathbb{Z}_3$ 相关的 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(\mathbb{Z}_3, \chi, \epsilon)$ 潜在地有四种不同形式，分别对应于 $\epsilon \in \{\pm 1\}$ 以及 $\chi = \chi_+$ 或 χ_-，其中 $\chi_\pm$ 如公式(3.20)所示。在本节中，我们将证明，对于每个给定的 g （其框架形状为 $1^6 3^6$, ），存在五种不同的 $\mathcal{N}=1$ 保持对偶缺陷$_{\mathcal{N}^{(b_+)}}$： $\mathcal{N}(b_-)$、$\mathcal{N}(a'_+)$、$\mathcal{N}(a'_-)$、$\mathcal{N}(a'_0)$，以及.....，它们在 Co_0 中 $\langle g\rangle$ 的正规化子 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 内可逆元的共轭下等价。它们满足关系 $\mathcal{N}(b_-) = \xi\mathcal{N}(b_+)$ 以及 $\mathcal{N}^{(a'_-)} = \xi\mathcal{N}(a'_+)$，其中 ξ 是 Co_0 中的中心对合；它对 NS 态作用平凡，并改变所有 Ramond 态的符号（缺陷 $\mathcal{N}^{(a'_0)}$ 和 $\xi\mathcal{N}(a'_0)$ 在 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 内共轭。事实证明，对于每个 $k \in \{a'_\pm, a'_0, b_\pm\}$， $\mathcal{N}^{(k)}$ 和 $\xi\mathcal{N}^{(k)}$ 的 TY 范畴及缠绕配分函数都相同，因此我们可以将它们一并考虑。我们将计算所有此类缺陷的缠绕配分函数和椭圆属，并证明 $\mathcal{N}^{(b_\pm)}$ 、 $\mathcal{N}(a'_\pm)$、$\mathcal{N}(a'_0)$ 分别属于范畴 TY$(\mathbb{Z}_3, \chi_+, -1)$、TY$(\mathbb{Z}_3, \chi_-, +1)$、TY$(\mathbb{Z}_3, \chi_-, -1)$。范畴 TY$(\mathbb{Z}_3, \chi_+, 1)$ 不由任何保持 $\mathcal{N}=1$ 超流的对偶缺陷实现，至少对于这一特定的框架形状而言。

我们尚未找到与本节中的 $V^{f\natural}$ 对偶缺陷相对应的 K3 σ模型；猜想 6 可以视为对这类模型应当存在的预测。

6.1 与 $\mathbb{Z}_3$-对偶缺陷相关联的 Leech 格端同态

关于 $V^{f\natural}$ 中 $\mathcal{N}=1$ 保持缺陷的一般讨论预言，任何此类 $\mathcal{L}$ 都与 Leech 格 Λ 的一个端同态 $\rho(\mathcal{L}) : \Lambda \to \Lambda$ 相关联。本节讨论与 $\mathbb{Z}_3$ 对称性的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 相关联的可能端同态。

设 $g \in$ Aut$_\tau(V^{f\natural}) \cong Co_0$ 是一个框架形状为 $1^6 3^6$ 的对称性。已知该共轭类中 Co_0 的一个元素固定 Leech 格的一个子格 $\Lambda^g \subset \Lambda$ ，该子格与 12 维 Todd-Coxeter 格 $\Lambda^g \cong K_{12}$ 同构（见 [48], 和 [28], 第 4 章第 9 节）。其正交补 $\Lambda_g := (\Lambda^g)^\perp \cap \Lambda$ 也与同一个格 $\Lambda_g \cong K_{12}$ 同构。

对于此共轭类中的每个元素 $g \in Co_0$，都存在唯一一个（相差一个求逆）元素 $g' \in Co_0$（称为 g 在 [49] 中的伴侣元），满足： g' 也具有框架形状 $1^6 3^6$； g 与 g' 可交换；由 g' 固定的子格 $\Lambda^{g'} \subset \Lambda$ 恰好是由 g固定的格 Λ_g 的正交补，反之亦然，即 $\Lambda^g = \Lambda_{g'}$ 和 $\Lambda^{g'} = \Lambda_g$。下文中，我们需要考察 Aut$(V^{f\natural}) \cong Co_0$ 的一些子群，其元素 k 与 g 和/或 g' 可交换，或者属于 $\langle g\rangle$ 和/或 $\langle g'\rangle$ 的正规化子群（即 $kgk^{-1} = g^{-1}$ 或 $kg'k^{-1} = g'^{-1}$）。更准确地说，我们考察 Co_0 中 $\langle g$ 的中心化子， $g'\rangle$

$$C_{Co_0}(\langle g, g'\rangle) := \{k \in Co_0 \mid kg = gk \text{ and } kg' = g'k\} = \langle \xi, g, g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3) \ , \tag{6.1}$$

单个元素 g 和 g' 的中心化子

$$C_{Co_0}(g) = \langle \xi, g, g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a'\rangle \ , \qquad C_{Co_0}(g') = \langle \xi, g, g'\rangle).PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a\rangle \ , \tag{6.2}$$

以及 $\langle g\rangle$和 $\langle g'\rangle$的正规化子，二者重合

$$N_{Co_0}(\langle g\rangle) = N_{Co_0}(\langle g'\rangle) = \langle \xi, g, g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a, a'\rangle \ , \tag{6.3}$$

这里，群 $C_{Co_0}(\langle g,g'\rangle)$ 包含 $\langle \xi,g,g'\rangle \cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ 作为一个中心子群，其中 $\langle\xi\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ 是 Co_0的中心，而商群 $C_{Co_0}(\langle g,g'\rangle)/\langle\xi,g,g'\rangle$ 同构于一个阶为 $2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7$的有限单群 $PSU_4(\mathbb{F}_3)$。群 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)=N_{Co_0}(\langle g'\rangle)$ 包含 $C_{Co_0}(\langle g,g'\rangle)$ 作为正规子群，商群 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)/C_{Co_0}(\langle g,g'\rangle)$ 同构于 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$。我们用 a、 a' 和 b 表示 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 中满足以下条件的若干元素:

$$a^2=1,\qquad aga=g^{-1},\qquad ag'=g'a, \tag{6.4}$$

$$a'^2=1,\qquad a'g=ga',\qquad a'g'a'=g'^{-1}, \tag{6.5}$$

$$b^2=1,\qquad bgb=g^{-1},\qquad bg'b=g'^{-1}. \tag{6.6}$$

任意三个具有这些性质的此类元素 a、 a'、 $b\in N_{Co_0}(\langle g\rangle)$，都可以作为 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)/C_{Co_0}(\langle g$、$g'\rangle)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 中三个非平凡陪集的代表元。借助 Magma [50], ，我们显式构造了子群 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$，并验证了在 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 中的共轭意义下，满足 (6.4) 的元素有三个： a_+、 a_0、 $a_-=\xi a_+\in N_{Co_0}(\langle g\rangle)$，其框架形状分别为 $1_8 2_8$、2_{12}、 $1^{-8}2^{16}$；满足 (6.5) 的元素也有三个: a'_+、 a'_0、 $a'_-=\xi a'_+$，其框架形状相同；此外，还有两个元素 b_+ 和 $b_-=\xi b_+$ 满足 (6.6)，二者的框架形状均为 2^{12}。

格 Λ^g 和 Λ_g 可以描述为两个同构的 6 维复格，例如写作

$$\Lambda^g=\Lambda_{g'}:=\{\frac{1}{\sqrt{3}}(z_1,\ldots,z_6)\in\mathbb{C}^6\mid z_i\in\mathbb{Z}[\omega],\ z_1\equiv\ldots\equiv z_6 \bmod \theta\mathbb{Z}[\omega],\ \sum_i z_i=0 \bmod 3\mathbb{Z}[\omega]\} \tag{6.7}$$

$$\Lambda_g=\Lambda^{g'}:=\{\frac{1}{\sqrt{3}}(w_1,\ldots,w_6)\in\mathbb{C}^6\mid w_i\in\mathbb{Z}[\omega],\ w_1\equiv\ldots\equiv w_6 \bmod \theta\mathbb{Z}[\omega],\ \sum_i w_i=0 \bmod 3\mathbb{Z}[\omega]\} \tag{6.8}$$

其中 $\omega:=e^{\frac{2\pi i}{3}}$、 $\mathbb{Z}[\omega]=\mathbb{Z}+\omega\mathbb{Z}$，且 $\theta:=\omega-\bar\omega=\sqrt{3}i$；关于其他描述以及在 Leech 格 Λ中的嵌入，参见 [48]。相应的实格通过标准映射 $\mathbb{C}^6\to\mathbb{R}^{12}$得到，例如 $(z_1,\ldots\ldots,z_6)\mapsto(\Re(z_1),\mathrm{Im}(z_1)\ldots\ldots,\Re(z_6),\mathrm{Im}(z_6))\in\mathbb{R}^{12}$。用这些复坐标表示时， g 和 g' 的作用非常简单

$$g(z_k)=z_k\ ,\qquad g(w_k)=\omega w_k\ , \tag{6.9}$$

$$g'(z_k)=\omega z_k\ ,\qquad g'(w_k)=w_k\ . \tag{6.10}$$

更一般地，中心化子 $C_{Co_0}(\langle g,\ g'\rangle\cong\langle\xi,\ g,\ g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3)$ 在复格 Λ^g 和 Λ_g 上的作用由复酉变换给出

$$h(z_k)=\sum_l U^A(h)_{kl}z_l\ ,\qquad h(w_k)=\sum_l U^B(h)_{kl}w_l\ ,\qquad h\in C_{Co_0}(\langle g,g'\rangle)\ , \tag{6.11}$$

[10]在 [29]中，该群记作 $U_4(3)$。顾名思义，群 $PSU_4(\mathbb{F}_3)$可以描述为群 $SU_4(\mathbb{F}_3)$的商群 $SU_4(\mathbb{F}_3)/\langle i\mathbf{1}_4\rangle$；其中，群 $SU_4(\mathbb{F}_3)$由有限域$\mathbb{F}_3+i\mathbb{F}_3\cong\mathbb{F}_9$上的特殊（即 det $=1$）幺正 4×4 矩阵构成，再除以其中心 $\langle i\mathbf{1}_4\rangle\cong\mathbb{Z}_4$ [29]。这里，$\mathbb{F}_3\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 是含有 3 个元素的场，而 $i^2=-1\in\mathbb{F}_3$。本文不会使用这种描述。

其中 6×6 为适当的特殊酉矩阵 $U^A(h)\ U^B(h)\in SU(6)$。特别地，$(U^A(g)\ U^B(g))=(16,\omega\mathbf{1}_6)$、$(U^A(g')\ U^B(g'))=(\omega\mathbf{1}_6,16)$ 和 $(U^A(\xi)\ U^B(\xi))=(-\mathbf{1}_6,-\mathbf{1}_6)$ 对应于 $SU(6)$ 中心的矩阵。另一方面，满足 (6.5) 的元素 a' 对变量 $z_1,\ldots,z_6$ 作用为复共轭，对 $w_1,\ldots,w_6$ 则作用为酉变换。a'_+、a'_0 和 a'_- 的框架形状分别为 1^82^8, 2^{12} 和 $1^{-8}2^{16}$，这一事实意味着在 $w_1,\ldots,w_6$ 上的酉作用具有如下特征值重数：a'_+ 对应 $(-1)^1,1^5$，a'_0 对应 $(-1)^3,1^3$，a'_- 对应 $(-1)^5,1^1$；在所有情况下，行列式均为 -1。将此作用参数化为以下形式较为方便

$$a'_j(z_k)=\sum_l U^A(a'_j)_{kl}\bar{z}_l\ ,\qquad a'_j(w_k)=i\sum_l U^B(a'_j)_{kl}w_l\ ,\quad j\in\{+,0,-\},\tag{6.12}$$

对于适当的 $U^A(a'_j)\ U^B(a'_j)\in SU(6)$，其中 $U^B(a'_1)$、$U^B(a'_2)$、$U^B(a'_3)$ 的特征值分别为 $(i)^1,(-i)^5$（对应 a'_+）、$(i)^3,(-i)^3$（对应 a'_0）以及 $(i)^5,(-i)^1$（对应 a'_-）。类似地，

$$a_j(z_k)=i\sum_l U^A(a_j)_{kl}z_l\ ,\qquad a_j(w_k)=\sum_l U^B(_j)_{kl}\bar{w}_l\ ,\qquad j\in\{+,0,-\},\tag{6.13}$$

其中 $U^A(a_j)\ U^B(a_j)\in SU(6)$，且 $U^A(a_j)$ 的特征值与 $U^B(a'_j)$ 相同。特别要注意，

$$U^A(a_j)^2=-\mathbf{1}_6\ ,\qquad U^B(a'_j)^2=-\mathbf{1}_6\ .\tag{6.14}$$

显然，商群 $N_{Co_0}(g)/\langle g\rangle$ 忠实地作用于实格 $\Lambda^g\subset\mathbb{R}^{12}$，其作用由格自同构给出。事实上，由于 $|\mathrm{Aut}(K_{12})|=2^{10}\cdot3^7\cdot5\cdot7=|N_{Co_0}(g)/\langle g\rangle|$，我们有一个同构

$$\mathrm{Aut}(\Lambda^g)=\mathrm{Aut}(\Lambda_{g'})=N_{Co_0}(g)/\langle g\rangle\cong\langle\xi,g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a',a\rangle\ ,\tag{6.15}$$

类似地

$$\mathrm{Aut}(\Lambda^{g'})=\mathrm{Aut}(\Lambda_g)=N_{Co_0}(g')/\langle g'\rangle\cong\langle\xi,g\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a',a\rangle\ .\tag{6.16}$$

保持复结构的指数为 2 的子群 $\mathrm{Aut}^+(\Lambda^g):=\mathrm{Aut}(\Lambda^g)\cap U(6)$ 为

$$\mathrm{Aut}^+(\Lambda^g)=C_{Co_0}(g)/\langle g\rangle\cong\langle\xi,g'\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a\rangle\subset U(6)\subset SO(12)\ ,\tag{6.17}$$

类似地

$$\mathrm{Aut}^+(\Lambda_g)=C_{Co_0}(g')/\langle g'\rangle\cong\langle\xi,g\rangle.PSU_4(\mathbb{F}_3).\langle a'\rangle\subset U(6)\subset SO(12)\ .\tag{6.18}$$

现在，让我们采用与第 4.1 节中处理 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷类似的论证。格包含关系链

$$\Lambda^g\oplus\Lambda_g\subset\Lambda\subset(\Lambda^g)^*\oplus(\Lambda_g)^*\ ,\tag{6.19}$$

这意味着每个 $\lambda\in\Lambda$ 都可以写成 $\lambda=(\lambda^g,\ \lambda_g)\in(\Lambda^g)^*\oplus(\Lambda_g)^*$。$\Lambda$的自对偶性意味着，对于每个 $\mu^g\in(\Lambda^g)^*$，都存在 $\mu_g\in(\Lambda_g)^*$，使得 $(\mu^g,\ \mu_g)\in\Lambda$。此外，形如 $(\lambda^g,\ 0)$ 的向量属于 Λ，当且仅当 $\lambda^g\in\Lambda^g\subset(\Lambda^g)^*$。现在，融合关系$\rho(\mathcal{N})^2=\sum_{k=1}^3 g^k$和 $\rho(\mathcal{N})^t=\rho(\mathcal{N})$意味着

$$\rho(\mathcal{N})^2(\lambda^g,\lambda_g)=(3\lambda^g,0)\ ,\qquad\forall(\lambda^g,\lambda_g)\in\Lambda\ ,\tag{6.20}$$

因此

$$\rho(\mathcal{N})(\lambda^g,\lambda_g)=(\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}\lambda^g,0)\in\Lambda\ ,\qquad \forall(\lambda^g,\lambda_g)\in\Lambda\ , \tag{6.21}$$

对于某个 12×12 实矩阵 $O_{\mathcal{N}}$，满足

$$O_{\mathcal{N}}^t=O_{\mathcal{N}},\qquad O_{\mathcal{N}}^2=1\ . \tag{6.22}$$

特别地，$O_{\mathcal{N}}\in O(12,\ \mathbb{R})$。由于 $(\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}\bar{\lambda^g},\ 0)$ 属于 Λ，因此可知，对所有 $\bar{\lambda^g}\in(\Lambda^g)^*$，均有 $\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}\lambda^g\in\Lambda^g$。因此，我们得到一个单射

$$\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}:(\Lambda^g)^*\to\Lambda^g\ . \tag{6.23}$$

注意到 $|(\Lambda^g)^*/\Lambda^g|=3^6=|\det(\sqrt{3}O_{\mathcal{N}})|$，这意味着该映射是满射。由此可知，格 Λ^g 是3-模的，也就是说，它与 $\Lambda^g\cong\sqrt{3}(\Lambda^g)^*$ 同构，是其对偶格按 $\sqrt{3}$ 缩放后的格。众所周知，Todd-Coxeter 格具有这一性质：在将 $\Lambda^g\cong K_{12}$ 描述为复格时，(6.23) 形式的相似变换只需通过按 $\theta=\sqrt{3}i$ [48] 缩放即可实现

$$\begin{aligned}\Theta:(\Lambda^g)^*&\to\Lambda^g\ ,\\ v&\mapsto\sqrt{3}iv\ .\end{aligned} \tag{6.24}$$

映射 Θ 是一个 3-相似变换，也就是说，它是 $\mathbb{Z}$-模之间将二次型缩放 3 倍的同构。任何其他介于 $(\Lambda^g)^*$ 与 Λ^g 之间的相似变换，都可由格自同构从左侧或右侧复合 Θ 得到

$$k_1\Theta k_2:(\Lambda^g)^*\to\Lambda^g\ , \tag{6.25}$$

对于任意 $k_1,\ k_2\in\mathrm{Aut}(\Lambda^g)=\mathrm{Aut}((\Lambda^g)^*)\subset O(12,\ \mathbb{R})$。注意，$\Theta$ 与所有 $k\in\mathrm{Aut}^+(\Lambda^g)$ 都可交换，而对于涉及复共轭的元素 $h\in\mathrm{Aut}(\Lambda^g)$，例如 a'，它满足

$$\Theta h=-h\Theta\ ,\qquad h\in\mathrm{Aut}(\Lambda^g)\setminus\mathrm{Aut}^+(\Lambda^g)\ . \tag{6.26}$$

与对偶缺陷 $\mathcal{N}$ 相关的 (6.23) 中的相似变换 $\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}$ 还必须满足 (6.22)，因此不能简单地定义 $\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}^{(12)}=\Theta$，因为 $\Theta^2=-3$ 的符号不正确。相反，根据 (6.26)，可以取 $\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}^{(12)}=\Theta h$，其中 h 是 $\mathrm{Aut}(\Lambda^g)\setminus\mathrm{Aut}_+(\Lambda^g)$ 中任意满足 $h^2=1$的元素。[11] 回想一下，$\mathrm{Aut}(\Lambda^g)=N_{Co_0}(\langle g\rangle)/\langle g\rangle$，可知满足 $h^2=1$ 的元素$h\in\mathrm{Aut}(\Lambda^g)\setminus\mathrm{Aut}_+(\Lambda^g)$，恰好对应于 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 中满足条件 (6.5) 或 (6.6) 的元素。因此，在 $N_{Co_0}(\langle g\rangle)$ 中按共轭等价后，$\sqrt{3}O_{\mathcal{N}}$ 只有五种可能，即

$$\Theta a'_{\pm}\ ,\qquad \Theta a'_0\ ,\qquad \Theta b_{\pm}\ . \tag{6.27}$$

我们将证明，对于这五种可能性中的每一种，都存在相应的对偶缺陷$\mathcal{N}_g$，适用于 g 并保持超流 $\mathcal{N}=1$。

[11]原则上，也可以寻找一个元素 $h\in$ 自同构群$_+(\Lambda^g)$，使得 $h^2=-1$。事实上，由于自同构群$_+(\Lambda^g)$中的所有元素都与 Θ可交换，因此可得 $(\Theta h)^2=\Theta^2h^2=3$。然而，自同构群$_+(\Lambda^g)$中不存在平方为 -1的元素；这一点可从该群的特征标表 [29] 或通过直接计算（例如使用 Magma）验证。

6.2 被 $\mathbb{Z}_3$固定的仿射代数

将 $V^{f\natural}$ 的 NS 扇区描述为由奇幺模格D_{12}^+ 上的 12 个手征自由玻色子给出的格点超顶点算子代数（见 (2.1)）是很有用的。在 $Spin(24)$ 中经过共轭后，可取框架形状为 $1^6 3^6$ 的 g 作为一种对称性，使其固定所有自由玻色子，并对顶点算符 $\mathcal{V}_\lambda$、 $\lambda \in D_{12}^+$施以相位

$$g(\mathcal{V}_\lambda(z)) = e^{2\pi i \lambda\cdot\alpha}\mathcal{V}_\lambda(z)\ , \qquad \lambda \in D_{12}^+ \tag{6.28}$$

其中

$$\alpha = (0,0,0,0,0,0;\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})\ . \tag{6.29}$$

因此， g不变的顶点算符 $\mathcal{V}_\lambda$ 是子格中对应于 λ 的那些

$$(D_{12}^+)^g := \{\lambda \in D_{12}^+ \mid \lambda\cdot\alpha \in \mathbb{Z}\}\ . \tag{6.30}$$

特别地， $\hat{so}(24)_1$ 中被 g 保留的仿射子代数为

$$\hat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{u}(1)_3^B\ , \tag{6.31}$$

对应于基于该格的格点顶点算子代数

$$D_6 \oplus A_5 \oplus \sqrt{6}\mathbb{Z}\ \subset\ (D_{12}^+)^g\ , \tag{6.32}$$

其中

$$D_6 = \{(x_1,\dots,x_6,0,\dots,0) \mid x_i\in\mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^6 x_i \in 2\mathbb{Z}\}\ , \tag{6.33}$$

$$A_5 = \{(0,\dots,0,x_7,\dots,x_{12}) \mid x_i\in\mathbb{Z},\ x_7+x_8+x_9-x_{10}-x_{11}-x_{12}=0\}\ , \tag{6.34}$$

$$\sqrt{6}\mathbb{Z} = \{n(0,\dots,0,1,1,1,-1,-1,-1),\ n\in\mathbb{Z}\}\ . \tag{6.35}$$

类似地， g'固定的仿射子代数为

$$\hat{u}(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A \oplus \hat{so}(12)_1^B\ , \tag{6.36}$$

其中 $\hat{u}(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A \subset \hat{so}(12)_1^A$和 $\hat{u}(1)_3^B \oplus \widehat{su}(6)_1^B \subset \hat{so}(12)_1^B$。最后，被 $\langle g,g'\rangle \cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ 固定的仿射代数为

$$\hat{u}(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{u}(1)_3^B\ . \tag{6.37}$$

回想一下，仿射代数 $\widehat{su}(6)_1$ 有六个不可约酉表示，分别对应于 $A_5^*/A_5 \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$中的六个陪集。这些表示可以标记为 $\mathbf{1}$、 $\square$、 $\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}$、 $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$、 $\overline{\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}}$、 $\overline{\square}$。对于每个这样的表示，相应的余集 A_5^*/A_5、最低共形权重 h，以及共形权重为 h 的态的数量（基态）如下：

$$\mathbf{6},\bar{\mathbf{6}}\ \text{or}\ \square,\overline{\square}\quad (0,\dots,0,\ \pm\frac{5}{6},\mp\frac{1}{6},\mp\frac{1}{6},\ \pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{6}) + A_5 \quad h=\frac{5}{12}\ ,\quad 6\ \text{ground states}\ , \tag{6.38}$$

$$\mathbf{15},\bar{\mathbf{15}} \text{ or } \square,\overline{\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}} \quad (0,\ldots,0,\pm\frac{4}{6},\pm\frac{4}{6},\mp\frac{2}{6},\pm\frac{2}{6},\pm\frac{2}{6},\pm\frac{2}{6})+A_5 \qquad h=\frac{2}{3}\ , \quad 15 \text{ ground states}\ , \tag{6.39}$$

$$\mathbf{20} \text{ or } \begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array} \qquad (0,\ldots,0,\frac{3}{6},\frac{3}{6},\frac{3}{6},\frac{3}{6},\frac{3}{6},\frac{3}{6})+A_5 \qquad h=\frac{3}{4}\ , \quad 20 \text{ ground states}\ . \tag{6.40}$$

代数 $\hat{u}(1)_3$ 也有六个表示，标记为 $n_{u(1)}\in\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，对应于余集 $\frac{n_{u(1)}}{\sqrt{6}}+\sqrt{6}\mathbb{Z}$。对于 $n_{u(1)}=0,\pm1,\pm2,3$，共形权重分别为$n^2_{u(1)}{}_{12}=0,\ 1\,12,\ 1\,3,\ 3\,4$；所有此类表示都有唯一的基态，除了 $n_{u(1)}=3$ 有两个基态。

将 $\widehat{so}(24)_1$ 表示相对于各种 g 和 g' 不变子代数的分解分两步写出较为方便，利用以下包含关系

$$\widehat{so}(24)_1\supset\widehat{so}(12)^A_1\oplus\widehat{so}(12)^B_1 \tag{6.41}$$

and

$$\widehat{so}(12)^A_1\supset\widehat{su}(6)^A_1\oplus\hat{u}(1)^A_3 \qquad \widehat{so}(12)^B_1\supset\widehat{su}(6)^B_1\oplus\hat{u}(1)^B_3\ . \tag{6.42}$$

表示 $\mathbf{0}$，v，s，c 相对于 $\widehat{so}(24)_1$ 的 $\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{so}(12)_1$ 分解为

$$0\to(0,0)+(v,v)\ , \qquad v\to(v,0)+(0,v) \tag{6.43}$$

$$s\to(s,s)+(c,c)\ , \qquad c\to(s,c)+(c,s)\ . \tag{6.44}$$

接着，$\widehat{so}(12)_1$ 的四个表示相对于 $\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{u}(1)_3$ 的表示分解如下（$\hat{u}(1)_3$ 表示以下标 $n\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$ 标示）：

$$0\to\mathbf{1}_0+\mathbf{15}_2+\bar{\mathbf{15}}_{-2}=\mathbf{1}_0+\square_2+\overline{\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}}_{-2}\ , \qquad h=0\ (1\text{ state}),\quad h=1\ (15{+}15{=}30\text{ states}), \tag{6.45}$$

$$v\to\mathbf{6}_1+\bar{\mathbf{6}}_{-1}+\mathbf{20}_{\pm3}=\square_1+\overline{\square}_{-1}+\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_{\pm3} \qquad \begin{array}{c}h=\frac{1}{2}\ (6{+}6{=}12\text{ states}),\\ h=\frac{3}{2}\ (2\cdot20=40\text{ states})\end{array} \tag{6.46}$$

$$s\to\mathbf{6}_{-2}+\mathbf{20}_0+\bar{\mathbf{6}}_2=\square_{-2}+\overline{\square}_2+\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\end{array}_0\ , \qquad h=\frac{3}{4}\ (6{+}6{+}20{=}32\text{ states}) \tag{6.47}$$

$$c\to\mathbf{1}_{\pm3}+\mathbf{15}_{-1}+\bar{\mathbf{15}}_1=\mathbf{1}_{\pm3}+\square_{-1}+\overline{\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}}_1\ , \quad h=\frac{3}{4}\ (2{+}15{+}15{=}32\text{ states})\ . \tag{6.48}$$

这里，对于 $\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{u}(1)_3$，的每个不可约表示，我们列出最低共形权重 h，以及该表示中具有此共形权重的态数。请注意，生成 $\widehat{so}(12)^B_1$ 的 66 个流中，30 个是 和$_2$ 的基态，36 个是 $\mathbf{1}_0$ 的后裔态。表（14）给出了 $V^{f\natural}$ 的 $NS\pm$ 和 $-2R\pm$ 扇区中 g 特征空间分解为$\begin{array}{c}\square\\\square\end{array}\widehat{so}(12)^A_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{u}(1)_3$ 表示的结果。

g 扭曲扇区和 g^2 扭曲扇区也分别可用格点顶点算子代数来描述，对应于（6.30）中格的平移 $\alpha+(D^+_{12})^g$ 和 $-\alpha+(D^+_{12})^g$。向量

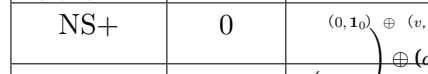
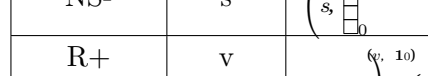
未扭曲	因此(24)	$g=1$	$g=\omega$	$g=\omega^2$
NS+	0		$(0,\overline{\square}_{-2})\oplus(v,\square_1)$	$(0,\square_2)\oplus(v,\overline{\square}_{-1})$
NS-	s		$(s,\square_{-2})\oplus\left(c,\overline{\square}_{+1}\right)$	$\left(s,\overline{\square}_2\right)\oplus\left(c,\square_{-1}\right)$
R+	v		$(0,\square_1)$	$(0,\overline{\square}_{-1})$
R-	c		$(c,\square_{-2})\oplus\left(s,\overline{\square}_{+1}\right)$	$\left(c,\overline{\square}_2\right)\oplus\left(s,\square_{-1}\right)$

表14： $V^{f\natural}$ 的 g特征子空间向 g保持的子代数$\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$的表示分解。

α （6.29）中的态表示 $\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$ 的表示 $(0,\ \mathbf{1}_{+2})$ 中的一个态。因此， g 扭曲扇区和 g^2 扭曲扇区中的所有 $\widehat{so}(12)\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$ 表示，都可以分别通过将非扭曲扇区中的每个表示与 $(0,\ \mathbf{1}_{+2})$ 和 $(0,\ \mathbf{1}_{-2})$ 进行融合得到，即将 $\hat{}u(1)_3$ 表示分别平移 $+2$ 或 -2 （模 6）。 g 在扭曲扇区上的作用通常是不确定的，因为它可以乘以一个三次单位根。通常，可以要求 g^k 与 $e^{2\pi iL_0}$ 在 g^k 扭曲扇区上一致（其中 $k=1,\ 2$），以此消除这种不确定性。 g 扭曲扇区和 g^2 扭曲扇区中每个 g 特征空间分解为 $\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$ 表示的结果列于表15和表16中。

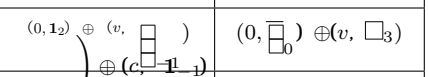
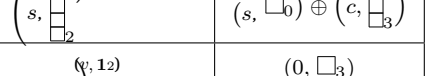
g-扭曲	$g=1$	$g=\omega$	$g=\omega^2$
NS+	$(0,\square_{-2})\oplus(v,\overline{\square}_1)$		$(0,\overline{\square}_0)\oplus(v,\ \square_3)$
NS-	$\left(s,\overline{\square}_{-2}\right)\oplus\left(c,\square_1\right)$		$(s,\ \square_0)\oplus\left(c,\overline{\square}_3\right)$
R+	$(0,\overline{\square}_1)$		$(0,\square_3)$
R-	$\left(c,\overline{\square}_{-2}\right)\oplus\left(s,\square_1\right)$		$(c,\ \square_0)\oplus\left(s,\overline{\square}_3\right)$

表15：将 g-扭曲扇区的 g-特征子空间分解为 $g-$保持的子代数 $\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$的表示。

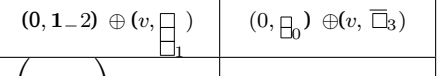
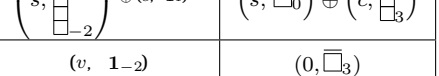
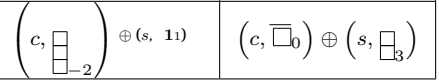
g^2-扭曲	$g=1$	$g=\omega$	$g=\omega^2$
NS+	$(0,\overline{\square}_2)\oplus(v,\square_{-1})$		$(0,\square_0)\oplus(v,\ \overline{\square}_3)$
NS-	$(s,\ \square_2)\oplus\left(c,\overline{\square}_{-1}\right)$		$\left(s,\overline{\square}_0\right)\oplus\left(c,\square_3\right)$
R+	$(0,\square_{-1})$	$(v,\ \mathbf{1}_{-2})$	$(0,\overline{\square}_3)$
R-	$(c,\ \square_2)\oplus\left(s,\overline{\square}_{-1}\right)$		$\left(c,\overline{\square}_0\right)\oplus\left(s,\square_3\right)$

表16： g特征子空间分解为 g^2扭曲扇区中$g-$保持的子代数 $\widehat{so}(12)_1\oplus\widehat{su}(6)_1\oplus\hat{}u(1)_3$的表示。

g不变流和 $\langle g, g'\rangle$不变流的零模分别生成群

$$Spin(12)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B \ , \tag{6.49}$$

and

$$U(1)^A \times SU(6)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B \ , \tag{6.50}$$

别 。这些群在 $V^{f\natural}$ 上的作用并不忠实。特别是，中心子群

$$\langle(\bar\omega, \omega\mathbf{1}_6, \mathbf{1}_6, 1)\rangle \times \langle(1, \mathbf{1}_6, \omega\mathbf{1}_6, \bar\omega)\rangle \times \langle(-1, -\mathbf{1}_6, -\mathbf{1}_6, -1)\rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \tag{6.51}$$

