刚性模范畴、因子化同调与模不变修正迹

Jorge Becerra 和 Lukas Woike

Université Bourgogne
Europe CNRS 勃艮第数学研
究所（*UMR 5584*）
F-21000 第戎 法国

arXiv:2512.19669v1 [math.QA] 22 Dec 2025

球形模范畴这一代数概念由 Schaumann 和 Shimizu 提出，并根据 Fuchs 和 Schweigert 的设想，在描述共形场论中的边界条件时发挥着核心作用。本文介绍了一大类具有拓扑来源的球形模范畴实例：对于幺模有限带状范畴 $\mathcal{A}$，我们证明，紧致定向曲面 Σ 上带有 n 标记边界区间（每个连通分支至少有一个）的因子化同调 $\int_\Sigma \mathcal{A}$ 具有球形模范畴结构，且其上的作用范畴为$\mathcal{A}^{\boxtimes n}$。由此，Ben-Zvi-Brochier-Jordan 的内部编织代数，尤其是椭圆双代数，获得了对称 Frobenius 结构。作为应用，对于$\mathcal{A}$的每种选取，我们得到一族全开共形场论；其中每个理论都带有关联函数，适用于所有带标记边界区间的曲面，并且可用因子化同调显式计算。进一步地，作为另一项应用，我们说明如何将修正迹在曲面上“积分”：我们证明，$\mathcal{A}$ 的修正迹以一种典范方式扩展到 Σ的因子化同调上。所得的迹具有一个显著性质：它们是模不变的，即在映射类群作用下保持不变。

目录

1 引言与概要.1　2 预备知识.5　3 幺模有限带状范畴的因子化同调上的球形模结构 . . . 10　4 应用.15

1 引言与概要

设我们有一个 Etingof-Ostrik 意义下的有限张量范畴 A [EO04], ，即满足适当有限性条件的线性、阿贝尔、刚性幺半群范畴。这类范畴可以来源于 Hopf 代数，也可以出现在二维共形场论的框架中。关于更多背景，参见例如 [Kas15、EGNO15、FSWY25] 。有限张量范畴本身已是具有独立研究价值的代数对象，且往往源自表示论；与此同时，它们也有自身的表示论：它们可以作用于其他范畴。这一思想通过模范畴的概念得以形式化，教科书式的参考资料可参见例如 [EGNO15 第 7] 章。有限张量范畴 A 上的有限模范畴 M 带有一个作用 $-\triangleright-:\mathrm{A}\boxtimes\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}$，作用于某个适当的有限范畴对称幺半双范畴之中。它具有一个内部 Hom Hom：$\mathrm{M}^{\mathrm{op}}\boxtimes\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A}$，其特征是满足同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(X\triangleright M,N)\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,\underline{\mathsf{Hom}}(M,N))$$

关于 $X\in\mathcal{A}$ 和 $M,\ N\in\mathcal{M}$自然。

设 $\mathcal{M}$ 是有限张量范畴 $\mathcal{A}$ 上的有限模范畴，其刚性对偶记为$-^\vee$。我们始终关注这样一种情形：$\mathcal{A}$ 是球形的，也就是说，配备了一个幺半群同构 $\omega:\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\cong-^{\vee\vee}$。这使左对偶与右对偶相同，因此我们不再区分二者。现在自然会问，$\mathcal{M}$ 是否带有自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(M,N)^\vee\cong\underline{\mathsf{Hom}}(N,M)$$

使其相对于枢轴结构的平方为恒等映射。这种结构的核心思想可追溯至 Schaumann [Sch13，Sch15]；Shimizu [Shi23] 也以枢轴模范畴这一名称对其进行了定义。

刚性有限张量范畴上的枢轴模范畴的内部自同态代数碰巧是对称 Frobenius 代数，见 [Shi23，定理 3。15]除此之外，我们还依赖于

这一极其重要的代数事实，Fuchs-Schweigert 在 [FS21]中提出，枢轴模范畴正是对数共形场论中边界条件范畴应具有的代数结构。更确切地说，他们阐释了枢轴模范畴的内部自同态的复合如何构成描述边界算符乘积展开的恰当框架。

由因子化同调得到的刚性模范畴。 刚性模范畴这一概念的动机以及迄今已知的例子来源，都是代数性的。本文旨在展示刚性模范畴的一种拓扑学来源，并以此严格构造全开共形场论族和模不变修正迹。

为此，我们需要在有限张量范畴 $\mathcal{A}$上引入更多结构。更具体地说，我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个有限辫带范畴，也就是说，它还带有编织和带结构。特别地，$\mathcal{A}$ 是一个框架化的 E_2-代数，存在于一个合适的有限范畴对称幺半双范畴 [SW03]中，这使得我们能够按照 因子化同调 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$ 的定义，即令 $\mathcal{A}$ 作用于紧致定向曲面 Σ 上（可能带有边界），参见 [AF15、Lur]。这同样是一个有限范畴，可以将其理解为在 $\mathcal{A}$ 上对 Σ进行「积分」的结果。

对于 $n \geq 1$ 参数化区间 Σ的数据（在Σ 的每个连通分支中至少有一个）（图1），范畴 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$ 成为 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$上的模。Ben- Zvi-Brochier-Jordan 在 [BZBJ18] 中研究了这个 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模，并通过 Alekseev-Grosse-Schomerus 的（推广）模空间代数 来描述整个范畴 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$；这些代数作为内部自同态代数出现 [Ale94、AGS96、AS96],

$$\mathfrak{a}_{\Sigma} := \mathsf{End}(\mathcal{O}_{\Sigma}^{\mathcal{A}}) \tag{1.1}$$

量子结构层 的$\mathcal{O}_{\Sigma}^{\mathcal{A}} \in \int_{\Sigma}\mathcal{A}$，即由唯一的嵌入 $\emptyset \longrightarrow \Sigma$在因子化同调中诱导出的对象。这个模空间代数带有映射类群作用，该作用由代数映射给出；在半单霍普夫代数情形下，这一构造见于 [Ale94、AGS96、AS96]，更一般的情形见于 [BZBJ18第 5 节。4]。

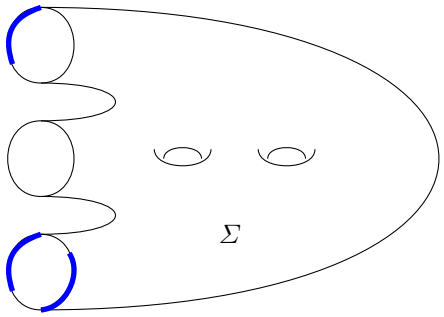


图 1： 一个紧致定向曲面 Σ，其边界上有三个参数化区间（蓝色）。

本文的主要结果是：$\int_{\Sigma}$若 A 是一个球形 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模，且 $\mathcal{A}$ 是一个幺模有限辫带范畴。回顾一下，若 A 的特征可逆对象是幺模的 $\alpha \in \mathcal{A}$ 通过 $-^{\vee\vee\vee\vee} \cong \alpha \otimes - \otimes \alpha^{-1}$ [ENO04] 控制四重对偶且同构于幺半单位，则称

定理 3.11。设 $\mathcal{A}$ 是一个幺模有限辫带范畴，并选定了其特征可逆对象的平凡化 $\alpha \cong \mathbb{1}$；再设 Σ 是一个紧致定向曲面，具有 n 个标记边界区间，且每个连通分支至少有一个。那么，因子化同调 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$ 具有球形左 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模范畴的结构。

与全开共形场论的联系。 为了说明这一结果如何应用于共形场论，我们先引入一些术语。 开曲面 *operad* O [Gia11、MSWY23、MW24b] 是一个群胚值 operad，其群胚$\mathsf{O}(n)$ 包含以下对象：其运算元数为 n 的对象是每个连通分支至少有一个边界分支的紧致定向曲面，并配有 $n+1$嵌入其边界的参数化区间；态射是映射类（保持定向和参数化区间的微分同胚的同伦类），而 operad 合成则通过沿参数化区间粘合曲面实现。事实上，开曲面 operad 是一个模 *operad*，其定义见 [GK98]。

一个二维范畴化开拓扑场论 [MW24b], 也称为开模函子，其定义为一个模O-代数（至少在本文的语境中），其取值于由有限范畴、左正合函子和自然变换构成的对称幺半双范畴$\mathsf{Lex}^{\mathsf{f}}$。这种结构正是开共形场理论

论；其依据是以下概念 [Laz01、Cos07、FFRS08]，并以此形式定义 [Woi25c，第 8]节，处于模分微观宇宙原理的语境中。

展开定义后，一个 $\mathsf{Lex}^{\mathsf{f}}$值开模函子由以下数据构成：一个有限范畴$\mathcal{A}$，以及一条规则，该规则将每个曲面 Σ（其每个连通分支至少有一个边界分支）、n带标记区间（同样如图 1所示）以及 n对象 $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$关联起来；这些对象附着于边界区间，并对应一个向量空间，即所谓的（开）共形块空间。该空间承载曲面的映射类群作用，并且与沿参数化区间的粘合相容。根据定义，共形块空间关于边界标记是左正合的。

根据 [MW24b，定理 2。2], 一个$\mathsf{Lex}^{\mathsf{f}}$值开模函子，通过在边界带标记区间的圆盘上进行评价，与一个脊对偶 *Grothendieck-Verdier* 范畴在$\mathsf{Lex}^{\mathsf{f}}$ 中的数据等价，具体定义见 [BD13]。特别地，有限辫带范畴 $\mathcal{A}$ 的底层刚性有限张量范畴可唯一扩张为一个开模函子，我们将其记作 $\mathcal{A}_!$。

在开模函子的框架内，自然会提出关联函数的问题。具有单值化数据 A 的开共形场论的一致关联函数系统，由一个自对偶对象 $F \in \mathsf{A}$，以及一族向量 $\xi^F_\Sigma \in \mathsf{A}_!(\Sigma; F, \ldots, F)$ 构成；对于所有曲面 Σ，这些向量都属于开共形块空间，并且在映射类群的作用下保持不变，同时满足所谓的缝合约束，也就是说，这一族向量与沿参数化边界区间进行的粘合相容。关于更多背景，我们请读者参阅 [FRS10a, FSWY25]。请注意，我们在此描述的是开共形场论的关联函数；它们不同于所谓的体场关联函数，尽管这两个概念密切相关 [FFRS08, Woi25a]。$(\mathsf{A}_!, \xi^F)$ 这一对可视为一个完全开共形场论；$\mathsf{A}_!$ 描述开共形场论的单值化数据，而一致的关联函数系统则是该理论解的数学精确定义，更多背景参见例如 [FRS10b, FS21, FSY22, Woi25a] 的引言。

Woi25c 的主要结果之一是：[Woi25c] 指出，$\mathcal{A}_!$ 的相容开关联函数系统与$\mathcal{A}$中的对称 Frobenius 代数一一对应（即使对于 Grothendieck–Verdier 范畴，这一结论仍然成立，尽管本文并不需要这一点），这推广了半单刚性情形中的相应结果 [FFRS08]。我们利用这一结果证明，对于一个 Ω 带有一个标记边界区间的紧致连通定向曲面，模空间代数 $\mathfrak{a}_\Omega := \underline{\mathsf{End}}(\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Omega) \in \mathcal{A}$ 由（1.1）给出，继承了对称 Frobenius 结构，并扩展为一个具有几何来源的开关联函数系统：

推论4.3。设$\mathcal{A}$ 为一个幺模有限带状范畴，并记$\mathcal{A}_!$ 为唯一的开模函子，其在带有标记边界区间的圆盘上的评价由$\mathcal{A}$ 作为刚性有限张量范畴给出。固定一个 Ω 带有一个标记边界区间的紧致连通定向曲面。则模空间代数 $\mathfrak{a}_\Omega$ 会导出一个相容的开关联函数系统

$$\xi^\Omega_\Sigma \in \mathcal{A}_!(\Sigma; \mathfrak{a}_\Omega, \ldots, \mathfrak{a}_\Omega) \quad \textit{for all} \quad \Sigma \in \mathsf{O}(n)$$

定义完全开共形场论 $(\boldsymbol{A}_!, \xi^\Omega)$。明确而言，$\xi^\Omega_\Sigma$ 的数据等价于

(i) 一个映射

$$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{a}_\Omega^{\boxtimes n} \circledcirc \mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma$$

