arXiv:2512.19754v1 [math.HO] 19 Dec 2025

伯纳德·马斯基特纪念文*

James W. Anderson † Ara Basmajian ‡ Ruben Hidalgo § Perry Susskind ¶
Edward C. Taylor ‖

2025年12月24日

他的生平与工作

Bernard Maskit（我们都称他为 Bernie）于1935年5月27日出生，2024年3月15日因新冠肺炎加重及并发症去世。他在纽约市长大，就读于布朗克斯的德威特·克林顿高中，并在纽约大学完成本科学业。Bernie于1964年在纽约大学师从著名复分析学家 Lipman Bers，完成了博士学位论文《论克莱因的组合定理》（[MAC+95], [KM97]）。他的职业生涯始于1964至1965年在高等研究院的博士后研究，随后于1965年至1972年在麻省理工学院担任助理教授。此后，他前往纽约州立大学石溪分校（现为石溪大学），并一直任职至2008年退休，成为荣休教授。Bernie曾受邀在1974年国际数学家大会上作关于克莱因群的报告，并于2012年成为美国数学会首届会士。他指导过12名博士生，截至2月共有45名学术后代——

*本文的较短版本刊登于2025年8月的 *The Notices*。[ABH+25]

†James W. Anderson 是南安普顿大学（英国）的数学教授。他的电子邮箱地址是 J.W.Anderson@soton.ac.uk

‡Ara Basmajian 是纽约市立大学研究生中心和亨特学院的数学教授。他的电子邮箱地址是 abasmajian@gc.cuny.edu§Ruben Hidalgo 是特木科拉弗龙特拉大学的数学教授。他的电子邮箱地址是 ruben.hidalgo@ufrontera.cl

¶Perry Susskind 是康涅狄格学院的数学教授。他的电子邮箱地址是 pdsus@conncoll.edu

‖Edward C. Taylor 是一位退休的数学教授，于 2025年3月10日去世

—— 2025[1]。

尽管他的全部数学工作本身就具有严肃而深远的意义，但重要的是，Maskit 的数学著作也是一座不可或缺的桥梁，连接着一条漫长的道路：这条道路可以追溯到曲面拓扑类型的分类，其起点是 M¨obius 于 1861年开展的工作，以及 Klein、福克斯、克贝和 Poincar´e 的工作，并在其中证明了一致化定理。也就是说，任意黎曼曲面[2] S 都有一个正则全纯覆盖π： $D \to D/G = S$，其中 D 是黎曼球面 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$、复平面 $\mathbb{C}$或上半平面 $\mathbb{H}^2$之一，而 G 是作用于D上的一个真不连续[3] 离散群，由 M¨obius 变换构成。这条漫长道路的另一端是威廉·瑟斯顿提出的几何化猜想，其证明由格里戈里·佩雷尔曼于 2003年完成。这是一个在几何学和拓扑学领域具有里程碑意义的结果，发生于 20 世纪末和 21 世纪初，并由此证明了 Poincar´e 猜想。

先给出一些定义，以便我们更容易地讨论 Maskit 的工作。克莱因群 G是 $PSL(2, \mathbb{C})$ 的一个离散子群，可视为作用于黎曼球面的 M¨obius 变换。黎曼球面上由 G 作用且真不连续的那一部分——即正则集

[1]https://genealogy.math.ndsu.nodak.edu[2]黎曼曲面是一个一维复流形，可以理解为一个带有共形结构或双曲度量结构的曲面。[3] G 对 $\Omega(G)$ 的作用是 *properly discontinuous* ，如果对于 G 中的除有限多个元素外的所有元素，任意紧集 $K \subset \Omega(G)$都会被移到与其自身不相交的位置。

Ω(G)——若非空，则是由黎曼曲面组成的集合。

称为极限集的 G, Λ(G)，是 $\mathbb{C}$中ˆΩ(G)的补集。对于任何非虚阿贝尔群 G,Λ(G)是点在 G, 作用下的轨道的聚点集合，并且是 $\mathbb{C}$. 的一个闭的完美子集。较早的术语——我们今后将采用这一术语——要求群 G必须有非空的正则集，才能称为克莱因群。用现代术语来说，这些群称为第二类克莱因群。Maskit的研究主要关注的正是这类群。为便于阐述，今后我们假定克莱因群均为无挠群（即不含椭圆元素）。

一个福克斯型群 G 在 PSL(2, $\mathbb{C}$)中共轭于 PSL(2, $\mathbb{R}$)的一个离散子群，而后者作用于黎曼球面中的上半平面 $\mathbb{H}^2$ 。上半平面被福克斯群作用后的商是一个黎曼曲面。福克斯群有一套广泛的理论，可以将其视为黎曼曲面的解析理论。