在 $V^{f\natural}$ 的所有场上都平凡作用。这里，在 $\hat{}u(1)_3$ 及其表示的格点描述中，元素 $e^{i\alpha} \in U(1)$，$\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 是这样一种对称性：它将顶点算子$\mathcal{V}_{\frac{m}{\sqrt{6}}}(z)$，$m \in \mathbb{Z}$ 乘以 $e^{i\alpha m}$。

—

作用不忠实这一事实，使得将 g 和 g' 识别为 (6.50) 中的元素时存在一些不确定性。一种方便的选择是[12]

$$g = (1, \mathbf{1}_6, \omega\mathbf{1}_6, 1) \in U(1)^A \times SU(6)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B \ , \tag{6.52}$$

$$g' = (1, \omega\mathbf{1}_6, \mathbf{1}_6, 1) \in U(1)^A \times SU(6)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B \ . \tag{6.53}$$

元素 $\omega\mathbf{1}_6 \in SU(6)$ 在由 d 个方框标记的 $\widehat{su}(6)_1$ 表示上通过 ω^d 作用。

现在来讨论超流 $\tau(z)$ 属于 $\langle g, g'\rangle$-不变仿射代数 (6.37) 的哪些表示。s 在 $\widehat{so}(24)_1$ 中的表示分解为 $(s,s)\oplus(c,c)$（相对于 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{so}(12)_1^B$），因此 $\mathcal{N}=1$ 超流必定是 (s,s) 中的一个态与 (c,c) 中的一个态的线性组合。进而，(s,s) 和 (c,c) 关于 $u(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{}u(1)_3^B$ 的分解为

$$(s,s) \to \left(\square_{-2} \oplus \overline{\square}_{2} \oplus \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} \ , \ \square_{-2} \oplus \overline{\square}_{2} \oplus \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} \right) \tag{6.54}$$

$$(c,c) \to \left(\mathbf{1}_{\pm 3} \oplus \square_{-1} \oplus \overline{\square}_{+1} , \mathbf{1}_{\pm 3} \oplus \square_{-1} \oplus \overline{\square}_{+1} \right) \ . \tag{6.55}$$

τ 在 (6.52) 和 (6.53) 中对 g 和 g' 均不变，这意味着相对于 $\widehat{su}(6)_1^A$ 和 $\widehat{su}(6)_1^B$ 的盒子数都必须是 3 的倍数。在 (s,s) 和 (c,c) 分量中，满足这一性质的表示只有

$$\left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} , \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} \right) \subset (s,s) \quad \text{(400 ground states)} \qquad (\mathbf{1}_{\pm 3}, \mathbf{1}_{\pm 3}) \subset (c,c) \quad \text{(4 ground states)}. \tag{6.56}$$

事实上，如果我们将超流 $\tau(z)$ 分解为以下各项之和

$$\tau(z) = \tau_s(z) + \tau_c(z) \ , \qquad \tau_s \in \left(\begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} , \begin{smallmatrix}\square\\\square\end{smallmatrix}_{0} \right), \quad \tau_c \in (\mathbf{1}_{\pm 3}, \mathbf{1}_{\pm 3}) \tag{6.57}$$

[12]若要求 g 和 g' 在 g扭曲扇区和 g'扭曲扇区上具有预期的作用，那么正确的对应关系是 $g=(\mathbf{1},\ \mathbf{1}_6,\ \bar\omega\mathbf{1}_6,\ \bar\omega)$、$g'=(\bar\omega,\ \bar\omega\mathbf{1}_6,\ \mathbf{1}_6,\ \mathbf{1})$。我们在此写出的元素则是 gQ 和$g'Q'$，其中 Q 和 Q' 是量子对称性，它们在 g扭曲扇区和 g'扭曲扇区上以三次单位根为作用。这一区别与下文无关。

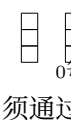
一个分量 $\tau_s \in (s,\ s)$ 和一个分量 $\tau_c \in (c,\ c)$，那么可以证明，τ_s 和 τ_c 都必须非零。我们在下文中不会用到这一事实。

由与 g 和g'均对易的 Co_0 的元素构成的有限群 $C_{Co_0}(g,g') \subset Co_0$，可视为 (6.50) 中 $U(1)^A \times SU(6)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B$ 的一个子群。特别地，有

$$C_{Co_0}(g,g') \to U(1)^A \times SU(6)^A \times SU(6)^B \times U(1)^B \tag{6.58}$$

$$h \mapsto (1,\ U^A(h),\ U^B(h),\ 1)\ , \tag{6.59}$$

其中 $U^a(h)$ 和 $U^B(h)$ 是 (6.11) 中的 $SU(6)$ 矩阵。注意，$C_{Co_0}(g,g')$ 实际上包含于 (6.50) 的 $SU(6)^A \times SU(6)^B$ 子群中。由于 $(\mathbf{1}_{\pm 3}, \mathbf{1}_{\pm 3})$ 中权为 $3/2$的四个态属于 $SU(6)^A \times SU(6)^B$的平凡表示，因此它们自然都被 $C_{Co_0}(g,g')$ 固定。另一方面，利用 $C_{Co_0}(g,g')$ 的特征标表，可以验证 $C_{Co_0}(g,g')$ 的平凡表示在 $\left(,\right)$ 中出现的重数为 1。该表示必由超流的分量 τ_s 张成。



每个对合 $a_j \in Co_0$，只要满足 $a_j g a_j = g^{-1}$ 和 $a_j g' a_j = g'$（如式 (6.4) 所示），就必须通过电荷共轭外自同构作用于 $\widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{}u(1)_3^B$ 中的流，而通过内自同构作用于 $\widehat{su}(6)_1^A \oplus \hat{}u(1)_3^A$。我们可以将这样的元素表示为

$$a_j \mapsto (i,\ U^A(a_j),\ C_{SU(6)^B}(a_j),\ C_{U(1)^B})\ , \tag{6.60}$$

其中 $U^A(a_j)$ 是式 (6.13) 中的 $SU(6)$ 矩阵，而 $C_{SU(6)^B}(a_j)$、$C_{U(1)^B}$ 是电荷共轭自同构。（这里采用了不严谨的记号，因为 (6.60) 不属于李群 (6.50)，而是相应李代数的一个外自同构。）注意，满足式 (6.4) 的不同 a_j 可通过乘以某个 $h \in C_{Co_0}(g,\ g')$ 联系起来，因此根据式 (6.59)，对所有这类 a_j，外$C_{U(1)^B}$ 都相同。回想一下，a_j 是 Co_0 中的一个对合，并且 $U^A(a_j)^2 = -\mathbf{1}_6$（见式 (6.14)），由此可推得电荷共轭自同构必须满足

$$C_{SU(6)^B}(a_j)^2 = -\mathbf{1}_6\ , \qquad C^2_{U(1)^B} = -1\ , \tag{6.61}$$

因此

$$a_j^2 \mapsto (-1,\ -\mathbf{1}_6,\ -\mathbf{1}_6,\ -1) \tag{6.62}$$

在 $V^{f\natural}$ 的所有场上作用平凡，见 (6.51)。类似地，满足 $a'_j g a'_j = g$ 的对合 $a'_j \in Co_0$ 和 (6.5) 中的 $a'_j g' a'_j = g'^{-1}$ 与.....相关联

$$a'_j \mapsto (C_{U(1)^A},\ C_{SU(6)^A}(a'_j),\ U^B(a'_j),\ i)\ , \tag{6.63}$$

其中 $U^B(a'_j)$ 如 (6.12) 所示，并且

$$U^B(a'_j)^2 = -\mathbf{1}_6, \qquad C^2_{SU(6)^A}(a'_j) = -\mathbf{1}_6\ , \qquad C^2_{U(1)^A} = -1\ . \tag{6.64}$$

最后，满足 $b_\pm g b_\pm = g^{-1}$ 和 $b_\pm g' b_\pm = g'^{-1}$（如式 (6.6) 所示）的对合 $b_\pm$ 与以下对象相关联:

$$b_\pm \mapsto (\pm C_{U(1)^A} i,\ C_{SU(6)^A}(b),\ C_{SU(6)^B}(b),\ \pm i C_{U(1)^B})\ , \tag{6.65}$$

其中 $C_{SU(6)^A}(b)$ 和 $C_{SU(6)^B}(b)$ 是电荷共轭自同构，且满足

$$C^2_{SU(6)^A}(b) = -\mathbf{1}_6 \ , \qquad C^2_{SU(6)^B}(b) = -\mathbf{1}_6 \ , \tag{6.66}$$

而 Co_0 的中心对合 ξ 对应于

$$\xi \mapsto (-1,\ \mathbf{1}_6,\ \mathbf{1}_6,\ -1) \ . \tag{6.67}$$

在 $(\mathbf{1}_{\pm 3},\ \mathbf{1}_{\pm 3})$ 的四个基态中，只有一个线性组合在所有 a_j、a'_k 和 $b_\pm$ 作用下保持不变——这直接源于 a_j、a'_k 和 $b_\pm$ 在这个 4 维空间上表现为三个可交换对合，且迹均为 0。因此，这个不变态必定与超流的分量 τ_c 成正比。

6.3 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷的显式描述

现在来描述对称性 g 的对偶缺陷 $\mathcal{N}_g$ 的主要性质，以及它在 $V^{f\natural}$ 的场上的作用。线性算子 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 必须湮灭不具备 g 不变性的场，并且必须通过一个阶为 2 的自同构作用于式 (6.31) 中的 g 不变仿射代数 $\widehat{so}(12)^A_1 \oplus \widehat{su}(6)^B_1 \oplus \hat{}u(1)^B_3$。特别地，对于 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(\mathbb{Z}_3,\ \chi,\ \epsilon)$，这样的自同构必须交换 $\widehat{so}(12)^A_1 \oplus \widehat{su}(6)^B_1 \oplus \hat{}u(1)^B_3$ 表示：一类是 g 特征值为 $g = \omega^k$、$k = 1,\ 2$ 的特征空间；另一类是 g^l 扭曲扇区中 g 不变的表示，即 $l = 1,\ 2$，其中 k 和 l 通过 $\chi(l,\ 1) = \omega^k$ 相关。比较表 14、15 和 16 可知，这意味着：

- 对于 $\chi = \chi_+$（见公式（3.20）），要将 $g = \omega^k$ 特征空间与 g^k 扭曲扇区互换。这意味着 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 通过 $\widehat{su}(6)^B_1$ 的外部电荷共轭自同构，以及在 $\widehat{so}(12)^A_1$ 和 $\hat{}u(1)^B_3$ 上的内自同构起作用。
- 对于 $\chi = \chi_-$（见公式（3.20））， 要将 $g = \omega^k$ 特征空间与 g^{-k} 扭曲扇区互换。这意味着 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{}\mathcal{N}_g$ 通过对 $\hat{}u(1)^B_3$ 的外部电荷共轭自同构，以及对 $\widehat{so}(12)^A_1$ 和 $\widehat{su}(6)^B_1$ 的内自同构起作用。

最后，$\hat{}\mathcal{N}_g$ 必须在超流 τ 上平凡作用。

为了定义这类缺陷，我们先考虑作用于 $V^{f\natural}$ 态空间上的线性算子 Θ：它消去所有非 g-不变的态，并且 $\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta$ 在代数 $\hat{}u(1)^A_3 \oplus \widehat{su}(6)^A_1 \oplus \widehat{su}(6)^B_1 \oplus \hat{}u(1)^B_3 \subset \widehat{so}(12)^A_1 \oplus \widehat{su}(6)^B_1 \oplus \hat{}u(1)^B_3$ 上通过自同构作用

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta \mapsto (i,\ \mathbf{1}_6,\ \mathbf{1}_6,\ C_{U(1)^B}) \tag{6.68}$$

其中 $C_{U(1)^B}$ 是式（6.60）中的电荷共轭元素。将此算子 Θ 限制在 g-不变的拉蒙基态上，恰好得到式（6.24）。对于 χ 的两种可能选择，在 $N_{Co_0}(g)$ 中相差共轭的意义下，满足所有所需性质的对偶缺陷为

$$\hat{\mathcal{N}}_g^{(a'_j)} = \Theta a'_j \ , \qquad j \in \{+,0,-\} \ , \qquad \text{for } \chi = \chi_- \ , \tag{6.69}$$

$$\hat{\mathcal{N}}_g^{(b_\pm)} = \Theta b_\pm \ , \qquad \text{for } \chi = \chi_+ \ . \tag{6.70}$$

这意味着

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(b_\pm)} \mapsto (\mp C_{U(1)^A},\ C_{SU(6)^A}(b),\ C_{SU(6)^B}(b),\ \mp i) \ , \tag{6.71}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(a'_j)} \mapsto (iC_{U(1)^A},\ C_{SU(6)^A}(a'_j),\ U^B(a'_j),\ C_{U(1)^B}i) \tag{6.72}$$

显然，这类自同构会以预期的方式交换 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{u}(1)_3^B$ 的表示。

下面证明 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}^{(b_\pm)g}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}^{(a'_j)g}$ 在超流上作用平凡。由于 $b_\pm$、ξ 和 a'_j 都属于 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$，只需证明自同构 $\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta$ 保留 τ_c。为此，注意到 $\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta$ 在表示 $\left(\quad,\quad\right)_=$ 上作用平凡，而它$_0\quad{}_0$在表示 $(\mathbf{1}_{\pm 3}, \mathbf{1}_{\pm 3})$上的作用方式与 $a_j \in \mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$相同。因此，超流的两个分量 τ_s 和 τ_c 都被 $\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta$固定。

为了计算缠绕配分函数和缠绕亏格，将 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(k)}, k \in \{b_\pm, a'_0, a'_\pm\}$视为 g-不变子代数 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{u}(1)_3^B$ 的自同构会更方便，因为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(k)} \mapsto (O^{(k)},\ S^{(k)},\ T^{(k)})\ , \qquad k \in \{b_\pm, a'_0, a'_\pm\}\ , \tag{6.73}$$

其中，通过与（6.71）和（6.72）进行比较，我们得到

$$S^{(b_\pm)} = C_{SU(6)^B}(b)\ , \qquad T^{(b_\pm)} = \pm i\ , \tag{6.74}$$

$$S^{(a'_j)} = U^B(a'_j)\ , \qquad T^{(a'_j)} = C_{U(1)^B}i\ . \tag{6.75}$$

$O^{(k)}$ 的 $\widehat{so}(12)_1^A$ 自同构可以通过要求它们在子$u(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A$代数上的作用与（6.71）和（6.72）相匹配来确定。由于 $\widehat{so}(12)_1^A$的自同构群是 $O(12)$，因此，通过考察$\hat{\mathcal{N}}^{(k)}$ 在 g-不变的 $V^{f\natural}$的拉蒙基态 $\Lambda^g \otimes \mathbb{R}$ 上的作用来确定 $O^{(k)}$ 实际上更为容易；这些基态构成$O(12)$的向量表示。注意，所有 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}^{(k)g}$在 12 维空间 $\Lambda^g \otimes \mathbb{R}$上的迹都是 0，因为它们都涉及对复坐标 z_1, ……, z_6的复共轭。由于这些自同构的阶为 2，因此 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(k)}$（从而$O^{(k)} \in O(12)$）的特征值 $+1$和 -1 在 $\Lambda^g \otimes \mathbb{R}$上的重数均为 6。因此，由 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}_g^{(k)}$固定的 $\widehat{so}(12)_1^A$的仿射子代数在所有情况下都同构于

$$\widehat{so}(6)_1^{A+} \oplus \widehat{so}(6)_1^{A-} \subset \widehat{so}(12)_1^A\ . \tag{6.76}$$

注意，所有 $O^{(k)}$ 都属于 $SO(12) \subset O(12)$，因此它们是 $\widehat{so}(12)_1^A$ 的内自同构。

如引言中所述，为了定义缠绕亏格

$$\phi^{\mathcal{N}^{(k)}}\left(V^{f\natural}, \tau, z\right) = Tr_{V_{tw}^{f\natural}}\left(\hat{\mathcal{N}}^{(k)}(-1)^F q^{L_0 - 1/2} y^{J_0^3}\right) \tag{6.77}$$

需要在由 $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathcal{N}}^{(k)}$ 固定的六维 Ramond 基态空间中选取一个四维子空间 $\Pi^\natural$。这一选择决定了 $\widehat{so}(6)_1^{A+} \subset \widehat{so}(12)^A$内部的一个子代数 $\widehat{su}(2)_1 \oplus \widehat{su}(2)_1$。于是，(6.77) 中的 J_0^3 被定义为这些 $\widehat{su}(2)_1$之一中某个流的零模。显然，缠绕亏格 $\phi^{\mathcal{N}^{(k)}}$ 的最终形式不依赖于 $\Pi^\natural$ 的选择，也不依赖于流 J_0^3 的选择。

对缠绕配分函数或缠绕亏格有贡献的 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(6)_1^B \oplus \hat{u}(1)_3^B$ 表示只有那些在 g 下不变的表示，见表14。于是，我们可以写成

$$\frac{1}{\sqrt{3}}Z_{NS}^{\mathcal{N}^{(k)},\pm}(\tau) = \mathrm{ch}_0^{(12),O^{(k)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau) + \mathrm{ch}_v^{(12),O^{(k)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\square}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_3^{(1),T^{(k)}}(\tau)$$

$$\pm \operatorname{ch}_s^{(12),O^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_{\square\square}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau) \pm \operatorname{ch}_c^{(12),O^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_3^{(1),T^{(k)}}(\tau) \tag{6.78}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}Z_R^{\mathcal{N}^{(k)},\pm}(\tau) = &\operatorname{ch}_v^{(12),O^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau)\\ &\pm \operatorname{ch}_c^{(12),O^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_{\square\square}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau) \pm \operatorname{ch}_s^{(12),O^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_3^{(1),T^{(k)}}(\tau)\end{aligned} \tag{6.79}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^{\mathcal{N}^{(k)}}(\tau,z) = &\operatorname{ch}_v^{(12),O^{(k)}}(\tau,z)\operatorname{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau)\\ &- \operatorname{ch}_c^{(12),O^{(k)}}(\tau,z)\operatorname{ch}_{\square\square}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_0^{(1),T^{(k)}}(\tau)\\ &- \operatorname{ch}_s^{(12),O^{(k)}}(\tau,z)\operatorname{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(k)}}(\tau)\operatorname{ch}_3^{(1),T^{(k)}}(\tau)\end{aligned} \tag{6.80}$$

这里，$\mathsf{ch}_M^{(12)\ O^{(k)}}(\tau)$、$M \in \{0,v,s,c\}$、$\mathsf{ch}_R^{(6)\ S^{(k)}}$、$R \in \{\mathbf{1},\ \square\square\}$ 和 $\mathsf{ch}_n^{(1)\ T^{(k)}}$、$n \in \{0,3\}$ 分别表示代数 $\widehat{so}(12)_1^A$、$\widehat{su}(6)_1^B$ 和 $\hat{}u(1)_3^B$ 的表示的特征标，它们分别被对应的自同构 $O^{(k)}$、$S^{(k)}$ 或 $T^{(k)}$"缠绕"，即

$$\operatorname{ch}_M^{(12),O^{(k)}}(\tau) = \operatorname{Tr}_M(q^{L_0-\frac{6}{24}}O^{(k)}) , \qquad \operatorname{ch}_M^{(12),O^{(k)}}(\tau,z) = \operatorname{Tr}_M(q^{L_0-\frac{6}{24}}y^{J_0^3}O^{(k)}) , \tag{6.81}$$

$$\operatorname{ch}_R^{(6),S^{(k)}}(\tau) = \operatorname{Tr}_R(q^{L_0-\frac{5}{24}}S^{(k)}) , \qquad \operatorname{ch}_n^{(1),T^{(k)}}(\tau) = \operatorname{Tr}_n(q^{L_0-\frac{1}{24}}T^{(k)}) . \tag{6.82}$$

利用式 (4.46)、(4.48) 和 (4.47) 中的扭曲特征标公式，令 $2n=12$ 和$\mathcal{O}=\mathcal{O}^{(k)}$ 作用于费米子，其中六个特征值等于 $+1$，另六个等于 -1，可得到以下简化结果:

$$\operatorname{ch}_s^{(12),O^{(k)}}(\tau) = \operatorname{ch}_c^{(12),O^{(k)}}(\tau) = \operatorname{ch}_s^{(12),O^{(k)}}(\tau,z) = \operatorname{ch}_c^{(12),O^{(k)}}(\tau,z) = 0 . \tag{6.83}$$

$$\operatorname{ch}_v^{(12),O^{(k)}}(\tau) = 0 \tag{6.84}$$

以及真空模的以下表达式:

$$\operatorname{ch}_0^{(12),O^{(k)}}(\tau) = \frac{\theta_3(\tau)^3\theta_4(\tau)^3}{\eta(\tau)^6} \tag{6.85}$$

在 6 $O^{(k)}$-不变的自由费米子中，4 个受 J_0^3 作用（构成子空间 $\Pi^{\natural}$），另有两个为中性；六个 $O^{(k)}=-1$ 特征态在 J_0^3作用下均为中性。利用这些信息，我们可以计算 v 表示中的扭曲特征标，其分次依据为该卡当流

$$\operatorname{ch}_v^{(12),O^{(k)}}(\tau,z) = \frac{\theta_3(\tau,z)^2\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)^3 - \theta_4(\tau,z)^2\theta_4(\tau)\theta_3(\tau)^3}{2\eta(\tau)^6}. \tag{6.86}$$

在计算其他特征标 $\mathsf{ch}_R^{(6)\ S^{(k)}}$,and $\mathsf{ch}_n^{(1)\ T^{(k)}}$,时，区分 $\mathcal{N}^{(b_\pm)}$和 $\mathcal{N}_{(a'_j)\,g}$ 这两种情况很有用。

缺陷 $\mathcal{N}_{(b_\pm)}$。 在这种情况下， $S^{(b_\pm)} = C_{SU(6)^B}(b)$ 是 $\widehat{su}(6)_1$，的外电荷共轭自同构，而 $T^{(b_\pm)} = \pm i$ 是 $\hat{u}(1)_3$ 的内自同构。我们可以用自由玻色子来描述 $\hat{u}(1)_3$ ，其中与顶点算符 $\mathcal{V}_{\frac{m}{\sqrt{6}}}$ 相对应的 n 表示满足 $m \in n + 6\mathbb{Z}$。那么， $T^{(b_\pm)}$ 对玻色振子不起作用，并且通过

$$T^{(b_\pm)}(\mathcal{V}_{\frac{m}{\sqrt{6}}}) = (\pm i)^m \mathcal{V}_{\frac{m}{\sqrt{6}}} \ , \tag{6.87}$$

关于顶点算子。由此可得

$$\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(b_\pm)}}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\pm i)^{6k} q^{\frac{1}{12}(6k)^2} = \frac{\theta_4(6\tau)}{\eta(\tau)} \tag{6.88}$$

$$\mathrm{ch}_3^{(1),T^{(b_\pm)}}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\pm i)^{6k+3} q^{\frac{1}{12}(6k+3)^2} = 0 \tag{6.89}$$

现在来讨论 $\widehat{su}(6)_1^B$ 的自同构 $S^{(b_\pm)}$。Kac 定理（[42], 定理 8.6）保证，除去共轭之外，（有限）李代数 $su(6)$ 的阶 2 外自同构只有两个：一个固定维数为 15 的子代数 $so(6) \cong su(4)$，另一个固定维数为 21 的子代数 $sp(6)$。为了确定 $= C_{SU(6)^B}(b)$ 属于这两种情形中的哪一种 $S^{(b_\pm)}$，我们注意到，该元素与式（6.71）中的 $\widehat{su}(6)_1^A$ 的自同构 $C_{SU(6)^A}(b)$ 处于同一个共轭类。这是因为 g 和 g' 在 Co_0 内共轭，这是由于它们具有相同的框架形状；并且，任何满足 $kgk^{-1} = g'$ 的元素 $k \in Co_0 \subset Spin(24)$ 都必须交换子代数 $\widehat{su}(6)_1^A$ 和 $\widehat{su}(6)_1^B$；此外， kbk^{-1} 必须再次是满足（6.6）的 $N_{Co_0}(\langle g\rangle) = N_{Co_0}(\langle g'\rangle)$ 的一个元素。自同构$C_{SU(6)^A}(b)$ 是由 $\widehat{so}(12)_1^A$ 的自同构 $O^{(b_\pm)}$ 诱导的；后者固定了生成 $\widehat{so}(6)_1^{A+} \oplus \widehat{so}(6)_1^{A-}$ 的 $15 + 15 = 30$ 流，而这些流是 $\widehat{so}(12)_1^A$ 中 66 个流的一部分。若按照式（6.45）将 $\widehat{so}(12)_1^A$ 的伴随（真空）表示相对于子代数 $\hat{u}(1)_3^A \oplus \widehat{su}(6)_1^A$ 分解，显然，这些由 30 $O^{(b_\pm)}$ 保持的流中有 15 个来自表示+ 。事实上，由于 $O^{(b_\pm)}$ 交换 和， $O^{(b_\pm)}$-不变的流

$$\frac{1}{2}(J \pm \Phi(J))$$

由 中的每个流与其在 中的像的对称线性组合给出。另一方面，$\hat{u}(1)_3^A$ 的流并不被 $O^{(b_\pm)}$ 固定，因为其作用是电荷共轭自同构 $C_{U(1)^A}$ 因此，剩下的 15 $O^{(b_\pm)}$-固定流必定是 $\widehat{su}(6)_1^A$ 中被 $C_{SU(6)^A}(b)$ 固定的那些流。结合这一计数结果与 Kac 定理，我们得出， $\widehat{su}(6)_1^A$ 中被 $C_{SU(6)^A}(b)$ 固定的子代数是 $\widehat{su}(4)_2 \cong \widehat{so}(6)_2$；其层级可以通过匹配 $\widehat{su}(4)_2$ 和 $\widehat{su}(6)_1$ 的 Sugawara 应力张量的中心荷来确定。类似地，被自同构$S^{(b_\pm)} = C_{SU(6)^B}(b)$ 保持的 $\widehat{su}(6)_1^B$ 子代数必定同构于 $\widehat{su}(4)_2$。

利用在格 A_5 上的五个手征自由玻色子来描述 $su(6)_1^B$，我们感兴趣的二阶自同构对应于理论的一个 $\mathbb{Z}_2$ 对称性：它使自由玻色子 $X^i \mapsto -X^i$ 的符号反转，并将顶点算子 $\mathcal{V}_\lambda \mapsto \mathcal{V}_{-\lambda}$ （对应于 $\forall \lambda \in A_5^*$）的动量符号反转。这种对称性实现了电荷共轭，将基本表示和反基本表示 $\leftrightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 互换。此外，它恰好保留了 15 个流，它们由与 30 个根 $\lambda \in A_5$ 相关的顶点算子的对称组合给出：

$$\mathcal{V}_\lambda + \mathcal{V}_{-\lambda} \, . \tag{6.90}$$

$\mathbb{Z}_2$-扭曲配分函数的贡献仅来自振子，从而得到以下特征标:

$$\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(b_\pm)}}(\tau)=\frac{\eta(\tau)^5}{\eta(2\tau)^5}. \tag{6.91}$$

缺陷 $\mathcal{N}_{(a'_j)}$。自同构 $T^{(a'_j)}$ 对 $\hat{u}(1)_3$ 的玻色振子作用为乘以负号，并将具有 $u(1)$ 电荷 m 的态映射为具有电荷 $-m$ 的态。因此，只有具有 $u(1)$ 电荷 $m=0$ 的态才会对特征标 $\mathrm{ch}_n^{(1)\,T^{(a'_j)}}(\tau)$ 作出贡献。特别地，

$$\mathrm{ch}_3^{(1),T^{(a'_j)}}(\tau)=0\ ,\qquad j\in\{0,+,-\}\ , \tag{6.92}$$

and

$$\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_j)}}(\tau)=\frac{\eta(\tau)}{\eta(2\tau)}\ ,\qquad j\in\{0,+,-\}\ . \tag{6.93}$$

作用于 $\widehat{su}(6)_1^B$ 上的内自同构 $S^{(a'_j)}$ 由 $SU(6)$ 矩阵 $U^B(a'_j)$ 给出，其特征值为 $+i$，$-i$，对于 $j=+$，0，$-$，对应的重数分别为 (1，5)、(3，3) 和 (5，1)。我们采用一种用 A_5 格点顶点算子代数和 A_5^*/A_5 中的陪集来描述 $\widehat{su}(6)_1$ 及其表示的方法。如果 A_5 格如式 (6.34) 所述，那么对偶 A_5^* 由以下六个（线性相关！）向量生成

$$\begin{array}{l}(\frac{5}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}),\quad(-\frac{1}{6},\frac{5}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}),\quad(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}),\\(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}),\quad(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{5}{6},\frac{1}{6}),\quad(-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},-\frac{5}{6}),\end{array} \tag{6.94}$$

对应于 $\widehat{su}(6)_1$ 表示中的六个基态。于是，除去在 $SU(6)$ 中的共轭外，我们可以取自同构 $S^{(a'_j)}$ 作用于 $\mathcal{V}_\lambda$、$\lambda\in A_5^*$ 上为

$$S^{(a'_j)}(\mathcal{V}_\lambda)=e^{2\pi i\beta_j\cdot\lambda}\mathcal{V}_\lambda\ ,\qquad j\in\{0,+,-\}\ , \tag{6.95}$$

with

$$\beta_\pm=\pm(\frac{5}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})\in\frac{1}{2}A_5^*\ , \tag{6.96}$$

or

$$\beta_0=\frac{3}{4}(1,1,1,1,1,1) \tag{6.97}$$

不难验证，在作出这一选择 β_j后，顶点算符 $\mathcal{V}_\lambda$（其中 λ 是 (6.94) 中的六个向量）是 $S^{(a'_j)}$ 的特征向量，并且具有与 $U^B(a'_j)$ 相同的特征值。利用格点描述进行直接计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_\pm)}}(\tau)&=\frac{\theta_4(6\tau)g(\tau)}{\eta(\tau)^5}\\&=\frac{1}{\eta(\tau)^5}(1+10q-30q^2+20q^3-50q^4+120q^5-110q^6+\ldots)\end{aligned} \tag{6.98}$$

其中

$$g(\tau)=\frac{1}{4}(9\theta_4(6\tau)^4-5\theta_4(2\tau)^4)\ ,$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_0)}}(\tau) &= \frac{h(\tau)\theta_4(2\tau)^2}{\eta(\tau)^5} \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)^5}(1-6q+18q^2-44q^3+78q^4-72q^5+66q^6+\ldots)\end{aligned} \tag{6.99}$$

其中

$$h(\tau) := \theta_4(6\tau)^3 + \frac{1}{4}(\theta_4(2\tau/3)-\theta_4(6\tau))^3. \tag{6.100}$$

综合以上所有结果，我们得到以下 $\mathcal{N}^{(b_\pm)}$ 的扭曲函数

$$\begin{aligned}Z_{NS}^{\mathcal{N}^{(b_\pm)},\pm}(\tau) =&\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_0^{(12),O^{(b_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(b_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(b_\pm)}}(\tau) = \sqrt{3}\frac{\theta_3(\tau)^3\theta_4(\tau)^3\theta_4(6\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(2\tau)^5} \\ =&\sqrt{3}\left(\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} - 10q^{\frac{1}{2}} + 46q^{\frac{3}{2}} - 142q^{\frac{5}{2}} + 377q^{\frac{7}{2}} - 954q^{\frac{9}{2}} + 2238q^{\frac{11}{2}} + O(q^{\frac{13}{2}})\right)\end{aligned} \tag{6.101}$$

$$Z_R^{\mathcal{N}^{(b_\pm)},\pm}(\tau) =\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(b_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(b_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(b_\pm)}}(\tau) = 0 \tag{6.102}$$

以及以下缠绕亏格

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}^{(b_\pm)}}(\tau,z) =&\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(b_\pm)}}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(b_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(b_\pm)}}(\tau) \\ =&\sqrt{3}\frac{(\theta_3(\tau,z)^2\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)^3 - \theta_4(\tau,z)^2\theta_4(\tau)\theta_3(\tau)^3)\theta_4(6\tau)}{2\eta(\tau)^2\eta(2\tau)^5}.\end{aligned} \tag{6.103}$$

对于 $\mathcal{N}^{(a'_\pm)}$ 的扭曲函数和亏格，我们得到[13],

$$Z_{NS}^{\mathcal{N}^{(a'_\pm)},\pm}(\tau) =\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_0^{(12),O^{(a'_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_\pm)}}(\tau) = \sqrt{3}\frac{\theta_4(2\tau)^7\theta_4(6\tau)g(\tau)}{\eta(\tau)^{12}} \tag{6.104}$$

$$Z_R^{\mathcal{N}^{(a'_\pm)},\pm}(\tau) =\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(a'_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_\pm)}}(\tau) = 0 \tag{6.105}$$