在 $\int_\Sigma \mathcal{A}$ 中，该映射关于映射类群 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 的作用是不变的；此作用源自 $O^{\mathcal{A}}_\Sigma$ 的同伦不动点结构，其中映射类群记作 $\mathsf{Map}(\Sigma)$,

(ii) 一个映射

$$\mathfrak{a}_\Omega^{\boxtimes n} \longrightarrow \mathfrak{a}_\Sigma$$

在 $A^{\boxtimes n}$ 中，该映射在 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 对 $\mathfrak{a}_\Sigma$ 的作用下保持不变；$\mathfrak{a}_\Sigma$ 由 *Alekseev-Grosse-Schomerus* 构造，更一般地说，由 *Ben-Zvi-Brochier-Jordan* 构造。

开关联函数可以利用 $\mathfrak{a}_\Omega$ 的 Frobenius 结构显式计算，参见例 4.4。映射类群 $\mathsf{Map}(\Omega)$ 对 Ω 的作用体现为完全开共形场论的对称性，参见注释 4.5。

模不变修正迹。修正迹 [GPMT09] 是量子迹在非半单情形下的替代方案，已成为现代量子拓扑中不可或缺的工具，尤其用于构造 Costantino-Geer-Patureau-Mirand 流形不变量 [CGPM12]。幺模有限带状范畴 $\mathcal{A}$ 在其投射对象的张量理想投射对象$\mathcal{A}$ 上具有修正迹 [GKPM22], ，即一族线性映射

$$\mathsf{tr}_P : \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, P) \longrightarrow k$$

由 $P \in$ 投射对象$\mathcal{A}$ 索引，且

- 循环，即它们下降为一个取值于 k 的映射

$$\mathsf{tr} : HH_0(\mathcal{A}) := \bigoplus_{P\in \mathsf{Proj}\,\mathcal{A}} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,P) \Big/ \mathsf{span}(g\circ f - f\circ g) \longrightarrow k\ , \tag{1.2}$$

其中，我们对投射对象之间的态射 $f\colon P\longrightarrow Q$ 和 $g\colon Q\longrightarrow P$ 所张成的子空间 $g\circ f - f\circ g$ 取商，

- 非退化的，即配对

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Q)\otimes \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Q,P)\longrightarrow k\ ,\quad f\otimes g\longmapsto \mathsf{tr}_P(g\circ f) = \mathsf{tr}_Q(f\circ g) \tag{1.3}$$

对所有 $P,Q\in$ 投射对象 $\mathcal{A}$ 都是非退化的，

- 并且具有偏迹性质，即对于 $X\in\mathcal{A}$ 和 $P\in$ 投射对象$\mathcal{A}$，有

$$\mathsf{tr}_{X\otimes P}(f) = \mathsf{tr}_P(p_X(f)) \tag{1.4}$$

对于每个映射 $f\colon X\otimes P\longrightarrow X\otimes P$，其中 $p_X(f)\colon P\longrightarrow P$ 是 f 的偏迹，其定义为以下复合

$$P \xrightarrow{\widetilde{b}_X\otimes \mathrm{id}_P} {}^{\vee}X\otimes X\otimes P \xrightarrow{\vartheta\otimes f} X^{\vee}\otimes X\otimes P \xrightarrow{d_X\otimes \mathrm{id}_P} P$$

for

$\widetilde{\ }$– 余评价 $b_X\colon I\longrightarrow {}^{\vee}X\otimes X$,– 由枢轴结构诱导的识别 ϑ : ${}^{\vee}X\cong X^{\vee}$,– 评价 $d_X\colon X^{\vee}\otimes X\longrightarrow I$。

（这是左偏迹性质；根据 [SS23，推论 6，右侧的类似性质12] 会自动成立，因为$\mathcal{A}$ 是辫带范畴。）

这个定义在$\mathcal{A}$ 上的修正迹实际上在相差一个标量的意义下唯一，而选择一个修正迹相当于选择特征可逆对象的一个平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$，该对象属于$\mathcal{A}$。

由于因子化同调 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$ 是将$\mathcal{A}$ 在 Σ上“积分”的结果，因此自然会产生这样的问题：我们能否也将$\mathcal{A}$ 的修正迹在 Σ 上积分，使得每当 Σ 是一个圆盘时，我们都能恢复原始修正迹？更具体地说，我们可以询问是否能构造迹函数

$$\mathsf{tr}^{\Sigma} : HH_0\left(\int_{\Sigma}\mathcal{A}\right) = \bigoplus_{P\in\mathsf{Proj}\int_{\Sigma}\mathcal{A}} \mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma}\mathcal{A}}(P,P)\Big/\sim \longrightarrow k \tag{1.5}$$

满足上述模范畴情形中所提性质的类似性质，甚至可能满足更多性质。最重要的是，由于映射类群$\mathsf{Map}(\Sigma)$作用于 $HH_0\left(\int_{\Sigma}\mathcal{A}\right)$，我们应当考察这些迹能否在映射类群作用下成为不变量。我们利用定理 3.11 证明确实可以得到这样的模不变迹：

定理4.7 *(模不变修正迹)*。设$\mathcal{A}$ 是一个幺模有限带状范畴，并选定了特征可逆对象的一个平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$，且 Σ 是一个紧致定向曲面，其 n 具有参数化边界区间，每个连通分支至少有一个。则存在迹映射

$$\mathsf{tr}^{\Sigma} : HH_0\left(\int_{\Sigma}\mathcal{A}\right) = \bigoplus_{P\in\mathsf{Proj}\int_{\Sigma}\mathcal{A}} \mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma}\mathcal{A}}(P,P)\Big/\sim \longrightarrow k \tag{1.6}$$

它们源自定理$\mathcal{A}^{\boxtimes n}$的球形模结构3.11，并具有以下性质：

(N) 这些迹是非退化的，即配对

$$\mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma}\mathcal{A}}(P,Q)\otimes \mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma}\mathcal{A}}(Q,P)\longrightarrow k\ ,\quad f\otimes g\longmapsto \mathsf{tr}^{\Sigma}(g\circ f) = \mathsf{tr}^{\Sigma}(f\circ g)$$

对于 $P,Q\in$投射对象 $\int_{\Sigma}A$ 是非退化的。

(M) 这些迹是模不变的，即在映射类群 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 对$HH_0\left(\int_{\Sigma}A\right)$的作用下保持不变。

(L) 这些迹是局部的，即如果 Σ' 由 Σ 通过将一对带标记区间粘合在一起而得到，那么切除等价 $\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} \int_{\Sigma} \mathcal{A} \simeq \int_{\Sigma'} \mathcal{A}$ 会保持这些迹（在左侧，我们有源自命题3.7的迹）。

(P) 这些迹具有高亏格偏迹性质，也就是说，对每个 $X \in A^{\boxtimes n}$，$P \in$ 投射对象 $\int_{\Sigma} A$ 和 f : $X \otimes P \longrightarrow X \otimes P$，都有

$$\mathsf{tr}^{\Sigma}(f) = \mathsf{tr}^{\Sigma}(\mathsf{cl}_{X|P}(f)) \ ,$$

对于 *Shibata-Shimizu* 闭合算子

$$\mathsf{cl}_{X|P} : \mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma} \mathcal{A}}(X \otimes P, X \otimes P) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\int_{\Sigma} \mathcal{A}}(P, P)$$

对于球形 $A^{\boxtimes n}$-模 $\int_{\Sigma} A$。

将其限制在带标记圆盘上，相当于在 投射对象A 上定义一个双侧修正迹。反过来，给定 投射对象A 上的一个修正迹，它会唯一延拓为 $\int_{\Sigma} A$ 上满足 *(N)* 和 *(L)* 的一族迹函数；此时条件 *(M)* 和 *(P)* 自动成立。

使用 Shibata-Shimizu 引入的闭合算子表述的条件 [SS23，第 5 节。1]相当于偏迹性质的一个相对版本，将在第 2.7 节回顾。

定理 4.7 意味着，在因子化同调的纽结图理论图景中 [Coo23、BH24、MW24a]，幺模有限辫带范畴的图 skein 范畴带有模不变修正迹。然而，我们尚未看到直接依赖纽结图理论的证明。可以肯定的是，似乎无法在映射类群的生成元上证明这一点。事实上，定理 4.7 的论证将用于推论 4.3 的从拓扑到关联函数的构造反向运用4.3 ，即借助关联函数的构造来证明一个纯数学结果：这并不令人意外，因为在定理 4.7中，我们试图构造一个与粘合相容的模不变量。更技术性地说，我们利用了定理 3.11 中的球形结构（及其相关迹）是通过曲面的带状图模型的粘合过程构造的，但最终独立于该带状图模型。这意味着，映射类会将定理4.7 中参照某一带状图模型构造的迹映射为参照另一带状图模型（由映射类作用得到的模型）构造的迹。但由于与带状图模型无关，这两个迹是相同的。这正是 [Woi25c、Woi25a]中采用的关联函数构造方法，它推广了经典构造 [FRS02、FFRS08]。

致谢。我们感谢 Adrien Brochier、Patrick Kinnear、Lukas Müller 和 Christoph Schwei-gert 就本文相关问题进行的有益讨论。JB 和 LW 衷心感谢 ANR 项目 CPJ n°ANR-22-CPJ1-0001-01 对他们在勃艮第数学研究所（IMB）工作的支持。IMB 获得 EIPHI 研究生院（ANR-17-EURE-0002）的支持。

2 预备知识

本节回顾一些与有限张量范畴上的模范畴相关的基本代数概念，并介绍因子化同调的一些一般性质。除非另有说明，所有范畴、函子和自然变换均假定为在固定的代数闭域 k 上的 k-线性的 。

2.1 有限张量范畴。 按照 [EO04], 的 定义，有限范畴 是阿贝尔范畴$\mathcal{A}$ 其态射空间有限维，具有足够多的投射对象，简单对象的同构类有限，且任意对象长度有限。当且仅当阿贝尔范畴等价于有限维代数 A-模范畴时，它才是有限范畴；该范畴由有限维代数上的有限维模构成 A。

对于有限范畴之间的函子 $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$,

$$F \text{ is left exact} \iff F \text{ is a right adjoint} \quad , \quad F \text{ is right exact} \iff F \text{ is a left adjoint} \ , \tag{2.1}$$

例如参见 [FSS20，推论 2。3]。一个配备刚性双线性幺半积且具有简单单位对象的有限范畴$\mathcal{A}$ 称为有限张量范畴 [EO04]。对于对象 $X \in \mathcal{A}$，我们分别记其左对偶和右对偶为 $X^{\vee}$ 和 ${}^{\vee}X$ 。存在伴随

$$X^{\vee} \otimes (-) \dashv X \otimes (-) \dashv {}^{\vee}X \otimes (-) \quad , \quad (-) \otimes {}^{\vee}X \dashv (-) \otimes X \dashv (-) \otimes X^{\vee} \tag{2.2}$$

例如 [Shi17，第 2 节。7], 因此由（2.1）可知，幺半积函子 $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ 对每个变量都是正合的。给定有限张量范畴 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \otimes, \mathbb{1})$，我们将记作 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} = (\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \otimes, \mathbb{1})$ 和 $\mathcal{A}^{\otimes \mathrm{op}} = (\mathcal{A}, \otimes^{\mathrm{op}}, \mathbb{1})$，其中 $X \otimes^{\mathrm{op}} Y := Y \otimes X$ 对于 $X, Y \in \mathcal{A}$。

2.2 有限模范畴与内同态。设 C 为幺半群范畴。在范畴 M 上的左 C-模结构由一个作用函子 $\triangleright : \mathrm{C} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ 以及一族自然同构$\mathbb{1} \triangleright M \cong M$和 $(X \otimes Y) \triangleright M \cong X \triangleright (Y \triangleright M)$ 构成，其中 X、$Y \in$ A 和 $M \in$ M 满足与幺半群范畴中的公理类似的五边形与三角形公理；详情参见 [EGNO15，第 7 节。1] 右 A-模结构和 A-B-双模结构的定义类似。同样，左 A-模范畴之间的 A-模函子F: M $\longrightarrow$N 是一个函子，连同自然同构 $F(X \triangleright M) \cong F(X) \triangleright M$，满足类似的公理 [EGNO15，第 7 节。2]。