Bernie 在克莱因群、低维拓扑、复分析和双曲流形几何领域的贡献包括平面性定理（[Mas65b]）、对 Schottky 群的研究（[Mas67]）、克莱因–Maskit 组合定理（（[Mas65a,Mas68, Mas71a]））以及庞加莱多面体定理（[Mas71b]）。Maskit 还研究了黎曼曲面的模空间（变形空间），包括 Teichmüller 空间、Schottky 空间，以及更一般的克莱因群变形理论。Maskit 的研究还包括关于多种克莱因群的重要成果：克贝群、退化群、分支子群、Schottky 群和函数群。Maskit 早期运用平面性定理的工作，还针对 Papakyriakopoulos 在 20 世纪 60 年代初提出的、将庞加莱猜想归结为其他猜想的若干推论，给出了三个反例（[Pap62], [Mas63], [Pap63]）。近年来，平面性定理被用于描述某些轨形基本群及几何有限克莱因群的平面覆盖上的同胚群。事实上，这一定理在这一领域持续发挥作用，可见于 Bowditch 最近给出的一个新证明 [Bow22]。

Maskit 职业生涯的一个主要方向，是探究如何以不同方式构造克莱因群（或福克斯群），从而生成黎曼曲面的集合。为了开展这一研究计划，Maskit 不仅考察给定克莱因群 G在正则集上的作用，还研究极限集 Λ(G)的结构，以及 G在 Λ(G)上的作用。 用于生成离散群的技术包括组合定理、Poincar´é 多面体定理，以及 Schottky 群的构造。克莱因群的非福克斯型例子包括拟福克斯群（福克斯群的拟共形变形）和 Schottky 群。

下文将讨论 Maskit 关于 Schottky 群、组合定理、Poincar´é 多面体定理的研究，以及他与 Alan Beardon 的简要合作成果。

若 A_i和 B_i、 $i = 1, \ldots\ldots, g$是复球面上两两不相交的若尔当曲线，它们围成一个连通集 D，并且 A_i 的外部（即包含 D的那个分支）通过莫比乌斯变换 h_i映到B_i 的内部，其中 $i = 1, \ldots\ldots, g$，那么由 $h_1, \ldots\ldots, h_g$生成的群 G 是克莱因群，其正则集非空，在这些 g 生成元上自由，并以 D 为基本域。此外，G的所有非单位元都是双曲型的；当 $g \geq 2$ 时， G 的极限集是康托尔集。以这种方式构造的克莱因群称为*Schottky*群，且Ω(G)/G是一个亏格为 g 的黎曼曲面（而($\mathbb{H}^3 \cup$Ω(G))/G 是一个亏格为 g 的把手体）。反过来，Maskit证明了PSL(2, $\mathbb{C}$)的一个有限生成子群，若它是自由的、纯双曲型的，并且在 $\mathbb{C}$上某处不连续，则它是Schottky群。若将对应于某个拓扑曲面的Schottky群的生成元作为参数，就可以构造出一个Schottky群的模空间，称为 Schottky 空间。底层曲面的Teichmüller空间是 Schottky 空间的正则覆盖，而Schottky 空间则是模空间的非正则覆盖。Maskit在理解其结构方面作出了多项奠基性贡献

关于 Schottky 空间。

组合定理是一系列对Klein组合定理的扩展：它们对两个克莱因群施加条件，使由二者共同生成的群也成为克莱因群，并且在代数上是这两个群的自由积。这些扩展包括带融合的自由积以及HNN扩张的情形。Maskit的研究计划旨在证明，所有克莱因群都可以通过组合定理构造出来。这种方法类似于Haken和Waldhausen的做法：将一个双曲3维流形切割成若干球的并，再通过逆向操作重构该流形。（参见 [Mar90]。）虽然要满足应用组合定理所需的条件，对于与某些三维流形相关的克莱因群而言并不容易，但Maskit的研究计划几乎完全成功，并由此形成了一个庞大的案例“动物园”。（参见 [Mas88] 的第VIII—X章。）例如，这种方法适用于函数群，即在其正则集上有一个不变连通分支的克莱因群。Maskit证明，函数群可以通过组合定理，由初等群、准福克斯型群和退化群经过有限次构造而成，其中融合是沿平凡群或抛物循环群进行的。例如，Schottky群是由初等群（此处为无限循环双曲型群）组合而成的。

上半平面 $\mathbb{H}^2$ 可赋予常负曲率的度量（$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$），在该度量下，福克斯群作为等距变换群作用。庞加莱多边形定理给出了充分条件：对于 $\mathbb{H}^2$ 中一个多边形 P（其边为测地边），以及将 P 的各边配对的 $\mathbb{H}^2$ 等距变换，它们可以生成一个福克斯群，使 P 成为基本区域。庞加莱的证明并不完整，克莱因群和福克斯群文献中充斥着许多不完整或不准确的证明。Maskit 的证明（见 [Mas71b]）是他声称源自与 Ahlfors、Bers、Magnus 和 McMillan 交谈的成果；该证明既正确，又比庞加莱的证明更为一般。庞加莱和 Maskit 还给出了这一结果的推广，适用于 $\mathbb{H}^3$ 中的多面体（见下文），其中由边配对变换生成的群是克莱因群。（参见 J. Lehner 在 MathSciNet 上对本文的评论。）