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}^{(a'_\pm)}}(\tau,z) =& \sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(a'_\pm)}}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_\pm)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_\pm)}}(\tau) \\ =& \sqrt{3}\frac{(\theta_3(\tau,z)^2\theta_3(\tau)\theta_4(\tau)^3 - \theta_4(\tau,z)^2\theta_4(\tau)\theta_3(\tau)^3)\theta_4(6\tau)g(\tau)}{2\eta(\tau)^{10}\eta(2\tau)}.\end{aligned} \tag{6.106}$$

最后，对于 $\mathcal{N}^{(a'_0)}$ 的扭曲函数和亏格，我们有

$$Z_{NS}^{\mathcal{N}^{(a'_0)},\pm}(\tau) =\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_0^{(12),O^{(a'_0)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_0)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_0)}}(\tau) = \sqrt{3}\frac{\theta_4(2\tau)^9 h(\tau)}{\eta(\tau)^{12}} \tag{6.107}$$

$$Z_R^{\mathcal{N}^{(a'_0)},\pm}(\tau) =\sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(a'_0)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_0)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_0)}}(\tau) = 0 \tag{6.108}$$

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}^{(a'_0)}}(\tau,z) =& \sqrt{3}\,\mathrm{ch}_v^{(12),O^{(a'_0)}}(\tau,z)\,\mathrm{ch}_{\mathbf{1}}^{(6),S^{(a'_0)}}(\tau)\,\mathrm{ch}_0^{(1),T^{(a'_0)}}(\tau) \\ =& \sqrt{3}\frac{(\theta_3(\tau,z)^2\theta_4(\tau)^2 - \theta_4(\tau,z)^2\theta_3(\tau)^2)\theta_4(2\tau)^5 h(\tau)}{2\eta(\tau)^{12}}.\end{aligned} \tag{6.109}$$

[13]此处及以下方程中用到了如下恒等式： $\theta_3(\tau)\theta_4(\tau) = \theta_4(2\tau)^2$ 以及 $\eta(2\tau)\theta_4(2\tau) = \eta(\tau)^2$

根据猜想 6，这些在方程 (6.103)、(6.106) 和 (6.109) 中给出的缠绕亏格，是带有 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷的 K3 非线性σ模型的缠绕亏格的预测。

最后，我们可以通过考虑 NS 缠绕函数的 S 变换，根据自旋选择规则确定每个对偶缺陷所对应的 TY 范畴。在 $\mathcal{N}^{(b_\pm)}$ 的情况下，我们得到

$$\begin{aligned} Z^{\pm}_{\mathcal{N}^{(b_\pm)},NS}(\tau) =&\sqrt{3}\frac{\theta_3(-1/\tau)^3\theta_4(-1/\tau)^3\theta_4(-6/\tau)}{\eta(-1/\tau)^2\eta(-2/\tau)^5} = \frac{4\theta_3(\tau)^3\theta_2(\tau)^3\theta_2(\tau/6)}{\eta(\tau)^2\eta(\tau/2)^5} \\ =&64q^{5/24}+64q^{3/8}+768q^{17/24}+704q^{7/8}+5056q^{29/24}+4288q^{11/8}+\dots, \end{aligned} \tag{6.110}$$

因此，$\mathcal{N}^{(b_\pm)}$-扭曲扇区的共形权重取值于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}+\{\frac{5}{24},-\frac{1}{8}\}$，这与范畴 TY($\mathbb{Z}_3,\mp\chi_+,-1$) 的预期一致（见表 7）。

类似地，在 $\mathcal{N}^{(a'_\pm)}$ 的情况下，我们得到：

$$\begin{aligned} Z^{\pm}_{\mathcal{N}^{(a'_\pm)},NS}(\tau) =&\sqrt{3}\frac{\theta_4(-2/\tau)^7\theta_4(-6/\tau)g(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)^{12}} = \frac{\theta_2(\tau/2)^7\theta_2(\tau/6)(\theta_2(\tau/6)^4-5\theta_2(\tau/2)^4)}{256\eta(\tau)^{12}} \\ =&16q^{1/24}+80q^{3/8}+352q^{13/24}+736q^{7/8}+2768q^{25/24}+4352q^{11/8}+\dots, \end{aligned} \tag{6.111}$$

因此，$\mathcal{N}^{(a'_\pm)}$-扭曲扇区的共形权重取值于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}+\{\frac{1}{24},-\frac{1}{8}\}$，这与 TY($\mathbb{Z}_3,\chi_-,+1$) 的预期一致。

最后，对于 $\mathcal{N}^{(a'_0)}$，我们得到

$$\begin{aligned} Z^{\pm}_{\mathcal{N}^{(a'_0)},NS}(\tau) =&\sqrt{3}\frac{\theta_4(-2/\tau)^9h(-1/\tau)}{\eta(-1/\tau)^{12}} = \frac{\theta_2(\tau/2)^9\left[\theta_2(\tau/6)^3+\frac{1}{4}(3\theta_2(3\tau/2)-\theta_2(\tau/6))^3\right]}{192\eta(\tau)^{12}} \\ =&16q^{1/8}+96q^{7/24}+256q^{5/8}+1056q^{19/24}+1872q^{9/8}+6624q^{31/24}+\dots, \end{aligned} \tag{6.112}$$

因此，$\mathcal{N}^{(a'_0)}$-扭曲扇区的共形权重取值于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}+\{-\frac{5}{24},\frac{1}{8}\}$，这与 TY($\mathbb{Z}_3,\chi_-,-1$) 的预期一致。

7 非循环群的对偶缺陷

本节将考察 Top 中由非循环阿贝尔群 A 给出的拓扑缺陷 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(A)$ 的若干情形。特别是，在对形式为 $A=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ 的群进行一些一般性讨论后，我们将具体描述 $V^{f\natural}$ 中 $A=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 的一个对偶缺陷实例。最后，我们将描述一个具有相同缺陷 TY 范畴的 K3 模型，并展示相应缠绕亏格之间的对应关系。

7.1 轨形化得到的对偶缺陷

在 [9] 中，研究表明，大类 TY 范畴 $TY(A)$ 都可以通过一种轨形化过程得到，该过程与 [1] 第 4 节讨论的过程类似。只有当对偶缺陷具有整数维数时，这种构造才可行，也就是说，阿贝尔群的阶 $|A|$ 必须是完全平方数。

我们简要回顾一下 [1] 第 4 节中的一般构造。假设全纯（超）顶点算子代数 V 具有一个有限对称群 G，并且 $H\subseteq G$ 是其子群。为

简便起见，这里假设 G 没有 't Hooft 反常。那么，轨形 $V' := V/H$ 是定义良好的全纯 VOA，[14] 并且可以考虑 V' 中保持 G-不变 VOA $V^G \subseteq V^H$ 的拓扑缺陷范畴；该 VOA 是 V 和 V' 的公共子 VOA。正如 [1], 中所述，这类缺陷可由一对 $(HgH,\ \rho)$ 标记，其中 HgH 是 $H\backslash G/H$ 中的一个双陪集，而 $\rho \in Irr(H)$ 是 H 的一个不可约表示。缺陷 $\mathcal{L}_{HgH,\ \rho}$ 在 $V' = V/H$ 中的伴随和扭曲配分函数为

$$Z^{HgH,\rho}(V/H,\tau) = \frac{1}{|H|} \sum_{g' \in HgH} \sum_{\substack{h \in H \\ hg' = g'h}} Tr_\rho(h)^* Z^{g'}_{h^{-1}}(V,\tau)\ , \tag{7.1}$$

and

$$Z_{HgH,\rho}(V/H,\tau) = \frac{1}{|H|} \sum_{g' \in HgH} \sum_{\substack{h \in H \\ hg' = g'h}} Tr_\rho(h)^* Z^{h}_{g'}(V,\tau), \tag{7.2}$$

其中，$Z^h_g(V,\ \tau)$ 是 V 中的 g 扭曲、h 缠绕分区函数。关于这些公式的解释，请参见 [1]。特别地，对于平凡陪集 HeH，可以得到与有限群 H 的不可约表示 ρ 相关联的威尔逊线；该群已被"规范化"。在一些温和条件下，这一构造可以推广到超 VOA 的情形，特别是当 $V' = V^{f\natural}$ 和 V^G 包含超流 τ 时。如果以此方式得到的缺陷 $\mathcal{L}_{HgH,\ \rho}$ 也保持 $V^{f\natural}_{tw}$ 中基态的一个四维子空间，那么就可以用母理论V中的扭曲缠绕亏格 ϕ^h_g 来定义相应的缠绕亏格。

现在让我们将这一一般构造应用于定义一些阿贝尔群 A 的对偶缺陷，其中该群的阶是一个完全平方数。具体来说，我们讨论阿贝尔群 A 与 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ 同构的情形，其中 n 任意。

假设顶点算子代数 V包含一个阶为 $2n^2$ 、由生成元及关系定义的对称群 $G \cong (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes \mathbb{Z}_2$

$$G = \langle a, b, g \mid a^n = 1 = b^n\ ,\quad ab = ba\ ,\quad g^2 = 1\ ,\quad gag = b\ ,\quad gbg = a \rangle\ . \tag{7.3}$$

这意味着 $a,\ b$ 生成正规阿贝尔子群 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$，而对合 g 的共轭作用会交换两个生成元 a 和 b。设 $H \subset G$ 为由 b生成的循环子群$H = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_n$。

群 G 有 $n(n+1)/2 + n$ 个共轭类，其代表元为

$$[a^j b^k] = [a^k b^j]\ ,\qquad 0 \le j \le k \le n-1\ , \tag{7.4}$$

$$[ga^j] = [ga^k b^{j-k}]\ ,\qquad 0 \le j \le n-1\ . \tag{7.5}$$

第一行中的共轭类包含一个（若 $j = k$）或两个（若 $j < k$）元素，而第二行中的每个共轭类 $[ga^j]$ 都包含元素 $ga^k b^{j-k}$、$0 \le k \le n-1$，共 n 个。共有 $2n$个不可约一维表示 ρ_q, $\tilde{\rho}_q \in Irr(G)$、$q = 0,\ .....,\ n-1$，其中

$$\rho_q(a) = \rho_q(b) = e^{\frac{2\pi i q}{n}}\ ,\qquad \rho_q(g) = 1\ , \tag{7.6}$$

[14]严格来说，需要假设 H固定的子代数是正则的。对于任意全纯 VOA V 和有限群 H，这被猜想是成立的，但目前仅在 H 可解时 [51]得到了严格证明。

$$\tilde{\rho}_q(a) = \tilde{\rho}_q(b) = e^{\frac{2\pi i q}{n}} , \qquad \tilde{\rho}_q(g) = -1 , \tag{7.7}$$

以及 $n(n-1)/2$ 不可约二维表示 $\rho_{q_1,\ q_2}$、$0 \le q_1 < q_2 \le n-1$，由下式给出

$$\rho_{q_1,q_2}(a) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i q_1}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i q_2}{n}} \end{pmatrix} , \quad \rho_{q_1,q_2}(b) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i q_2}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i q_1}{n}} \end{pmatrix} , \quad \rho_{q_1,q_2}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{7.8}$$

可以验证，维数平方之和等于 $2n^2$，因此该列表是完整的。

H 中的中心化子与 G 中元素 b^j、$j \neq 0$的中心化子分别为 $C_H(b^j) = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ 和$C_G(b^j) = \langle a,\ b \rangle \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$。我们将由 $\sigma_{q_a,\ q_b}(a) = e^{\frac{2\pi i q_a}{n}}$和 $\sigma_{q_a,\ q_b}(b) = e^{\frac{2\pi i q_b}{n}}$给出的 $\langle a,\ b \rangle$ 的表示记为 $\overline{\sigma_{q_a,\ q_b}}$。

回顾一下，全纯V 的 G-不变子 VOA V^G 的不可约表示由一对 $([g],\ \rho)$ 标记，其中 $[g]$ 是 G 中的一个共轭类，而 $\rho \in Irr(C_G(g))$ 是中心化子 $C_G(g)$ 的不可约表示，该中心化子对应于 G中的 g。特别地，g-扭曲扇区 V_g 包含所有形如 $([g],\ \rho)$ 的表示，其中 $[g]$ 是 g 的共轭类。理论 $V' = V/H$ 包含以下 V^G-主算符

$$\begin{aligned} &\Phi_{1,\rho_0} , \qquad \Phi_{1,\tilde{\rho}_0} , \qquad \Phi^0_{1,\rho_{0,q_2}}, \quad 1 \le q_2 \le n-1, \\ &\Phi_{b^j,\sigma_{q_a,0}}, \qquad\qquad\qquad 1 \le j \le n-1, \quad 0 \le q_a \le n-1 , \end{aligned} \tag{7.9}$$

每个重数均为一。这里，$\Phi_{1,\ \rho}$、$\rho \in Irr\ (G)$ 表示未扭曲扇区 V^H 中的算符，其中 $\Phi^0_{1,\ \rho_{0,\ q_2}}$ 是表示 $\rho_{0,\ q_2}$ 中唯一的 H 不变的 V^G 主算符。此外，$\Phi_{b^j,\ \sigma_{q_a,\ 0}}$ 是表示 $\sigma_{q_a,\ 0} \in Irr\ (C_G\ (b^j))$ 中 b^j 扭曲扇区的 V^G 主算符。

双陪集 $H\backslash G/H$ 包含 n 个陪集，每个陪集含有 n 个元素，具体为

$$Ha^kH = \{a^k b^j,\ j = 0, \ldots, n-1\} , \qquad k = 0, \ldots, n-1 , \tag{7.10}$$

以及一个含有 n^2 个元素的陪集，即

$$HgH = \{b^j g b^k\ ,\ j,k = 0, \ldots, n-1\} . \tag{7.11}$$

由于 H 是阿贝尔的，不可约 H 表示是一维的，相应的威尔逊线是可逆的，它们构成量子对称群 $\langle Q \rangle \cong \mathbb{Z}_n$。更一般地，陪集 Ha^kH、$k = 0$、.....、$n-1$ 在轨形理论 V/H 中产生 n^2 个可逆缺陷 $\mathcal{L}_{a^j Q^k}$、j、$k = 0$、.....、$n-1$，构成由 a 和量子对称性 Q 生成的群 $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$。

另一方面，余集 HgH 对应于缺陷 $\mathcal{L}_{HgH,\rho}$，其中包含 $\rho \in Irr(H)$，以及扭曲和缠绕配分函数

$$Z^{HgH,\rho} = \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} Z^{gb^{j+k}} = \sum_{j=0}^{n-1} Z^{gb^j} \ . \tag{7.12}$$

$$Z_{HgH,\rho} = \frac{1}{n} \sum_{j,k=0}^{n-1} Z_{gb^{j+k}} = \sum_{j=0}^{n-1} Z_{gb^j} \tag{7.13}$$

其中我们利用了 $b^j g b^k$ 与 gb^{j+k}共轭这一事实。

注意，对于所有 ρ，这些配分函数都相同，因此所有 $\mathcal{L}_{HgH,\ \rho}$ 都可以与一个维数为 n 的单一缺陷等同，我们将其记为 $\mathcal{N}=\mathcal{L}_{HgH,\ \rho}$。由于

$$\sum_{j,k=0}^{n-1}\langle\mathcal{L}_{a^jQ^k}\rangle^2+\langle\mathcal{N}\rangle^2=n^2\cdot 1^2+n^2=2n^2=|G|\ , \tag{7.14}$$

我们得出结论：$\mathcal{L}_{a^jQ^k}$ 和 $\mathcal{N}$ 是轨形理论 V/H 中唯一保持子代数 V^G 的简单缺陷。从缠绕配分函数中，可以读出特征值

$$\hat{\mathcal{L}}(\Phi_{[h],R})=c_{[h],R}\Phi_{[h],R}\ , \tag{7.15}$$

一个 作用于 V^G-主算符$\Phi_{[h],R}$, $R\in Irr(C_G(h))$上的简单缺陷 $\mathcal{L}$。它们由以下方式给出 y

	c_{1,ρ_0}	$c_{1,\tilde{\rho}_0}$	$c_{1,\rho_{0,q_2}}$	$c_{b^j,\sigma_{q_a,0}}$
$\mathcal{L}_{a^rQ^s}$	1	1	$e^{\frac{2\pi irq_2}{n}}$	$e^{\frac{2\pi i(rq_a+sj)}{n}}$
$\mathcal{N}$	n	$-n$	0	0

(7.16)

这意味着 $\mathcal{N}$ 是无定向的，并且

$$\mathcal{N}\mathcal{L}_{a^jQ^k}=\mathcal{L}_{a^jQ^k}\mathcal{N}=\mathcal{N}\ ,\qquad \mathcal{N}^2=\sum_{r,s=0}^{n-1}\mathcal{L}_{a^rQ^s}\ . \tag{7.17}$$

由此可知，$\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$的对偶缺陷，也就是说，$V/H$ 中保持 V^G的缺陷范畴是一个 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n)$。这表明理论 $V':=V/H$应当关于群 $\langle a,\ Q\rangle\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$自轨形，也就是说

$$V'\cong V'/\langle Q,a\rangle\ . \tag{7.18}$$

事实上，我们可以轻松证明

$$V'/\langle Q,a\rangle=(V'/\langle Q\rangle)/\langle a\rangle=V/\langle a\rangle\cong V/\langle b\rangle=V'. \tag{7.19}$$

在第一个等式中，我们注意到，轨形 $V'/\langle Q,\ a\rangle$ 可以分两步完成：先除以 $\langle Q\rangle\cong\mathbb{Z}_n$，再除以 $\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}_n$。接着，由于 Q 是 $V'=V/\langle b\rangle$的量子对称性，对 $V'/\langle Q\rangle$ 取轨形即可恢复理论 V。最后，我们注意到 $a=gbg$，也就是说，a 和 b 在对称群 G中共轭，因此对V 取 $\langle a\rangle$或 $\langle b\rangle$的轨形，必定会得到同构的理论。

沿着同构链推导可知，特征空间 V' 中对应特征值 $Q=e^{\frac{2\pi ik}{n}}$、$a=e^{\frac{2\pi is}{n}}$ 的部分映射到 $V'/\langle a,\ Q\rangle$中的~~(a^kQ^s)~~ 扭曲扇区。这意味着，对称双特征标 χ：$\langle a,\ Q\rangle\times\langle a,\ Q\rangle\to U(1)$ 为

$$\chi(a,a)=1=\chi(Q,Q)\ ,\qquad \chi(a,Q)=e^{\frac{2\pi i}{n}}\ . \tag{7.20}$$

群 G 无反常，这意味着 $\epsilon=+1$，因此由这些缺陷生成的 Tambara-Yamagami 范畴为 $TY(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n,\ \chi,\ +1)$。反过来，由于轨形化过程是可逆的，可以得出：若某个 VOA V' 的范畴具有范畴$TY(\langle a,\ Q\rangle,\ \chi,\ +1)$，其中对称群为 $\langle a,\ Q\rangle\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$，且 χ 如上所定义，那么对 $V=V'/\langle Q\rangle$ 进行轨形化后，会得到对称群 $G\cong(\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n)\rtimes\mathbb{Z}_2$，且该群无反常。

可以从同一个群 G 出发，在存在非平凡 't Hooft 反常的情况下得到更一般的 TY 范畴（当然，该反常限制到子群 H 时必须平凡）。

特别地，群 $A=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ （四种互不等价的情形）和 $A=\mathbb{Z}_4$（四种互不等价的情形）的所有 TY 范畴，都可以通过对非阿贝尔群 $G\cong(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes\mathbb{Z}_2\cong D_8$ 内的子群 $H\cong\mathbb{Z}_2$ 作轨形得到，只需选择合适的反常 $\alpha\in H^3(G,\ U(1))$，使其限制到 H [9] 时变为平凡。下一节中，我们将为 $V^{f\natural}$ 中一个保 $\mathcal{N}=1$ 对称性的 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 群给出这一一般构造的实例。

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 中 $V^{f\natural}$ 的 Tambara-Yamagami

在本节中，我们考虑前一节所述构造的一个具体例子，其中 $V\cong V'\cong V^{f\natural}$ 和 $A=\langle a,\ Q\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\subset Co_0$ 是一个群，其所有非平凡元素 a、Q 和 aQ 的框架形状均为 1^82^8。

首先，考虑 Co_0 的一个阶为 8 的非阿贝尔子群，其形式为 $G\cong(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\rtimes\mathbb{Z}_2\cong D_8$，生成元及关系为

$$G=\langle a,b,g\mid a^2=1=b^2\ ,\quad ab=ba\ ,\quad g^2=1\ ,\quad gag=b\ ,\quad gbg=a\rangle\ . \tag{7.21}$$

群 G 有 5 个共轭类

$$[a]=[b]\,,[1]\,,[ab]\,, \tag{7.22}$$

$$[g]=[gab]\,,[ga]=[gb]\,. \tag{7.23}$$

我们假设 a、b 和 ab 的框架形状均为 1^82^8。这意味着子群 $\langle a、\ b\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 无反常。现在，正如第 3.2 节所述，由一个框架形状为 1^82^8 的元素 b 作用于 $V':=V^{f\natural}/\langle b\rangle$ 所得的轨形再次与 $V^{f\natural}$ 同构，而量子对称性 Q 的框架形状也再次为 1^82^8。此外，群 $\langle a、\ b\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 在 V 中无反常这一事实，意味着在轨形理论 V' 中，由 a 和 Q 生成的群与 $\langle a、\ Q\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 同构，即它是 $\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ 被量子对称性 $\langle Q\rangle$ 扩张得到的平凡中心扩张。反过来，理论 V' 中的群 $\langle a、\ Q\rangle$ 必须无反常，因为该群在理论 $V=V'/\langle Q\rangle$ 上诱导的对称性是 $\langle a、\ b\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$，它是 $\langle a\rangle$ 被 Q-量子对称性 $\langle b\rangle$ 扩张得到的平凡中心扩张。事实上，可以明确证明（见下文），在 V' 中，a、Q 和 aQ 的框架形状均为 1^82^8。

可以证明，对于任意幂次 r，Co_0 中阶为 2^r 的任意子群都包含在形如 $\mathbb{Z}_2^{12}$: $M_{24}\subset Co_0$ 的子群中。总能找到一个合适的 $\Lambda\otimes\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^{24}$ 正交归一基，使 a 和 b 同时对角化；不妨设 g 通过马修群 M_{24} 中的一个置换作用于这些基向量。a 的框架形状为 1^82^8，时，其特征值集合（忽略基向量的重新排序）为

$$a=(1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ -1,-1,-1,-1,\ -1,-1,-1,-1)\,, \tag{7.24}$$

同时要求 b 和 ab 的框架形状也为 1^82^8，这意味着

$$b=(-1,-1,-1,-1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ -1,-1,-1,-1,\ 1,1,1,1)\,, \tag{7.25}$$

在前 16 个特征值之间以及后 8 个特征值之间进行置换。注意，在 16 b 不动向量上（它们表示轨形 $V/\langle b\rangle$ 中未扭曲的 Ramond 基态），对称性 a 有 4 个特征值 -1 和 12 个特征值 $+1$。这意味着在轨形理论中，a 和 aQ 的框架形状都必须是 1^82^8，因为这是具有如此多不动向量的唯一可能性。

元素 g 对这组特征值进行置换，从而交换 $a \leftrightarrow b$。如果我们假设 g 是 M_{24} 中的一个对合，那么 g 的框架形状只有 $1^8 2^8$ （8 个对换和 8 个不动点）或 2^{12} （12 个对换）这两种可能。

我们只需列出所有可能的置换 g，并将那些与 a和 b对易的 S_{24} 中的置换所产生的共轭视为等价。每个阶为 2 的置换 g 都必须包含 4 个对换，将四个特征值为 $(1,-1)$ 的 (a,b)-特征向量与四个特征值为 $(-1,1)$ 的特征向量互换。其余对换必须互换具有相同 (a,b)-特征值的特征向量。例如，我们可以取 $g \equiv p_1$，其中

$$p_1 = (1,21)(2,22)(3,23)(4,24)(9,13)(10,14)(11,15)(12,16)\ , \tag{7.26}$$

因此

$$b = p_1 a p_1\ . \tag{7.27}$$

在这种情况下， p_1 的框架形状为 $1^8 2^8$, ，并且有 $(p_1 a)^4 = (p_1 b)^4 = 1$，其特征值为$p_1 a$和 $p_1 b$

$$(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,i,i,i,i,-i,-i,-i,-i,1,1,1,1,1,1,1,1)\,, \tag{7.28}$$

这意味着框架形状为 $2^4 4^4$ $(4D)$。我们有 $(p_1 ab)^2 = 1$，其特征值为 $p_1 ab$

$$(-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\,, \tag{7.29}$$

这意味着框架形状为 $1^8 2^8$ $(2A)$。元素 p_1 是循环形状为 $1^8 2^8$ 的 M_{24}置换集合中的一个代表；除了将 $(a,b) = (-1,1)$ 特征向量与 $(a,b) = (1,-1)$ 特征向量互换的 4 个对换外，还包含 4 个对换，在 $(a,b) = (1,1)$ 特征向量之间互换。

另一种可能的选择是， g 中的两个对换彼此交换特征值为（-1， -1）的特征向量。例如，可以取 $g = p_0$ ，其中

$$p_0 = (1,21)(2,22)(3,23)(4,24)(13,16)(14,15)(17,20)(18,19) \tag{7.30}$$

其中 $p_0 a$ 和 $p_0 b$ 的特征值为

$$(-1,-1,-1,-1,i,i,i,i,-i,-i,-i,-i,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\ . \tag{7.31}$$

然而， $p_0 b$ 的框架形状为 $1^8 4^4$, ，这并非 Co_0中允许的框架形状之一。这表明 p_0 不是 M_{24} 中的置换，因此我们不应考虑它。

对于框架形状为 $1^8 2^8$ 的 g ，最后一种可能的选择是：一个对换彼此交换特征值为（a, b）的特征向量，而另外三个对换彼此交换特征值为（1，1）的特征向量，即

$$p_2 = (1,21)(2,22)(3,23)(4,24)(5,8)(6,7)(13,14)(19,20) \tag{7.32}$$

其中 $p_2 a$ 和 $p_2 b$ 的特征值为

$$(-1,-1,-1,-1,-1,-1,i,i,i,i,-i,-i,-i,-i,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)\ , \tag{7.33}$$

与框架形状 $1^4 2^2 4^4$ $(4C)$ 一致。 $p_2 ab$仍具有框架形状 $1^8 2^8$ $(2A)$。

最后，当 g 具有框架形状 $2^{12},$ 时，基本上只有一种可能，即 $g=p_3$，其中

$$p_3=(1,21)(2,22)(3,23)(4,24)(5,8)(6,7)(9,13)(10,14)(11,15)(12,16)(17,20)(18,19) \quad (7.34)$$

其框架形状为 2^{12}„ 因此

$$b=p_3ap_3\,. \quad (7.35)$$

p_3a 和 p_3b 的框架形状为 2^44^4 （$4D$）； p_3ab的框架形状为 2^{12}。

请注意，我们考虑的三种情况，即 $g=p_1$、 $g=p_2$和 $g=p_3$，对应着具有不同反常的子群 $G\subset Co_0$。事实上，对于 $g=p_2$，群 G 是非反常的（反常框架形状列表见表6）。对于 $g=p_1$，反常限制到 $\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}_2$时是平凡的，但群 $\langle ga\rangle\cong\mathbb{Z}_4\cong\langle gb\rangle$ 具有阶 2 的反常。最后，当 $g=p_3$时， $\langle g\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ 和 $\langle ga\rangle\cong\mathbb{Z}_4$ 都具有阶 2 的反常。因此，轨形构造会导出不等价的 Tambara-Yamagami 范畴TY（A， χ， ϵ），其对偶缺陷 $\mathcal{N}$具有不同的缠绕配分函数和亏格。更准确地说：

- $g=p_1$。

$$\chi(Q,Q)=1,\qquad \chi(a,a)=\chi(a,Q)=-1,\qquad \epsilon=+1 \quad (7.36)$$

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{N}_{p_1}}=\mathcal{Z}^{1^82^8}+\mathcal{Z}^{2^44^4}\qquad \phi^{\mathcal{N}_{p_1}}=\phi^{1^82^8}+\phi^{2^44^4} \quad (7.37)$$

这与 $TY(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \chi_s,\ +1)\cong Rep(H_8)$ 是同一个范畴，即 Hopf代数 H_8 [36] 的表示范畴。

- $g=p_2$。

$$\chi(Q,Q)=1=\chi(a,a),\qquad \chi(Q,a)=-1,\qquad \epsilon=+1\ , \quad (7.38)$$

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{N}_{p_2}}=\mathcal{Z}^{1^82^8}+\mathcal{Z}^{1^42^24^4}\qquad \phi^{\mathcal{N}_{p_2}}=\phi^{1^82^8}+\phi^{1^42^24^4}\ . \quad (7.39)$$

这个 TY 范畴等价于二元二面体群 D_8 的表示范畴 $TY(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \chi_a,\ +1)\ \cong\ Rep(D_8)$。

- $g=p_3$。

$$\chi(Q,Q)=1,\qquad \chi(a,a)=\chi(a,Q)=-1\qquad \epsilon=-1 \quad (7.40)$$

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{N}_{p_3}}=\mathcal{Z}^{2^{12}}+\mathcal{Z}^{2^44^4}\qquad \phi^{\mathcal{N}_{p_3}}=\phi^{2^{12}}+\phi^{2^24^4} \quad (7.41)$$

这个范畴 $TY(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \chi_s,\ -1)$ 并非任何 Hopf代数的表示范畴。

在每种情况下，通过将 $\mathcal{N}$扭曲配分函数的模性质与给定 Tambara-Yamagami 范畴中$\mathcal{N}$扭曲扇区内场的预期自旋相匹配，可以确定 χ 和 ϵ 的正确选择，如第3.3节表 9所述。唯一的不确定性涉及在 $g=p_1$时对 ϵ 的选择。注意到 $\epsilon=-1$ 将意味着一条带有缺陷 $\mathcal{N}$、环绕真空的圆在

球面上带来因子 -2 而非 $+2$。由于我们最初所考虑的整个群 G在 $g = p_1$情况下并不反常，因此这个负号不可能出现，所以在这种情况下正确的选择必定是 $\epsilon = +1$。

从子群 $\langle a, b', g\rangle \subset Co_0$, $\langle a, b', g\rangle \cong D_8$ 出发，也可以进行类似的分析。该子群满足通常的关系 $a^2 = {b'}^2 = g^2 = 1$, $ab' = b'a$ 和 $gag = b'$，其中 a 与式（7.24）中的相同，而 b' 为

$$b' = (-1,-1,-1,-1,\ -1,-1,-1,-1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1,\ 1,1,1,1)\,. \tag{7.42}$$

这意味着 a 和 b' 的框架形状均为 $1^8 2^8$, , 但现在 ab' 的框架形状为 $1^{-8}2^{16}$; 群 $\langle a, b'\rangle$ 仍然是非反常的。若取 g 为一个框架形状为$1^8 2^8$, 的置换，那么要得到 $gag = b'$ ，唯一的可能性是 g 的 8 个对换将 a 的 8 个 -1-特征值与 b' 的 8 个 -1-特征值互换。这样的置换的一个例子是 $g = p_4$ ，其

$$p_4 = (1,17)(2,18)(3,19)(4,20)(5,21)(6,22)(7,23)(8,24)\ , \tag{7.43}$$

而 $p_4 b'$、 $p_4 a$ 的特征值为

$$(1,1,1,1,1,1,1,1,i,i,i,i,i,i,i,i,-i,-i,-i,-i,-i,-i,-i,-i) \tag{7.44}$$

对应于框架形状 $1^8 2^{-8} 4^8$。因此，缠绕分区函数和亏格为

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{N}_{p_4}} = \mathcal{Z}^{1^8 2^8} + \mathcal{Z}^{1^8 2^{-8} 4^8} \qquad \phi^{\mathcal{N}_{p_4}} = \phi^{1^8 2^8} + \phi^{1^8 2^{-8} 4^8}\ . \tag{7.45}$$

这意味着， $\mathcal{N}$-扭曲态的共形权重取值为 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$和 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，相关范畴为 $TY(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \chi_a, -1) \cong Rep(D_8)$，其中 $\chi_a(a,\ a) = 1$。

另一方面，如果我们考虑具有框架形状 2^{12}, 的 $g = p_5$ ，那么本质上唯一的选择是

$$p_5 = (1,17)(2,18)(3,19)(4,20)(5,21)(6,22)(7,23)(8,24)(9,10)(11,12)(13,14)(15,16). \tag{7.46}$$

在这种情况下， $p_5 b$ 和 $p_5 a$ 的特征值为

$$(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,i,i,i,i,i,i,i,i,-i,-i,-i,-i,-i,-i,-i,-i) \tag{7.47}$$

对应 对应于框架形状 $2^{-4}4^8$。因此，缠绕分区函数和亏格为 e

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{N}_{p_5}} = \mathcal{Z}^{2^{12}} + \mathcal{Z}^{2^{-4}4^8} \qquad \phi^{\mathcal{N}_{p_5}} = \phi^{2^{12}} + \phi^{2^{-4}4^8}\ . \tag{7.48}$$