若$\mathcal{A}$ 是有限张量范畴，有限范畴$\mathcal{M}$ 配备了一个$\mathcal{A}$-模结构，则称其为有限$\mathcal{A}$-模范畴，如果对于任意 $- \triangleright M : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{M}$ 这些函子都是右正合的 $M \in \mathcal{M}$。与 (2.2) 类似，存在伴随

$$X^{\vee} \triangleright (-) \dashv X \triangleright (-) \dashv {}^{\vee}X \triangleright (-) \tag{2.3}$$

因此再次由 (2.1) 可知，函子 $X \triangleright - : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 对于任意 $X \in \mathcal{A}$总是正合的。这意味着$X \triangleright P$对于任意 $X \in \mathcal{A}$ 都是射影的，只要 $P \in \mathcal{M}$ 是射影的。

设$\mathcal{A}$ 是有限张量范畴，且$\mathcal{M}$ 是有限$\mathcal{A}$-模范畴。对于每个 $M \in \mathcal{M}$，由 $(- \triangleright M)$ 可知，函子有一个右伴随，我们将其记作2.1，记为$\mathsf{Hom}(M, -) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$。根据定义，它带有线性同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(X \triangleright M, N) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \underline{\mathsf{Hom}}(M, N)) \tag{2.4}$$

对于 $X \in \mathcal{A}$ 和 $N \in \mathcal{M}$自然。根据 [ML98，定理 IV.7.3]，这一族伴随中的右伴随以唯一的方式组装成一个函子$\mathsf{Hom} : \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$，使得同构 (2.4) 对三个变量自然。称Hom为内部 *Hom* 函子。与 Hom 函子一样，该函子在两个变量上都是左正合的。此外，对于对象 X、$Y \in \mathcal{A}$和 M、$N \in \mathcal{M}$，存在一个自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(X \triangleright M, Y \triangleright N) \cong Y \otimes \underline{\mathsf{Hom}}(M, N) \otimes X^{\vee}, \tag{2.5}$$

将 Hom 表示为一个 $\mathcal{A}$-双模函子，参见 [EGNO15，引理 7.9。4]。

上述内同态赋予 $\mathcal{M}$ 一个 $\mathcal{A}$ 富集范畴结构。特别地，对于任意对象 $M \in \mathcal{M}$，对象 $\mathsf{End}(M) := \mathsf{Hom}(M, M)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个代数；对于任意$N \in \mathcal{M}$，对象 $\mathsf{Hom}(M, N)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的右 $\mathsf{End}(M)$-模。我们将 $\mathsf{mod}_{\mathcal{A}}$-$\mathsf{End}(M)$ 表示为$\mathcal{A}$中右 $\mathsf{End}(M)$- 模的范畴。不难验证，幺半群积使其成为一个左 $\mathcal{A}$- 模范畴。

回忆一下，对象 $M \in \mathcal{M}$ 称为 $\mathcal{A}$-射影对象（分别地$\mathcal{A}$-生成元，分别地 $\mathcal{A}$-投射生成元），如果函子 $\mathsf{Hom}(M, -) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是正合的（分别地忠实，分别地既正合又忠实）。下文将使用以下“单子性定理”，例如见 [EGNO15，第 7 节。10]：若 $M \in \mathcal{M}$，则函子

$$\underline{\mathsf{Hom}}(M, -) : \mathcal{M} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{mod}_{\mathcal{A}}\text{-}\underline{\mathsf{End}}(M) \tag{2.6}$$

当且仅当 M 是一个$\mathcal{A}$-投射生成元时，才是左$\mathcal{A}$-模范畴之间的等价。此外，任何有限$\mathcal{A}$-模范畴都有一个$\mathcal{A}$-投射生成元。

2.3 平衡 *Deligne* 积。设$\mathcal{A}$ 是有限张量范畴，$\mathcal{M}$ 和$\mathcal{N}$ 分别是有限右$\mathcal{A}$-模范畴和左$\mathcal{A}$-模范畴。从$\mathcal{M} \times \mathcal{N}$到有限范畴$\mathcal{E}$ 的$\mathcal{A}$-平衡函子是一个右正合函子 $F: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{E}$，并附有一族自然同构 $F(M \triangleright X, N) \cong F(M, X \triangleright N)$，满足五边形与三角形公理的类似条件。我们用 $\mathrm{Bal}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{E})$ 表示右正合$\mathcal{A}$-平衡函子$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{E}$ 及与这些自然同构相容的自然变换所构成的范畴。

若 A、M 和 N 如上所述，则它们的平衡 Deligne 积是一个有限范畴 M $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ N，连同一个函子 $\boxtimes_{\mathcal{A}}$: M $\times$ N $\longrightarrow$ M $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ N，该函子是右正合的 A-平衡函子，并且关于此性质具有泛性质；具体而言，对于任意其他有限范畴 E，前复合 $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ 会诱导出等价 Rex(M $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ N , E) $\xrightarrow{\simeq}$Bal$_{\mathcal{A}}$(M $\times$ N , E)。关于融合范畴语境下的定义，见 [ENO10]。[DSPS19 定理 3.3] 证明了平衡 Deligne 积总是存在的，函子 $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ 实际上是正合的，并且我们还有以下线性同构：

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}}(M \boxtimes_{\mathcal{A}} N, M' \boxtimes_{\mathcal{A}} N') \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{1}, \underline{\mathsf{Hom}}(M, M') \otimes \underline{\mathsf{Hom}}(N, N')) \ . \tag{2.7}$$

获得平衡 Deligne 积的一个具体实现会很有用。对于有限右 A-模范畴 M 和左 A-模范畴 N，选取等价 M $\simeq$ A-mod$_{\mathcal{A}}$ and N $\simeq$ mod$_{\mathcal{A}}$-B，其中代数A、$B \in$ 属于 A。根据 [DSPS19, Theorem 3.3]，，平衡 Deligne 积 M $\boxtimes_{\mathcal{A}}$ N 可实现为范畴 A-mod$_{\mathcal{A}}$-B，即 A 中的 A-B-双模；更准确地说，函子

$$\otimes : A\text{-mod}_{\mathcal{A}} \boxtimes_{\mathcal{A}} \mathsf{mod}_{\mathcal{A}}\text{-}B \xrightarrow{\simeq} A\text{-mod}_{\mathcal{A}}\text{-}B \qquad , \qquad M \boxtimes_{\mathcal{A}} N \longmapsto M \otimes N \tag{2.8}$$

是一个等价。由此，我们得出以下结论。我们认为该结论广为人知，但由于找不到相关参考文献，仍在此写出证明：

推论 2.1。设 A 是一个有限张量范畴，M 是一个有限右 A-模范畴，N 是一个有限左 A-模范畴。则 $M \boxtimes_{\mathcal{A}} N$ 的投射对象是形如$X \boxtimes Y$的对象的直和项，其中对象 $X \in M$ 和 $Y \in N$，且 X 是投射的。对于形如 $X \boxtimes Y$ 的对象，若 Y 是投射的，同样的结论也成立。

证明。让我们选取如下同构：$\mathcal{M} \simeq A\text{-模}_{\mathcal{A}}$、$\mathcal{N} \simeq \text{模}_{\mathcal{A}}\text{-}B$ 以及$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N} \simeq A\text{-模}_{\mathcal{A}}\text{-}B$，其中代数 A, $B \in \mathcal{A}$ 如上所述。众所周知，$A\text{-模}_{\mathcal{A}}\text{-}B$ 中的投射对象恰好是自由模 $A \otimes P \otimes B$的直和项，其中 $P \in \mathcal{A}$ 是投射的。事实上，$A \otimes P \otimes B$是投射的，因为它是自由双模函子的像；

$$A \otimes - \otimes B : \mathcal{A} \longrightarrow A\text{-mod}_{\mathcal{A}}\text{-}B,$$

该函子保持投射对象，因为其右伴随——遗忘函子——是正合的。反过来，给定一个投射的 A-B-双模 T，考虑 $\mathcal{A}$中的投射对象 P及其满态射 $P \longrightarrow T$。应用自由双模函子，我们得到一个满态射 $A \otimes P \otimes B \longrightarrow A \otimes T \otimes B$，因为右正合函子保持满态射。其复合为

$$B \otimes P \otimes C \longrightarrow B \otimes T \otimes C \longrightarrow T$$

带有作用结构映射（这是一个满态射）的映射在 $A\text{-模}_{\mathcal{A}}\text{-}B$ 中仍然是一个满态射。由于 T 是射影对象，满态射 $B \otimes P \otimes C \longrightarrow T$ 分裂，从而表明 T 是 $A \otimes P \otimes B$ 的直和项。

这就给出了引理的陈述，因为在等价（2.8）下，自由双模 $A \otimes P \otimes B$对应于对象 $(A \otimes P) \boxtimes_{\mathcal{A}} B \cong A \boxtimes_{\mathcal{A}} (P \otimes B)$，其中 $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$，其中 $A \otimes P$是一个射影左A-模，而 $P \otimes B$ 是一个射影右 B-模。 □

2.4 特征可逆元与幺模性。如果 A 是一个有限张量范畴，则其包络为 $\mathrm{A}^{\mathrm{env}} := \mathrm{A} \boxtimes \mathrm{A}^{\otimes \mathrm{op}}$，根据 [Del90，命题 5.17]，它是一个有限张量范畴。范畴 A 可以视为一个左 $\mathrm{A}^{\mathrm{env}}$-模范畴，其作用函子由 $(X \boxtimes Y) \otimes Z = X \otimes Z \otimes Y$. 确定。代数 $\Delta := \mathrm{End}(\mathbb{1}) \in \mathrm{A}^{\mathrm{env}}$ 通常称为 A 的典范代数。事实上，根据 [Shi17，引理 4.4]，Δ 可以表示为余端 $\Delta \cong \int^{X \in \mathrm{A}} X^{\vee} \boxtimes X$（关于余端及其性质的介绍，请参阅 [FSS20，第 2.2] 节）。我们选择记号 Δ 表示典范代数，因为其底层对象恰好也是 A 作为循环结合代数 [MW23] 的余评价对象，该对象记作同一个符号。

由 [BZBJ18，命题 4.15] 幺半单位 $\mathbb{1} \in \mathrm{A}$ 是一个 $\mathrm{A}^{\mathrm{env}}$-生成元。由 (2.6)，$\mathrm{Hom}(1, -) : \mathrm{A} \xrightarrow{\simeq} \text{模}_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}$-$\Delta$ 是 $\mathrm{A}^{\mathrm{env}}$-模范畴之间的等价。满足 $(\alpha \boxtimes \mathbb{1}) \otimes \Delta \cong \Delta^{\vee}$ 的唯一对象$\alpha \in \mathrm{A}$（在同构意义下唯一）称为特征可逆对象。由 [ENO04，定理 3.3],可通过同构 $(-)^{\vee\vee\vee\vee} \cong \alpha \otimes - \otimes \alpha^{-1}$来描述四重对偶。注意，若 A 是幺模的，同构 $\alpha \cong \mathbb{1}$ 会诱导一个同构

$$\psi : \Delta \xrightarrow{\cong} \Delta^{\vee}. \tag{2.9}$$

若$\mathcal{A}$ 带有枢轴结构 $\omega : \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \cong -^{\vee\vee}$，则它会在$\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$ 上诱导一个枢轴结构，也记作 ω，使得复合 $\Delta \xrightarrow{\omega_{\Delta}} \Delta^{\vee\vee} \xrightarrow{\psi^{\vee}} \Delta^{\vee}$ 与 ψ一致。

2.5 中山函子。设$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为有限范畴。根据 [FSS20定理 32], 中给出的埃伦伯格-瓦茨定理的莫里塔不变版本，存在一列伴随等价

$$\mathsf{Lex}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xleftarrow{\simeq} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \boxtimes \mathcal{B} \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Rex}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ .$$

由于 $\mathcal{A}$ 的恒等函子既是左正合又是右正合的，上述一列伴随等价产生了两个典范函子，分别是左中山函子$\mathsf{N}^{\ell} \in \mathsf{Lex}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 和右中山函子$\mathsf{N}^{r} \in \mathsf{Rex}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$。根据 [FSS20命题 320] 可得

$$\mathsf{N}^{\ell}_{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}} \cong \mathsf{N}^{\ell}_{\mathcal{A}} \boxtimes \mathsf{N}^{\ell}_{\mathcal{B}} \qquad , \qquad \mathsf{N}^{r}_{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}} \cong \mathsf{N}^{r}_{\mathcal{A}} \boxtimes \mathsf{N}^{r}_{\mathcal{B}} \tag{2.10}$$

对于有限范畴 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$。此外，根据 [SS23引理 47] 或 [SW23推论 23], 对于任意有限范畴 y$\mathcal{A}$ 和投射对象P，$Q \in \mathcal{A}$，存在自然同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Q) \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, \mathsf{N}^{r} P)^{*} \ . \tag{2.11}$$

此外，如果 $\mathcal{M}$ 是有限张量范畴 $\mathcal{A}$上的有限左模范畴，那么得益于 [FSS20，命题 3。18]，$\mathcal{M}$ 的左 Nakayama 函子和右 Nakayama 函子分别具有自然的$(-)^{\vee\vee}$-扭曲

${}^{\vee\vee}(-)$-扭曲的 $\mathcal{A}$-模函子。记作 $G = (-)^{\vee\vee}$ 或 ${}^{\vee\vee}(-)$，这意味着它们可以被视为从$\mathcal{M} \longrightarrow {}_G\mathcal{M}$到$\mathcal{M}$的模函子，其中 ${}_G\mathcal{M}$ 表示模块结构经过 $X \otimes_G M := G(X) \otimes M$扭曲后的$\mathcal{M}$ 。明确地说，存在自然同构

$$\mathsf{N}^\ell(X \otimes M) \cong X^{\vee\vee} \otimes \mathsf{N}^\ell(M) \quad , \quad \mathsf{N}^r(X \otimes M) \cong {}^{\vee\vee}X \otimes \mathsf{N}^r(M) \ , \tag{2.12}$$

满足 相应的相干条件，参见 [FSS20，定理 4。4] 以及 [Shi23，第 2 节。5] .

2.6 相对 *Serre* 函子。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限张量范畴，并设 $\mathcal{M}$ 是一个有限左 $\mathcal{A}$-模范畴。 M 的左 和右相对 *Serre* 函子 （参见 $\mathcal{M}$ [Sch15、FSS20] ）是自函子 S^ℓ、$\mathsf{S}^r : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ，并配有一族取值于 $\mathcal{A}$ 中的自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{S}^\ell(M), N) \cong {}^\vee\underline{\mathsf{Hom}}(N, M) \quad , \quad \underline{\mathsf{Hom}}(M, \mathsf{S}^r(N)) \cong \underline{\mathsf{Hom}}(N, M)^\vee \ . \tag{2.13}$$

若它们存在，则由米田引理可知它们在本质上唯一。 [FSS20，命题 4。24] 中证明了，有限左$\mathcal{A}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 存在左、右相对 Serre 函子，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是正合的，即所有对象都是 $\mathcal{A}$-射影对象。

例 2.2。将有限张量范畴$\mathcal{A}$ 视为其自身上的有限左模范畴。容易验证，$\mathsf{S}^\ell = {}^{\vee\vee}(-)$ 和 $\mathsf{S}^r = (-)^{\vee\vee}$ 是左、右相对 Serre 函子（特别地，$\mathcal{A}$是正合的）。这表明，这些函子可以解释为模范畴中双重左对偶与右对偶函子的类似物。

根据 [FSS20，引理 4。23] 以及 [Shi23，第 3 节。3], M 的左或右相对 *Serre* 函子具有唯一的扭曲 $\mathcal{A}$-模函子结构，使得自然同构（2.13）是 $\mathcal{A}$-双模函子的同构。这意味着存在如下自然同构（与（2.12）比较）

$$\mathsf{S}^\ell(X \otimes M) \cong {}^{\vee\vee}X \otimes \mathsf{S}^\ell(M) \quad , \quad \mathsf{S}^r(X \otimes M) \cong X^{\vee\vee} \otimes \mathsf{S}^r(M) \ . \tag{2.14}$$

相对 Serre 函子实际上与中山函子密切相关：若 $\mathcal{M}$ 是有限张量范畴 $\mathcal{A}$ 上的正合左$\mathcal{A}$-模范畴，且具有特征可逆对象 α，则存在自然同构

$$\mathsf{N}^\ell \cong \alpha \otimes \mathsf{S}^\ell \quad , \quad \mathsf{N}^r \cong \alpha^{-1} \otimes \mathsf{S}^r \tag{2.15}$$

作为扭曲模函子的 [FSS20，定理 4。26]。特别地，对于 $\mathcal{A}$ 本身的左、右中山函子，我们有自然同构

$$\mathsf{N}^\ell \cong \alpha \otimes {}^{\vee\vee}(-) \quad , \quad \mathsf{N}^r \cong \alpha^{-1} \otimes (-)^{\vee\vee} \ . \tag{2.16}$$

由此可得：若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是有限张量范畴，则 $\alpha_{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}}$ A $\boxtimes \mathcal{B}$ 的特征可逆对象（根据 [Del90，命题 5。17], 它是有限张量范畴）以及 $\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}}$ 的特征可逆对象由下式给出

$$\alpha_{\mathcal{A}\boxtimes\mathcal{B}} \cong \alpha_{\mathcal{A}} \boxtimes \alpha_{\mathcal{B}} \quad , \quad \alpha_{\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}}} \cong \alpha_{\mathcal{A}} \ , \tag{2.17}$$

其中， $\alpha_{\mathcal{A}}$、 $\alpha_{\mathcal{B}}$ 和 $\alpha_{\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}}}$ 分别表示$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}}$的特征可逆对象。

2.7 枢轴模结构。 设$\mathcal{A}$是一个刚性有限张量范畴，$\mathcal{M}$ 是一个正合左$\mathcal{A}$-模范畴，且 S^r 是$\mathcal{M}$的右相对 Serre 函子。我们将 S^r 视为一个（未扭曲的）$\mathcal{A}$-模函子，其结构态射为

$$\mathsf{S}^r(X \otimes M) \cong X^{\vee\vee} \otimes \mathsf{S}^r(M) \cong X \otimes \mathsf{S}^r(M) \ ,$$

其中，第一个同构是（2.14），第二个同构则由$\mathcal{A}$的枢轴结构诱导得到。相同的观察也适用于左相对 Serre 函子和中山函子。

根据 [Shi23第 3 节，6], 对于$\mathcal{M}$ 而言，枢轴结构是$\mathsf{S}^r \cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 作为$\mathcal{A}$-模函子的$\mathcal{M}$ 的右相对 Serre 函子的平凡化。一个赋予枢轴结构的正合左$\mathcal{A}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 称为一个枢轴左$\mathcal{A}$-模范畴。

例 2.3。设$\mathcal{A}$ 是一个刚性有限张量范畴，并将其视为一个左A-模范畴（通过左乘法）。由例2.2可知，$\mathcal{A}$ 是正合的，并且可以借助枢轴结构将左、右相对 Serre 函子平凡化。这是模函子意义下的平凡化，是因为枢轴结构是一个幺半自然同构。因此，这给出了一个枢轴模结构。

由（2.15），我们得出以下结论，后文将会用到：

引理 2.4。 设 A 是一个幺模枢轴有限张量范畴，并给定其特征可逆对象的平凡化 $\alpha \cong \mathbb{1}$ ，且 M 是一个正合左 A-模范畴。那么，M 上的枢轴左 A-模结构恰好对应于一个作为 A-模函子的平凡化 $\mathsf{N}^r \cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 。

2.8 因子化同调简述。因子化同调 [Lur、AF15] 是 n 维流形的一种不变量，它满足经典同调理论 Eilenberg-Steenrood 公理的一般化。本文中，我们只关注定向曲面 $\int_\Sigma\mathcal{A}$ 上的因子化同调 Σ，其系数取自带框架的 E_2-代数 $\mathcal{A}$，并取值于对称幺半范畴 $(2,\ 1)$-范畴 $\mathsf{Rex}^{\mathsf{f}}$，其对象为有限范畴、态射为右正合函子和自然同构，幺半群积为 Deligne积；也就是说，$\mathcal{A}$ 是一个平衡编织有限范畴。

因子化同调 $\int_\Sigma\mathcal{A}$ 定义为同伦余极限（或 (2,1)-余极限）

$$\int_\Sigma\mathcal{A}:=\operatorname*{hocolim}_{\substack{(D^2)^{\sqcup n}\hookrightarrow\Sigma\\ n\geq 0}}\mathcal{A}^{\boxtimes n}$$

在所有圆盘嵌入 $(D^2)^{\sqcup n}\hookrightarrow\Sigma$ 以及所有 $n\geq 0$ 上。

以下列出因子化同调的一些重要性质，参见 [AF15、Gin15、BZBJ18] 以了解更多背景：

(i) 存在一个等价 $\int_{D^2}\mathcal{A}\ \simeq\mathcal{A}$。

(ii) 存在一个等价 $\int_{\bar\Sigma}\mathcal{A}\ \simeq\ \int_\Sigma\bar{\mathcal{A}}$ 其中 $\bar\Sigma$ 表示一个曲面 Σ，其具有相反的定向，并且 $\bar{\mathcal{A}}$ 是赋有相同幺半群积的平衡编织幺半群范畴，但采用逆编织和逆平衡。

(iii) 因子化同调是典范带基点的理论，含义如下：对于曲面 Σ，嵌入 $\emptyset\ ,\to\Sigma$ 诱导出函子$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma\colon \mathsf{vect}\ \simeq\int_\emptyset\mathcal{A}\ \longrightarrow\int_\Sigma\mathcal{A}$，这当然相当于一个对象$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma\in\int_\Sigma\mathcal{A}$，称为量子结构层，位于 [BZBJ18]。

(iv) 如果 $(D^2)^{\sqcup n}\ ,\to\Sigma$ 是一个圆盘的不交并的嵌入，且该嵌入可经由一个更大的圆盘分解，那么相应的泛态射 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}\longrightarrow\int_\Sigma\mathcal{A}$ 可经由 n 重幺半积函子（E_2-乘法）$\mathcal{A}^{\boxtimes n}\longrightarrow\mathcal{A}$分解。

(v) 给定一个紧致定向一维流形 P，堆叠在 $\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}$ 上诱导出一个带单位元 $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_{P\times[0,1]}$ 的规范幺半结构。

(vi) 给定一个带边界 $\partial\Sigma$ 的曲面 Σ，范畴 $\int_\Sigma\mathcal{A}$ 自然地成为左 $\int_{\partial\Sigma\times[0,1]}\mathcal{A}$-模，其结构由选择 $\partial\Sigma$ 的一个领圈邻域诱导。

(vii) 完全类比于 Eilenberg-Steenrood 公理，因子化同调满足一个称为 切除 的局部到整体原理，这是因子化同调的主要计算工具。设 Σ_1,Σ_2 是紧致定向曲面，令 $\Sigma:=\Sigma_1\cup_{P\times[0,1]}\Sigma_2$ 为沿一维流形 P 通过领圈粘合得到的曲面。我们在 $\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}$ 上选择幺半结构，使得 $\int_{\Sigma_2}\mathcal{A}$ 成为左 $\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}$-模范畴，因此 $\int_{\Sigma_1}\mathcal{A}$ 是右 $\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}$-模范畴。切除性质随后告诉我们，嵌入 $\Sigma_1\sqcup\Sigma_2\hookrightarrow\Sigma$ 诱导出一个等价

$$\int_{\Sigma_1}\mathcal{A}\boxtimes_{\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}}\int_{\Sigma_2}\mathcal{A}\simeq\int_\Sigma\mathcal{A}. \tag{2.18}$$

事实上，因子化同调由以下性质刻画：$\int_{D^2}\mathcal{A}\ \simeq\mathcal{A}$ 以及切除性质，参见 [AF15，第 3 节。3]具体陈述见此处。

2.9 作为模范畴的因子化。设 $\mathcal{A}$ 是一个平衡辫状范畴 $\mathcal{A}$ 属于 $\mathsf{Rex}^{\mathsf{f}}$ 并且假设 Σ 是一个定向紧致曲面 Σ 其每个连通分支至少有一个边界分支，并且带有 n 个参数化区间，位于 $\partial\Sigma$ 中，我们称这些区间为 标记边界区间。这里，参数化是指一个保定向嵌入 $[0,1]^{\sqcup n}\longrightarrow\partial\Sigma$，其像记作 P。用 [MW24b], 的术语来说，这意味着 Σ 是以下结构的一个运算：开曲面模 *operad*。

根据前一节的说明，$\int_\Sigma\mathcal{A}$ 带有左 $\int_{P\times[0,1]}\mathcal{A}$-模范畴的结构，而保定向微分同胚 $[0,1]^{\sqcup n}\xrightarrow{\cong}P$ 使得 $\int_\Sigma\mathcal{A}$ 成为一个由 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$作用的模，其作用为

$$\circledcirc:\mathcal{A}^{\boxtimes n}\boxtimes\int_\Sigma\mathcal{A}\longrightarrow\int_\Sigma\mathcal{A}\ , \tag{2.19}$$