这意味着 $\mathcal{N}$-扭曲态的共形权重取值为$\frac{1}{2}\mathbb{Z}$和 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathbb{Z}$，相关的范畴是 $TY(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \chi_a, -1)$，其 $\chi_a(a,a) = 1$。此范畴等价于四元数群 Q_8 的表示范畴 $Rep(Q_8)$。通过使用 [9], 第 5.6 节中的显式公式，可以证明这一点：将此处 D_8 的生成元与 [9] 中的 $X_{\rho,\sigma}$ 和 $Y_{\rho,\sigma}$ 通过 $X_{0,0} = 1$, $X_{1,0} = a$, $X_{0,1} = b'$ $X_{1,1} = ab'$, $Y_{0,0} = g$, $Y_{0,1} = bg$, $Y_{1,0} = ag$,$Y_{1,1} = abg$ 对应起来。然后，由 [9], 中的 (5.44) 可得，决定 D_8 反常的 3-余循环 α 满足 $\alpha(g,g,g) \equiv \alpha(Y_{0,0}, Y_{0,0}, Y_{0,0}) = \epsilon$。因此，根据 $\langle g\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ 的反常是否消失，结果为 $\epsilon = +1$ 或 $\epsilon = -1$。

7.3 GTVW K3 模型中非循环群的对偶缺陷

本节中，我们在 K3 上的一个非线性 σ 模型中给出两个 Tambara-Yamagami 范畴 $TY(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\chi,+1)$ 的例子，其中该范畴中的所有缺陷都保持 $\mathcal{N}=(4,4)$ 代数和谱流。这两个范畴分别等价于 $Rep(H_8)$ 和 $Rep(D_8)$，也就是说，双特征 χ 分别如 (7.36) 和 (7.38) 所示。

我们考虑 K3 模型 $\mathcal{C}_{GTVW}$，它最初在 [20], 中讨论，可视为具有特定 $T^4/\mathbb{Z}_2$ 靶空间 T^4 的 $\mathcal{N}=(4,4)$ σ 模型，其中 $T^4=\mathbb{R}^4/D_4$ 是最大的 Spin(8) 环面。该轨形 $T^4/\mathbb{Z}_2$ 的显著特点是，其对称群 $G_{GTVW}=\mathbb{Z}_2^8\rtimes M_{20}$ 在 K3 模型中具有最大的阶。超共形场论 $\mathcal{C}_{GTVW}$ 最容易理解为 $\mathcal{A}=\hat{\mathfrak{su}}(2)_1^6$ 有理共形场论的扩张。$\hat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 有两个共形权重分别为 0 和 $1/4$ 的酉最高权表示，对应于全局 $SU(2)$ 对称性的单态表示和双态表示。$\hat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 的融合环具有阶为 2 的循环群 $\mathbb{Z}_2$ 的结构，因此，$\hat{\mathfrak{su}}(2)_1^6$-模 $M_{a_1,\ldots,a_6}$ 由 $\mathbb{Z}_2$ 中的元素 $a_i\in\{0,1\}$ 标记。因此，GTVW 模型的希尔伯特空间为

$$\mathcal{H}^{\mathrm{GTVW}}=\bigoplus_{[a_1,\ldots,a_6;b_1,\ldots,b_6]\in A} M_{a_1,\ldots,a_6}\otimes\bar{M}_{b_1,\ldots,b_6}\,, \tag{7.49}$$

其中横线表示右行模，而 $A\subset\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6$ 是由 $a_i=b_i+x$ 定义的子群，适用于$i=1$、……、6，其中 $x\in\mathbb{Z}_2$ 独立于 $[a_1,\ldots,a_6;\ b_1$、……、$b_6]$ 可以取 0 或 1。态空间 (7.49) 按 $(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2)$ 分次，其中分次 $a\equiv\sum_{i=1}$、……、$_6\,a_i$ 根据 $a=0$是否分别为 1 来表示 NS-NS 扇区和 R-R 扇区，而 x 分次则根据如下对应关系区分玻色态和费米态：$e^{i\pi x}=(-1)^{F_L+F_R}$，其中 F_L、$_R$分别为左行和右行费米子数。GTVW 模型包含若干个 $\mathcal{N}=(4,4)$ 的副本，它们由对称性相互关联。我们选择将（反）手征代数 $\hat{\mathfrak{su}}(2)_1^6$ 中的第一个因子与（反）全纯 $\mathcal{N}=4$的 $\hat{\mathfrak{su}}(2)_1$ 子代数对应起来。¯于是，四个超流被适当地选为 M_1,1,1,1,1,$_1\otimes M_0$,0,0,0,0,0 中的基态。

这个 K3 模型的（可逆）对称性的完整群是一个半直积 $(SU(2)^6\times SU(2)^6)\rtimes S_6$，其中 $SU(2)^6\times SU(2)^6$ 是由全纯流和反全纯流的零模生成的李群，而 S_6 则通过置换手征代数和反手征代数中的六个 $\widehat{su}(2)_1$ 来实施对角作用。严格来说，这个群并非忠实地作用于共形场论，因为中心 $\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6$ 中有一个子群 $Z_0\cong\mathbb{Z}_2^5$，它在 $SU(2)^6\times SU(2)^{6\tilde{}}$中，并且对理论的所有场都平凡作用。令 t_i、t_i、$i=1$.....6 为中心子群 $\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6\subset SU(2)^6\times SU(2)^6$,的生成元；该子群在表示$[a_1,\ldots,a_6;\ b_1$..... $b_6]$ 中通过乘以 $(-1)^{a_i}$（当 t_i 时）或 $(-1)^{b_i}$（当 $\tilde{t}_i$ 时）作用于场。于是，所有形如 $\prod_{i=1}^6(t_i\tilde{t}_i)^{r_i}$ 且满足 $\sum_i r_i\in2\mathbb{Z}$ 的元素都平凡作用，并生成 $Z_0\cong\mathbb{Z}_2^5$。可以证明，保持 K3 模型完整 $\widehat{su}(2)^6\oplus\widehat{su}(2)^6$ 玻色手征代数和反手征代数的拓扑缺陷范畴是群型的，即由可逆简单线（Verlinde 线）生成，并可识别为 $SU(2)^6\times SU(2)^6$ [16]的中心子群的商群 $(\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6)/Z_0$ 。

保持$\mathcal{N}=(4,4)$代数和谱流的$((SU(2)^6\times SU(2)^6)/Z_0)\rtimes S_6$的子群 G_{GTVW}是有限群，并与 $\mathbb{Z}_2^8\rtimes M_{20}$同构；$\mathbb{Z}_2^8\rtimes M_{20}$是由 $\mathbb{Z}_2^8$扩张马修群M_{20}所得的群。G_{GTVW}与$(\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6)/Z_0\cong\mathbb{Z}_2^7$ 的交与 $\mathbb{Z}_2^4$同构，并由 t_2t_i, $i=3,\ldots,6$（模 Z_0）生成。

首先考虑一个 TY 范畴 $TY(A)$，其中 $A=\langle t_2t_5,\ t_2t_6\rangle\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 是 $G_{GTVW}\cap(\mathbb{Z}_2^6\times\mathbb{Z}_2^6)/Z_0$ 的子群。A 的所有非平凡元素作用于 R-R 基态时，其框架形状均为 1^82^8，因此它们都是非反常的，其缠绕亏格与第 7.2 节中针对 TY 考察的缠绕亏格相同。

由于 A 对手征代数和反手征代数$\mathcal{A}\times\bar{\mathcal{A}}=\widehat{su}(2)^6\oplus\widehat{su}(2)^6$, 的作用是平凡的，对偶缺陷 $_{1\,2}\hat{}$ $\mathcal{N}$必定通过一个阶为 2 的自同构作用于 $\mathcal{A}\times\bar{\mathcal{A}}$。 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 的自同构群是以下乘积

$$\mathrm{Aut}(\widehat{su}(2)^6)\times\mathrm{Aut}(\widehat{su}(2)^6)=((SU(2)/\mathbb{Z}_2)^6\rtimes S_6)\times((SU(2)/\mathbb{Z}_2)^6\rtimes S_6)\ , \tag{7.50}$$

其中第一个因子作用于全纯流，第二个因子作用于反全纯流。现在我们来论证，在该 K3 模型中， $\mathcal{N}$ 是一个简单非可逆缺陷这一条件，必然意味着代数自同构 $_{1\ 2}\hat{}\mathcal{N}$ 无法扩展为整个共形场论的对称性 g 。事实上，如果存在这样的对称性 g ，那么融合$\mathcal{N}\mathcal{L}_{g^{-1}}$ 将是一个维数为 2、在所有全纯流和反全纯流上均平凡作用的拓扑缺陷。但我们知道，所有这类拓扑缺陷都是可逆 Verlinde 线的叠加，因此，对于某些对称性 h_1,h_2，有 $\mathcal{N}\mathcal{L}_{g^{-1}}=\mathcal{L}_{h_1}+\mathcal{L}_{h_2}$。于是，$\mathcal{N}=\mathcal{L}_{h_1g}+\mathcal{L}_{h_2g}$ 不会是简单的，这与我们的假设矛盾。

式（7.50）中唯一不能提升为共形场论对称性的自同构，是那些以不同方式（非对角地）置换全纯流和反全纯流的自同构。事实上，这类元素会将共形场论谱中的表示 $[a_1,\ldots,a_6;\ b_1,\ldots,b_6]$（属于理论的 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$）映射为不在其中的表示。为了使 $\mathcal{N}$定义良好，我们只需要代数自同构 $_{1\,2}\hat{}\mathcal{N}\equiv(\rho_L,\rho_R)\in((SU(2)\mathbb{Z}_2)^6\rtimes S_6)^2$ 保持 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 的 A-不变表示子集即可，而不必保持 $\mathcal{H}$ 所分解成的整个表示集合。

我们还希望施加条件，使 $\mathcal{N}$ 保持 $\mathcal{N}=(4,4)$ 超共形代数和谱流。为此，我们必须要求 $_{1\ 2}\hat{}\mathcal{N}$ 对全纯场的作用与某个元素 $g_L\in G_{GTVW}$ 相同，而 ρ_R 对反全纯场的作用与另一个元素 $g_R\in G_{GTVW}$ 相同。$_{1\,2}\hat{}\mathcal{N}$ 不提升为共形场论对称性的条件意味着 g_L 和 g_R 不是 G_{GTVW} 中的同一个元素，特别是它们以不同的方式置换流。

满足以下条件的 A-不变表示 $[a_1,\ldots,a_6;\ b_1,\ \ldots\ldots,\ b_6]$

$$a_2=a_5=a_6\ ,\qquad\text{and}\qquad b_2=b_5=b_6\ . \tag{7.51}$$

我们可以如下整理 A-不变表示的集合

$$\begin{aligned}
\Omega_1&=\{[000000;000000],\ [111111;000000],\ [000000;111111],\ [111111;111111]\}\ ,\\
\Omega_2&=\{[101000;101000],\ [010111;101000],\ [101000;010111],\ [010111;010111]\}\ ,\\
\Omega_3&=\{[100100;100100],\ [011011;100100],\ [100100;011011],\ [011011;011011]\}\ ,\\
\Omega_4&=\{[001100;001100],\ [110011;001100],\ [001100;110011],\ [110011;110011]\}\ ,
\end{aligned}$$

对于 NS-NS 扇区，以及

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_1&=\{[100000;100000],\ [011111;100000],\ [100000;011111],\ [011111;011111]\}\ ,\\
\tilde{\Omega}_2&=\{[001000;001000],\ [110111;001000],\ [001000;110111],\ [110111;110111]\}\ ,\\
\tilde{\Omega}_3&=\{[000100;000100],\ [111011;000100],\ [000100;111011],\ [111011;111011]\}\ ,\\
\tilde{\Omega}_4&=\{[101100;101100],\ [010011;101100],\ [101100;010011],\ [010011;010011]\}\ ,
\end{aligned}$$

对于 R-R扇区。这里，每个集合 Ω_i 或 $\tilde{\Omega}_i$ 都包含一些表示，它们通过 $\mathcal{N}=(4,4)$ 代数中的全纯超流和反全纯超流彼此关联。

该群的一个对偶缺陷示例见 [16]，的附录 C，其中记作 $\mathcal{N}_{256}$。相应的自同构 $_{1\,2}\hat{}\mathcal{N}\equiv(\rho_L,\rho_R)\in(SU(2)^6\rtimes S_6)^2$定义如下：

$$\rho_L=(11\Omega\Omega^\dagger 11)(26)(34)\in SU(2)^6\rtimes S_6,\quad \rho_R=(111111)(34)(56)\in SU(2)^6\rtimes S_6,\quad (7.52)$$

其中

$$\Omega=\begin{pmatrix}\frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2}\end{pmatrix}\in SU(2)\ , \tag{7.53}$$

并且 1 表示 $SU(2)$ 中的单位元。通过与 G_{GTVW} 的生成元进行比较，正如 [16]，中所描述的，可以看出，ρ_L 和 ρ_R 分别对应于 CFT 中两个元素 g_L，$g_R\in G_{GTVW}$ 作用于全纯场和反全纯场的作用。容易验证，$(\rho_L,\ \rho_R)$ 的联合作用具有阶 2，并保持表示子集 $[a_1,\ldots,a_6;\ b_1,\ \ldots,\ b_6]$，这些表示具有 A-不变性。

现在计算缠绕椭圆亏格 $\phi^{\mathcal{N}_{256}}(\tau,\ z)$。由于超对称性导致的通常抵消，唯一的非零贡献来自右移共形权为 $h=1/4$ 的 Ramond-Ramond 态。所有这些态及其超共形后裔态都包含在集合 Ω_1 中。通过直接计算也很容易验证，其他集合的贡献均为零。因此，缠绕椭圆亏格为

$$\begin{aligned}\phi^{\mathcal{N}_{256}}(\tau,z)=&\mathrm{Tr}_{\mathrm{RR}}(\hat{\mathcal{N}}(-1)^F q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-\bar{c}/24}y^{J_L}) \\ =&2\sum_{[a_1,\ldots,b_6]\in\tilde{\Omega}_1}(-1)^{a_1+b_1}\chi^1_{a_1}(\tau,z)\chi^1_{a_2}(2\tau)\chi^1_{a_3}(2\tau)\chi^1_{a_5}(\tau)\overline{\chi^1_{b_1}(\tau)\chi^1_{b_2}(\tau)\chi^1_{b_3}(2\tau)\chi^1_{b_5}(2\tau)} \\ =&\frac{2}{\eta^2(\tau)\eta^2(2\tau)}\left(\theta_2(2\tau,2z)\theta_3(2\tau)\theta_3^2(4\tau)-\theta_3(2\tau,2z)\theta_2(2\tau)\theta_2^2(4\tau)\right) \\ =&\phi^{1^8 2^8}(\tau,z)+\phi^{2^4 4^4}(\tau,z).\end{aligned} \tag{7.54}$$

在此方程中，χ^1_0 和χ^1_1 是两个 $\widehat{su}(2)_1$ 表示 [0] 和 [1]的特征标（见（B.10）和（B.12））， 并且我们利用了（-1）^{F} 在表示 $[a_1,\ldots,a_6,b_1,\ldots,b_6]$上通过乘以（$-1$）$^{a_1+b_1}$ 起作用这一事实。该结果与式（7.37）中的缠绕亏格$\phi^{\mathcal{N}_{p_1}}$ 完全吻合，这与我们的猜想一致。这还表明，由 $\mathcal{N}$ 和 A 中的可逆缺陷生成的 TY 范畴等价于 Rep（H_8）。

如 [16], 中所述，G_{GTVW}还有其他 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 子群，在这些子群作用下，GTVW 模型是自轨形的，并且其对偶缺陷保持 $\mathcal{N}=$ (4,4)代数和谱流。附录 C 的[16]中给出了一个例子，这些缺陷记为$\mathcal{N}_{34,56}$ ；相应的 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 群 $A':=\langle t_3t_4,t_5t_6\rangle$ 包含两个框架形状为 $1^8 2^8$ 的对称性，以及一个框架形状为 $1^{-8}2^{16}$的元素（$t_3t_4t_5t_6$）。这些框架形状与 Aut$_\tau(V^{f\natural})$ 的子群中的框架形状相同，这些子群在第 7.2 节中记为 $\langle a,b'\rangle$。对偶缺陷$\mathcal{N}_{34,56}$ 通过$_{1\,2}\hat{}\mathcal{N}=(\rho'_L,\rho'_R)\in((SU(2)^6/\mathbb{Z}_2)\rtimes S_6)^2$作用于全纯和反全纯的 $\widehat{su}(2)^6\oplus\widehat{su}(2)^6$ 流

$$\rho'_L=(111111)(34)(56),\quad \rho'_R=1. \tag{7.55}$$

这个自同构的阶为 2，并保留表示 $[a_1,\ldots,a_6;\ b_1,\ \ldots,\ b_6]$ 这些表示在 A' 下不变，也就是说满足以下条件：

$$a_3=a_4,\qquad a_5=a_6,\qquad b_3=b_4,\qquad b_5=b_6\ . \tag{7.56}$$

我们可以将 R-R A' 不变表示排列如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_1 &= \{[100000;100000],\ [011111;100000],\ [100000;011111],\ [011111;011111]\}\ ,\\
\tilde{\Omega}_2 &= \{[010000;010000],\ [101111;010000],\ [010000;101111],\ [101111;101111]\}\ ,\\
\tilde{\Omega}_3 &= \{[101100;101100],\ [010011;101100],\ [101100;010011],\ [010011;010011],\\
\tilde{\Omega}_4 &= \{[100011;100011],\ [011100;100011],\ [100011;011100],\ [011100;011100]\}\ .
\end{aligned}$$

缠绕椭圆亏格为

$$\begin{aligned}
\phi^{\mathcal{N}_{34,56}}(\tau,z) =& 2\sum_{[a_1,\dots,b_6]\in\tilde{\Omega}_1\cup\tilde{\Omega}_2}(-1)^{a_1+b_1}\chi^1_{a_1}(\tau,z)\chi^1_{a_2}(\tau)\chi^1_{a_3}(2\tau)\chi^1_{a_5}(2\tau)\\
&\qquad\cdot\overline{\chi^1_{b_1}(\tau)\chi^1_{b_2}(\tau)\chi^1_{b_3}(\tau)^2\chi^1_{b_4}(\tau)^2}\\
=&\frac{2}{\eta^2(\tau)\eta^2(2\tau)}\left(\theta_2(2\tau,2z)\theta_3(2\tau)\theta_3^2(4\tau)-\theta_3(2\tau,2z)\theta_2(2\tau)\theta_2^2(4\tau)\right)\\
&+\frac{2}{\eta^2(\tau)\eta^2(2\tau)}\left(\theta_3(2\tau,2z)\theta_2(2\tau)\theta_3^2(4\tau)-\theta_2(2\tau,2z)\theta_3(2\tau)\theta_2^2(4\tau)\right)\\
=&\,\phi^{1^8 2^8}(\tau,z)+\phi^{1^8 2^{-8} 4^8}(\tau,z)\ ,
\end{aligned}\tag{7.57}$$

这里我们用到了如下事实：集合 Ω_3 和 Ω_4 不包含满足 $h=1/4$ 的 Ramond-Ramond 态，也不包含它们的超对称后裔，因此它们对缠绕亏格的贡献为 0。这个结果与 (7.45) 中的函数 $\phi^{\mathcal{N}_{p_4}}$ 完全吻合，从而进一步支持猜想 6，并表明在这种情况下，相关的 TY 范畴同构于 $Rep(D_8)$。

8 斐波那契缺陷与二十面体数

本节将证明，$V^{f\natural}$ 的范畴 Top 存在某种保持 $\mathcal{N}=1$的拓扑缺陷 W，它生成一个斐波那契融合范畴，即满足

$$W^*=W\ ,\qquad W^2=\mathcal{I}+W\ ,\tag{8.1}$$

更一般地，$W^n=F_nW+F_{n-1}\mathcal{I}$，其中 F_n 是第 n 个斐波那契数。在酉理论中，斐波那契缺陷的量子维数为 $\langle W\rangle=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，而 W 的可能特征值为 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

事实上，我们将证明一个更强的结果。Co_0 的一个极大子群同构于 $2.(A_5\times J_2):2$，其中 A_5 是 5 个对象的偶置换群，J_2 是 Hall-Janko 群，这是一个阶为 $|J_2|=2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7=604800$的有限单群；$2.(A_5\times J_2)$ 表示直积 $A_5\times J_2$的一个 $\mathbb{Z}_2$-中心扩张，而 $2.(A_5\times J_2):2$ 是 $2.(A_5\times J_2)$ 与一个群 $\mathbb{Z}_2$ 的半直积，该群通过外自同构 [29]作用于 A_5 和 J_2。我们将证明，对于 $\mathrm{Aut}_\tau(V^{f\natural})$ 的每个同构于 $2.(A_5\times J_2):2$ 的极大子群选择 $\cong Co_0$，Top 中由可逆缺陷 $\mathcal{L}_g$、$g\in 2.(A_5\times J_2):2$ 以及一对斐波那契缺陷 W^A和 W^B生成一个融合子范畴；它们彼此相容，并与正规子群 $2.(A_5\times J_2)$ 相容，而共轭于 $2.(A_5\times J_2):2$ 的其他元素时，它们会互换，即

$$W^AW^B=W^BW^A\ ,\qquad \mathcal{L}_gW^A\mathcal{L}_g^*=\begin{cases}W^A & \text{if } g\in 2.(A_5\times J_2)\\ W^B & \text{if } g\in 2.(A_5\times J_2):2,\ g\notin 2.(A_5\times J_2)\ .\end{cases}\tag{8.2}$$

K3 σ模型中斐波那契缺陷的示例将在第 9 节 9.3 小节中介绍。

8.1 Leech 格的 icosian 构造

如果存在一个生成斐波那契范畴的拓扑缺陷线 $W \in \mathrm{Top}$，那么相应的格自同态 $\rho(W)$: $\Lambda \to \Lambda$ 必须是对称的 $\rho(W) = \rho(W)^t$，并且满足 $\rho(W)^2 = 1 + \rho(W)$。为了找到这样的自同态，可以考虑利用二十面体数 环构造 Leech 格 Λ （参见 [28], 第 8 章第 2 节或 [52]）。

我们先考虑实代数 $\mathbb{H} \oplus \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$，其中 $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{k}$ 是具有通常关系的四元数代数：$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 = \mathbf{ijk}$，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 与所有四元数都可交换，并满足

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma} + 1 \ , \qquad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{i} = \mathbf{i}\boldsymbol{\sigma} \ , \qquad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{j} = \mathbf{j}\boldsymbol{\sigma} \ , \qquad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k} = \mathbf{k}\boldsymbol{\sigma} \ . \tag{8.3}$$

（在 [28], 中，他们将范围限制为有理系数的四元数，并将 $\boldsymbol{\sigma}$ 认作无理实数 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，它是 $x^2 = x^2 + 1$的最短解。~~这里我们希望使用实系数四元数，因此为避免混淆，倾向于将 $\boldsymbol{\sigma}$保留为抽象代数生成元。~~）我们将复共轭定义为 $\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$ 上的 $\mathbb{R}$-线性对合$x \mapsto \bar{x}$，其定义为

$$\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i} \ , \qquad \bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j} \ , \qquad \bar{\mathbf{k}} = -\mathbf{k} \ , \qquad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \ . \tag{8.4}$$

在此代数中，我们将 icosian 群 I_{120} 定义为由元素 $\alpha + \mathbf{i}\beta + \mathbf{j}\gamma + \mathbf{k}\delta \in \mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$构成的集合，其中 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in (\mathbb{R} \oplus \boldsymbol{\sigma}\mathbb{R})^4$ 定义如下

$$\frac{1}{2}(\pm 2, 0, 0, 0) \qquad \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1) \qquad \frac{1}{2}(0, \pm 1, \pm\boldsymbol{\sigma}, \pm(1 - \boldsymbol{\sigma})) \ , \tag{8.5}$$

对所有可能的符号选择以及对各项的所有偶置换。这个由 120 个元素组成的集合构成一个乘法群 I_{120}，它与二元二十面体群同构；后者是由 5 个对象的偶置换组成的群 A_5 的双重覆盖，$I_{120}/\{\pm 1\} \cong A_5$。icosian环 $\mathcal{J}$ 是群环 $\mathcal{J} := \mathbb{Z}I_{120}$，由有限个整数线性组合 $n_1 x_1 + \ldots + n_r x_r$构成，其中 $n_i \in \mathbb{Z}$ 和 $x_i \in I_{120}$。

我们可以在 $\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$ 上定义两种不同的范数，因此也可以在 $\mathcal{J}$ 上定义。其一是四元数范数

$$QN(q + \boldsymbol{\sigma}q') := (\bar{q} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\bar{q}')(q + \frac{1-\sqrt{5}}{2}q') \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ , \qquad q, q' \in \mathbb{H} \tag{8.6}$$

通过将 $\boldsymbol{\sigma}$ 替换为实数 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 来映射 $\mathbb{H} \oplus \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H} \to \mathbb{H}$，~~然后采用通常的识别方式~~，将 $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ 视为由 $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 构成的正交归一基。另一种方法是定义欧几里得范数，将 $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\ \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{i}\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{j}\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{k}\}$ 视为正交归一基 $\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$

$$EN(q + \boldsymbol{\sigma}q') := \bar{q}q + \bar{q}'q' \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ , \qquad q, q' \in \mathbb{H} \ . \tag{8.7}$$

带有欧几里得范数 EN 的空间 $\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 是一个 8维实向量空间，与欧几里得空间 $\mathbb{R}^8$ 等距同构。

自由的 $\mathbb{Z}$-模 $\mathcal{J} \subset \mathcal{J} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^8$ 配备欧几里得范数 EN，是一个 8维格，同构于 $E_8(\frac{1}{2})$，即 E_8 的缩放版本，其最短向量的长度平方为 1。特别地，E_8 的 240 个根由 icosian 群 I_{120} 中欧几里得范数均为 1 的 120 个元素，以及元素 $\boldsymbol{\sigma}q$、$q \in I_{120}$ 组成。

Leech 格可以构造为秩为 3 的 $\mathcal{J}$-模，特别地，也是 $\mathcal{J}\oplus\mathcal{J}\oplus\mathcal{J}\subset\mathbb{R}^{24}$ 的一个子模。考虑元素

$$h:=\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2}(-1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\in\mathcal{J}\ ,\qquad \bar{h}:=\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{2}(-1-\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\in\mathcal{J}\ , \tag{8.8}$$

并令

$$\mathcal{J}h:=\{qh\mid q\in\mathcal{J}\}\subset\mathcal{J}\ ,\qquad \mathcal{J}\bar{h}:=\{q\bar{h}\mid q\in\mathcal{J}\}\subset\mathcal{J}\ , \tag{8.9}$$

$^-$ $^-$是 icosian 环 $\mathcal{J}$的两个左理想。注意，$hh=h\bar{h}=2$，且交集$\mathcal{J}h\cap\mathcal{J}\bar{h}$是双边理想

$$\mathcal{J}h\cap\mathcal{J}\bar{h}=2\mathcal{J}=\{2q\mid q\in\mathcal{J}\}\ . \tag{8.10}$$

我们将 Leech 格 Λ 定义为

$$\Lambda:=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathcal{J}\oplus\mathcal{J}\oplus\mathcal{J}\mid x_i-x_j\in\mathcal{J}h,\ x_1+x_2+x_3\in\mathcal{J}\bar{h}\}\ . \tag{8.11}$$

显然，它是一个左 $\mathcal{J}$-模，且

$$y(x_1,x_2,x_3):=(yx_1,yx_2,yx_3)\in\Lambda\ ,\qquad \forall y\in\mathcal{J},\quad (x_1,x_2,x_3)\in\Lambda\ . \tag{8.12}$$

由于 $\mathcal{J}$ 本身是秩为 8 的自由 $\mathbb{Z}$-模，Λ 是秩为 24 的自由 $\mathbb{Z}$-模。可以在 Λ上定义四元数范数和欧几里得范数，定义如下:

$$QN(x_1,x_2,x_3):=\sum_i QN(x_i)\ ,\qquad EN(x_1,x_2,x_3):=\sum_i EN(x_i)\ . \tag{8.13}$$

可以证明，相对于欧几里得范数，Λ 是一个偶自对偶格，其最短向量的范数为 4，因此 Λ 确实与 Leech 格同构。

保持四元数范数的 Aut(Λ) $\cong Co_0$ 子群，除欧几里得群外，是 2.($A_5\times J_2$)，即 $A_5\times J_2$ 被 Co_0的中心 $\{\pm1\}$ 扩张所得的群。这里，J_2 是 Janko-Hall群，一个阶为 $|J_2|=2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7=604800$[29]的散在有限单群。群 $2.J_2$ 由以下元素属于 $\mathbb{H}+\boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$的矩阵 3×3 生成

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\mathbf{i}&0\\0&0&\mathbf{j}\end{pmatrix}\ ,\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{i}&0&0\\0&\mathbf{j}&0\\0&0&\mathbf{k}\end{pmatrix}\ ,\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&h&h\\-\bar{h}&1&-1\\-\bar{h}&-1&1\end{pmatrix}\ ,\end{gathered} \tag{8.14}$$

它们通过右乘作用于 $(x_1,x_2,x_3)\in\Lambda\subset(\mathbb{H}+\boldsymbol{\sigma}\mathbb{H})^3$。注意，前两个矩阵生成了对 (x_1,x_2,x_3)的三个分量进行置换的群 S_3。群 $2.A_5$ 就是 icosian 群 I_{120}，它通过左乘元素 $y\in I_{120}$作用于 (x_1,x_2,x_3)。显然，$2.A_5$ 与 $2.J_2$可交换，因此保持四元数范数的 Co_0 子群为

$$(2.A_5\times2.J_2)/\mathbb{Z}_2\cong2.(A_5\times J_2)\ , \tag{8.15}$$

其中取商群是因为 $2.A_5$ 和 $2.J_2$ 的非平凡中心元作用方式相同

$$(x_1,x_2,x_3)\mapsto(-x_1,-x_2,-x_3)\ , \tag{8.16}$$

在每个格矢 $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \Lambda$ 上，因此应将它们视为相同。

在这种描述中，我们可以定义格自同态 $\rho(W) \equiv \rho(W^A)$

$$\rho(W^A): \qquad \Lambda \qquad \to \qquad \Lambda \tag{8.17}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) = (\boldsymbol{\sigma}x_1, \boldsymbol{\sigma}x_2, \boldsymbol{\sigma}x_3)\ . \tag{8.18}$$

那么，由于 $\boldsymbol{\sigma}^2 = 1+\boldsymbol{\sigma}$，显然 $\rho(W)^2 = 1+\rho(W)$。还有另一个满足相同方程的端同态，即

$$\rho(W^B): \qquad \Lambda \qquad \to \qquad \Lambda \tag{8.19}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (1-\boldsymbol{\sigma})(x_1, x_2, x_3)\ , \tag{8.20}$$

并且由于 $\boldsymbol{\sigma}(1-\boldsymbol{\sigma}) = -1$，可得

$$\rho(W^A)\rho(W^B) = \rho(W^B)\rho(W^A) = -1\ . \tag{8.21}$$

因此， $\rho(W^A)$ 和 $\rho(W^B)$ 作为 $\mathbb{Z}$-线性映射，将 Λ 映射到自身时是可逆的；然而，它们不保持欧几里得范数，因此不是 $\mathrm{Aut}(\Lambda) = Co_0$ 的元素。

注意， $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{J}$ 可以写成 icosian 群 I_{120} 中两个元素之和，例如

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma} + 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + (1-\boldsymbol{\sigma})\mathbf{k}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma} - 0\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - (1-\boldsymbol{\sigma})\mathbf{k}}{2}\ , \tag{8.22}$$

它们对应于两个互为逆元的元素 $g,\ g^{-1} \in I_{120} \subset Co_0$，其框架形状为 $1^6 2^{-6} 5^{-6} 10^6$。因此，

$$\rho(W^A) = \rho(g) + \rho(g^{-1}) = \rho(g) + \rho(g)^t\ , \tag{8.23}$$

因此两个 $\rho(W^A)$ 和 $\rho(W^B) = 1 - \rho(W^A)$ 都是对称的，且迹为 $\mathrm{Tr}\ \rho(g) = 12$。

由于它们可交换且对称，算符 $\rho(W^A)$ 和 $\rho(W^B)$ 可在 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ 上同时对角化，并且存在一个正交分解

$$\Lambda \otimes \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}^{12})^A \oplus_\perp (\mathbb{R}^{12})^B\ , \tag{8.24}$$

其中，$(\mathbb{R}^{12})^A$ 和 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 是 $(\rho(W^A)\ \rho(W^B))$ 的特征子空间，其特征值分别为 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ 和 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$。特别地，具有 $\rho(W^A)$- 特征值 $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 的特征子空间由以下向量张成

$$(x_1, x_2, x_3) + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda \tag{8.25}$$

这可通过直接计算验证：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}\left[(x_1, x_2, x_3) + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3)\right] = \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}(1+\boldsymbol{\sigma})(x_1, x_2, x_3) \\
&= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\left[-\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3) + (1+\boldsymbol{\sigma})(x_1, x_2, x_3)\right] \\
&= \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\left[(x_1, x_2, x_3) + \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, x_3)\right]\ .
\end{aligned} \tag{8.26}$$

8.2 与斐波那契自同态对易的对称性

由于 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\mathcal{J}$ 中的所有其他二十面体数都可交换，显然 $\rho(W^A)$ 和 $\rho(W^B)$ 都与整个群 $2.(A_5\times J_2)\subset Co_0$ 可交换。事实上，我们将在此证明，$2.(A_5\times J_2)$ 是 Co_0 中与 $\rho(W^A)$ 可交换的最大子群。

$I_{120}=2.A_5$ 的最小非平凡表示是自共轭的二维表示；在同构意义下，这样的表示有两个，分别记为 $\mathbf{2}_{2A_5}$ 和 $\mathbf{2}'_{2A_5}$。群 $2.A_5$ 具有一个阶 2 的非平凡外自同构，它交换 $\mathbf{2}_{2A_5}$ 和$\mathbf{2}'_{2A_5}$。

类似地， $2.J_2$的两个最小非平凡表示（记为 $\mathbf{6}_{2J_2}$ 和 $\mathbf{6}'_{2J_2}$）是 6 维的，并且二者均为自共轭表示。此外，它们被 $2.J_2$唯一的非平凡外自同构互换，该外自同构的阶为 2 [29]。

由于 $2.(A_5\times J_2)$ 与 $\rho(W^A)$ 对易，每个特征空间 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 和 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 都是 $2.(A_5\times J_2)$ 的表示，其中两个子群 $2.A_5$ 和 $2.J_2$ 均非平凡地作用。由维数可知，唯一的可能性是，$(\mathbb{R}^{12})^A$ 和 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 均为 $2.A_5$ 的二维表示与 $2.J_2$ 的 6 维不可约表示的张量积。在重新命名这些表示后，不妨设

$$(\mathbb{R}^{12})^A=\mathbf{2}_{2A_5}\otimes\mathbf{6}_{2J_2}\ , \tag{8.27}$$

作为一个 $2.(A_5\times J_2)$-表示。于是可以证明

$$(\mathbb{R}^{12})^B=\mathbf{2}'_{2A_5}\otimes\mathbf{6}'_{2J_2}\ . \tag{8.28}$$

证明这一点的一种方法是比较 Co_0 的 24维表示 $\mathbf{24}_{Co_0}$ 的特征标与 $2.A_5$ 和 $2.J_2$ 的特征标：只有当 $\mathbf{24}_{Co_0}$ 分解为以下形式时，这些特征标才相匹配

$$\mathbf{24}_{Co_0}=(\mathbf{2}_{2A_5}\otimes\mathbf{6}_{2J_2})\oplus(\mathbf{2}'_{2A_5}\otimes\mathbf{6}'_{2J_2})\ . \tag{8.29}$$

群 $2.(A_5\times J_2)$ 是 Co_0 的某个极大子群 $2.(A_5\times J_2)\rtimes\mathbb{Z}_2$ （或者简写为 $2.(A_5\times J_2):2$）的指数为 2 的子群，即

$$2.(A_5\times J_2)\subset 2.(A_5\times J_2):2\subset Co_0\ . \tag{8.30}$$

在半直积 $2.(A_5\times J_2)\rtimes\mathbb{Z}_2$ 中， $\mathbb{Z}_2$ 因子通过外自同构作用于正规子群 $2.(A_5\times J_2)$，且在 $2.A_5$ 和 $2.J_2$ 上均如此。这意味着，每个满足 $k\notin 2.(A_5\times J_2)$ 的元素 $k\in 2.(A_5\times J_2)\ \rtimes\mathbb{Z}_2$，都会交换表示 $(\mathbf{2}_{2A_5}\otimes\mathbf{6}_{2J_2})$ 和 $(\mathbf{2}'_{2A_5}\otimes\mathbf{6}'_{2J_2})$，即交换特征子空间 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 和 $(\mathbb{R}^{12})^B$。因此，我们有

$$k\rho(W^A)k^{-1}=\rho(W^B)\ , \tag{8.31}$$

对所有 $k\in 2.(A_5\times J_2)\ \rtimes\mathbb{Z}_2$, $k\notin 2.(A_5\times J_2)$ 均成立。这意味着，如果我们能够证明 W^A 是一个定义良好且保持 $\mathcal{N}=1$ 流的拓扑缺陷，那么只需用可逆缺陷 $\mathcal{L}_k$ 对 W^B 进行共轭 $W^B=\mathcal{L}_kW^A\mathcal{L}_k^*$，即可得到 W^B。

群 $2.(A_5\times J_2)\rtimes\mathbb{Z}_2$ 保持正交分解 $\Lambda\otimes\mathbb{R}=(\mathbb{R}^{12})^A\oplus(\mathbb{R}^{12})^B$。由于它是 Co_0 中的极大子群，因此可知， Co_0 中任何不属于 $2.(A_5\times J_2)\rtimes\mathbb{Z}_2$的元素都不会保持这种分解，特别是不会与 $\rho(W^A)$ 对易。事实上，如果存在这样的元素，那么整个 Co_0 都会保持该分解，而这

是不正确的。我们得出结论： Co_0 中与 $\rho(W^A)$ 和 $\rho(W^B)$ 对易的子群恰好是 $2.(A_5 \times J_2)$。

$2.(A_5 \times J_2)$分别作用于特征子空间 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 和 $(\mathbb{R}^{12})^B$这一事实，意味着存在同态

$$\pi^A : 2.(A_5 \times J_2) \to SO(12)^A \ , \tag{8.32}$$

$$\pi^B : 2.(A_5 \times J_2) \to SO(12)^B \ , \tag{8.33}$$

分别映入各个特征空间中的正交变换群。我们可以相当明确地描述这类同态。回想一下，$2.A_5 \cong I_{120}$ 被定义为代数$\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$的一个子集。子空间 $(\mathbb{R}^{12})^A \subset (\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H})^3$ 是 $\boldsymbol{\sigma}$ 的一个特征空间，其特征值为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，因此我们可以作如下替换

$$\boldsymbol{\sigma} \mapsto \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{on } (\mathbb{R}^{12})^A \ , \tag{8.34}$$

从而将 $2.A_5 \cong I_{120} \subset \mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$ 的每个元素变为一个单位范数$q\bar{q} = 1$的四元数 $q \in \mathbb{H}$ 。单位四元数组成一个与 $SU(2)$ 同构的群

$$\mathbb{H}^{(1)} := \{q \in \mathbb{H} \mid q\bar{q} = \bar{q}q = 1\} \cong SU(2) \ , \tag{8.35}$$

该同构通过将 $\mathbf{1}$,$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{H}^{(1)}$ 分别替换为单位元和泡利矩阵 $\mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$给出。这意味着 π^A 将 I_{120}映射到一个子群 $SU(2)^A_{diag} \subset SO(12)^A$，其中每个 $q \in SU(2)^A_{diag} \cong \mathbb{H}^{(1)}$ 通过左乘作用于一般向量 $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^{12})^A \subset (\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H})^3$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (qx_1, qx_2, qx_3) \ . \tag{8.36}$$

（我们使用下标 $diag$ ，以强调 q 在 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 的三个分量上作对角作用。）同样，替换（8.34）将生成 $2.J_2$ 的矩阵（8.14）（尤其是最后一个）变为 3×3 矩阵 A ，其元素属于 $\mathbb{H}$ 而非 $\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H}$，且满足幺正条件 $\bar{A}^t A = A\bar{A}^t = 1$。因此， π^A 将 $2.J_2$ 映射到 $USp(3) \cong Sp(6,\ \mathbb{R})$ 的一个子群；该群由 3×3 四元数酉矩阵构成，并与由 6×6 辛矩阵构成的群 $Sp(6,\ \mathbb{R})$ 同构。总而言之， π^A 将 $2.(A_5 \times J_2)$ 映射到 $SO(12)^A$ 的一个李子群中

$$\pi^A(2.(A_5 \times J_2)) \subset (SU(2)^A_{diag} \times Sp(6,\mathbb{R})^A)/\mathbb{Z}_2 \subset SO(12)^A \ , \tag{8.37}$$

其中， $\mathbb{Z}_2$ 商群再次源于这样一个事实： $SU(2)^A_{diag}$ 和 $Sp(6,\ \mathbb{R})^A$ 的非平凡中心元在 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 上的作用方式相同。同样， π^B 给出了一个嵌入

$$\pi^B(2.(A_5 \times J_2)) \subset (SU(2)^B_{diag} \times Sp(6,\mathbb{R})^B)/\mathbb{Z}_2 \subset SO(12)^B \ , \tag{8.38}$$

但有一个重要区别：映射 $\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 现在由下式给出

$$\boldsymbol{\sigma} \mapsto \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{on } (\mathbb{R}^{12})^B \ . \tag{8.39}$$

替换（8.34）和（8.39）中的不同符号，正是 $(\mathbb{R}^{12})^A$和 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 能够给出 $2.(A_5 \times J_2)$ 的不同表示的根本原因，参见（8.27）和（8.28）。

8.3 WA 保持的仿射代数

从现在起，我们聚焦于 W^A，并将其简单记作

$$W \equiv W^A \ . \tag{8.40}$$

我们的目标是将 $\rho(W)$ 的定义扩展到整个 $V^{f\natural}$ 和 $V_{tw}^{f\natural}$，从而得到一个定义良好的拓扑缺陷，其量子维数为 $\langle W\rangle = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，并且保持超流。 $\overline{\overline{\quad}}$

我们先来确定 $\widehat{so}(24)_1$ 中由 W 保持的子代数，也就是说，$\hat{}W$ 的作用特征值等于量子维数的子代数。$\rho(W)$ 的特征子空间分解 $V_{tw}^{f\natural}(1/2) = (\mathbb{R}^{12})^A \oplus (\mathbb{R}^{12})^B$ 确定了一个共形嵌入子代数

$$\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{so}(12)_1^B \subset \widehat{so}(24)_1 \ , \tag{8.41}$$

其中 $\widehat{so}(12)_1^A$（分别为 $\widehat{so}(12)_1^B$）由 $(\mathbb{R}^{12})^A$（分别为 $(\mathbb{R}^{12})^B$）中的 12 个拉蒙基态场的双线性式生成。由于 W 保持了 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 中的场，因此也必须保持相应的子代数 $\widehat{so}(12)_1^A \subset \widehat{so}(24)_1$。代数 $\widehat{so}(24)_1$ 分解为伴随表示和 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{so}(12)_1^B$ 的 $(v,\ v)$ 表示。$(v,\ v)$ 中的 $12 \times 12 = 144$ 流由 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 中的一个场与 $(\mathbb{R}^{12})^A$ 中的一个场的算符乘积展开得到。由于后者对缺陷 W 是透明的，因此这 144 个流的 $\hat{}W$ 特征值必定与 $(\mathbb{R}^{12})^B$ 相同，即 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，所以它们不受 W 保持。 $\overline{\overline{\quad}}$

因此，唯一具有未知$\hat{}W$-特征值的流是 $\widehat{so}(12)_1^B$ 代数中的流。为了找到定义良好的拓扑缺陷线 W，我们采用一些猜测，然后事后验证所有一致性条件都得到满足。我们预计 W 与保持 $\mathcal{N}=1$ 超流的子群 $2.(A_5 \times J_2) \subset Co_0$ 对易，因此也与 $SO(12)^B$ 中的像$\pi^B(2.(A_5 \times J_2))$ 对易。对于 W，一个自然的拟设是它与包含 $\pi^B(2.(A_5 \times J_2))$ 的整个李群 $(SU(2)^B_{diag} \times Sp(6,\mathbb{R})^B)/\mathbb{Z}_2 \subset SO(12)^B$ 对易，见（8.38）。这意味着 W 保持相应的流的仿射代数[15]

$$\widehat{su}(2)_3^B \oplus \widehat{sp}(6)_1^B \subset \widehat{so}(12)_1^B \ . \tag{8.42}$$

总的来说，我们的拟设是，$V^{f\natural}$ 中由 W 保持的流生成仿射代数

$$\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(2)_3^B \oplus \widehat{sp}(6)_1^B \tag{8.43}$$

它共形嵌入于 $\widehat{so}(24)_1$，，即保持的子代数 (8.43) 的 Sugawara 应力张量与 $\widehat{so}(24)_1$ 的应力张量重合，因此也与 $V^{f\natural}$ 的应力张量重合。同样，我们预期缺陷 W^B 保持子代数

$$\widehat{su}(2)_3^A \oplus \widehat{sp}(6)_1^A \oplus \widehat{so}(12)_1^B \ , \tag{8.44}$$

其流的零模生成李群 $(SU(2)^A_{diag} \times Sp(6,\ \mathbb{R})^A)/\mathbb{Z}_2 \times SO(12)^B$。

$\widehat{su}(2)_3^B \oplus \widehat{sp}(6)_1^B$ 中的能级可以这样理解。考虑子群

$$SU(2)^{l,1,B} \times SU(2)^{l,2,B} \times SU(2)^{l,3,B} \subset SO(12)^B \ , \tag{8.45}$$

[15]通过恒等对应 $sp(2) \cong su(2)$，可以将其识别为著名的极大共形嵌入系列 $\widehat{sp}(2k)_n \oplus \widehat{sp}(2n)_k \subset \widehat{so}(4nk)_1$ 中的一个特例 $(k=3,\ n=1)$。

通过左乘作用于 $(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^{12})^B \subset (\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H})^3$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (q_1 x_1, q_2 x_2, q_3 x_3) \ , \tag{8.46}$$

由单位四元数 $q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{H}^{(1)}$生成。存在一个类似的子群

$$SU(2)^{r,1,B} \times SU(2)^{r,2,B} \times SU(2)^{r,3,B} \subset SO(12)^B \ , \tag{8.47}$$

通过单位四元数的右乘作用于 $(x_1,\ x_2,\ x_3) \in (\mathbb{R}^{12})^B \subset (\mathbb{H} + \boldsymbol{\sigma}\mathbb{H})^3$。这些群

$$Spin(4)^{i,B} = SU(2)^{l,i,B} \times SU(2)^{r,i,B} \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ , \tag{8.48}$$

由两两对易子代数的零模生成

$$\widehat{so}(4)_1^{i,B} = \widehat{su}(2)_1^{l,i,B} \oplus \widehat{su}(2)_1^{r,i,B} \ , \qquad i = 1, 2, 3 \ , \tag{8.49}$$

$\widehat{so}(12)_1^B$的。显然存在群的对角嵌入

$$SU(2)^B_{diag} \subset SU(2)^{l,1,B} \times SU(2)^{l,2,B} \times SU(2)^{l,3,B} \ , \tag{8.50}$$

这必然对应于相应仿射代数的对角嵌入 s

$$\widehat{su}(2)_3^B \subset \widehat{su}(2)_1^{l,1,B} \oplus \widehat{su}(2)_1^{l,2,B} \oplus \widehat{su}(2)_1^{l,3,B} \ , \tag{8.51}$$

这意味着与 $SU(2)^B_{diag}$ 相关联的仿射代数的层数为 3。类似地，群的嵌入

$$SU(2)^{r,1,B} \times SU(2)^{r,2,B} \times SU(2)^{r,3,B} \subset USp(3) \cong Sp(6, \mathbb{R})^B \ , \tag{8.52}$$

其中，左边与由对角幺正 3×3 四元数矩阵组成的群相对应，这将导致相应仿射代数的共形嵌入

$$\widehat{su}(2)_1^{r,1,B} \oplus \widehat{su}(2)_1^{r,2,B} \oplus \widehat{su}(2)_1^{r,3,B} \subset \widehat{sp}(6)_1^B \ , \tag{8.53}$$

即与 $\widehat{sp}(6)_1^B$ 的层数为 1 相容。

8.4 斐波那契缺陷 W^A：完整描述与扭曲函数

给定保留的仿射代数的拟设 (8.43)，现在我们可以明确确定斐波那契缺陷 $W \equiv W^A$，并验证它满足作为 $V^{f\natural}$中的拓扑缺陷的所有一致性条件。斐波那契缺陷 W^B可通过共轭 $W^B = \mathcal{L}_k W^A \mathcal{L}_{k^{-1}}$ 与适当的 $k \in Co_0$ （见 (8.31)）得到，因此它满足类似的性质。

回顾一下， $\widehat{su}\ 2\ _k$ $\frac{c}{\ell\ \ell+2} = \frac{3k}{k+2}$ $\ell \in$ $\{0, \ldots, k\}$ ( ) 的中心荷为，其主场标记为，并且相对于$\widehat{su}(2)_k$的 Sugawara 应力张量具有共形权重$()\ 4(k+2)$。S 矩阵为

$$S^{\widehat{su}(2)_k}_{\ell,\ell'} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left[\frac{\pi}{k+2}(\ell+1)(\ell'+1)\right] \qquad \ell, \ell' \in \{0, \ldots, k\} \ . \tag{8.54}$$

特别地， $\widehat{su}(2)_3$具有 $c = \frac{9}{5}$和四个主场 $[0], [1], [2], [3]$，其共形权重分别为 0、$3\,20$、$2\,5$、$3\,4$。

— – –

另一方面，$sp(2r)$的秩为 r，维数为 $2r^2+r$，对偶考克斯特数为$r+1$，因此 $\widehat{sp}(2r)_k$ 的中心荷为 $\frac{k}{(2r^2+r)\,k+r+1}$。特别地，$\widehat{sp}(6)_1$ 的维数为 21，中心荷为 $c=\frac{21}{5}$，并且有四个幺正表示，对应于仿射 Dynkin 标记 $[\lambda_0;\ \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]$ 分别为 $[1;\ 0,0,0]$ (真空)、$[0;\ 1,0,0]$, $[0;\ 0,1,0]$, $[0;\ 0,0,1]$，其共形权重分别为 0、$\frac{7}{20}$、$\frac{3}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$。一般而言，$\widehat{sp}(2k)_n$ 和 $\widehat{sp}(2n)_k$ 具有相同数量的不可约表示和相同的 S 矩阵——这是层级-秩对偶的一个例子。特别地，利用对应关系

$$\begin{aligned}&[0]\leftrightarrow[1;0,0,0]\ ,\qquad &&[1]\leftrightarrow[0;1,0,0]\\&[2]\leftrightarrow[0;0,1,0]\ ,\qquad &&[3]\leftrightarrow[0;0,0,1]\end{aligned}\tag{8.55}$$

在 $\widehat{su}(2)_3=\widehat{sp}(2)_3$ 与 $\widehat{sp}(6)_1$ 的表示之间，这两个代数的 4×4 S 矩阵相同，即

$$S_{\ell,\ell'}=\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\left[\frac{\pi}{5}(\ell+1)(\ell'+1)\right]\ ,\qquad \ell,\ell'\in\{0,1,2,3\}\ ,\tag{8.56}$$

由此得到融合规则

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	$0+2$	$1+3$	2
2	2	$1+3$	$0+2$	1
3	3	2	1	0

(8.57)

考虑与对角 $\widehat{su}(2)_3$ （或 $\widehat{sp}(6)_1$）WZW 模型的类比很有帮助。在这个共形场论中，Verlinde 线 W_ℓ 由 $\ell\in\{0,1,2,3\}$ 标记，并通过以下方式作用于主态 $|\ell'\rangle$

$$\hat{W}_\ell|\ell'\rangle=\frac{S_{\ell,\ell'}}{S_{\ell,0}}|\ell'\rangle=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{5}(\ell+1)(\ell'+1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{5}(\ell+1)\right]}|\ell'\rangle\ .\tag{8.58}$$

利用恒等式

$$\frac{\sin\left(2\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\qquad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(2\frac{\pi}{5}\right)}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\tag{8.59}$$

可得 Verlinde 线的以下作用

	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|3\rangle$
$\hat{W}_0$	1	1	1	1
$\hat{W}_1$	ζ	$-\sigma$	σ	$-\zeta$
$\hat{W}_2$	ζ	σ	σ	ζ
$\hat{W}_3$	1	-1	1	-1

(8.60)

其中 $\zeta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和 $\sigma=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$。于是显然，这类 Verlinde 线的融合范畴具有 $Fib\otimes\mathbb{Z}_2$的形式，即由一条斐波那契线和一条与其对易的 $\mathbb{Z}_2$ 线生成。特别地，$W\equiv W_2$ 是一条斐波那契线，它保持真空和 $[3]$ 表示，并在 $[1]$ 和 $[2]$上非平凡地作用。另一方面，$\eta:=W_3$ 是一条可逆的 $\mathbb{Z}_2$ 线，通过 $(-1)^\ell$ 作用于 $[\ell]$。最后，W_1 只是乘积 ηW。

以此例为参考，我们（暂且）将 W on $V^{f\natural}$ 定义为一条量子维数为 $\langle W\rangle=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$、保持 $\widehat{so}(24)_1$, 的子代数 (8.43)，且使 $\hat{}W$ 具有

特征值 $\langle W\rangle = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的线，它在 $\widehat{su}(2)_3^B$ 的 $[0]$ 和 $[3]$ 表示中的所有场上具有特征值 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，而在 $[1]$ 和 $[2]$ 表示中的场上具有特征值。

为了计算 W 缠绕配分函数，我们需要将 $V^{f\natural}$ 和 $V_{tw}^{f\natural}$ 分解为 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{su}(2)_3^B \oplus \widehat{sp}(6)_1^B$ 的表示。我们首先注意到，相对于子代数 $\widehat{so}(12)_1^A \oplus \widehat{so}(12)_1^B$of $\widehat{so}(24)_1$，$V^{f\natural}$ 和 $V_{tw}^{f\natural}$ 可分解为

$$V^{f\natural} = (0,0)\oplus(v,v)\oplus(s,s)\oplus(c,c) \tag{8.61}$$

$$V_{tw}^{f\natural} = (v,0)\oplus(0,v)\oplus(s,c)\oplus(c,s)\ , \tag{8.62}$$

其中，0，v，s，c 分别表示 $\widehat{so}(12)_1$ 的四个不可约表示，其共形权重分别为 0、$1/2$、$3/4$、$3/4$。接下来，可以在例如 $[53]$，中找到 $\widehat{so}(12)_1^B$ 表示分解为 $\widehat{sp}(6)_1\oplus\widehat{su}(2)_3$ 的不可约表示的结果，具体为：

$$(0) = [0_{sp},0_{su}]\ \oplus\ [2_{sp},2_{su}] = (0,0)\ \oplus\ (\frac{3}{5},\frac{2}{5}) \tag{8.63}$$

$$(v) = [1_{sp},1_{su}]\ \oplus\ [3_{sp},3_{su}] = (\frac{7}{20},\frac{3}{20})\ \oplus\ (\frac{3}{4},\frac{3}{4}) \tag{8.64}$$

$$(s) = [3_{sp},0_{su}]\ \oplus\ [1_{sp},2_{su}] = (\frac{3}{4},0)\ \oplus\ (\frac{7}{20},\frac{2}{5}) \tag{8.65}$$

$$(c) = [2_{sp},1_{su}]\ \oplus\ [0_{sp},3_{su}] = (\frac{3}{5},\frac{3}{20})\ \oplus\ (0,\frac{3}{4}) \tag{8.66}$$

其中，$\widehat{sp}(6)_1\oplus\widehat{su}(2)_3$ 的不可约表示既可记作 $[\ell_{sp},\ell_{su}]$，其中 $\ell_{sp}\in\{0,1,2,3\}$ 对应于(8.55)中的 $\widehat{sp}(6)_1$ Dynkin标签；也可记作共形权重 $(h_{\widehat{sp}(6)_1},h_{\widehat{su}(2)_3})$，这里的共形权重是相对于 $\widehat{sp}(6)_1$ 和 $\widehat{su}(2)_3$的 Sugawara 应力张量而言的。

In 具体而言，$V_{tw}^{f\natural}$ (1/2)中权重为 $1/2$ 的24个 Ramond场属于以下表示

$$(v,[0_{sp},0_{su}]) \qquad (12\text{ fields}) \tag{8.67}$$

$$(0,[1_{sp},1_{su}]) \qquad (12个场) \tag{8.68}$$

因此，W 保持前12个场不变，并对后12个场施加非平凡作用，这正如预期。另一方面，$V^{f\natural}$ 中权重为1的276个 NS场（流）属于

$$(0,[0_{sp},0_{su}]) \qquad (66+21+3=90\text{ fields}) \tag{8.69}$$

$$(0,[2_{sp},2_{su}]) \qquad (14\times 3=42\text{ fields}) \tag{8.70}$$

$$(v,[1_{sp},1_{su}]) \qquad (12\times 6\times 2=144\text{ fields}) \tag{8.71}$$

由此可见，只有生成代数 (8.43) 的 90 个流保持不变。

W-缠绕配分函数为[16] （自变量 τ 在全文中均省略）

$$\begin{aligned} Z_{NS}^{W,\pm}(\tau) =& \mathrm{ch}_0^{(12)}(\zeta\chi_0^{sp}\chi_0^{su}+\sigma\chi_2^{sp}\chi_2^{su})+\mathrm{ch}_v^{(12)}(\sigma\chi_1^{sp}\chi_1^{su}+\zeta\chi_3^{sp}\chi_3^{su}) \\ &\pm\mathrm{ch}_s^{(12)}(\zeta\chi_3^{sp}\chi_0^{su}+\sigma\chi_1^{sp}\chi_2^{su})\pm\mathrm{ch}_c^{(12)}(\sigma\chi_2^{sp}\chi_1^{su}+\zeta\chi_0^{sp}\chi_3^{su}) \end{aligned} \tag{8.72}$$

$$\begin{aligned} Z_{R}^{W,\pm}(\tau) =& \mathrm{ch}_v^{(12)}(\zeta\chi_0^{sp}\chi_0^{su}+\sigma\chi_2^{sp}\chi_2^{su})+\mathrm{ch}_0^{(12)}(\sigma\chi_1^{sp}\chi_1^{su}+\zeta\chi_3^{sp}\chi_3^{su}) \\ &\pm\mathrm{ch}_c^{(12)}(\zeta\chi_3^{sp}\chi_0^{su}+\sigma\chi_1^{sp}\chi_2^{su})\pm\mathrm{ch}_s^{(12)}(\sigma\chi_2^{sp}\chi_1^{su}+\zeta\chi_0^{sp}\chi_3^{su}) \end{aligned} \tag{8.73}$$

[16]注意，在上述公式中将所有 ζ,σ 替换为 1，即可得到众所周知的 $V^{f\natural}$在四种自旋结构中的特征标，这正如预期。

其中，$\zeta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和 $\sigma=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$、$\mathrm{ch}_\rho^{(12)}(\tau)$（其中 $\rho\in\{0,v,s,c\}$）是 $\widehat{so}(12)_1$,的特征标，而 $\chi^{sp}_{\ell_{sp}}\chi^{su}_{\ell_{su}}$ 是 $\widehat{sp}(6)_1\oplus\widehat{su}(2)_3$ 的表示 $[\ell_{sp},\ell_{su}]$ 的特征标（显式公式见附录 B）。特别地，

$$Z^{W,\pm}_{NS}=\frac{1}{2}Z^{\pm}_{NS}+\frac{\sqrt{5}}{2}(\frac{1}{\sqrt{q}}-96q^{1/2}\mp 896q-5016q^{3/2}\mp 21888q^2-81980q^{5/2}+\ldots) \quad (8.74)$$

$$Z^{W,+}_{R}=\frac{1}{2}Z^{+}_{R}+\sqrt{5}(-896q-21888q^2-274560q^3-2402816q^4-16600320q^5+\ldots) \quad (8.75)$$

通过计算机计算，我们验证了

$$Z^{W,-}_{R}=12\ , \quad (8.76)$$

是一个常数（精确到阶数 $O(q^{40})$），从而有力地证明了 W 保持 $\mathcal{N}=1$ 超流这一事实。下一节将对此给出严格证明。这些表达式的 S 变换给出了 W扭曲配分函数:

$$\begin{aligned} Z^{\pm}_{W,NS}(\tau)=&\,\mathrm{ch}^{(12)}_0(\chi^{sp}_0\chi^{su}_2+\chi^{sp}_2\chi^{su}_0+\chi^{sp}_2\chi^{su}_2)+\mathrm{ch}^{(12)}_v(\chi^{sp}_1\chi^{su}_1+\chi^{sp}_1\chi^{su}_3+\chi^{sp}_3\chi^{su}_1) \quad (8.77)\\ &\pm\mathrm{ch}^{(12)}_s(\chi^{sp}_1\chi^{su}_0+\chi^{sp}_3\chi^{su}_2+\chi^{sp}_1\chi^{su}_2)\pm\mathrm{ch}^{(12)}_c(\chi^{sp}_0\chi^{su}_1+\chi^{sp}_2\chi^{su}_1+\chi^{sp}_2\chi^{su}_3)\ ,\\ Z^{\pm}_{W,R}(\tau)=&\,\mathrm{ch}^{(12)}_v(\chi^{sp}_0\chi^{su}_2+\chi^{sp}_2\chi^{su}_0+\chi^{sp}_2\chi^{su}_2)+\mathrm{ch}^{(12)}_0(\chi^{sp}_1\chi^{su}_1+\chi^{sp}_1\chi^{su}_3+\chi^{sp}_3\chi^{su}_1) \quad (8.78)\\ &\pm\mathrm{ch}^{(12)}_c(\chi^{sp}_1\chi^{su}_0+\chi^{sp}_3\chi^{su}_2+\chi^{sp}_1\chi^{su}_2)\pm\mathrm{ch}^{(12)}_s(\chi^{sp}_0\chi^{su}_1+\chi^{sp}_2\chi^{su}_1+\chi^{sp}_2\chi^{su}_3)\ . \end{aligned}$$

注意，它们可分解为保持的子代数$\widehat{so}(12)^A_1\oplus\widehat{sp}(6)_1\oplus\widehat{su}(2)_3$, 的不可约表示的整数线性组合，从而确认 W^A 是$V^{f\natural}$中定义良好的拓扑缺陷。明确地说，我们有

$$Z^{\pm}_{W,NS}(\tau)=q^{-\frac{1}{2}}(3q^{2/5}+14q^{3/5}\pm 64q^{9/10}+186q\pm 192q^{11/10}+606q^{7/5}\pm 1472q^{3/2}+\ldots)\ ,$$

$Z^{+}_{W,\ R}(\tau)=2(6+64q^{2/5}+192q^{3/5}+1472q+3648q^{7/5}+6912q^{8/5}+35520q^2+63744q^{12/5}+\ldots)$, 其中 $Z^{-}_{W,\ R}(\tau)=12$。注意，W扭曲扇区中的玻色 NS 态的共形权重取值于 $\pm\frac{2}{5}+\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}$, 正如 [8]中的自旋选择规则所预言的那样。W^B 缺陷的配分函数相同，这正如预期，因为这两个缺陷在 Co_0中通过共轭相关联。

现在我们想要计算 $\phi^W(V^{f\natural},\ \tau,\ z)=Z^{W,\ R\ -}(\tau,\ z)$，其中 z是一个化学势，对应于 $\widehat{su}(2)_1\subset\widehat{so}(4)_1\subset\widehat{so}(12)^A_1$，属于 $V^{f\natural}$中的一个 $c=6,\mathcal{N}=4$ 超共形代数。首先，在插入 W之前，我们为函数 $\phi(V^{f\natural},\ \tau,\ z)$ 找到了一种新的表达式：$=Z^{-}_R(\tau,\ z)$（等于 K3 椭圆亏格），它符合式（8.43）中由 W 保持的仿射代数结构。对式（4.63）附近的讨论作直接推广后，我们得到

$$\begin{aligned} \phi(V^{f\natural},\tau,z)\ =&\ \mathrm{ch}^{(12)}_v(\tau,z)(\chi^{sp}_0\chi^{su}_0+\chi^{sp}_2\chi^{su}_2)+\mathrm{ch}^{(12)}_0(\tau,z)(\chi^{sp}_1\chi^{su}_1+\chi^{sp}_3\chi^{su}_3)\\ -&\ \mathrm{ch}^{(12)}_c(\tau,z)(\chi^{sp}_3\chi^{su}_0+\chi^{sp}_1\chi^{su}_2)-\mathrm{ch}^{(12)}_s(\tau,z)(\chi^{sp}_2\chi^{su}_1+\chi^{sp}_0\chi^{su}_3). \quad (8.79) \end{aligned}$$