另请参见 [BZBJ18，第 5]节。

开曲面 operad 的 operad 合成就是沿区间粘合。要沿一对区间 $I,J\subset\Sigma$ 粘合 Σ，需要将其中一个粘合区间的参数化（选择这一对中的第一个还是第二个区间都无关紧要）与反射复合，

。这会将对应于 I 和 J 的 $\int_\Sigma \mathcal{A}$ 上的 $\mathcal{A}^{\boxtimes 2}$-作用转变为 $\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$ 的作用；我们只需将对应于被反射区间的 $\mathcal{A}$-作用与等价 $\mathrm{id}:\mathcal{A}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}}$ 复合，其结构映射由编织给出。这也给出了一个反转定向的~微分同胚 $\psi: I\xrightarrow{=} J$。沿 I 和 J 粘合 Σ 的结果是曲面 Σ'，它由 Σ 对 $x\sim\psi(x)$（其中 $x\in I$）取商得到。切除给出了一个等价

$$\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\int_\Sigma \mathcal{A}\xrightarrow{\simeq}\int_{\Sigma'}\mathcal{A}\,. \tag{2.20}$$

3 幺模有限范畴的因子化同调上的枢轴模结构

辫带范畴

本节的目标是在幺模有限带状范畴的因子化同调上建立枢轴结构。这将在下文的定理 3.11 中完成。

3.1 圆盘的特殊情形。对于一个具有 D^2 个 n 标记边界区间的圆盘，我们有 $\int_{D^2}\mathcal{A}\simeq\mathcal{A}$，相应的作用函子

$$\circledcirc:\mathcal{A}^{\boxtimes n}\boxtimes\mathcal{A}\simeq\mathcal{A}^{\boxtimes n+1}\longrightarrow\mathcal{A}$$

根据第 (iv)节的性质2.8，自然同构于 $(n+1)$重幺半群积 $\mathcal{A}$。因此，$\int_{D^2}\mathcal{A}$ 与左正则 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模 $\mathcal{A}$一致。

一旦反转一个或多个标记边界区间的定向以进行粘合，我们便得到以下模范畴：

定义 3.1。若$\mathcal{A}$ 是一个辫有限张量范畴，且整数为 p，$q\geq 0$ 满足 $p+q\geq 1$，我们令 ${}_p\mathcal{A}_q$ 为有限左$\mathcal{A}^{\boxtimes p}\boxtimes(\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}})^{\boxtimes q}$-模范畴，其底层有限范畴为$\mathcal{A}$，其模结构由下式确定：

$$(X_1\boxtimes\cdots\boxtimes X_p\boxtimes Y_1\boxtimes\cdots\boxtimes Y_q)\circledcirc Z=X_1\otimes\cdots\otimes X_p\otimes Z\otimes Y_q\otimes\cdots\otimes Y_1\,.$$

注 3.2。容易看出，${}_p\mathcal{A}_q$ 实际上是正合的。事实上，根据推论2.1，Deligne张量积$\mathcal{A}^{\boxtimes p}\boxtimes(\mathcal{A}^{\otimes\mathrm{op}})^{\boxtimes q}$ 的投射对象是投射对象的 Deligne积的直和项。现在，若 是 $P_1\boxtimes\cdots\boxtimes P_{p+q}$的一个直和项，那么 $T\circledcirc X$ 是 $P_1\boxtimes\cdots P_p\boxtimes X\boxtimes P_{p+1}\boxtimes\cdots\boxtimes P_{p+q}$ 的一个直和项，而后者是投射对象，因此 也是投射对象。

首先，我们将证明，若$\mathcal{A}$ 是幺模辫带，则模范畴${}_p\mathcal{A}_q$ 是球形的。为此，我们将使用以下引理。该引理由一个标准事实推出：对于有限张量范畴之间的任意幺半函子 $\varphi:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$，从$\mathcal{D}$-模范畴到$\mathcal{C}$-模范畴的限制函子是一个 2-函子：

引理 3.3. 设 C、D 为有限张量范畴，且 $\varphi:C\longrightarrow D$ 为一个幺半函子。设 M 是一个有限左 D-模范畴，$F:M\longrightarrow M$ 是一个 D- 模自函子，而 $\chi:F\cong\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 是 F 作为 D- 模函子的一个平凡化。若 M_φ 表示由限制标量所诱导的左 C-模范畴，且 $\varphi^*F:M_\varphi\longrightarrow M_\varphi$ 是由 F 诱导的左 C-模函子，那么由 χ 诱导的自然同构$\varphi^*\chi:\varphi^*F\cong\mathrm{id}_{\mathcal{M}_\varphi}$ 是 φ^*F 作为 C-模函子的一个平凡化。

命题 3.4。设 A 是一个幺模有限带状范畴，并固定了其特征可逆对象的平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$。那么 ${}_pA_q$ 继承枢轴模范畴结构。特别地，对于具有 n 个标记边界区间的圆盘 D^2，平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$ 在 $\int_{D^2}A$ 上诱导出一个球形 $A^{\boxtimes n}$-模结构。

证明。首先回顾，${}_p\mathcal{A}_q$根据备注 3.2 是正合的。对于 $(p,\ q)=(1,\ 0)$和 $(p,\ q)=(0,\ 1)$，该结论直接由例2.3得出。

对于 $p=q=1$，利用（2.5）可得 $\mathsf{Hom}(\underline{X,\ \ Y})\cong(Y\boxtimes\mathbb{1})\otimes\Delta\otimes(X^\vee\boxtimes\mathbb{1})$，因此利用 Δ 在（2.9）中给出的自对偶性，我们得到自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}(X,\mathsf{S}^r(Y))\cong\underline{\mathsf{Hom}}(Y,X)^\vee\cong(Y^{\vee\vee}\boxtimes\mathbb{1})\otimes\Delta^\vee\otimes(X^\vee\boxtimes\mathbb{1})\cong\underline{\mathsf{Hom}}(X,Y^{\vee\vee})$$

从而得到一个同构 $\gamma:\mathsf{S}^r\cong(-)^{\vee\vee}$。要证明这是一个 $\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$-模函子同构，可以如下论证：若 $W\in\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$，该图表的交换性

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{S}^r(W\circledcirc X) & \longrightarrow & W^{\vee\vee}\circledcirc\mathsf{S}^r(X)\\ \downarrow{\scriptstyle\gamma_{W\circledcirc X}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}_{W^{\vee\vee}}\circledcirc\gamma_X}\\ (W\circledcirc X)^{\vee\vee} & \longrightarrow & W^{\vee\vee}\circledcirc X^{\vee\vee}\end{array}$$

根据米田引理，等价于对相应图表应用$\mathsf{Hom}(Y,-)$后所得图表的交换性。由 [Sch15的引理 2 中内部 Hom 的左、右模结构之间的兼容性可知，后一个图表是可交换的。10]。

对于一般的 $p,q \geq 1$，论证如下：根据 (2.17)，$\mathsf{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q}$ 的特征可逆对象是 $\alpha_{\mathcal{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q}} \cong \alpha^{\boxtimes p+q}$，这意味着 $\mathsf{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q}$ 也是幺模的，其平凡化由 A 的平凡化诱导。此外，A 的枢轴结构在 $\mathsf{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q}$ 上诱导出一个典范的枢轴结构。因此，根据引理 2.4，只需获得 ${}_p\mathsf{A}_q$ 的右中山函子作为 $\mathsf{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q}$-模函子的一个平凡化。将上文引理 3.3 应用于函子 $\varphi = \otimes^p \boxtimes \otimes^q : \mathsf{A}^{\boxtimes p} \boxtimes (\mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}})^{\boxtimes q} \longrightarrow \mathsf{A} \boxtimes \mathsf{A}^{\otimes \mathrm{op}} = \mathsf{A}^{\mathsf{env}}$（由于 A 是辫状的，该函子是幺半的，参见 [BZBJ18，第 3.3] 节）、$\mathsf{M} = {}_1\mathsf{A}1$，$F = \mathsf{N}^r$（A 的右中山函子）以及 χ 平凡化 $\mathsf{N}^r \cong \mathsf{S}^r \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$（由 $\alpha \cong \mathbb{1}$ 和 $1\mathsf{A}_1$ 的枢轴模结构导出），即可直接得到这一结论。 □

3.2 粘合枢轴结构。任何带边界曲面都可以通过将带粘合到某个圆盘的不交并上得到，或者等价地，通过沿标记边界区间粘合圆盘得到。证明定理 3.11 的下一步，是证明前一节所讨论的带标记圆盘的因子化同调中的枢轴模结构，通过切除等价（2.20）会在粘合所得的因子化同调中诱导出另一个这样的结构。

论证的核心在于仔细分析某个双模范畴 $\mathcal{M}$ 中的枢轴模结构如何下降到平衡 Deligne 积；这一分析本身也具有独立意义。

引理 3.5。设 A 为有限张量范畴，M 为有限 A-双模范畴。平衡 *Deligne* 积 $A \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M$ 中的投射对象，都是形如 $\mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} P$ 的对象的直和项，其中 $P \in M$ 为投射对象。

证明。根据推论 2.1，$\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}$ 中的投射对象是如下形式对象的直和项：$X \boxtimes P$其中 $X \in \mathcal{A}$ 且 $P \in$ 投射对象 $\mathcal{M}$。但在 $\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}$ 中，这样的对象同构于 $\mathbb{1} \boxtimes (X \triangleright P)$，其中$X \triangleright P$ 仍是投射对象。 □

若$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 是有限张量范畴，且$\mathcal{M}$ 是有限左$\mathcal{A}^{\mathsf{env}} \boxtimes \mathcal{B}$-模范畴，请注意，$\mathcal{M}$ 特别也是一个左$\mathcal{A}^{\mathsf{env}}$-和$\mathcal{B}$-模范畴，满足

$$X \triangleright M := (X \boxtimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}}) \triangleright M \qquad , \qquad Y \triangleright M := (\mathbb{1}_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \boxtimes Y) \triangleright M$$

对 $X \in \mathcal{A}^{\mathsf{env}}, Y \in \mathcal{B}$ 和 $M \in M$。注意，在这种情况下，平衡 Deligne 积$\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}$通过 $B \triangleright (A \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M) := A \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} (B \triangleright M)$ 继承了有限左$\mathcal{B}$-模范畴的结构。

命题 3.6。设 A 和 B 是球形有限张量范畴，M 是有限左 $A^{\mathsf{env}} \boxtimes B$-模范畴。

(i) 存在自然同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}}(\mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M, \mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M') \cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(M, \Delta \triangleright M') \ .$$

(ii) 若$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}$ 表示相对于 M 的 B-模结构的内部 *Hom*，则存在自然同构

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}}(\mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M, \mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M') \cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, \Delta \triangleright M') \ .$$

(iii) $A \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M$ 的右中山函子N^r 由 M 的右中山函子在投射对象M 上的限制确定，且在自然同构意义下唯一。更确切地说，我们有自然同构

$$\mathsf{N}^r(\mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} P) \cong \mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} (\alpha \boxtimes \mathbb{1}) \triangleright \mathsf{N}^r_{\mathcal{M}} P$$

对所有投射对象 $P \in M$，其中 $\alpha \in A$ 表示特征可逆对象 。

证明。对于 (i) 我们首先根据定义观察到 $\Delta := \mathsf{End}(\mathbb{1}) \in \underline{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}_{\mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} \mathcal{M}}(\mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M, \mathbb{1} \boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}} M') &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}(\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1}, \Delta \otimes \underline{\mathsf{Hom}}(M, M')) \\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}(\mathbb{1} \boxtimes \mathbb{1}, \underline{\mathsf{Hom}}(M, \Delta \triangleright M')) \\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(M, \Delta \triangleright M') \ , \end{aligned}$$

其中，第一个同构中我们用到了（2.7），第二个同构由（2.5）诱导，第三个同构则是（2.4）。

接下来，对于 (ii)，对每个 $B \in \mathcal{B}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M, \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M')) &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} B \otimes M, \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M')\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(B\otimes M, \Delta\otimes M')\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, \Delta\otimes M'))\ ,\end{aligned}$$