其中，“带味”特征标 $\mathrm{ch}^{(12)}_\rho(\tau,\ z):=\mathrm{Tr}_{\rho^{(12)}}y^{J^3_0}q^{L_0-1/3}$，其中 $\rho\in\{0,v,c,s\}$，见 (B.16)–(B.18)。此外，代入 W 后，我们便得到缠绕亏格，

$$\begin{aligned} \phi^W(V^{f\natural},\tau,z)\ =&\ \mathrm{ch}^{(12)}_v(\tau,z)(\zeta\chi^{sp}_0\chi^{su}_0+\sigma\chi^{sp}_2\chi^{su}_2)+\mathrm{ch}^{(12)}_0(\tau,z)(\sigma\chi^{sp}_1\chi^{su}_1+\zeta\chi^{sp}_3\chi^{su}_3)\\ -&\ \mathrm{ch}^{(12)}_c(\tau,z)(\zeta\chi^{sp}_3\chi^{su}_0+\sigma\chi^{sp}_1\chi^{su}_2)-\mathrm{ch}^{(12)}_s(\tau,z)(\sigma\chi^{sp}_2\chi^{su}_1+\zeta\chi^{sp}_0\chi^{su}_3), \end{aligned}$$

它也可以等价地写成,

$$\phi^W(V^{f\natural},\tau,z)=\frac{1}{2}\phi(V^{f\natural},\tau,z)+\sqrt{5}\frac{\theta_1^2(\tau,z)}{\eta^6(\tau)}f(\tau) \tag{8.80}$$

其中

$$f(\tau):=\frac{\eta(\tau)^5}{\eta(5\tau)}+25\frac{\eta(5\tau)^5}{\eta(\tau)}, \tag{8.81}$$

是 A_4 格的权重 2 theta 级数。

利用 η 的模性质（见附录 B），显然 $f(\tau)$ 的 S 变换为

$$f(-1/\tau)=\frac{\sqrt{-i\tau}^4}{\sqrt{5}}\left(\frac{\eta(\tau/5)^5}{\eta(\tau)}+5\frac{\eta(\tau)^5}{\eta(\tau/5)}\right) \tag{8.82}$$

因此，方程 (8.80) 的 S 变换具有整数系数。

8.5 W^A 保持 $\mathcal{N}=1$ 超流

本节将证明，拓扑缺陷 W^A 保持 $\mathcal{N}=1$ 超流 $\tau(z)$。我们采用以下策略。我们知道 W^A 与群 $2.(A_5\times J_2)$ 对易，因为后者包含于由保留的仿射代数 $\widehat{so}(12)_1^A\oplus\widehat{sp}(6)_1^B\oplus\widehat{su}(2)_3^B$ 的零模生成的李群中。我们将证明，在自旋为 $3/2$ 的 NS 场空间 $V^{f\natural}(3/2)$ 中，由 $2.(A_5\times J_2)$ 不变的子空间 $\subset Co_0$ 是二维的，并由表示 $[0]$ 和 $[3]$ 中的两个场生成，这两个表示属于 $\widehat{su}(2)_3^B$。由于超流在整个 Co_0 下不变，因此它必定属于这个不变子空间；而 W^A 保持 $\widehat{su}(2)_3^B$ 的 $[0]$ 和 $[3]$ 表示中的所有场，因此它尤其保持 τ。

$2^{11}=2048$ 场在 $V^{f\natural}(3/2)$ 中属于 $\widehat{so}(12)_1^A\oplus\widehat{sp}(6)_1^B\oplus\widehat{su}(2)_3^B$ 的以下表示:

$$(s,[3_{sp},0_{su}]) \qquad 32\times 14 \text{ fields} \tag{8.83}$$

$$(s,[1_{sp},2_{su}]) \qquad 32\times 6\times 3=32\times 18 \text{ fields} \tag{8.84}$$

$$(c,[2_{sp},1_{su}]) \qquad 32\times 14\times 2=32\times 28 \text{ fields} \tag{8.85}$$

$$(c,[0_{sp},3_{su}]) \qquad 32\times 4 \text{ fields}\ . \tag{8.86}$$

请注意，在所有此类表示中，最低共形权恰好为 $3/2$。我们进一步将 $\widehat{so}(12)^A$ 表示按照其子代数 $\widehat{sp}(6)_1^A\oplus\widehat{su}(2)_3^A$ 进行分解。将 $\widehat{sp}(6)_1^A\oplus\widehat{su}(2)_3^A\oplus\widehat{sp}(6)_1^B\oplus\widehat{su}(2)_3^B$ 的表示记作 $[\ell_{sp}^A,\ell_{su}^A][\ell_{sp}^B,\ell_{su}^B]$是很方便的，其中 $\ell_{sp}^A,\ \ell_{sp}^B\in\{0,1,2,3\}$ 对应于 (8.55) 中的 $\widehat{sp}(6)_1$ 表示。因此，自旋为 $3/2$ 的拉蒙场属于

$$\begin{aligned}&\left[([3_{sp}^A,0_{su}^A]\oplus[1_{sp}^A,2_{su}^A])\ ([3_{sp}^B,0_{su}^B]\oplus[1_{sp}^B,2_{su}^B])\right]\\&\oplus\left[([2_{sp}^A,1_{su}^A]\oplus[0_{sp}^A,3_{su}^A])\ ([2_{sp}^B,1_{su}^B]\oplus[0_{sp}^B,3_{su}^B])\right]\ .\end{aligned} \tag{8.87}$$

$y\in 2.A_5\subset 2.(A_5\times J_2)$的每个元素都通过变换 $(\pi^A(y)\ \pi^B(y))\in SU(2)_{diag}^A\times SU(2)_{diag}^B$作用于 $V^{f\natural}$ 的给定场，而 $z\in 2.J_2\subset 2.(A_5\times J_2)$的元素则通过

$(\pi^A(z)\ \pi^B(z)) \in Sp(6,\ \mathbb{R})^A \times Sp(6,\ \mathbb{R})^B$作用。因此，对给定自旋 3/2 场的作用仅取决于它所属的 $\widehat{sp}(6)_1^A \oplus \widehat{su}(2)_3^A \oplus \widehat{sp}(6)_1^B \oplus \widehat{su}(2)_3^B$表示。特别地，对于每个 $[\ell_{sp}^A, \ell_{su}^A][\ell_{sp}^B, \ell_{su}^B]$，我们可以确定基态场在$2.(A_5 \times J_2)$的哪个表示中变换。

我们将 $\mathbf{1}_+, \mathbf{3}_+, \mathbf{3'}_+, \mathbf{4}_+, \mathbf{5}_+, \mathbf{2}_-, \mathbf{2'}_-, \mathbf{4}_-, \mathbf{6}_-$ 记为$2.A_5$的不可约表示，将 $\mathbf{1}_+, \mathbf{6}_-, \mathbf{6'}_-, \mathbf{14}_+, \mathbf{14'}_+, \mathbf{14}_-, \ldots$ 记为 $2.J_2$[29]的最小不可约表示。这里，数字表示维数，下标 $\pm$ 表示 $2.A_5$或 $2.J_2$ 中的非平凡中心元是通过 $+1$ （即平凡方式）还是通过 -1作用。具有相同维数和下标的表示可由外自同构互相置换。

那么，标签 $\ell_{sp}^A, \ell_{su}^A, \ell_{sp}^B, \ell_{su}^B$ 与 $2.(A_5 \times J_2)$ 的表示之间存在如下对应关系：

$$0_{sp}^A \leftrightarrow (\mathbf{1}_+)_{2.J_2} \qquad 1_{sp}^A \leftrightarrow (\mathbf{6}_-)_{2.J_2} \qquad 2_{sp}^A \leftrightarrow (\mathbf{14}_+)_{2.J_2} \qquad 3_{sp}^A \leftrightarrow (\mathbf{14}_-)_{2.J_2} \tag{8.88}$$

$$0_{sp}^B \leftrightarrow (\mathbf{1}_+)_{2.J_2} \qquad 1_{sp}^B \leftrightarrow (\mathbf{6'}_-)_{2.J_2} \qquad 2_{sp}^B \leftrightarrow (\mathbf{14'}_+)_{2.J_2} \qquad 3_{sp}^B \leftrightarrow (\mathbf{14}_-)_{2.J_2} \tag{8.89}$$

$$0_{su}^A \leftrightarrow (\mathbf{1}_+)_{2.A_5} \qquad 1_{su}^A \leftrightarrow (\mathbf{2}_-)_{2.A_5} \qquad 2_{su}^A \leftrightarrow (\mathbf{3}_+)_{2.A_5} \qquad 3_{su}^A \leftrightarrow (\mathbf{4}_-)_{2.A_5} \tag{8.90}$$

$$0_{su}^B \leftrightarrow (\mathbf{1}_+)_{2.A_5} \qquad 1_{su}^B \leftrightarrow (\mathbf{2'}_-)_{2.A_5} \qquad 2_{su}^B \leftrightarrow (\mathbf{3'}_+)_{2.A_5} \qquad 3_{su}^B \leftrightarrow (\mathbf{4}_-)_{2.A_5} \tag{8.91}$$

通过回想这 24 个拉蒙基态场属于 $[1_{sp}^A, 1_{su}^A][0_{sp}^B, 0_{su}^B] \oplus [0_{sp}^A, 0_{su}^A][1_{sp}^B, 1_{su}^B]$ 仿射代数表示，并且在 $2.(A_5 \times J_2)$ 的 $(\mathbf{6}_- \otimes \mathbf{2}_-) \oplus (\mathbf{6'}_- \otimes \mathbf{2'}_-)$ 表示下变换，可以确定 1_{sp}^A，1_{su}^A，1_{sp}^B，1_{su}^B 的指派。随后，其余所有指派均由与融合规则的相容性及维数论证确定。此处及下文中，$2.A_5$ 和 $2.J_2$ 表示的张量积向不可约表示的分解，是使用这些群的特征标表计算得出的（我们为此使用了 GAP[54]）。

例如，$[1_{sp}^A, 2_{su}^A][3_{sp}^B, 0_{su}^B]$ 的基态变换为

$$[1_{sp}^A, 2_{su}^A][3_{sp}^B, 0_{su}^B] \ \leftrightarrow\ (\mathbf{6}_- \otimes \mathbf{14}_-)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{3}_+ \otimes \mathbf{1}_+)_{2.A_5} = (\mathbf{14}_+ \oplus \mathbf{70}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{3}_+)_{2.A_5}. \tag{8.92}$$

再举一例，

$$[2_{sp}^A, 1_{su}^A][2_{sp}^B, 1_{su}^B] \leftrightarrow (\mathbf{14}_+ \otimes \mathbf{14'}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{2}_- \otimes \mathbf{2'}_-)_{2.A_5} = (\mathbf{36}_+ \oplus \mathbf{160}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{4}_+)_{2.A_5} \tag{8.93}$$

容易看出，在 V^f(3/2)的分解中出现的仿射代数表示 $[\ell_{sp}^A, \ell_{su}^A][\ell_{sp}^B, \ell_{su}^B]$ 里，平凡表示在$2.(A_5 \times J_2)$中出现的只有

$$\begin{aligned} [3_{sp}^A, 0_{su}^A][3_{sp}^B, 0_{su}^B] \ &\leftrightarrow (\mathbf{14}_- \otimes \mathbf{14}_-)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_+)_{2.A_5} \\ &= (\mathbf{1}_+ \oplus \mathbf{21}_+ \oplus \mathbf{21'}_+ \oplus \mathbf{63}_+ \oplus \mathbf{90}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{1}_+)_{2.A_5} \end{aligned} \tag{8.94}$$

and

$$\begin{aligned} [0_{sp}^A, 3_{su}^A][0_{sp}^B, 3_{su}^B] \ &\leftrightarrow (\mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{4}_- \otimes \mathbf{4}_-)_{2.A_5} \\ &= (\mathbf{1}_+)_{2.J_2} \otimes (\mathbf{1}_+ \oplus \mathbf{3}_+ \oplus \mathbf{3}_+ \oplus \mathbf{4}_+ \oplus \mathbf{5}_+)_{2.A_5}\ . \end{aligned} \tag{8.95}$$

$\mathcal{N} = 1$ 超流必须是 $2.(A_5 \times J_2)$ 的平凡表示中的两个场的线性组合。这些场属于 $\widehat{sp}(6)_1^A \oplus \widehat{su}(2)_3^A \oplus \widehat{sp}(6)_1^B \oplus \widehat{su}(2)_3^B$ 的表示 $[3_{sp}^A, 0_{su}^A][3_{sp}^B, 0_{su}^B]$ 和$[0_{sp}^A, 3_{su}^A][0_{sp}^B, 3_{su}^B]$，并且这两个表示均由 W^A和W^B保持不变。因此，这两个拓扑缺陷都保持超流不变。

9 保持谱流的缺陷：K3 的 Gepner 模型

本节中，我们考察 K3 非线性σ模型模空间中的一族精确可解点，这些点由 Gepner 模型给出。在 §9.1 中，我们首先回顾对角（A 型） $\mathcal{N}=2$ 最小模型中保持超对称性的拓扑缺陷线的结构。接着在 §9.2 中，我们讨论如何将其推广到由对角$\mathcal{N}=2$ 最小模型 [21, 55] 的张量积经轨形构造得到的 Gepner 模型。在第 (9.3) 节中，我们运用这些通用方法，在 $(3)^2(8)$ 和 (2)(3)(18) Gepner 模型中构造斐波那契缺陷线，并在 $(4)^3$,$(1)^2(2)^2$，和 (2)(4)(10) Gepner 模型中构造 $Rep(S_3)$ 的不可逆缺陷。我们证明，这些缺陷的缺陷缠绕亏格与 §8.4 中通过式 (8.80) 构造的 $V^{f\natural}$ 中缺陷 W 的缠绕亏格相符，也与 [1]，中分别计算的 $Rep(S_3)$ 缺陷的缠绕亏格相符，从而为猜想 6 提供了进一步的证据。

9.1 缺陷与 $\mathcal{N}=2$ 最小模型

本节简要回顾保持 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数和谱流的 $\mathcal{N}=2$ 最小模型及其拓扑缺陷线。$\mathcal{N}=2$ 最小模型系列的中心荷为 $c=\frac{3k}{k+2}$，其中 $k=1$，2，.....，其玻色子子代数为

$$\frac{\widehat{su}(2)_k\hat{u}(1)_2}{\hat{u}(1)_{k+2}}. \tag{9.1}$$

玻色代数 (9.1) 的幺正不可约最高权表示 $M_{l,\ m,\ \epsilon}\equiv M^k_{l',\ m,\ \epsilon}$ 由三个整数 $(l,\ m,\ \epsilon)$ 标记，其中 $l\in\{0,\dots,k\},\quad m\in\mathbb{Z}/(2k+4)\ \ \epsilon\in\mathbb{Z}/4$，并满足条件 $l+m+\epsilon=0$ 模 2。此外，通过变换 $(l,\ m,\ \epsilon)\sim(k-l,\ m+k+2,\ \epsilon+2)$ 相互关联的表示是同构的；即

$$M^k_{l,m,\epsilon}\cong M^k_{k-l,m+k+2,\epsilon+2}\qquad l\in\{0,\dots,k\},\ m\in\mathbb{Z}/(2k+4)\mathbb{Z},\ \epsilon\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. \tag{9.2}$$

表示 $M^k_{l、\ m、\ \epsilon}$ 的主算符 $\phi_{l、\ m、\ \epsilon}$ 的共形维数为 $h_{l、\ m、\ \epsilon}$，(1) 荷（J_0 特征值）为 $Q_{l、\ m、\ \epsilon}$，具体如下

$$h_{l,m,\epsilon}=\frac{l(l+2)-m^2}{4(k+2)}+\frac{\epsilon^2}{8}+(\text{integer}),\quad Q_{l,m,\epsilon}=\frac{m}{k+2}-\frac{\epsilon}{2}. \tag{9.3}$$

令 $\chi^k_{l、\ m、\ \epsilon}(\tau、\ z):=\mathrm{Tr}^{M^k_{l、\ m、\ \epsilon}}q^{L_0-c/24}y^{J_0}$ 为表示 $M^k_{l、\ m、\ \epsilon}$ 的特征标，其主态为 $|l、\ m、\ \epsilon\rangle$，场为 $\phi_{l、\ m、\ \epsilon}$；显式公式见附录 B。特征标的模变换为

$$\chi^k_{l,m,\epsilon}\left(-\frac{1}{\tau},0\right)=\frac{1}{2}\sum_{l',m',\epsilon'}S^k_{lm\epsilon,l'm'\epsilon'}\chi^k_{l',m',\epsilon'}(\tau,0), \tag{9.4}$$

其中求和遍历所有满足 $l'+m'+\epsilon'\in2\mathbb{Z}$ 的 $l'\in\{0,\dots,k\}, m'\in\mathbb{Z}/(2k+4)\mathbb{Z}, \epsilon'\in\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$，S 矩阵由下式给出

$$S^k_{lm\epsilon,l'm'\epsilon'}=\frac{1}{k+2}\sin\left(\frac{\pi(l+1)(l'+1)}{k+2}\right)e^{\frac{\pi imm'}{k+2}}e^{\frac{-\pi i\epsilon\epsilon'}{2}}\ . \tag{9.5}$$

(9.4) 中的 1/2 整体因子记录了以下事实：$\chi^k_{l'、\ m'、\ \epsilon'}(\tau、\ z)$ 和 $\chi^k_{k-l'、\ m'+k+2、\ \epsilon'+2}(\tau、\ z)$ 是同构表示的特征标。

可以定义一个玻色共形场论，其手征代数和反手征代数均与余集 (9.1) 同构，且具有对角模不变配分函数；其中，对所有不等价表示 $M_{l、\ m、\ \epsilon}$，各包含一个主算符 $|l、\ m、\ \epsilon\rangle \otimes |l、\ m、\ \epsilon\rangle$。保持手征代数和反手征代数不变的简单拓扑缺陷是 Verlinde 线 $\mathcal{L}^k_{lm\epsilon}$，它们与不可约表示 $M_{l、\ m、\ \epsilon}$ 一一对应，并且对主算符的作用为

$$\hat{\mathcal{L}}^k_{lm\epsilon}|l',m',\epsilon'\rangle \otimes \overline{|l',m',\epsilon'\rangle} = \frac{S^k_{l'm'\epsilon',lm\epsilon}}{S^k_{l'm'\epsilon',000}}|l',m',\epsilon'\rangle \otimes \overline{|l',m',\epsilon'\rangle}\ . \tag{9.6}$$

然而，我们关注的是具有 $\mathcal{N}=2$ 超共形对称性和谱流的理论，其相应的保对称性拓扑缺陷线还受到进一步的约束。我们首先回顾 $\mathcal{N}=2$ 极小理论。在 $c=\frac{3k}{k+2}$ 处，$\mathcal{N}=2$超共形代数的所有不可约酉表示都可以表示为玻色代数 (9.1) 的表示的直和 $M^k_{l、\ m、\ \epsilon}\oplus M^k_{l、\ m、\ \epsilon+2}$。偶数 ϵ对应 NS 扇区表示，奇数 ϵ 对应 Ramond 扇区。定义集合 $\mathcal{S}^{\rm NS}_l$:
$=\{-l,-l+2,\ldots,l-2,l\}$和 $\mathcal{S}^{\rm R}_l$:$=\{-l-1,-l+1,\ldots,l-3,l-1\}$。根据上述等同关系，不失一般性，我们可以将 $\mathcal{N}=2$ NS/R 扇区标记为

$$\mathcal{M}^{k,\rm NS}_{l,m}=M^k_{l,m,0}\oplus M^k_{l,m,2}\ , \qquad \mathcal{M}^{k,\rm R}_{l,m}=M^k_{l,m,-1}\oplus M^k_{l,m,1}\ , \tag{9.7}$$

分别为 $l\in\{0,\ldots,k\}$和 $m\in\mathcal{S}^{\rm NS}_l$或 $m\in\mathcal{S}^{\rm R}_l$。$\mathcal{M}^{k,l}{}^{\rm NS}_{\ m}$ 的超共形主态$|l,m\rangle_{\rm NS}:=|l,m,0\rangle$和 $|l,m\rangle_{\rm R}:=|l,m,-1\rangle$，以及 $\mathcal{M}^{k,l}{}^{\rm R}_{\ m}$，是$M_{l,m,0}$ 和 $M_{l,m,-1}$的基态，其共形权重和 $U(1)$ 荷如 (9.3) 所示，其中整数取零。$\mathcal{M}^{k,l}{}^{X}_{\ m}$，，$m\in\mathcal{S}^X_l$的分量 $M^k_{l,m,\epsilon}$ 具有费米子宇称（$((-1)^F$特征值)）：对于 $\epsilon\in\{0,1\}$ 为 $+1$，对于 $\epsilon\in\{2,-1\}$为 -1。

相应的 $\mathcal{N}=2$ 特征标可写为:

$$\tilde{\chi}^{k,\rm NS,\pm}_{l,m}(\tau,z):={\rm Tr}_{\mathcal{M}^{k,\rm NS}_{l,m}}(\pm1)^F q^{L_0-c/24}y^{J_0}=\chi^k_{l,m,0}(\tau,z)\pm\chi^k_{l,m,2}(\tau,z) \tag{9.8}$$

$$\tilde{\chi}^{k,\rm R,\pm}_{l,m}(\tau,z):={\rm Tr}_{\mathcal{M}^{k,\rm R}_{l,m}}(\pm1)^F q^{L_0-c/24}y^{J_0}=\chi^k_{l,m,1}(\tau,z)\pm\chi^k_{l,m,-1}(\tau,z). \tag{9.9}$$

下文中，如果上下文清楚，我们有时会省略上标 k，和/或省略上标 NS、R，因为它们对应于 $l+m$ 为偶或奇。特征标满足以下模变换公式:

$$\tilde{\chi}^{\rm NS,+}_{l,m}\left(-\frac{1}{\tau},0\right)=\sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm NS}_{l'}}2S^k_{lm0,l'm'0}\tilde{\chi}^{\rm NS,+}_{l',m'}(\tau,0),\quad \chi^{\rm NS,-}_{l,m}\left(-\frac{1}{\tau},0\right)=\sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm R}_{l'}}2S^k_{lm0,l'm'1}\tilde{\chi}^{\rm R,+}_{l',m'}(\tau,0)\ ,$$

$$\tilde{\chi}^{\rm R,+}_{l,m}\left(-\frac{1}{\tau},0\right)=\sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm NS}_{l'}}2S^k_{lm1,l'm'0}\tilde{\chi}^{\rm NS,-}_{l',m'}(\tau,0),\quad \tilde{\chi}^{\rm R,-}_{l,m}\left(-\frac{1}{\tau},0\right)=\sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm R}_{l'}}2S^k_{lm1,l'm'1}\tilde{\chi}^{\rm R,-}_{l',m'}(\tau,0)\ .$$

或者等价地

$$\begin{pmatrix}\tilde{\chi}^{\rm NS,+}_{l,m}\\ \tilde{\chi}^{\rm NS,-}_{l,m}\\ \tilde{\chi}^{\rm R,+}_{l,m}\\ \tilde{\chi}^{\rm R,-}_{l,m}\end{pmatrix}(-\frac{1}{\tau},0)=\sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm NS}_l\cup\mathcal{S}^{\rm R}_l}S^k_{lm;l'm'}\begin{pmatrix}\tilde{\chi}^{\rm NS,+}_{l',m'}\\ \tilde{\chi}^{\rm R,+}_{l',m'}\\ \tilde{\chi}^{\rm NS,-}_{l',m'}\\ -i\tilde{\chi}^{\rm R,-}_{l',m'}\end{pmatrix}(\tau,0) \tag{9.10}$$

其中我们设定 $\tilde{\chi}^{X,\pm}_{l,m}(\tau,z)=0$ 若 $m\notin\mathcal{S}^X_l$， $X\in$ {NS（纽曼-施瓦茨），R}，并且 $\mathcal{N}=2$特征标的 S 矩阵为

$$S^k_{lm;l'm'}=\frac{2}{k+2}\sin\left(\frac{\pi(l+1)(l'+1)}{k+2}\right)e^{\frac{\pi imm'}{k+2}}\ . \tag{9.11}$$

众所周知，具有模不变配分函数且保持谱流的 $\mathcal{N}=2$ 极小理论可按 ADE 分类进行分类 [56–58]；从此处开始，我们将只考虑对角（ A 型）解。对于给定的 $\mathcal{N}=2$ 最小模型中与 $\Phi^{XX'}_{l\,m\,;l'm'}=\phi^X_{l\,,m}\otimes\bar{\phi}^{X'}_{l'\,,m'}$ 对应的非手征态，我们记作 $|l,m;\ l',m'\rangle_{XX'}$。相应的（对角）配分函数可表示为

$$\begin{aligned}Z^{k,\pm}_{XX}(\tau,z,\bar{\tau},\bar{z}) &= \mathrm{Tr}_{XX}(\pm1)^F q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}y^{J_0}\bar{y}^{\bar{J}_0} &(9.12)\\ &= \sum_{l=0}^{k}\sum_{m\in\mathcal{S}^X_l}\tilde{\chi}^{X,\pm}_{l,m}(\tau,z)\tilde{\bar{\chi}}^{X,\pm}_{l,m}(\bar{\tau},\bar{z}), &(9.13)\end{aligned}$$

对于 $X\in$ {NS,R}。NSR 或 RNS 扇区中的配分函数可以通过对手征或反手征特征标进行谱流得到。

对于给定的 $\mathcal{N}=2$ 最小模型，保持 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数和谱流的拓扑缺陷线谱，可以通过熟知的模自举方法 [4]确定。由于我们只考虑 A-系列，缺陷线就是 Verlinde 线 [3]。第 k 个 A 型最小模型有 $(k+1)(k+2)/2$ $\mathcal{N}=2$ 个主算符，因此有 $(k+1)(k+2)/2$ 条 Verlinde 线。[17] 由于 $\mathcal{N}=2$ 主算符与 Verlinde 线一一对应，我们将 Verlinde 线标记为$\mathcal{L}^k_{lm}$，其中 $l\in\{0,\ldots,k\},m\in\mathcal{S}^{\rm NS}_l$。量子维数可通过 Verlinde 公式由 S 矩阵（9.11）确定，结果为

$$\langle\mathcal{L}^k_{lm}\rangle=\frac{S^k_{00;lm}}{S^k_{00;00}},\quad l\in\{0,\ldots k\},m\in\mathcal{S}^{\rm NS}_l. \tag{9.14}$$

从这个表达式可以很容易地确定，存在 $k+2$ 条可逆线（量子维数为一）；它们源自该理论的 $\mathbb{Z}_{k+2}$ 可逆对称性。按照我们的约定，这些可逆线对应于缺陷 $\mathcal{L}^k_{00}$ （恒等线）和 $\mathcal{L}^k_{km}$，$m\in\mathcal{S}^{\rm NS}_k$。因此还剩下 $(k+2)(k-1)/2$ 条不可逆拓扑缺陷线，它们对应于 $l\in\{1,...,k-1\}$的 $\mathcal{L}^k_{lm}$。

Verlinde 线 $\mathcal{L}^k_{lm}$ 在 NSNS 主算符的基上的作用为

$$\mathcal{L}^k_{lm}|l',m';l',m'\rangle_{\rm NSNS}=\lambda^k_{lm;l'm'}|l',m';l',m'\rangle_{\rm NSNS}, \tag{9.15}$$

其中，特征值为

$$\lambda^k_{lm;l'm'}=\frac{S^k_{l'm';lm}}{S^k_{l'm';00}},\quad l\in\{0,\ldots k\},m\in\mathcal{S}^{\rm NS}_l. \tag{9.16}$$

值得注意的是，可逆线 $\mathcal{L}^k_{km}$ 的特征值由下式给出

$$\lambda^k_{km;l'm'}=(-1)^{l'}\omega_k^{\frac{mm'}{2}}, \tag{9.17}$$

[17]请注意，与 [21], 中对 $\mathcal{N}=2$ 最小模型的拓扑缺陷线的讨论不同，那里的缺陷只需保持维拉索罗对称性；而在这里，我们要求 Verlinde 线保持完整的 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数。

其中 $\omega_k = e^{\frac{2\pi i}{k+2}}$。RR 扇区上的作用由 NSNS 扇区上的作用确定，但存在一个符号不确定性

$$\mathcal{L}^k_{lm}|l',m';l',m'\rangle_{\rm RR} = \pm\lambda^k_{lm;l'm'}|l',m';l',m'\rangle_{\rm RR}, \tag{9.18}$$

这与存在一个（可逆）对称性有关，该对称性通过 -1 作用于 RR 扇区，并在 NSNS 扇区上平凡作用。这里，$\lambda^k_{lm;l'm'}$ 由同一公式（9.16）给出，但其中$m' \in \mathcal{S}^{\rm R}_{l'}$。由此可知，可以通过以下公式计算相应 Verlinde 线的缠绕配分函数，

$$\begin{aligned} Z^{\mathcal{L}^k_{lm},k,\pm}_{\rm NSNS}(\tau,z,\bar\tau,\bar z) &= {\rm Tr}_{\rm NSNS}\,\mathcal{L}^k_{lm}(\pm1)^F q^{L_0-c/24}\bar q^{\bar L_0-c/24}y^{J_0}\bar y^{\bar J_0} &(9.19)\\ &= \sum_{l'=0}^{k}\sum_{m'\in\mathcal{S}^{\rm NS}_{l'}}\lambda^k_{lm;l'm'}\tilde\chi^{\rm NS,\pm}_{l',m'}(\tau,z)\tilde{\bar\chi}^{\rm NS,\pm}_{l',m'}(\bar\tau,\bar z). &(9.20)\end{aligned}$$

RR 扇区的公式完全类似，只是存在整体符号的不确定性，正如式（9.18）附近所讨论的那样。

现在我们考察前几个最小模型的 Verlinde 线谱。$k=1$最小模型具有 $\mathbb{Z}_3$ （可逆）对称群，且没有不可逆拓扑缺陷线； $k=2$ 具有 $\mathbb{Z}_4$ 对称群，并有两个（定向）量子维数为 $\sqrt{2}$ 的不可逆缺陷，总计六条线；而 $k=3$ 最小模型具有 $\mathbb{Z}_5$ 可逆对称群，以及一条量子维数为 $\zeta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的斐波那契缺陷线 $W := \mathcal{L}^3_{20}$ （按上述记号表示）。它与可逆线融合后，共得到 10 条简单拓扑缺陷线。由公式（9.16）可确定 W 在 NSNS 扇区中 $\mathcal{N}=2$ 初级场基上的作用，结果为

$$W|l,m;l,m\rangle_{\rm NSNS} = \begin{cases}\zeta|l,m;l,m\rangle_{\rm NSNS}, & l\in\{0,3\}\\ \sigma|l,m;l,m\rangle_{\rm NSNS}, & l\in\{1,2\}\end{cases} \tag{9.21}$$

其中 $\sigma = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$与前一节相同。

在第 9.3 节中，我们构造 K3 的 Gepner 模型，其中由此缺陷构建的斐波那契线保持 $\mathcal{N}=(4,4)$ 超共形对称性。首先，我们简要回顾 Gepner 模型及其一些拓扑缺陷。

9.2 Gepner 模型中的缺陷

Gepner 模型是 Calabi-Yau$d$ 重流形上的非线性σ模型模空间中的一个精确可解点，可由 $\mathcal{N}=2$ 个最小模型的张量积经过轨形化得到，使得总中心荷为 $c=3d$ [57]。如果该模型是 A 型最小模型的张量积（k_1） $\otimes\ldots\otimes$ （k_r），那么必须按 $\mathbb{Z}_N$ 进行轨形化，其中 $N = lcm$（k_i+2），以实现荷数整性。Gepner 模型的 NSNS 和 RR 希尔伯特空间为

$$\mathcal{H}^{(k_1)\ldots(k_r)}_{XX} := \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}_N}\bigoplus_{l_i,m_i}{}'\bigotimes_{i=1}^{r}\left(\mathcal{M}^{k_i,X}_{l_i,m_i}\otimes\bar{\mathcal{M}}^{k_i,X}_{\sigma^a(l_i,m_i)}\right), \tag{9.22}$$

其中 $X\in\{\text{NS},\text{R}\}$，求和遍历满足荷数整性条件的 $l_i\in\{0,\ldots,k_i\}$、 $m_i\in\mathcal{S}^X_{l_i}$

$$\sum_{i=1}^{r}\Big(\frac{m_i}{k_i+2}-\frac{\epsilon_i}{2}\Big)\in\mathbb{Z} \qquad\Leftrightarrow\qquad \begin{cases}\sum_{i=1}^r\frac{m_i}{k_i+2}\in\mathbb{Z} & \text{NSNS sector}\\ \sum_{i=1}^r\frac{m_i}{k_i+2}\in\frac{r}{2}+\mathbb{Z} & \text{RR sector}\end{cases} \tag{9.23}$$

其中 $\epsilon_i \equiv 0$ 在 NS 扇区中模 2， $\epsilon_i \equiv 1$ 在拉蒙扇区中模 2，而 σ 是由下式定义的（一个单位）谱流变换

$$\sigma(l_i, m_i) = \begin{cases} (l_i, m_i + 2) & \text{for } m_i \in \mathcal{S}_{l_i}^X,\ m_i \le l_i - 2\ , \\ (k_i - l_i, m_i - k_i) & \text{for } m_i \in \mathcal{S}_{l_i}^X,\ m_i > l_i - 2\ . \end{cases} \tag{9.24}$$