其中第一个同构是（2.4），第二个是 (i)，第三个同样是（2.4）。

最后，对于(iii)，我们有以下同构链，下面将对此作出解释：

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} P, \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} Q) &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(P, \Delta\otimes Q)\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(\Delta\otimes Q, \mathsf{N}^r_{\mathcal{M}}P)^*\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(Q, \Delta^\vee\otimes \mathsf{N}^r_{\mathcal{M}}P)^*\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(Q, \Delta\otimes(\alpha\boxtimes\mathbb{1})\otimes \mathsf{N}^r_{\mathcal{M}}P)^*\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} Q, \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} (\alpha\boxtimes\mathbb{1})\otimes \mathsf{N}^r_{\mathcal{M}}P)^*\end{aligned}$$

第一个同构是 (i)，第二个是（2.11），第三个是（2.3）（此处我们借助球形结构对 ${}^\vee\Delta \cong \Delta^\vee$ 作了识别），第四个由 $\Delta^\vee \cong (\alpha\boxtimes\mathbb{1})\otimes\Delta\cong\Delta\otimes(\alpha\boxtimes\mathbb{1})$ 通过α 从 [MW24c，引理 2.1]，的半编织诱导，第五个同样是 (i)。由（2.11）和米田引理得出结论（$\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 的中山函子由此确定，这一点可由引理 3.5推出）。 □

命题 3.7。设 A 和 B 是幺模枢纽有限张量范畴，且各自的特征可逆对象均配有固定的平凡化；设 M 是一个正合的左 $A^{\mathrm{env}}\boxtimes B$-模范畴，并且将 M 视为 B-模范畴时，它是球形的。那么

(i) $A\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}M$ 的右中山函子可平凡化。*(ii)* $A\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}M$ 是一个正合的 B-模范畴。

证明。由引理 2.4可知，$\mathcal{M}$ 的右中山函子带有一个（$\mathcal{B}$-模）同构 $\mathsf{N}^r_{\mathcal{M}}\cong \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$。这一平凡化与 $\alpha\cong\mathbb{1}$ A 的特征可逆对象的固定平凡化 通过命题 3.6 (iii)诱导出一个平凡化 χ，它对应于 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 的中山函子。这就证明了 (i)。

令 $A\in\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$, $B\in\mathcal{B}$和 $M, M'\in\mathcal{M}$。那么，对于 $\mathcal{B}$-值内部 Hom $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{M}}$，在 $\mathcal{M}$ 中我们得到

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(A\otimes M, M')) &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}((A\boxtimes B)\otimes M, M')\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(B\otimes M, A^\vee\otimes M')\\ &\cong \mathsf{Hom}_{\mathcal{B}}(B, \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, A^\vee\otimes M'))\ ,\end{aligned}$$

因此

$$\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(A\otimes M, M')\cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, A^\vee\otimes M')\ , \tag{3.1}$$

另见 [Sch15，引理 2。18]于是我们得到如下自然同构链：

$$\begin{aligned}\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M, \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M')^\vee &\cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M, \Delta\otimes M')^\vee\\ &\cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(\Delta\otimes M, M')\\ &\cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{M}}(M', \Delta\otimes M)\\ &\cong \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}}(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M', \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M)\ .\end{aligned}$$

这里，第一个和最后一个同构是命题 3.6 (ii)，第二个同构由 $\mathcal{M}$ 的球形模结构诱导，第三个同构则由结合（3.1）以及 Δ 根据（2.9）的自对偶性诱导，因为 $\mathcal{A}$ 是幺模的。由于 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 中的所有对象都具有 $\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}} M$ 的形式，这说明内部 Hom 是正合的，因为它是左正合的，因此其对偶是右正合的。于是，$\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 中的所有对象都是 $\mathcal{B}$-射影对象，即 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 是一个正合的 $\mathcal{B}$-模范畴，这说明 (ii)（或者也可以通过 [EGNO15，命题 7.9.7 (1)] 来论证）。 □

结合（2.20），这立即意味着

推论 3.8。设 A 是一个幺模有限辫带范畴，Σ 是一个紧致定向曲面，其上有 n 个标记边界区间，每个连通分支上至少有一个。那么因子化同调$\int_\Sigma A$ 是一个正合左 $A^{\boxtimes n}$-模范畴。

例 3.9。 在命题 3.7 中令 $\mathcal{M}=\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$，其 $\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$-作用取正则作用（关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的假设仍然成立）。这说明 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$ 都带有各自右中山函子的一个平凡化。通过显式计算后者，我们将证明这些平凡化在典范等价下彼此对应

$$\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{A}^{\mathrm{env}}\xrightarrow{\simeq}\mathcal{A}\quad,\qquad A\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}X\longmapsto X\otimes A\ . \tag{3.2}$$

事实上，(2.16) 和 (2.17) 给出了 $\mathsf{N}^r_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\cong(\alpha^{-1}\boxtimes\alpha^{-1})\ \otimes(-)^{\vee\vee}$，因此根据命题 3.6 (i ii)

$$\mathsf{N}^r(\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}P)\cong\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}(\mathbb{1}\boxtimes\alpha^{-1})\otimes P^{\vee\vee} \tag{3.3}$$

对于 $P\in$ 投射对象$\mathcal{A}^{\mathrm{env}}$。由于 (3.2) 是由幺半群积诱导的，这意味着先前的同构 (3.3) 在典范等价下对应于自然同构 (2.16)。这一结论成立，是因为后者的平凡化以及 (3.3) 的平凡化均由固定同构 $\alpha\cong\mathbb{1}$ 和 $\mathcal{A}$ 的枢轴结构诱导。

3.3 迹函 数。 回顾 (2.11)，每个有限范畴都带有一个 右 N^r-扭曲 *Calabi-Yau* 结构在 th 其含义是存在自然同构

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(P,Q)\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(Q,\mathsf{N}^rP)^*\ ,$$

因此，将 N^r 平凡化为普通函子，就能得到非退化迹

$$\mathsf{tr}^{\mathcal{M}}_P:\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(P,P)\longrightarrow k$$

这些迹具有循环性，因此可下降到 $HH_0(\mathcal{M}):=\int^{X\in\text{投射对象}\mathcal{M}}\mathsf{End}_{\mathcal{M}}(X)$，并汇集为一个映射

$$\mathsf{tr}^{\mathcal{M}}:HH_0(\mathcal{M})\longrightarrow k\ .$$

对于 $P\in$投射对象 $\mathcal{M}$ 和 $g\colon P\longrightarrow P$，我们将迹记为

$$\mathsf{tr}^{\mathcal{M}}\left(\ \begin{array}{c}P\\ \boxed{g}\\ P\end{array}\ \right)$$

在图示演算中，图形应自下而上阅读。

现在假设 $\mathcal{M}$ 实际上是刚性有限张量范畴 $\mathcal{A}$上的一个模。 [SS23，第 5 节。1],与 N^r 的平凡化相对应的 $\mathcal{A}$-模函子迹恰好是满足偏迹性质的那些迹

$$\mathsf{tr}\,(f)=\mathsf{tr}\,(\mathsf{cl}_{X|P}(f))\ , \tag{3.4}$$

对所有 $X\in\mathcal{A}$、 $P\in$ 投射对象$\mathcal{M}$ 和 $f\colon\ X\otimes P\longrightarrow X\otimes P$，对于闭合算子

$$\mathsf{cl}_{X|P}:\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(X\otimes P,X\otimes P)\cong\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(P,(X^\vee\otimes X)\otimes P)\xrightarrow{b_X}\mathsf{Hom}_{\mathcal{M}}(P,P)$$

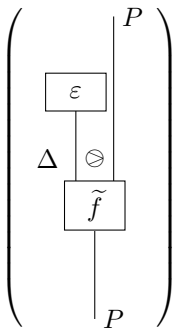
命题3.10. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是幺模枢纽有限张量范畴，且分别固定了其特征可逆对象的平凡化。设 $\mathcal{M}$ 是一个正合左 $\mathcal{A}^{\mathrm{env}}\boxtimes\mathcal{B}$-模范畴，并且将 $\mathcal{M}$ 视为 $\mathcal{B}$-模范畴时，它是球形的。那么，命题 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 中给出的右中山函子的平凡化 3.7 *(i)* 实际上是作为 $\mathcal{B}$-模函子的平凡化，也就是说，$\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$从 $\mathcal{M}$继承了枢轴模结构。

证明。 首先注意到 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}\mathcal{M}$ 根据命题 3.7 (ii)是正合的。根据上述讨论，只需证明命题 3.7(i) 的平凡化所关联的迹满足偏迹性质。根据引理 3.5，只需对自同态 $f\colon\ \mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}P\longrightarrow\mathbb{1}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathrm{env}}}P$ 满足$P\in$ 投射对象$\mathcal{M}$的情形进行验证。

从 co 命题中的构造3.6以及迹与下列对象的平凡化之间的对应关系

中的中山函子 [SS23, SW23], 可以得到

$$\mathsf{tr}^{\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}\mathcal{M}}(f) = \mathsf{tr}^{\mathcal{M}}\left(\right. \quad , \tag{3.5}$$



其中

- $\widetilde{f}$: $P \longrightarrow \Delta \circledcirc P$ 是 f 在命题 3.6 (i)的同构下的像,
- ε: $\Delta \longrightarrow \mathbb{1}\boxtimes\mathbb{1}$ 是 Δ 的 Frobenius 形式（根据 [Shi23，定理 3.14]，它是一个对称 Frobenius 代数）。

在此描述中，显然该迹相对于剩余的3.4式 $\mathcal{B}$-作用具有偏迹性质，因为根据假设，$\mathsf{tr}^{\mathcal{M}}$已经具有此性质，而应用 ε 不会改变这一点。证明完毕。

□

3.4 主要结果。 证明了球形模结构如何在平衡 Deligne 积（一类特殊情形）上诱导出另一种此类结构后，我们便可以证明关于因子化同调的球形模结构的主要结果。

定理 3.11。设 A 是一个幺模有限带状范畴，并为其特征可逆对象选定平凡化 $\alpha \cong \mathbb{1}$；设 Σ 是一个紧致定向曲面，其上有 n 个标记边界区间，每个连通分支至少有一个。那么因子化同调 $\int_{\Sigma}A$ 自带一个球形左 $A^{\boxtimes n}$-模范畴结构。

证明。 不失一般性，我们可以假设 Σ 是连通的。若 Σ 是一个圆盘，则由命题3.4可知该陈述成立。一般情况下，我们为曲面选取一个带状图模型，必要的背景知识可参见例如 [ESK24]。曲面 R 的带状图 Σ 是一个有限图，收缩所有内部边后得到的图是一个花冠图，其 n 支腿与 Σ的边界区间相对应，并附有$\widetilde{}$的每个顶点的循环序资料，以及一个 R 之间的对应关系 $|R| \xrightarrow{=} \Sigma$，将其几何实现所得的曲面 R 与 Σ相对应。更具体地说， m 的顶点 R 及其循环序被加厚成圆盘，再按照 R的规定沿区间粘合。

带状图 R 结合因子化同调的切除性质，提供了一种构造 $\int_{\Sigma}\mathsf{A}$ 的方法：取若干个定义 3.1 中的模 ${}_{p}\mathsf{A}_{q}$，即对 R 的每个顶点各取一个，并取相对张量积 $\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}$，即对每次沿区间粘合各取一个。由此得到一个 $\mathsf{A}^{\boxtimes n}$-模范畴 $\mathsf{C}(\Sigma;\, R)$，以及 $\mathsf{A}^{\boxtimes n}$-模之间的一个等价 $\varphi_R\colon \mathsf{C}(\Sigma;\, R) \xrightarrow{\simeq} \int_{\Sigma}\mathsf{A}$。反复应用命题 3.7，可在 $\mathsf{C}(\Sigma;\, R)$ 上得到一个球形 $\mathsf{A}^{\boxtimes n}$-模结构。于是，通过 φ_R， $\int_{\Sigma}\mathsf{A}$ 也成为一个球形 $\mathsf{A}^{\boxtimes n}$-模范畴。

还需证明这一点与带状图模型 R 无关。假设我们有另一个用于 Σ 的带状图模型 R'，那么 R' 可由 R 经过一系列树收缩得到。不失一般性，我们可以假设 R' 是通过收缩一条连接两个不同顶点的边从 R 得到的。这给出了一个等价 $\gamma\colon \mathsf{C}(\Sigma;\, R) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{C}(\Sigma;\, R')$，即消去一个相对张量积 $\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}\mathsf{A}^{\mathsf{env}}$ 的等价，并且满足 $\varphi_{R'} \circ \gamma = \varphi_R$。只需验证 γ 保持 $\mathsf{C}(\Sigma;\, R)$ 和 $\mathsf{C}(\Sigma;\, R')$ 上右中山函子的平凡化，而该平凡化给出了球形结构；这一点已在例 3.9 中指出。