每个分量 $\bigotimes_{i=1}^r \left(\mathcal{M}_{l_i,m_i}^{k_i,X} \otimes \bar{\mathcal{M}}_{\sigma^a\ l_i\ (,m_i)}^{k_i,X} \right)$ 都可分解为玻色余集代数乘积的不可约表示之和 $\bigotimes_{i=1}^r (M_{l_i,m_i,\epsilon_i}^{k_i} \otimes \bar{M}_{\bar{l}_i,\bar{m}_i,\bar{\epsilon}_i}^{k_i})$。Gepner 模型的费米子数 $(-1)^F$定义为 $(-1)^F = (-1)^{J_0 - \bar{J}_0}$，因此每个这样的余集表示都有确定的费米子数

$$(-1)^F{}_{|\bigotimes_{i=1}^r M_{l_i,m_i,\epsilon_i}^{k_i} \otimes \bar{M}_{\bar{l}_i,\bar{m}_i,\bar{\epsilon}_i}^{k_i}} = (-1)^{\sum_i (Q_{m_i,\epsilon_i} - Q_{\bar{m}_i,\bar{\epsilon}_i})} = (-1)^{\sum_{i=1}^r \left(\frac{m_i - \bar{m}_i}{k_i+2} - \sum_i \frac{\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i}{2} \right)} . \tag{9.25}$$

Gepner 模型的轨形分区函数

$$Z_{XX}^{(k_1)\ldots(k_r),\pm}(\tau, z, \bar{\tau}, \bar{z}) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{XX}^{(k_1)\ldots(k_r)}} (\pm 1)^F q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} y^{J_0} \bar{y}^{\bar{J}_0} \tag{9.26}$$

其中 $X \in \{\mathrm{NS}, \mathrm{R}\}$，可用极小模型特征标表示为 [59]

$$Z_{XX}^{(k_1)\ldots(k_r),+}(\tau, z, \bar{\tau}, \bar{z}) = \frac{1}{N} \sum_{a,b=0}^{N-1} \prod_{i=1}^r \sum_{l_i=0}^{k_i} \sum_{m_i \in S_{l_i}^X} e^{2\pi i b \left(\frac{m_i}{k_i+2} - \frac{\epsilon_i}{2} \right)} \tilde{\chi}_{l_i,m_i}^{X,+}(\tau, z) \tilde{\chi}_{\sigma^a(l_i,m_i)}^{X,+}(\bar{\tau}, \bar{z}) \tag{9.27}$$

其中 $\epsilon_i = 0$ 适用于 $X = \mathrm{NS}$，而 $\epsilon_i = 1$ 适用于 $X = \mathrm{R}$，并且

$$Z_{XX}^{(k_1)\ldots(k_r),-}(\tau, z, \bar{\tau}, \bar{z}) = Z_{XX}^{(k_1)\ldots(k_r),+}(\tau, z + \frac{1}{2}, \bar{\tau}, \bar{z} + \frac{1}{2}) \ . \tag{9.28}$$

此外，考虑 RR 扇区，令 $\bar{z} = 0$，并保留 $(-1)^F$插入，即 $Z^{(k_1)\ldots(k_r)RR}{}^-(\tau, z, \bar{\tau}, 0)$，即可利用单位元求得椭圆亏格

$$\tilde{\chi}_{l,m}^{R,-}(\tau, 0) = \delta_{l+1,m} - \delta_{-l-1,m}. \tag{9.29}$$

现在我们将描述 Gepner 模型的完整手征代数 $\mathcal{A}$。记号如下：

$$\mathcal{M}_{\mathbf{l},\mathbf{m}} := \mathcal{M}_{l_1,m_1}^{k_1,X} \otimes \mathcal{M}_{l_2,m_2}^{k_2,X} \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_{l_r,m_r}^{k_r,X} \tag{9.30}$$

其中 $X \in \{\mathrm{NS}, \mathrm{R}\}$ 和 $(\mathbf{l},\mathbf{m})$ 是集合中的元素

$$K^X := \left\{ (\mathbf{l}, \mathbf{m}) := ((l_1, m_1), (l_2, m_2), \ldots) \mid l_i \in \{0, \ldots, k_i\},\ m_i \in \mathcal{S}_{l_i}^X,\ \sum_i \left(\frac{m_i}{k_i + 2} - \frac{\epsilon_i}{2} \right) \in \mathbb{Z} \right\} \tag{9.31}$$

谱流作用于 (9.31) 中的每个集合 K^X， $X \in \{\mathrm{NS}, \mathrm{R}\}$，其作用方式为置换

$$\sigma^a(\mathbf{l}, \mathbf{m}) = (\sigma^a(l_1, m_1), \sigma^a(l_2, m_2), \ldots) \ , \tag{9.32}$$

其中 $\sigma(l_i, m_i)$ 定义见式 (9.24)。注意，对于所有 $(\mathbf{l}, \mathbf{m}) \in K^X$， $\sigma^N(\mathbf{l}, \mathbf{m}) = (\mathbf{l}, \mathbf{m})$。我们可以将每个集合 K^X 分解为谱流作用下的轨道：

$$[\mathbf{lm}] := \{(\mathbf{l}, \mathbf{m}), \sigma(\mathbf{l}, \mathbf{m}), \sigma^2(\mathbf{l}, \mathbf{m}), \ldots\} \subset K^X \ . \tag{9.33}$$

接下来要注意的是， K^X 中可能存在两种轨道。长轨道，即一般的轨道 $[\mathbf{lm}]$，包含 N 个不同的元素 $\sigma^a(\mathbf{l},\mathbf{m})$， $a\in\mathbb{Z}_N$；例如，真空轨道 $[(\mathbf{0},\mathbf{0})]$ 总是长轨道。许多 Gepner 模型也包含短轨道 $[\mathbf{lm}],$，满足 $\sigma^{N/2}(\mathbf{l},\mathbf{m})=(\mathbf{l},\mathbf{m})$，因此由 $N/2$ 个不同的元素组成。容易验证，当且仅当对于所有满足 k_i+2 不整除 $N/2$ 的 i， $l_i=k_i/2$ 时，轨道 $[\mathbf{lm}]$ 是短轨道。

下面考虑 $c=6$ 的情形，即 K3 σ模型。 $\mathcal{N}=2$ 个最小模型的张量积的手征代数为

$$\mathcal{M}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}:=\mathcal{M}_{0,0}^{k_1,\mathrm{NS}}\otimes\cdots\otimes\mathcal{M}_{0,0}^{k_r,\mathrm{NS}}\ . \tag{9.34}$$

Gepner 模型的手征超代数 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{M}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ 通过（一单位）谱流算符进行简单流扩张得到的，其由希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{NSNS}}$ 中的全纯场给出，即

$$\mathcal{A}\cong\bigoplus_{a\in\mathbb{Z}_N}\bigotimes_{i=1}^{r}\mathcal{M}_{\sigma^a(0,0)}^{k_i,\mathrm{NS}}=\bigoplus_{a\in\mathbb{Z}_N}\mathcal{M}_{\sigma^a(\mathbf{0},\mathbf{0})}\ , \tag{9.35}$$

其中 $N=lcm\,(k_i+2)$。扩张后的代数 $\mathcal{A}$ 包含 $c=6$ 处的（小） $\mathcal{N}=4$ 超共形代数，而 $\mathcal{M}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$ 仅包含 $\mathcal{N}=2$。

扩张代数 $\mathcal{A}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{XX}$ 中出现的表示，可通过对给定谱流轨道 $[\mathbf{lm}],$ 中所有 $\mathcal{M}_{\mathbf{0},\mathbf{0}}$-表示求和得到，即

$$R_{[\mathbf{lm}]}:=\bigoplus_{a\in\mathbb{Z}_N}\mathcal{M}_{\sigma^a(\mathbf{l},\mathbf{m})}\ . \tag{9.36}$$

如果 $[\mathbf{lm}]$ 是长轨道，那么 $R_{[\mathbf{lm}]}$ 作为 $\mathcal{A}$-表示是不可约的。另一方面，如果 $[\mathbf{lm}]$ 是短轨道，那么 $R_{[\mathbf{lm}]}$ 可分解为两个不可约表示的直和

$$R_{[\mathbf{lm}]}=R_{[\mathbf{lm}]_+}\oplus R_{[\mathbf{lm}]_-}\ ,\qquad [\mathbf{lm}]\ \text{short}. \tag{9.37}$$

这是手征代数的简单流扩张中的一种普遍现象：由简单流对称性的某个非平凡子群（在本例中为 $\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_N$）稳定的不变表示，被称为扩张 [60, 61] 的“不动点”。粗略地说，对于短轨道，可以将 $\sigma^{N/2}$ 解释为作用于 $R_{[\mathbf{lm}]}$ 上的一个对合，而不可约分量 $R_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和 $R_{[\mathbf{lm}]_-}$ 则是相应的特征空间 [62]。 $R_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和 $R_{[\mathbf{lm}]_-}$ 作为较小代数 $\mathcal{M}_{\mathbf{0},\ \mathbf{0}}$ 的表示是同构的（特别是它们具有相同的特征标），但作为 $\mathcal{A}$ 的表示并不等价。就 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 的表示而言，Gepner 模型的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{XX}$ 分解为

$$\mathcal{H}_{XX}=\bigoplus_{\text{long orbits}}R_{[\mathbf{lm}]}\otimes\bar{R}_{[\mathbf{lm}]}\ \oplus\ \bigoplus_{\text{short orbits}}(R_{[\mathbf{lm}]_+}\otimes\bar{R}_{[\mathbf{lm}]_+}\oplus R_{[\mathbf{lm}]_-}\otimes\bar{R}_{[\mathbf{lm}]_-}) \tag{9.38}$$

其中求和遍历集合 K^X、 $X\in\{\mathrm{NS},\ \mathrm{R}\}$ 中的谱流轨道。因此，Gepner 模型是手征代数 $\mathcal{A}$ 的对角模不变量。更一般地，对于同一个代数 $\mathcal{A}$，可能还存在其他模不变量，但本文不予讨论。

$\mathcal{A}$ 的不可约表示的特征标可以很容易地从 $\mathcal{N}=2$ 最小模型的特征标中得到，

$$\chi^{X,\pm}_{R[\mathbf{lm}]}(\tau,z)=\sum_{a=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}\tilde{\chi}^{k^i,X,+}_{\sigma^a(l_i,m_i)}(\tau,z+\frac{\delta_-}{2})\qquad[\mathbf{lm}]\ \text{long}, \tag{9.39}$$

$$\chi^{X,\pm}_{R[\mathbf{lm}]_+}(\tau,z)=\chi^{X,\pm}_{R[\mathbf{lm}]_-}(\tau,z)=\frac{1}{2}\sum_{a=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}\tilde{\chi}^{k^i,X,+}_{\sigma^a(l_i,m_i)}(\tau,z+\frac{\delta_-}{2})\qquad[\mathbf{lm}]\text{ 短},\tag{9.40}$$

其中，如果插入了 $\delta_-=1$ (-1)，则为^F，否则为 $\delta_-=0$。因此，扩展代数 $\mathcal{A}$ 的模 S 矩阵$\mathbf{S}$与 $S^{k_i}_{l_im_i}$的 S矩阵相关。特别地，如果 $[\mathbf{lm}]$ 和 $[\mathbf{l'm'}]$都是长轨道，那么

$$\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}],[\mathbf{l'm'}]}=\prod_{i=1}^{r}S^{k_i}_{l_im_i,l'_im'_i}\ ,\qquad[\mathbf{lm}],[\mathbf{l'm'}]\text{ long},\tag{9.41}$$

此处可以证明，右边的表达式与谱流轨道代表元 $(\mathbf{l}、\mathbf{m})$，$(\mathbf{l'}、\mathbf{m'})\in K^{\mathrm{NS}}\cup K^{\mathrm{R}}$ 的选取无关。当其中一个轨道（例如$[\mathbf{lm}],$）是短轨道，而 $[\mathbf{l'm'}]$是长轨道时，也有一个简单的公式

$$\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_+,[\mathbf{l'm'}]}=\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_-,[\mathbf{l'm'}]}=\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}S^{k_i}_{l_im_i,l'_im'_i}\qquad[\mathbf{lm}]\text{ short},\quad[\mathbf{l'm'}]\text{ long},\tag{9.42}$$

以及 $\mathbf{S}_{[\mathbf{l'm'}],\ [\mathbf{lm}]_\pm}=\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_\pm,\ [\mathbf{l'm'}]}$。另一方面，当 $[\mathbf{lm}]$ 和 $[\mathbf{l'm'}]$ 均为短轨道时，相应的 S 矩阵元素无法直接用最小模型的 S 矩阵元素表示。特征标的模变换不足以唯一确定 S 矩阵，这是因为表示 $R_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和$R_{[\mathbf{lm}]_-}$ 具有相同的特征标。矩阵$\mathbf{S}$ 可以根据 $\mathcal{A}$-表示的模张量范畴明确定义，而不仅仅依据特征标。确定简单流扩张的精确 S 矩阵这一问题称为不动点消解。当短轨道的稳定子 $\langle\sigma^{N/2}\rangle\cong\mathbb{Z}_2$ 的阶为 2 时，已有一些一般性结果（例如参见 [63]）；在当前情形下，这些结果可写为

$$\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_+,[\mathbf{l'm'}]_+}=\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_-,[\mathbf{l'm'}]_-}\ ,\qquad\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_+,[\mathbf{l'm'}]_-}=\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_-,[\mathbf{l'm'}]_+}\tag{9.43}$$

and

$$\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_+,[\mathbf{l'm'}]_\pm}+\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_-,[\mathbf{l'm'}]_\pm}=\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}S^{k_i}_{l_im_i,l'_im'_i}\ ,\qquad[\mathbf{lm}],[\mathbf{l'm'}]\text{ short}.\tag{9.44}$$

本文中，我们不会尝试确定单项 $\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_+,[\mathbf{l'm'}]_\pm}$ 和$\mathbf{S}_{[\mathbf{lm}]_-,[\mathbf{l'm'}]_\pm}$。我们感兴趣的是确定保留完整$^-$扩展代数 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$的 Gepner 模型的拓扑缺陷线。由于该共形场论是对角模不变量，简单拓扑缺陷线就是 Verlinde 线，与 $\mathcal{A}$ 的不可约NS表示一一对应（Ramond 扇区中的表示对应于作用在 $\mathcal{A}$ 上的费米子数缺陷）。这意味着对于每个长轨道 $[\mathbf{lm}]\subset K^{\mathrm{NS}}$，都有一条简单拓扑缺陷线

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]}:=\mathcal{L}^{k_1}_{l_1,m_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}^{k_r}_{l_r,m_r}\qquad[\mathbf{lm}]\subset K^{\mathrm{NS}}\text{ long},\tag{9.45}$$

$^-$它通过所有（长轨道或短轨道）NSNS 表示 $R_{[\mathbf{l'm'}]}\otimes R_{[\mathbf{l'm'}]}$ 上的作用方式为

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]}|\mathbf{l'},\mathbf{m'};\mathbf{l'},\mathbf{m'}\rangle_{\mathrm{NSNS}}=\prod_{i=1}^{r}\lambda^{k_i}_{l_i,m_i;l'_i,m'_i}|\mathbf{l'},\mathbf{m'};\mathbf{l'},\mathbf{m'}\rangle_{\mathrm{NSNS}}\ ,\tag{9.46}$$

其中 $\lambda^{k_i}_{l_im_i;l'_im'_i}=\underbrace{S^{k_i}_{l'_im'_i}{}^{l_im_i}_{;}S^{k_i}_{l'_im'_i\ 00}}_{;}$如式（9.16）所示。另一方面，对于每个短轨道 $[\mathbf{lm}]\subset K^{\mathrm{NS}}$，都有两个不同的简单缺陷

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+},\qquad\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}\ ,\qquad[\mathbf{lm}]\subset K^{\mathrm{NS}}\text{ short}.\tag{9.47}$$

¯这两个缺陷对长轨道表示 $R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']} \otimes R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']}$ 的作用方式相同，即

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}|\mathbf{l}',\mathbf{m}';\mathbf{l}',\mathbf{m}'\rangle_{\rm NSNS} = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{l_i,m_i;l_i',m_i'}^{k_i}|\mathbf{l}',\mathbf{m}';\mathbf{l}',\mathbf{m}'\rangle_{\rm NSNS}\ , \qquad [\mathbf{l}'\mathbf{m}']\ \text{long}. \tag{9.48}$$

然而， $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}$ 对短轨道表示 $R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']_\pm} \otimes_- R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']_\pm}$的作用方式不同。为了确定精确的特征值，需要解析不动点并确定精确的 S 矩阵。然而，对于上述恒等式，可以证明这两个缺陷的叠加为

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+} + \mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-} = \mathcal{L}_{l_1,m_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_{l_r,m_r}^{k_r} \qquad [\mathbf{lm}] \subset K^{\rm NS}\ \text{short}, \tag{9.49}$$

¯这意味着，在每个表示 $R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']_\pm} \otimes R_{[\mathbf{l}'\mathbf{m}']_\pm}$ 上，作用为

$$(\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+} + \mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-})|\mathbf{l}',\mathbf{m}';\mathbf{l}',\mathbf{m}'\rangle_{\rm NSNS} = \prod_{i=1}^{r}\lambda_{l_i,m_i;l_i',m_i'}^{k_i}|\mathbf{l}',\mathbf{m}';\mathbf{l}',\mathbf{m}'\rangle_{\rm NSNS}\ . \tag{9.50}$$

量子维数为

$$\langle\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]}\rangle = \prod_{i=1}^{r}\lambda_{l_i,m_i;00}^{k_i} \qquad \text{long orbit}\ , \tag{9.51}$$

$$\langle\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}\rangle = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{l_i,m_i;00}^{k_i} \qquad \text{short orbit}\ . \tag{9.52}$$

对 RR 表示的作用与此类似，但存在符号不确定性，这是因为可以将缺陷与一个在 NSNS 扇区上作用平凡、而在 RR 扇区上作用为 -1的对称性相乘（见式（9.18））。

我们尤其希望理解这些缺陷对四个 RR 基态的作用，这些基态是左、右移动半单位谱流的生成元。这些场¯ ¯包含在 $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ 表示 $R_{[(0,-1)^r]} \otimes R_{[(0,-1)^r]}$中，其中

$$R_{[(0,-1)^r]} := \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}_N}\bigotimes_{i=1}^{r}\mathcal{M}^{k_i,\rm R}_{\sigma^a(0,-1)}\ . \tag{9.53}$$

轨道 $[(0,-1)^r]$ 总是长轨道，因此我们可以轻松计算每条作用于 $R_{[(0,-1)^r]}\otimes\bar{R}_{[(0,-1)^r]}$上的拓扑缺陷线 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}$ 的特征值。利用 $S^k_{lm,0,-1} = S^k_{lm,00}e^{-\pi i\frac{m}{k+2}}$，我们得出，¯任意 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}$（无论是长轨道还是短轨道）在 $R_{[(0,-1)^r]}\otimes R_{[(0,-1)^r]}$的初级态上的作用为

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}|(0,-1)^r;(0,-1)^r\rangle_{\rm RR} = \pm e^{-\pi i\sum_{i=1}^r\frac{m_i}{k_i+2}}\langle\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}\rangle|(0,-1)^r;(0,-1)^r\rangle_{\rm RR}\ . \tag{9.54}$$

注意， $e^{-\pi i\sum_{i=1}^r\frac{m_i}{k_i+2}}$ 是一个符号，因为 $\sum_{i=1}^r\frac{m_i}{k_i+2}$ 是整数。因此，利用可以将任意缺陷与在 RR 扇区上以 -1 作用的对称性相乘这一点，总能选择任意缺陷 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}$，使其保留谱流算符，即其作用为

$$\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}|(0,-1)^r;(0,-1)^r\rangle_{\rm RR} = \langle\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}\rangle|(0,-1)^r;(0,-1)^r\rangle_{\rm RR}\ . \tag{9.55}$$

注意，如果任意两个缺陷都保持半单位谱流算符，那么它们的融合也具有相同性质。由此我们得出，TDL $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_\pm}$ 生成了一个保持 $\mathcal{N}=(4,4)$超共形代数和谱流的缺陷范畴。我们强调，这些

并非具有这些性质的最一般缺陷；特别是，可能存在保持 $\mathcal{N}=(4,4)$但不保持 $\mathcal{A}\times\bar{\mathcal{A}}$的 TDL。一些例子见 [17],，包括作用于（1）^{6} 或（2）^{4} Gepner 模型中的可逆对称性，它们通过置换各种$\mathcal{N}=2$ 因子发挥作用。

最后，我们来考察与这些缺陷相关的缠绕配分函数和缠绕亏格。考虑缺陷 $\mathcal{L}\equiv\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]}$ for $[\mathbf{lm}]$，它对应一条长轨道。相应的缠绕轨形配分函数为

$$Z_{XX}^{(k_1)\dots(k_r),\mathcal{L},\pm}(\tau,z,\bar{\tau},\bar{z}):=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{XX}^{(k_1)\dots(k_r)}}\mathcal{L}(\pm1)^F q^{L_0-c/24}\bar{q}^{\bar{L}_0-c/24}y^{J_0}\bar{y}^{\bar{J}_0} \tag{9.56}$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{a,b=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{r}\sum_{l_i=0}^{k_i}\sum_{m_i\in S_{l_i}^X}\lambda_{s_it_i;l_im_i}^{k_i}e^{2\pi ib(\frac{m_i}{k_i+2}-\frac{\epsilon_i}{2})}\tilde{\chi}_{l_i,m_i}^{X,+}(\tau,z+\tfrac{\delta_-}{2})\tilde{\chi}_{\sigma^a(l_i,m_i)}^{X,+}(\bar{\tau},\bar{z}+\tfrac{\delta_-}{2})$$

其中，当插入 $(-1)^{F+F}$ 时取 $\delta_-=1$，否则取 $\delta_-=0$。如上所述，Ramond 扇区中的整体符号经过选择，使半单位谱流算符保持不变。对于短轨道，尽管我们尚未确定两个缺陷 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}$ 在表示 $R_{[\mathbf{l'm'}]_\pm}\otimes R_{[\mathbf{l'm'}]_\pm}$ 上的确切特征值，但仍可证明它们的缠绕配分函数相同，且由下式给出

$$Z^{(k_1)\dots(k_r),\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+}}(\tau,z)=Z^{(k_1)\dots(k_r),\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}}(\tau,z)=\frac{1}{2}Z^{(k_1)\dots(k_r),\mathcal{L}}(\tau,z)\ , \tag{9.57}$$

其中 $Z^{(k_1)\dots(k_r)\mathcal{L}}(\tau,z)$ 由式（9.56）给出，其中

$$\mathcal{L}:=\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+}+\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}\ . \tag{9.58}$$

原因在于，每对表示 $R_{[\mathbf{l'm'}]_+}\otimes R_{[\mathbf{l'm'}]_+}$ 和 $R_{[\mathbf{l'm'}]_-}\otimes R_{[\mathbf{l'm'}]_-}$ 具有相同的特征标，并且在谱中的重数均为 1。因此，缠绕配分函数仅取决于 $R_{[\mathbf{l'm'}]_+}\otimes R_{[\mathbf{l'm'}]_+}$ 和 $R_{[\mathbf{l'm'}]_-}\otimes\bar{R}_{[\mathbf{l'm'}]_-}$ 上特征值之和；根据式（9.44），对于 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_+}$ 和 $\mathcal{L}_{[\mathbf{lm}]_-}$，该和均为 $\frac{1}{2}\prod_{i=1}^r\lambda_{l_i,m_i;l_i',m_i'}^{k_i}$。

9.3 Gepner 模型中的拓扑缺陷线示例

我们的首要目标是构造包含斐波那契融合范畴的 K3 非线性σ模型，并进一步将缺陷缠绕椭圆亏格与在 $V^{f\natural}$ §8.4 中构造的斐波那契扭曲亏格进行比较。我们将利用这样一个事实：带有 $k=3$ 的 $\mathcal{N}=2$ 最小模型包含一个由 Verlinde 线 $\mathcal{L}_{20}^3$ 生成的斐波那契融合范畴。因此，如果我们能构造一个以 $k=3$ 最小模型为其中一个因子的 K3 Gepner 模型，就可以将 $\mathcal{L}_{20}^3$ 与其他所有因子的恒等线张量相乘，在该理论中构造形式如 (9.45) 的拓扑缺陷线，而这条拓扑缺陷线将在 Gepner 模型中生成一个斐波那契融合范畴。

K3 [64]，有 16 种 A 型 Gepner 构造，其中只有两种包含 $k=3$ 最小模型作为组成部分：$(3)^2(8)$ Gepner 模型和 (2)(3)(18) Gepner 模型。在 $(3)^2(8)$ 模型中，我们将定义非可逆拓扑缺陷线

$$W^{(3)^2(8)}:=\mathcal{L}_{20}^3\otimes\mathcal{L}_{00}^3\otimes\mathcal{L}_{00}^8, \tag{9.59}$$

它是一条量子维数为 ζ 的斐波那契缺陷线。该缺陷对应于谱流轨道 $[(2,0),(0,0),(0,0)]\subset K^{\mathrm{NS}}$，这是一个长轨道，因为它包含 $N=$

$lcm(5,\ 5,\ 10) = 10$ 个不同元素。该模型中的短轨道为 $[(l_1,\ m_1),\ (l_2,\ m_2),\ (l_3,\ m_3)]$，其中 $l_3 = k_3/2 = 4$。请注意，$\mathcal{L}_{00}^k$ 始终表示第 k 个最小模型中的恒等线。其次，在 (2)(3)(18) 模型中，我们定义非可逆拓扑缺陷线

$$W^{(2)(3)(18)} := \mathcal{L}_{00}^2 \otimes \mathcal{L}_{20}^3 \otimes \mathcal{L}_{00}^{18}, \tag{9.60}$$

它也是量子维数为 ζ 的斐波那契缺陷线。同样，轨道 $[(0,0),(2,0),(0,0)] \subset K^{\mathrm{NS}}$ 很长，因为它包含 $N = lcm(4,5,20) = 20$ 个不同元素。请注意，在这两种情况下，对于张量积中出现的每条 Verlinde 线，(9.23) 均成立。因此，$W_{(3)^2(8)}$ 和 $W^{(2)(3)(18)}$ 在相应的 Gepner 模型中都保持 $(4,4)$ 超共形代数不变。

最后，我们使用公式 (9.56) 计算各个情形下的扭曲函数。在这两种情况下，我们计算

$$\phi^W(\tau,z) = \frac{1}{2}\phi(\tau,z) + \sqrt{5}\frac{\theta_1^2(\tau,z)}{\eta^6(\tau)} f(\tau), \tag{9.61}$$

其中 $W = W_{(3)^2(8)}$ 或 $W = W^{(2)(3)(18)}$，而 $\phi(\tau,z)$ 等于 K3 的椭圆亏格。此公式准确复现了方程 (8.80) 中的斐波那契扭曲亏格 $\phi^W(V^{f\natural},\tau,z)$，从而为我们的猜想提供了进一步支持。

作为另一组示例，请注意，在 $k=4$ 最小模型中，缺陷 $\mathcal{L}_{00}^4$，$\mathcal{L}_{20}^4$ 和 $\mathcal{L}_{40}^4$ 生成一个 $Rep(S_3)$，其融合规则为

$$(\mathcal{L}_{20}^4)^2 = \mathcal{L}_{00}^4 + \mathcal{L}_{20}^4 + \mathcal{L}_{40}^4,\quad (\mathcal{L}_{40}^4)^2 = \mathcal{L}_{00}^4.$$

现在考虑类型为 X 的 Gepner 模型，其中

$$X \in \{(4)^3, (1)^2(4)^2, (2)(4)(10)\}.$$

令 $\mathcal{L}_\rho^X := \mathcal{L}_{40}^4 \otimes \prod_{i\neq 1}\mathcal{L}_{00}^{k_i}$ 和 $\mathcal{X}^X := \mathcal{L}_{20}^4 \otimes \prod_{i\neq 1}\mathcal{L}_{00}^{k_i}$，按照我们的约定，重新排列最小模型因子的顺序，使得 $k_1 = 4$。由此可知，如果这些线都属于不同的谱流长轨道，那么它们连同恒等线 $\mathcal{I} := \prod_i \mathcal{L}_{00}^{k_i}$ 构成一个 $Rep(S_3)$ 融合范畴。接下来可以轻易算得

$$\phi^{\mathcal{L}_\rho^X} = \phi^{1^8 2^8},\quad \phi^{\mathcal{X}^X} = \phi^{1^8 2^8} + \phi^{1^6 3^6},\qquad X \in \{(4)^3, (1)^2(4)^2, (2)(4)(10)\} \tag{9.62}$$

这与我们上一篇文章 [1] 中第 5.2 节所讨论的 $V^{f\natural}$ 中的 $Rep(S_3)$ 范畴的结果完全一致。

另外两个包含 $k=4$ 因子的 Gepner 模型中也存在类似的缺陷，即 $(1)^4(4)$ 和 $(1)(2)^2(4)$。然而，对于 $X = (1)^4(4)$，我们首先注意到 $\mathcal{L}_\rho^X$ 与真空 $\sigma^3((4,\ 0),\ (0,\ 0)^4) = (0,\ 0)^5$, 位于同一谱流轨道上，因此 $\mathcal{L}_\rho^X$ 只是恒等缺陷。另一方面，与 $\mathcal{X}^X$ 相关联的轨道 $[(2,\ 0),\ (0,\ 0)^4]$ 在该模型中是短轨道，因此 $\mathcal{X}^X$ 是两个简单可逆缺陷 $\mathcal{L}_{[(2,0),(0,0)^4]_+}$ 和 $\mathcal{L}_{[(2,0),(0,0)^4]_-}$ 的叠加，其缠绕亏格为

$$\phi^{\mathcal{L}_{[(2,0),(0,0)^4]_+}} = \phi^{\mathcal{L}_{[(2,0),(0,0)^4]_-}} = \phi^{1^6 3^6}. \tag{9.63}$$

这表明这两个可逆缺陷的阶为 3。因此，在这种情况下，存在于最小模型张量积中的 $Rep(S_3)$ 范畴在轨形化后并未保留下来。

最后，对于 $X=(1)(2)^2(4)$ Gepner 模型，我们发现 $\phi^{\mathcal{L}_\rho^X}=\phi^{2^{16}/1^8}$，而 $\phi^{\mathcal{X}^X}$ 与我们在 $V^{f\natural}$ 中计算的任何缠绕亏格都不匹配。若能确定一个 $Rep(S_3)$ 缺陷范畴来重现 $V^{f\natural}$ 中的这些结果，将会很有意思。

致谢。R.A. 感谢 ERC Starting Grant QGuide- 101042568- StG 2021、德国研究联合会通过德国卓越战略资助的 EXC 2121 Quantum Universe 390833306，以及德国研究联合会通过合作研究中心 1624“高阶结构、模空间与可积性”提供的支持。S.M.H. 获得美国能源部 DE-SC0024787 项目资助。R.V. 感谢 CARIPARO 基金会资助（项目编号 68079）和 PRIN 项目（项目编号 2022ABP- BEY）提供的支持。

Leech 格的一组基及若干格自同态

Leech 格 $\Lambda\subset\mathbb{R}^{24}$ 由下列矩阵的各行生成： [28]

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}
8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&2&2&2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&2&2&0&0&0&0&2&2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&0&2&2&2&2&0&0&2&2&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
4&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&0&2&2&0&0&0&0&0&0&0\\
2&0&0&2&2&2&0&0&2&0&2&0&0&0&0&0&2&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\
2&2&0&0&2&0&2&0&2&0&0&2&0&0&0&0&2&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&2&0&0&0&2&0&0&0&2&0&0&0&2&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&2&2&0&0&2&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0&2&0\\
-3&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

A.1 $\mathbb{Z}_2$ 对偶缺陷的显式结果

设 g_2 是 Co_0 中一个框架形状为 $1^8 2^8$ 的元素。在 Leech 格基 (A.1) 中，g_2 在前 16 行上作用为 $+1$，在最后 8 行上作用为 -1。因此，g_2-不变子格 $\Lambda_{16}\subset\Lambda$ 由 (A.1) 的前 16 行生成；这就是第 4 节中讨论的 Barnes-Wall 格。在同一基下，实现第 4 节中同构 (4.21) 的正交矩阵 $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}^{(16)}$ 表示为以下分块对角矩阵：

$$O_{\mathcal{N}}^{(16)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1
\end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

A.2 $\mathbb{Z}_3$ 对偶缺陷的明确结果

框架形状为 $1^6 3^6$, 的元素 $g_3 \in Co_0$ 在式 (A.1) 的基下写成矩阵如下（这里及下文的矩阵中, 我们用记号 $\bar{n}$ 表示 $-n \in \mathbb{Z}$）：

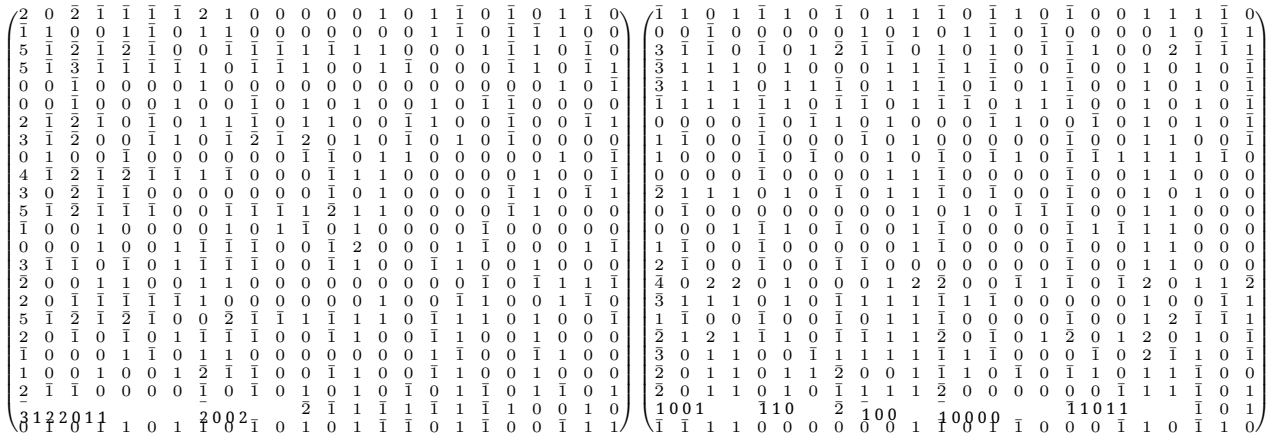
$$g_3 = \begin{pmatrix}
\bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 \\
5 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \bar{1} & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 \\
6 & \bar{2} & \bar{3} & \bar{2} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{2} & \bar{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
\bar{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} \\
0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
4 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 2 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 \\
4 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
2 & 0 & 0 & 0 & & & \bar{1} & 0 & 0 & & \bar{1} & 0 & 0 & & \bar{1} & \bar{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{2} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 2 \\
3 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

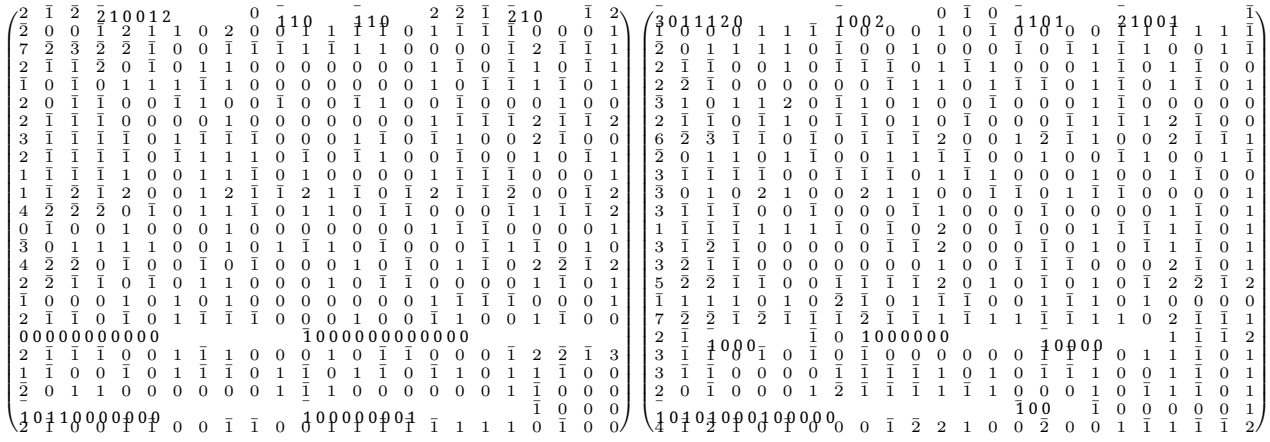
其“伴侣元” $g_3' \in Co_0$ （见第6节）为:

$$g_3' = \begin{pmatrix}
1 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 \\
2 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 \\
\bar{5} & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 \\
\bar{5} & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \bar{1}01 & \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} \\
\bar{4} & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & \bar{2} & \bar{2} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1000 & & & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\
1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 11000 & & & & & \bar{1} \\
1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 \\
2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
000000 & & & & & & & \bar{1}101000 & & & & & & & & & & & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
2 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & & 1 & \bar{1} & 0 & 0 \\
0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
2 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 \\
6 & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{2} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{0} & 0 & 3 & \bar{2} & \bar{1} & 1 \\
3000 & & & & 110 & & & 11110 & & & & & 1 & \bar{1} & & & 1 & \bar{1} & \bar{1}00000 & & & & & \\
2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1}000100011 & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 1000 & & & 110 & & & \bar{1} & 1 \\
6 & \bar{2} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & 0 \\
2 & 0 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 2 & 0 & \bar{2} & 1
\end{pmatrix}$$

元素 g_3 in Co_0 的正规化子 $N_{Co_0}(\langle g_3 \rangle)$ 的生成元为:

$$\begin{pmatrix}
\bar{5} & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{2} & 0 & 1 & 2 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{2} \\
\bar{2} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{2} \\
\bar{5} & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \bar{1} & 1 & 2 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \\
\bar{3} & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 2 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{2} \\
\bar{3} & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} \\
2 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} \\
\bar{3} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{2} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\
\bar{6} & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 2 & \bar{2} & 1 & 2 & \bar{2} & \bar{2} \\
\bar{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} \\
\bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{2} & 2 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \\
\bar{3} & 1 & 1 & \bar{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 \\
\bar{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} \\
\bar{5} & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & \bar{1} & 2 & 2 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{2} & 2 & 1 & \bar{1} \\
\bar{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 2 & 2 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{3} & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & \bar{1} & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{2} & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{2} & 1 & 1 & 0 \\
\bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\
2 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 2 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{2} & 0 & \bar{1} & 122 & & 2 & \bar{3} & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & 1 & \bar{2} & \bar{1} & 3 \\
\bar{2} & 0 & 0 & 112 & & 1 & \bar{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 \\
\bar{3} & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & \bar{2} & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 \\
\bar{3} & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \bar{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 \\
3 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & \bar{2} & 2 & \bar{2} & \bar{2} & 3 \\
0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 2 \\
0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\
5 & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{2} & \bar{1} & 2 \\
1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & \bar{2} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 2 \\
\bar{2} & 0 & \bar{1} & 1 & 2 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 \\
3 & \bar{1} & \bar{2} & 0 & 0 & 1 & 2 & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 2 & 0 & \bar{2} & 2 & \bar{2} & \bar{1} & 2 \\
8 & \bar{2} & \bar{3} & 2 & \bar{2} & 0 & 0 & 2 & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 & 1 & 4 & \bar{2} & \bar{2} & 2 \\
3 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{2} & \bar{1} & 1 \\
5 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & 0 & 0 & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 & \bar{2} & 2 \\
3 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\
1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 \\
3 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \bar{1} & 1 & 0 \\
2 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} \\
2 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{2} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 \\
0000010000 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \bar{2}
\end{pmatrix}$$





B 模形式与特征标公式

在本附录中，我们汇总了模形式以及仿射代数和余集的特征标的一些有用公式。这些公式在本文正文的各处均有使用。

Dedekind η 函数 $\eta(\tau)$ 和雅可比 theta 函数 $\theta_i(\tau,z)$ 定义如下:

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\ , \tag{B.1}$$

$$\theta_1(\tau,z)=i\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}}y^{n+\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{8}}(iy^{\frac{1}{2}}-iy^{-\frac{1}{2}})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n y)(1-q^n y^{-1})(1-q^n) \tag{B.2}$$

$$\theta_2(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}}y^{n+\frac{1}{2}}=q^{\frac{1}{8}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n y)(1+q^n y^{-1})(1-q^n) \tag{B.3}$$

$$\theta_3(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{\frac{n^2}{2}}y^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}}y)(1+q^{n-\frac{1}{2}}y^{-1})(1-q^n) \tag{B.4}$$

$$\theta_4(\tau,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}y^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}}y)(1-q^{n-\frac{1}{2}}y^{-1})(1-q^n)\ , \tag{B.5}$$

并令 $\theta_i(\tau):=\theta_i(\tau,\ 0)$。 η和 θ_i是权为 $1/2$的模形式，满足

$$\eta(\tau+1)=e^{\frac{2\pi i}{24}}\eta(\tau)\qquad\qquad \eta(-1/\tau)=\sqrt{-i\tau}\eta(\tau) \tag{B.6}$$

$$\theta_2(\tau+1) = e^{\frac{2\pi i}{8}}\theta_2(\tau) \qquad \theta_2(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\theta_4(\tau) \tag{B.7}$$

$$\theta_3(\tau+1) = \theta_4(\tau) \qquad \theta_3(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\theta_3(\tau) \tag{B.8}$$

$$\theta_4(\tau+1) = \theta_3(\tau) \qquad \theta_4(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\theta_2(\tau). \tag{B.9}$$

$\widehat{su}(2)_k$ 代数的特征标由下式给出（见 [65], 第14.4.2节）

$$\chi_l^k(\tau,z) = \frac{\theta_{l+1,k+2}(\tau,z) - \theta_{-l-1,k+2}(\tau,z)}{\theta_{1,2}(\tau,z) - \theta_{-1,2}(\tau,z)} \tag{B.10}$$

其中，$l \in \{0,\dots,k\}$ 和 su(2) theta函数 $\theta_{m,\ k}$ 由下式给出

$$\theta_{m,k}(\tau,z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} q^{k(j+\frac{m}{2k})^2} y^{k(j+\frac{m}{2k})}. \tag{B.11}$$

极限 $z\to 0$ 的一个有用公式是

$$\chi_l^k(\tau) := \chi_l^k(\tau,0) = \frac{q^{\frac{(l+1)^2}{4(k+2)}}}{\eta(\tau)^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(l+1+2n(k+2))q^{n(l+1)+n^2(k+2)}\ . \tag{B.12}$$

$\widehat{so}(n)_1$ 的特征标在 n 为偶数时是

$$\mathrm{ch}_0^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\eta(\tau)^{n/2}}(\theta_3^{n/2}(\tau)+\theta_4^{n/2}(\tau)) \tag{B.13}$$

$$\mathrm{ch}_v^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\eta(\tau)^{n/2}}(\theta_3^{n/2}(\tau)-\theta_4^{n/2}(\tau)) \tag{B.14}$$

$$\mathrm{ch}_s^{(n)}(\tau) = \mathrm{ch}_c^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2\eta(\tau)^{n/2}}\theta_2^{n/2}(\tau).\ . \tag{B.15}$$

$\mathcal{L}$缠绕亏格 $\phi^{\mathcal{L}}(V^{f\natural},\ \tau,\ z)$ 对于保留四平面 $\Pi^{\natural}\subset{}^{\mathbb{R}}V_{tw}^{f\natural}(1/2)$ 的缺陷 $\mathcal{L}$，通常用 $\widehat{so}(n)_1$“带‘味’”的特征标 $\mathrm{ch}_\rho^{(n)}(\tau,\ z)$ 表示：$=\mathrm{Tr}_{\rho^{(n)}}\, y^{J_0^3}q^{L_0-1/3}$ 其中$\rho\in\{0,v,c,s\}$，而 J_0^3 是某个代数 $\widehat{su}(2)_1\subset\widehat{so}(4)_1\subset\widehat{so}(n)_1$中一个流的零模。这些特征标为

$$\mathrm{ch}_0^{(n)}(\tau,z) = \frac{1}{2}\frac{(\theta_3^2(\tau,z)\theta_3^{n/2-2}(\tau)+\theta_4^2(\tau,z)\theta_4^{n/2-2}(\tau))}{\eta^{n/2}(\tau)} \tag{B.16}$$

$$\mathrm{ch}_v^{(n)}(\tau,z) = \frac{1}{2}\frac{(\theta_3^2(\tau,z)\theta_3^{n/2-2}(\tau)-\theta_4^2(\tau,z)\theta_4^{n/2-2}(\tau))}{\eta^{n/2}(\tau)} \tag{B.17}$$

$$\mathrm{ch}_s^{(n)}(\tau,z) = \mathrm{ch}_c^{(n)}(\tau,z) = \frac{1}{2}\frac{\theta_2^2(\tau,z)\theta_2^{n/2-2}(\tau)}{\eta^{n/2}(\tau)}. \tag{B.18}$$

在第8节中，我们使用 $\widehat{sp}(6)_1$ 的表示的特征标公式。可以通过反转关系，从 $\widehat{so}(12)_1$ 和 $\widehat{su}(2)_3$ 的特征标得到这些公式

$$\mathrm{ch}_0^{(12)} = \chi_0^{sp}\chi_0^{su(2)_3} + \chi_2^{sp}\chi_2^{su(2)_3} \tag{B.19}$$

$$\mathrm{ch}_v^{(12)} = \chi_1^{sp}\chi_1^{su(2)_3} + \chi_3^{sp}\chi_3^{su(2)_3} \tag{B.20}$$

$$\mathrm{ch}_s^{(12)} = \chi_3^{sp}\chi_0^{su(2)_3} + \chi_1^{sp}\chi_2^{su(2)_3} \tag{B.21}$$

$$\mathrm{ch}_c^{(12)} = \chi_2^{sp}\chi_1^{su(2)_3} + \chi_0^{sp}\chi_3^{su(2)_3} \tag{B.22}$$

以获得

$$\chi_0^{sp}(\tau) = \frac{\mathrm{ch}_0^{(12)}\chi_1^{su(2)_3} - \mathrm{ch}_c^{(12)}\chi_2^{su(2)_3}}{\chi_0^{su(2)_3}\chi_1^{su(2)_3} - \chi_3^{su(2)_3}\chi_2^{su(2)_3}} \tag{B.23}$$

$$\chi_1^{sp}(\tau)=\frac{\mathrm{ch}_v^{(12)}\,\chi_0^{su(2)_3}-\mathrm{ch}_s^{(12)}\,\chi_3^{su(2)_3}}{\chi_0^{su(2)_3}\chi_1^{su(2)_3}-\chi_3^{su(2)_3}\chi_2^{su(2)_3}} \tag{B.24}$$

$$\chi_2^{sp}(\tau)=\frac{\mathrm{ch}_c^{(12)}\,\chi_0^{su(2)_3}-\mathrm{ch}_0^{(12)}\,\chi_3^{su(2)_3}}{\chi_0^{su(2)_3}\chi_1^{su(2)_3}-\chi_3^{su(2)_3}\chi_2^{su(2)_3}} \tag{B.25}$$

$$\chi_3^{sp}(\tau)=\frac{\mathrm{ch}_s^{(12)}\,\chi_1^{su(2)_3}-\mathrm{ch}_v^{(12)}\,\chi_2^{su(2)_3}}{\chi_0^{su(2)_3}\chi_1^{su(2)_3}-\chi_3^{su(2)_3}\chi_2^{su(2)_3}}\ . \tag{B.26}$$

在第 9 节中，我们需要 $\mathcal{N}=2$ 最小模型的特征标。已知 $c=\frac{3k}{k+2}$ 处的 $\mathcal{N}=2$ 超共形代数的酉表示，可分解为 $\widehat{su}(2)_k\hat{u}(1)_2\,\hat{u}(1)^{k+2}$ 的表示。玻色余集的~~(l,m,ϵ)~~ 表示的特征标为

$$\chi^{\epsilon}_{l,m}(\tau,z):=\mathrm{Tr}_{M^{\epsilon}_{l,m}}q^{L_0-c/24}y^{J_0}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c^{j}_{m+4j-\epsilon}(\tau)q^{\frac{k+2}{2k}(\frac{m}{k+2}-\frac{\epsilon}{2}+2j)^2}y^{\frac{m}{k+2}-\frac{\epsilon}{2}+2j}, \tag{B.27}$$

其中，弦函数 $c^l_m(\tau)$ 可由以下关系确定

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}c^l_m(\tau)\theta_{m,k}(\tau,z)=\chi_l^{su(2)_k}(\tau,z) \tag{B.28}$$

其中，$\chi_l^{su(2)_k}(\tau,z)$ 如（B.10）所示，$\theta_{m,k}$ 如（B.11）所示。

参考文献

[1] R. Angius、S. Giaccari、S. M. Harrison 和 R. Volpato，“从 Conway 超共形场论到 K3 σ模型的不可逆缺陷。第一部分：一般结果”，*JHEP*，第 10 卷，046 页，2025年。 DOI: 10 . 1007 / JHEP10(2025) 046 arXiv: 2504 . 18619[hep-th].[2] D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett，“广义全局对称性”，*JHEP*，第 02 卷，2015 年。 DOI: 10.1007/JHEP02(2015)172 arXiv: 1412.5148 [hep-th].[3] E. Verlinde，“二维共形场论中的融合规则与模变换”，《核物理*B*》，第 300 卷，第 360–376 页，1988年。 DOI: 10 . 1016 / 0550 - 3213(88)90603-7[4] V. Petkova 和 J.-B. Zuber，“广义扭曲配分函数”，《物理快报*B*》，第 504 卷，第 157–164 页，2001年。 DOI: 10.1016/S0370-2693(01)00276-3 arXiv: hep-th/0011021 [hep-th].[5] J. Froehlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，“共形缺陷中的 Kramers-Wannier对偶”，《物理评论快报》，第 93 卷，070601，2004年。 DOI: 10.1103/ PhysRevLett.93.070601 arXiv: cond-mat/0404051 [cond-mat].[6] J. Froehlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. C. Schweigert，“有理共形场论中的对偶与缺陷”，《核物理*B*》，第 763 卷，第 354–430 页，2007年。DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.11.017 arXiv: hep-th/0607247 [hep-th]。

[7] J. Froehlich、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，“缺陷线、对偶性与广义轨形”，载于第16届国际数学物理大会，2009年9月。 DOI: 10.1142/9789814304634_0056arXiv: 0909.5013 [math-ph].[8] C.-M. Chang、Y.-H. Lin、S.-H. Shao、Y. Wang 和 X. Yin，“二维中的拓扑缺陷线与重整化群流”，JHEP，第 01 卷，2019年。DOI: 10.1007/JHEP01(2019)026 arXiv: 1802.04445 [hep-th].[9] L. Bhardwaj 和 Y. Tachikawa，“二维中的有限对称性及其规范化”，JHEP，第 03 卷，第 189 页，2018年。 DOI: 10.1007/JHEP03(2018)189 arXiv: 1704.02330 [hep-th].[10] J. Fuchs、M. Gaberdiel、I. Runkel 和 C. Schweigert，“自由玻色子共形场论的拓扑缺陷”，《物理学杂志A》，第 40 卷，11403，2007年。 DOI: 10.1088/1751- 8113/40/37/016 arXiv: 0705.3129 [hep-th].[11] C. Bachas、I. Brunner 和 D. Roggenkamp，“ $O(d,d:Z)$的世界面扩张”，JHEP，第 10 卷，039，2012年。 DOI: 10.1007/JHEP10(2012)039 arXiv: 1205.4647 [hep-th].[12] R. Thorngren 和 Y. Wang，“融合范畴对称性。第二部分：c = 1及以上的范畴性现象”，JHEP，第 07 卷，第 051 页，2024年。 DOI: 10.1007/JHEP07(2024) 051 arXiv: 2106.12577 [hep-th].[13] I. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman，“顶点算子代数与怪兽群”，《纯粹与应用数学》，第 134 卷，1988年。[14] J. F. Duncan，“康威最大散在群的超月光”，《杜克数学杂志》，第 136 卷，第 1 期，第 255–315 页，2007年。[15] J. F. R. Duncan 和 S. Mack-Crane，“康威群的月光模”，SIGMA，第 3 卷，e10，2015年。 DOI: 10.1017/fms.2015.7 arXiv: 1409.3829[math.RT].[16] R. Angius、S. Giaccari 和 R. Volpato，“K3 σ模型中的拓扑缺陷”，JHEP，第 07 卷，第 111 页，2024年。 DOI: 10 . 1007 / JHEP07(2024) 111 arXiv: 2402.08719 [hep-th].[17] M. Gaberdiel、S. Hohenegger 和 R. Volpato，“K3 σ模型的对称性”，《数论物理通讯》，第 6 卷，第 1–50 页，2012年。 DOI: 10.4310/CNTP.2012.v6.n1.a1 arXiv: 1106.4315 [hep-th].[18] J. Duncan 和 S. Mack-Crane，“K3曲面的导出等价与扭曲椭圆属”，《数学科学研究》，第 3 卷，2015年。 DOI: 10 . 1186 / s40687- 015 - 0050-9 arXiv: 1506.06198 [math.RT].[19] M. Cheng、S. Harrison、R. Volpato 和 M. Zimet，“K3弦理论、格与月光”，《数学科学研究》，第 5 卷，第 3 期，2018年。 DOI: 10.1007/s40687- 018-0150-4 arXiv: 1612.04404 [hep-th]。

[20] M. Gaberdiel、A. Taormina、R. Volpato 和 K. Wendland，《具有 $\mathbb{Z}_2^8$ 的 K3 σ模型：$\mathbb{M}_{20}$ 对称性》，JHEP，第 02 卷，022，2014年。 DOI: 10.1007/JHEP02(2014) 022 arXiv：1309.4127 [hep-th].[21] C. Cordova 和 G. Rizi，《卡拉比–丘共形场论中的非可逆对称性》，JHEP，第 01 卷，第 045 页，2025年。 DOI：10.1007/JHEP01(2025)045 arXiv：2312.17308 [hep-th].[22] V. Anagiannis、M. C. N. Cheng、J. Duncan 和 R. Volpato，《顶点算子超代数/σ模型对应：四维环面情形》，PTEP，第 2021 卷，第 8 期，08B102，2021年。 DOI: 10.1093/ptep/ptab095 arXiv：2009.00186[hep-th].[23] R. Volpato，《关于 $\mathcal{N} =$ (4, 4) σ模型在 T^4 上的对称性》，JHEP，第 08 卷，第 094 页，2014年。 DOI: 10.1007/JHEP08(2014)094 arXiv：1403.2410 [hep-th].[24] D. P. S.M. Harrison、N.M. Paquette 和 R. Volpato，《二维弦理论中的 BPS 代数》，Annales Henri Poincare，第 23 卷，第 10 期，第 3667–3752 页，2022年。 DOI: 10.1007/s00023-022-01189-7 arXiv：2107.03507 [hep-th].[25] S. M. Harrison、N. M. Paquette 和 R. Volpato，《具有 Conway 对称性的 Borcherds–Kac–Moody 超代数》，Commun. Math. Phys.，第 370 卷，第 2 期，第 539–590 页，2019年。 DOI：10.1007/s00220- 019- 03518- 0 arXiv：1803.10798[hep-th].[26] M. Craig，《Leech 格的分圆构造》，Mathematika，第 25 卷，第 2 期，第 236–241 页，1978年， ISSN：0025-5793。 DOI：10.1112/S0025579300009475[在线]。可访问：https://doi.org/10.1112/S0025579300009475[27] M. Asaeda 和 U. Haagerup，《具有有限深度的有限深度奇异子因子，其 Jones 指数为 $(5+\sqrt{13})/2$ 和 $(5+\sqrt{17})/2$》，Comm. Math. Phys.，第 202 卷，第 1 期，第 1–63 页，1999年， ISSN：0010-3616,1432-0916。 DOI：10. 1007 / s002200050574 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1007/s002200050574[28] J. Conway 和 N. Sloane，《球堆积、格与群》，Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften，第 290 卷，1999年。[29] J. Conway、R. Curtis、S. Norton、R. Parker 和 R. Wilson，《有限群图谱》，牛津大学出版社，1985年。[30] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》（Mathematical Surveys and Monographs）。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2015年，第 205 卷，第 xvi+343 页， ISBN: 978-1-4704-2024-6。 DOI：10.1090/surv/205[在线]。可访问：https://doi.org/10.1090/surv/205[31] P. Aspinwall，《K3 曲面与弦对偶》，1996年。arXiv：hep-th/9611137[hep-th]。

[32] W. Nahm 和 K. Wendland，《K3 漫游指南：具有中心荷 c = 6 的 N=(4,4) 超共形场论的若干方面》，Commun. Math. Phys.，第 216 卷，第 85–138 页，2001年。arXiv：hep-th/9912067 [hep-th].[33] S. Mukai，《K3 曲面的有限自同构群与马修群》，Inventiones mathematicae，第 94 卷，第 1 期，第 183–221 页，1988年。 DOI：10. 1007/BF01394352 [在线]。可访问：https://doi.org/10.1007/BF01394352[34] T. Eguchi、H. Ooguri 和 Y. Tachikawa，《关于 K3 曲面与马修群 M_{24} 的笔记》，Experimental Mathematics，第 20 卷，第 91–96 页，2011年。 DOI：10.1080/10586458.2011.544585 arXiv：1004.0956 [hep-th].[35] M. C. N. Cheng、J. F. R. Duncan、S. M. Harrison 和 S. Kachru，《等变 K3 不变量》，Commun. Num. Theor. Phys.，第 11 卷，第 41–72 页，2017年。 DOI：10.4310/CNTP.2017.v11.n1.a2 arXiv：1508.02047 [hep-th].[36] D. Tambara 和 S. Yamagami，《具有有限阿贝尔群自对偶融合规则的张量范畴》，J. Algebra，第 209 卷，第 692–707 页，1998年。 DOI：10.1006/jabr.1998.7558[37] J. Albert、J. Kaidi 和 Y.-H. Lin，《超月光的拓扑模化》，PTEP，第 2023 卷，第 3 期，033B06，2023年。 DOI：10 . 1093 /ptep / ptad034 arXiv：2210.14923 [hep-th].[38] D. P. S.M. Harrison、N.M. Paquette 和 R. Volpato，《与 F_{24} 同乐》，JHEP，第 02 卷，第 039 页，2021年。 DOI：10 . 1007 / JHEP02(2021) 039 arXiv：2009 . 14710[hep-th].[39] J. Frame，《Weyl 群 E_8 的特征标》，Computational Problems in Abstract Algebra（会议论文集，牛津，1967），第 111–130 页，1970年。[40] T. Kondo，《Leech 格的自同构群与椭圆模函数》，J. Math. Soc. Japan，第 37.2 卷，第 337–362 页，1985年。[41] D. Persson 和 R. Volpato，《CHL 模型中的 Fricke S 对偶》，JHEP，第 12 卷，第 156 页，2015 年。 DOI：10.1007/JHEP12(2015)156 arXiv：1504.07260 [hep-th].[42] V. G. Kac，《无限维李代数》，第三版。剑桥大学出版社，剑桥，1990年，第 xxii+400 页， ISBN：0-521-37215-1；0-521-46693-8。 DOI：10. 1017 / CBO 9780511626234 [在线]。可访问：https : / / doi . org / 10 . 1017 / CBO9780511626234[43] I. M. Burbano、J. Kulp 和 J. Neuser，《$E_{8,}$ 中的对偶缺陷》，JHEP，第 10 卷，第 186 页，2022年。 DOI：10.1007/JHEP10(2022)187 arXiv：2112.14323 [hep-th]。

[44] J. H. Conway 和 S. P. Norton，《怪兽月光》，伦敦数学会通报，第 11 卷，第 3 期，第 308–339 页，1979 年。 DOI: https ://doi . org/10.1112/blms/11.3.308 预印本：https://londmathsoc.onlinelibrary. wiley.com/doi/pdf/10.1112/blms/11.3.308。 [在线]。链接：https:// londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/blms/11.3.308
[45] M.-L. Lang，《关于 Conway-Norton 提出的问题》，《日本数学会杂志》，第 41 卷，第 2 期，第 263–284 页，1989 年。 DOI: 10.2969/jmsj/04120263 [在线]。链接：https://doi.org/10.2969/jmsj/04120263[46] M. C. N. Cheng 和 J. F. R. Duncan，《最优模拟雅可比 theta 函数》，《Adv. Math.》，第 372 卷，第 107 284 页，2020 年。 DOI: 10 . 1016 / j . aim . 2020 . 107284 arXiv: 1605.04480 [math.NT]。[47] M. C. N. Cheng、J. F. R. Duncan 和 J. A. Harvey，《伞影月光与尼迈尔格》，2014年。arXiv: 1307.5793 [math.RT]。 [在线]。链接：https://arxiv.org/abs/1307.5793[48] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane，《考克斯特–托德格、米切尔群及相关球堆积》，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》，第 93 卷，第 3 期，第 421–440 页，1983年， ISSN: 0305-0041,1469-8064。 DOI: 10.1017/S0305004100060746[在线]。链接：https://doi.org/10.1017/S0305004100060746[49] R. T. Curtis，《关于群 $\cdot O$ 的子群。II. 局部结构》，《J. Algebra》，第 63 卷，第 2 期，第 413–434 页，1980年， ISSN: 0021-8693。 DOI: 10 . 1016 / 0021 - 8693(80) 90081 - 2[在线]。链接：https://doi.org/10.1016/0021-8693(80)90081-2[50] W. Bosma、J. Cannon 和 C. Playoust，《Magma 代数系统。I. 用户语言》，《J. Symbolic Comput.》，第 24 卷，第 3-4 期，第 235–265 页，1997 年，《伦敦，1993 年》的计算代数与数论专题， ISSN: 0747-7171。 DOI: 10.1006/jsco.1996.0125 [在线]。链接：http://dx.doi.org/10.1006/jsco.1996.0125[51] S. Carnahan 和 M. Miyamoto，《不动点顶点算子子代数的正则性》，2016年3月。arXiv: 1603.05645 [math.RT]。[52] R. A. Wilson，《Hall-Janko 群作为四元数反射群的几何》，《Geom. Dedicata》，第 20 卷，第 2 期，第 157–173 页，1986年， ISSN: 0046-5755。DOI: 10.1007/BF00164397 [在线]。链接：https://doi.org/10.1007/BF00164397[53] D. Verstegen，《共形嵌入、秩-能级对偶与例外模不变量》，Commun. Math. Phys.，第 137 卷，第 567–586 页，1991年。 DOI: 10. 1007/BF02100278
[54] GAP——群、算法与编程，4.12.2 版，GAP 团队，2022年。 [在线]。链接：https://www.gap-system.org

[55] N. Benjamin、S. Bintanja、Y.-J. Chen、M. Gutperle、C. Luo 和 D. Rathore，《对称积轨形的广义对称性与形变》，2025年9月。arXiv: 2509.12180 [hep-th]。[56] A. Cappelli、C. Itzykson 和 J. B. Zuber，《极小共形不变理论与 A1(1) 的 A DE 分类》，*Commun. Math. Phys.*，第 113 卷，第 1 页，1987年。 DOI: 10.1007/BF01221394[57] D. Gepner，《紧致化弦理论与超共形模型中的时空超对称性》，《核物理*B*》，第 296 卷，B. Schellekens 编，第 757 页，1988年。 DOI: 10.1016/0550-3213(88)90397-5[58] O. Gray，《关于幺正 N=2极小超共形场论的完整分类》，*Commun. Math. Phys.*，第 312 卷，第 611–654 页，2012年。 DOI: 10.1007/s00220-012-1478-z arXiv: 0812.1318 [hep-th]。[59] T. Kawai、Y. Yamada 和 S.-K. Yang，《椭圆属与 N=2超共形场论》，《核物理*B*》，第 414 卷，第 191–212 页，1994年。 DOI: 10.1016/0550- 3213(94)90428-6 arXiv: hep-th/9306096。[60] A. N. Schellekens 和 S. Yankielowicz，《余集构造中的场识别不动点》，《核物理*B*》，第 334 卷，第 67–102 页，1990年。 DOI: 10.1016/0550-3213(90)90657-Y[61] A. N. Schellekens 和 S. Yankielowicz，《简单流、模不变量与不动点》，*Int. J. Mod. Phys. A*，第 5 卷，第 2903–2952 页，1990年。 DOI: 10.1142/S0217751X90001367[62] J. Fuchs 、 B. Schellekens 和 C. Schweigert，《对角余集理论中场识别不动点的消解》，《核物理*B*》，第 461 卷，第 371–406 页，1996年。 DOI: 10.1016/0550-3213(95)00623-0 arXiv: hep-th/9509105。[63] J. Fuchs、A. N. Schellekens 和 C. Schweigert，《适用于所有简单流扩张的矩阵 S》，《核物理*B*》，第 473 卷，第 323–366 页，1996年。 DOI: 10.1016/0550-3213(96)00247-7 arXiv: hep-th/9601078。[64] D. Gepner，《SU(N) 全纯群流形上的精确可解弦紧致化》，《物理快报*B*》，第 199 卷，第 380–388 页，1987年。 DOI: 10.1016/0370- 2693(87)90938-5[65] P. DiFrancesco 、 P. Mathieu 和 D. Senechal，《共形场论》，*Springer*

-

出版社，第 ISBN 978-0-387-94785-3, 978-1-4612-7475-9 卷，1997年。 DOI: 10.1007/ 978-1-4612-2256-9