□

注 3.12。如果 $\mathcal{A}$ 是模的，并且 Σ 每个边界分支恰有一个区间，那么任意把手体 H 对于 Σ 都会给出一个等价 $\int_{\Sigma}\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}^{\boxtimes n}$ 作为 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模范畴，其中 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-作用在$\mathcal{A}^{\boxtimes n}$ 上是正则作用 [Woi25b，定理 6。5]。在这种情况下，定理 3.11 显然成立。

推论 3.13 （模不变性）。 在定理 *3.11* 的假设下，保持定向和参数化区间的 Σ 微分同胚群作用在 $\int_{\Sigma}\mathcal{A}$ 上，且作用由保持枢轴模结构的 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模自同态给出。

证明。若 $f:\Sigma\longrightarrow\Sigma$ 是保持定向和边界参数化的微分同胚，则诱导映射 $f_*:\int_\Sigma \mathsf{A}\xrightarrow{\simeq}\int_\Sigma \mathsf{A}$ 自然带有一个 $\mathsf{A}^{\boxtimes n}$-模结构，参见例如 [BW22，注 4.5]。此外，f_* 将 $\int_\Sigma \mathsf{A}$ 上从某个带状图模型 $\mathsf{C}(\Sigma;R)\xrightarrow{\simeq}\int_\Sigma \mathsf{A}$ 继承的枢轴结构，映射为从 Σ 的带状图模型继承的枢轴结构；该模型具有相同的带状图，但其识别映射 $|R|\xrightarrow{\cong}\Sigma$ 与 f 复合。不过，由定理 3.11 的证明中所观察到的带状图模型无关性，这给出了相同的枢轴模结构。因此，f_* 也与枢轴模结构相容。

□

4 应用

在最后这一节中，我们说明主要结果的一些应用：我们从因子化同调中得到对称 Frobenius 代数，并用它们为开共形场论构造一致的关联函数系统。此外，我们还构造模不变修正迹。所有这些应用已在引言中作过说明，因此本节将简短介绍，只陈述结果。

4.1 模空间代数上的 *Frobenius* 结构。若$\mathcal{A}$是一个刚性有限张量范畴，且 $F=(F,\ \mu,\ \eta)$ 是$\mathcal{A}$中的代数对象，则 F 上的*Frobenius* 结构是一个态射 $\lambda:F\longrightarrow\mathbb{1}$，属于$\mathcal{C}$，称为*Frobenius* 形式，使得复合映射

$$\psi:F\xrightarrow{\mathrm{id}_F\otimes b_F}F\otimes F\otimes F^\vee\xrightarrow{\lambda\circ\mu\otimes\mathrm{id}_{F^\vee}}F^\vee$$

是一个同构。若 Frobenius 代数 $(F,\ \lambda)$ 还是对称的，则称$F\xrightarrow{\omega_F}F^{\vee\vee}\xrightarrow{\psi^\vee}F^\vee$与 ψ一致，其中 $\omega:\mathrm{id}\cong(-)^{\vee\vee}$表示$\mathcal{A}$的枢轴结构。更多背景请参阅 [FS08]。

作为我们主要结果的推论，下面我们将在模空间代数 $\mathfrak{a}_\Sigma:=\mathsf{End}(\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma)\in\mathcal{A}^{\boxtimes n}$ 上赋予对称 Frobenius 结构，其中 $\mathcal{A}$ 是一个幺模有限带状范畴，并且关于 Σ 的假设与定理 3.11中的假设相同。根据 [BZBJ18，第 5 节，4], 模空间代数 $\mathfrak{a}_\Sigma$ 承载一个映射类群作用，该作用由 $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma$ 的同伦不动点结构诱导，而该结构对应于因子化同调上的规范微分同胚群作用。

为进一步说明这一代数的重要性，设 $n=1$ 和 Σ 是连通的。那么，作为 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，我们有 $\mathfrak{a}_\Sigma\cong\mathbb{F}^{\otimes 2g+r-1}$ 其中 $\mathbb{F}=\int^{X\in\mathcal{A}}X^\vee\otimes X$ 若 Σ 具有亏格 g 并且有 r 个边界分支。该对象的重要性源于 [BZBJ18，定理 5，14], 其中证明了存在左 $\mathcal{A}$-模范畴之间的等价

$$\int_\Sigma\mathcal{A}\simeq\mathsf{mod}_{\mathcal{A}}\text{-}\mathfrak{a}_\Sigma. \tag{4.1}$$

推论 4.1。设 A 是一个幺模有限带状范畴，并选定其特殊可逆对象的平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$；设 Σ 是一个带有 n 个标记边界区间的紧致定向曲面，且每个连通分支至少有一个。则模空间代数 $\mathfrak{a}_\Sigma\in A^{\boxtimes n}$ 自带对称 *Frobenius* 代数结构，映射类群在 $\mathfrak{a}_\Sigma$ 上的作用保持 *Frobenius* 结构。

证明。代数 $\mathfrak{a}_\Sigma:=\mathsf{End}(\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma)$ 借助 [Shi23，定理 3。15]，从定理 3.11的球形 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-结构继承了对称 Frobenius 结构。映射类群作用保持 Frobenius 结构，这由推论 3.13得出。

□

定理 3.11 还使我们能够对模空间代数的中心作出论述，这里的中心概念如 [FS23]:

推论 4.2。设 A 为一个幺模有限带状范畴，并为特征可逆对象选定平凡化 $\alpha\cong\mathbb{1}$，设 Σ 为一个带有一个标记边界区间的紧致、有向、连通曲面。那么中心

$$Z(\mathfrak{a}_\Sigma)=\int_{X\in\mathsf{mod}_{\mathcal{A}}\text{-}\mathfrak{a}_\Sigma}\underline{\mathsf{End}}(X)\in Z(\mathcal{A}) \tag{4.2}$$

是 *Drinfeld* 中心 Z（A）中的对称交换 *Frobenius* 代数。

证明。这立即由定理 3.11、等价式（4.1）以及 [FS23推论 39]得出。 □

4.2 开关联函数。 如引言中所述，推论 4.1 对开关联函数有如下推论：

推论 4.3。设 A 为幺模有限带状范畴，并记 $A_!$ 为唯一的开模函子，其在带标记边界区间的圆盘上的评价由作为刚性有限张量范畴的 A 给出。固定一个带有单个标记边界区间的紧致连通定向曲面 Ω。那么，模空间代数 $\mathfrak{a}_\Omega$ 导出一个一致的开关联函数系统

$$\xi^\Omega_\Sigma \in \mathcal{A}_!(\Sigma; \mathfrak{a}_\Omega, \dots, \mathfrak{a}_\Omega) \quad \textit{for all} \quad \Sigma \in \mathsf{O}(n)$$

从而定义一个完整的开共形场论 $(A_!, \xi^\Omega)$。具体而言， ξ^Ω_Σ 的数据等价于

(i) 一个映射

$$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma \longrightarrow \mathfrak{a}_\Omega^{\boxtimes n} \circlearrowright \mathcal{O}^{\mathcal{A}}_\Sigma$$

属于 $\int_\Sigma A$，且关于映射类群 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 的作用保持不变，其中该作用来自 $O^{\mathcal{A}}_\Sigma$ 的同伦不动点结构，

(ii) 一个映射

$$\mathfrak{a}_\Omega^{\boxtimes n} \longrightarrow \mathfrak{a}_\Sigma$$

在 $A^{\boxtimes n}$ 中，该对象在由 *Alekseev-Grosse-Schomerus* 构造、并由 *Ben-Zvi-Brochier-Jordan* 推广的 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 对 $\mathfrak{a}_\Sigma$ 的作用下保持不变。

证明。 主要结论由推论4.1 得出，这是因为[Woi25c，定理 8 中对开关联函数的分类。3]。现在，将其与 [Woi25a，定理 6 相结合，即可得到第一点。1]，第二点则由 (i) 结合(2.3) 以及其弗罗贝尼乌斯代数结构所赋予的自对偶性立即得出 $\mathfrak{a}_\Omega$。 □

例 4.4。在推论 4.3 中，假设 A 是由有限维带状 Hopf 代数 H 上的有限维模构成的。那么， $\mathfrak{a}_\Omega$ 的余评价 $k \longrightarrow \mathfrak{a}^*_\Omega \otimes \mathfrak{a}_\Omega$ 将 $1 \in k$ 映至 $\sum_i \alpha_i \otimes v_i$，其中 $\alpha_i \in \mathfrak{a}^*_\Omega$ 且 $v_i \in \mathfrak{a}_\Omega$。现在我们集中讨论 Σ 为带有一个标记边界区间的环带这一情形。在这种情况下， $\mathfrak{a}_\Sigma$ 是带有余伴随作用的 H 的对偶： $\mathfrak{a}_\Sigma = H^*_{\mathrm{coadj}}$ [BZBJ18]，，另见 (4.1) 之前的说明。若以 $\circ$ 表示 $\mathfrak{a}_\Omega$ 上的乘积（源于内部自同态的复合），那么根据 [Woi25c，例 9.1]，中的计算方法，我们可推得环带的开关联函数对应于映射

$$\mathfrak{a}_\Omega \longrightarrow H^*_{\mathrm{coadj}}\,, \quad a \longmapsto \sum_i \alpha_i(- \cdot (v_i \circ a))\,,$$

其中 $\cdot$ 是 H中的乘法。为了得到 $\Sigma = \mathbb{T}^2_1$（具有一个边界分支和一个标记区间的环面）对应的映射，基本上需要对 H^*_{coadj}的两个副本重复这一过程。由此便可恢复对称 Frobenius 代数 $\mathfrak{a}_\Omega$的椭圆类函数，详见 [Woi25a 第 7 节。6]

注 4.5。由 [Woi25c 定理 8.3 和第 12]，节可知， Ω的映射类群通过 $(\mathcal{A}_!, \xi^\Omega)$ 的自同构作用。

注 4.6。记 $\mathfrak{F}_{Z(\mathcal{A})}$ 为 Z(A) 的 Lyubashenko 模函子 [Lyu95b, Lyu95a, Lyu96]，其中 Z(A) 是 A 的 Drinfeld 中心。那么 [MW24b 定理 4.3] 蕴含，推论 4.3 中的开关联函数对应于 $\mathfrak{F}_{Z(\mathcal{A})}(\Sigma; L\mathfrak{a}_\Omega, \dots, L\mathfrak{a}_\Omega)$ 中的映射类群不变向量，其中 L : A $\longrightarrow$ Z(A) 是遗忘函子 U : Z(A) $\longrightarrow$ A 的左伴随。得益于 $\mathfrak{F}_{Z(\mathcal{A})}$ [MSWY23]，的弦网模型，这些向量也可视为映射类群不变的弦网。

4.3 模不变修正迹。借助我们主要结果（推论 3.13）中枢轴结构的模不变性，我们现在可以构造模不变迹；正如引言中所述，这些迹可视为在曲面上对修正迹进行积分：

定理 4.7 （模不变修正迹）。设 A 是一个幺模有限带状范畴，并选定特征可逆对象的一个平凡化 $\alpha \cong \mathbb{1}$；设 Σ 是一个紧致定向曲面，其具有 n 个参数化边界区间，每个连通分支至少有一个。则存在迹映射

$$\mathsf{tr}^\Sigma : HH_0\left(\int_\Sigma \mathcal{A}\right) = \bigoplus_{P \in \mathsf{Proj}\int_\Sigma \mathcal{A}} \mathsf{Hom}_{\int_\Sigma \mathcal{A}}(P,P) \Big/ \sim \longrightarrow k \tag{4.3}$$

源自球形 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模结构，来自定理 *3.11*，并具有以下性质：

(N) 这些迹在以下意义下是非退化的：这些配对

$$\mathsf{Hom}_{\int_\Sigma \mathcal{A}}(P,Q)\otimes \mathsf{Hom}_{\int_\Sigma \mathcal{A}}(Q,P)\longrightarrow k\ ,\quad f\otimes g\longmapsto \mathsf{tr}^\Sigma(g\circ f)=\mathsf{tr}^\Sigma(f\circ g)$$

对于 $P,Q\in$ 投射对象 $\int_\Sigma A$，均为非退化的。

(M) 这些迹是模不变的，即在映射类群 $\mathsf{Map}(\Sigma)$ 对$HH_0\left(\int_\Sigma A\right)$的作用下保持不变。

(L) 这些迹具有局部性，即若 Σ' <*style id='4}*由 Σ 将一对带标记区间粘合而成，则切除等价 $\mathcal{A}\boxtimes_{\mathcal{A}^{\mathsf{env}}}\int_\Sigma \mathcal{A}\ \simeq \int_{\Sigma'}\mathcal{A}$ 保持这些迹（在左侧，我们使用源自命题3.7的迹）。

(P) 这些迹具有高亏格偏迹性质，即对每个 $X\in A^{\boxtimes n}$, $P\in$ 投射对象 $\int_\Sigma A$ 和$f:\ X\otimes P\longrightarrow X\otimes P$，我们有

$$\mathsf{tr}^\Sigma(f)=\mathsf{tr}^\Sigma(\mathsf{cl}_{X|P}(f))\ ,$$

对于 *Shibata-Shimizu* 闭合算子

$$\mathsf{cl}_{X|P}:\mathsf{Hom}_{\int_\Sigma \mathcal{A}}(X\otimes P,X\otimes P)\longrightarrow \mathsf{Hom}_{\int_\Sigma \mathcal{A}}(P,P)$$

对于球形 $A^{\boxtimes n}$-模 $\int_\Sigma A$。

限制在带标记圆盘上等价于 Proj$A$ 上的双侧修正迹。反过来，给定 Proj$A$ 上的修正迹，它将唯一地扩展为 $\int_\Sigma A$ 上满足 *(N)* 和 *(L)* 的一族迹函数；此时条件 *(M)* 和 *(P)* 自动成立。

证明。 对 $\int_\Sigma\mathcal{A}$ 的中山函子进行平凡化，从而得到球形 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模结构，并由此得到迹（4.3）。性质 (N) 是显然的，而 (P) 仅仅是这一平凡化作为模函子进行平凡化这一事实的结果，再次应用 [SS23第 5 节。1]性质 (M) 是推论 3.13 的结果，而 (L) 按构造成立（因为我们通过命题 3.7 拼接球形结构）。

限制在圆盘上，恰好是相对于球形结构、作为模函子的 N^{r} 的平凡化；根据 [SS23、SW23]，这恰好等价于 Proj$\mathcal{A}$ 上的双侧修正迹。这样的平凡化能够以唯一的方式从圆盘扩展到曲面，并满足 (N) 和 (L)。□

备注 4.8。 若 $\mathcal{A}$ 不仅是幺模有限带状范畴，而且实际上是模范畴，那么映射类群会通过函子作用于 $\int_\Sigma\mathcal{A}$；这些函子作为 $\mathcal{A}^{\boxtimes n}$-模映射时，都同构于恒等函子 [BW22，命题 7。7]（不过这种同构并非典范的——事实上，这种作用相当于映射类群上的一个 2-余循环，用以编码框架异常）。在这种情况下，(M) 对任意循环迹都成立；但如果 $\mathcal{A}$ 不是模范畴，那么映射类群在因子化同调上的作用并非平凡：事实上，若作用平凡，则 $\mathcal{A}$作为循环带框架的 E_2-代数将是连通的，因此根据 [BW22]的主要结果，它可延拓为一个模函子。但这样一来 [Woi25b，命题 5。8] 便意味着 $\mathcal{A}$ 实际上是模范畴（因为我们假设 $\mathcal{A}$ 是有限带状且幺模）。

参考文献

[AF15] D. Ayala 和 J. Francis。《拓扑流形的因子化同调》。*J. Top.*，8(4):1045–1084，2015。[AGS96] A. Alekseev、H. Grosse 和 V. Schomerus。《哈密顿 Chern-Simons 理论的组合量子化 II》。*Comm. Math.Phys.*，174(3):561–604，1996。[Ale94] A. Alekseev。《哈密顿 Chern-Simons 理论的可积性》。*St. Petersburg Math. J.*，6(2):241– 253，1994。[AS96] A. Alekseev 和 V. Schomerus。《Chern-Simons 可观测量的表示论》。*Duke Math. J.*，85(2):447–510，1996。[BD13] M. Boyarchenko 和 V. Drinfeld。《Grothendieck 和 Verdier 思想下的对偶形式体系》。*Quan- tum Top.*，4(4):447–489，2013。[BH24] J. Brown 和 B. Haïoun。《非半单环境中的图 skein 范畴》。arXiv:

2406 08956 [ ], .

2024

math.QA .[BW22] A. Brochier 和 L. Woike。《通过因子化同调对模函子进行分类》。已被*Geom. Top.*接收发表，arXiv:2212.11259 [math.QA], 2022。

[BZBJ18] D. Ben-Zvi、A. Brochier 和 D. Jordan。《在曲面上积分量子群》。J. Top.，11(4):874– 917，2018。[CGPM12] F. Costantino、N. Geer 和 Patureau-Mirand。《通过链环手术表示和非半单范畴研究三维流形的量子不变量》。J. Top.，7:1005–1053，2012。[Coo23] J. Cooke。《图 skein 范畴的切除与因子化同调》。Adv. Math.，414:108848，2023。[Cos07] K. Costello。《拓扑共形场论与 Calabi-Yau 范畴》。Adv. Math.，210 214，2007 1 165( ): – 。[Del90] P. Deligne。《坦纳克范畴》。载于《Grothendieck 纪念文集》第 II 卷，数学进展系列第 87 卷，第 111–195 页。Birkhäuser Boston，Boston，MA，1990。[DSPS19] C. L. Douglas、C. Schommer-Pries 和 N. Snyder。《模范畴的平衡张量积》。Kyoto J. Math.，59(1):167–179，2019。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。《张量范畴》，数学调查与专著第 205 卷。美国数学会，Providence，RI，2015。[ENO04] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《有限张量范畴中 Radford 公式的一个类比》。Int. Math. Res. Not.，2004(54):2915–2933，2004。[ENO10] P. Etingof、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《融合范畴与同伦论》。Quantum Topol.，1(3):209–273，2010。附录由 Ehud Meir 撰写。[EO04] P. Etingof 和 V. Ostrik。《有限张量范畴》。Mosc. Math. J.，4(3):627–654，2004。[ESK24] D. Egas Santander 和 S. Kuper。《比较模空间的组合模型及其紧化》。Alg. Geom. Top.，24(2):595–654，2024。[FFRS08] J. Fjelstad、J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert。《给定开态代数的开闭有理共形场论的唯一性》。Adv. Theor. Math. Phys.，12:1283–1375，2008。[FRS02] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert。《有理共形场论关联函数的拓扑场论构造。I：配分函数》。Nucl. Phys. B，646:353–497，2002。[FRS10a] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert。《二维有理共形场论的二十五年》。J. Math. Phys.，51(015210)，2010。[FRS10b] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert。《二维有理共形场论的二十五年》。J. Math. Phys.，51(015210)，2010。[FS08] J. Fuchs 和 C. Stigner。《刚性幺半范畴中的弗罗贝尼乌斯代数》。Arab. J. Science Engineering，33(2C):175–191，2008。[FS21] J. Fuchs 和 C. Schweigert。《借助球形模范畴从边界构造有限共形场论的体理论》。Nucl. Phys. B，967:115392，2021。[FS23] J. Fuchs 和 C. Schweigert。《Drinfeld 中心中的内自然变换与弗罗贝尼乌斯代数》。Transf. Groups，28:733–768，2023。[FSS20] J. Fuchs、G. Schaumann 和 C. Schweigert。《有限范畴的 Eilenberg-Watts 演算与双模 Radford 定理》。Trans. Amer. Math. Soc.，373(1):1–40，2020。[FSWY25] J. Fuchs、C. Schweigert、S. Wood 和 Y. Yang。《二维共形场论中的代数结构》。载于 R. Szabo 和 M. Bojowald 编，《数学物理百科全书》（第二版），第 604–617 页。爱思唯尔，2025。[FSY22] J. Fuchs、C. Schweigert 和 Y. Yang。《有理共形场论关联函数的弦网构造》，SpringerBriefs Math. Phys. 第 45 卷。Springer，2022。[Gia11] J. Giansiracusa。《带框架的小二维圆盘歌剧与把手体微分同胚》。J. Top.，4(4):919– 941，2011。[Gin15] G. Ginot。《因子化代数、因子化同调及其应用札记》。载于 D. Calaque 和 T. Strobl 编，《数学物理研究》，第 429–552 页。Springer，2015。[GK98] E. Getzler 和 M. Kapranov。《模 operad》。Compositio Math.，110:65–125，1998。[GKPM22] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。《（非幺模）球形范畴中的 M-迹》。Algebr. Represent. Theor.（在线优先发表），25:759–776，2022。[GPMT09] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 V. Turaev。《修正量子维数与重新归一化链环不变量》。Compositio Math.，145(1):196–212，2009。[Kas15] C. Kassel。《量子群》，数学研究生教材第 155 卷。Springer，2015。[Laz01] C. I. Lazaroiu。《二维开闭拓扑场论的结构》。Nucl. Phys. B，603(3):497–530，2001。[Lur] J. Lurie。《高阶代数》。可见 https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。

[Lyu95a] V. V. Lyubashenko。《单位根处量子群给出的三维流形不变量与映射类群的射影表示》。Comm. Math. Phys., 172:467–516, 1995.[Lyu95b] V. V. Lyubashenko。《张量范畴的模变换》。J. Pure Appl. Alg., 98 327, 1995 279: – .[Lyu96] V. V. Lyubashenko。《作为模范畴的带状阿贝尔范畴》。J. Knot Theory and its Ramif., 05(03):311–403, 1996.[ML98] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》，数学研究生教材第 5 卷。Springer, 1998。第二版。[MSWY23] L. Müller、C. Schweigert、L. Woike 和 Y. Yang。《通过非半单弦网构造 Drinfeld 中心的 Lyubashenko 模函子》。arXiv:2312.140109 [math.QA], 2023.[MW23] L. Müller 和 L. Woike。《循环带框小圆盘代数、Grothendieck-Verdier 对偶与把手体群表示》。Quart. J. Math., 74(1):163–245, 2023.[MW24a] L. Müller 和 L. Woike。《容许 skein 模与环形函子：比较》。已接受发表于 Ann. Fac. Sci. Toulouse。arXiv:2409.17047 [math.QA], 2024.[MW24b] L. Müller 和 L. Woike。《范畴化开拓扑场论》。已接受发表于 Proc. AMS。arXiv:2406.11605 [math.QA], 2024.[MW24c] L. Müller 和 L. Woike。《特征可逆对象作为 Drinfeld 中心中的带状对偶对象》。Selecta Math. New Ser., 30(98), 2024.[Sch13] G. Schaumann。《融合范畴上模范畴的迹》。J. Alg., 379:382–425, 2013.[Sch15] G. Schaumann。《枢轴三范畴与内积模的范畴化》。Algebr. Represent. Theory, 18(6):1407–1479, 2015.[Shi17] K. Shimizu。《关于幺模有限张量范畴》。Int. Math. Res. Not., 2017(1):277–322, 2017.[Shi23] K. Shimizu。《余模代数的相对 Serre 函子》。J. Alg., 634:237–305, 2023.[SS23] Taiki Shibata 和 Kenichi Shimizu。《修正迹与中山函子》。Algebr. Represent. Theory, 26(2):513–551, 2023.[SW03] P. Salvatore 和 N. Wahl。《带框圆盘算子与 Batalin-Vilkovisky 代数》。Quart. J. Math., 54:213–231, 2003.[SW23] C. Schweigert 和 L. Woike。《有限张量范畴的迹场论》。Alg. Rep. Theory, 26:1931–1949, 2023.[Woi25a] L. Woike。《有限刚性对数共形场论中关联函数的构造》。arXiv:2507.22841 [math.QA], 2025.[Woi25b] L. Woike。《共形块空间的反射等变性与海森堡绘景》。arXiv:2507.22820 [math.QA], 2025.[Woi25c] L. Woike。《循环与模微观宇宙原理》。Canad. J. Math.（在线优先发表），2025。

Université Bourgogne Europe，CNRS，勃艮第数学研究所（UMR 5584），F-21000 第戎，法国