图 1：Bernie 与 Lipman Bers

1883 年，为了大致以研究福克斯群理论的方式来研究克莱因群理论，Poincar´e 将莫比乌斯变换的作用从黎曼球面扩展到上半空间 $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}$，其边界为 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$.。莫比乌斯变换现在作为等距变换作用于 $\mathbb{H}^3$，其度量为 $ds^2 = \frac{|dz|^2+dt^2}{t^2}$；与福克斯群的情形一样，由此很容易证明，克莱因（离散）群必定在 $\mathbb{H}^3$ 上真不连续地作用。对于作用于 $\mathbb{H}^3 \cup$ 的克莱因群 G，$\Omega(G) \neq \emptyset$（并且请记住，在本讨论余下部分中，我们假定 G 没有挠），商空间 $\Omega(G)/G$ 先前被视为黎曼曲面的不交并，现在则可视为带边界的双曲三维流形的边界分支集合（若存在挠，则为轨形而非流形），$(\mathbb{H}^3 \cup \Omega(G))/G$.

在 Poincar´e 的努力之后，克莱因群理论在数十年间一度停滞不前；但随着 1964 年阿尔福斯有限性定理的提出（[Ahl64]），发展这一理论的研究重新活跃起来。自那时起，Maskit 对克莱因群理论的贡献总体上具有几何／拓扑性质，正如前文所述，包括 Poincar´e 多面体定理、Klein-Maskit 组合定理以及平面性定理。特别是，Maskit 发展了以下这类群的理论：

他利用 Klein-Maskit 组合定理构造出某些特殊的克莱因群。这些群包括 B群和退化群。20 世纪 60 年代末，Greenberg（[Gre66]）利用退化群 （一种函数群，其极限集包含两个以上的点，且其正则集连通并且单连通）的存在性，证明了存在有限生成克莱因群，其中每个群都不存在与之对应的有限边数基本多面体（见下文），该多面体用于描述该群在 $\mathbb{H}^3$ 上的作用$\mathbb{H}^3$。

Maskit 的部分研究工作促成了 Albert Marden 在（[Mar74]）中的研究。引用 Marden 的话：

> 与 Ahlfors 和 Bers 的解析方法不同，Maskit 开创了在复平面中以纯几何方法研究克莱因群的先河。他的工作补充了解析方法所带来的洞见，并为某些特殊类别的群提供了一些深刻而基础的认识。尤其是，Maskit 提出这样一种观点：所谓“良好”群的类，也就是可以有效寻求福克斯群经典结果之推广的群类，正是可构造群。这些群源自他对克莱因组合定理所作的深远推广。尽管本文采用了不同的路径，Maskit 的工作仍对我们产生了重大影响。事实上，他的工作与我们的工作有许多交集，尽管两者之间的确切关系仍不明朗。

Marden的研究计划是实现庞加莱′最初的设想：以研究福克斯群作用于 $\mathbb{H}^3$ 的理论的方式，来研究克莱因群的理论。前者是一种研究黎曼曲面理论的方法，其中黎曼曲面 $S = \mathbb{H}^2/G$ 被视为商空间 $\mathbb{H}^2$ 除以某个福克斯群 G。后来，Thurston在发展双曲三维流形理论时，大量借鉴了Marden的工作（以及Haken和Waldhausen的工作），为Thurston的几何化猜想铺平了道路。该猜想的证明于2003年由Perelman完成。一个世纪前，黎曼曲面的分类定理指出，每个黎曼曲面都允许一个常曲率度量；与此类似，几何化定理指出，任意定向不可约闭三维流形都可以分解为若干部分，每一部分都具有八种有限体积的唯一几何结构之一。（这里，不可约是指每个嵌入的2球面都围成一个嵌入的3球。）在这八种结构中，双曲结构是主要的一种，而本文讨论的大部分工作，包括Maskit的工作，都涉及这一特定几何结构。

尽管导致几何化猜想的诸多发展通常被描述为在三维流形上采用外科技术，但可以说，Maskit 的组合定理提供了部分技术基础，而这些技术曾被用于提出这一20世纪末和21世纪初最为根本的结果。在其他显著的推论中，几何化定理蕴含了 Poincar´e 猜想。值得注意的是，Maskit 早期关于平面性定理的工作排除了某些研究 Poincar´e 猜想的途径——参见下文 Keen 的文章——但他的组合定理推动了相关发展，并最终促成了一个证明。

伯尼研究的许多类型的克莱因群不仅是有限生成的，还满足更强的条件，即几何有限。如果克莱因群 G 的作用在 $\mathbb{H}^3$. 上存在一个有限面基本多面体，那么它就是几何有限 群 G。对于这类群，带边界的三维流形 $M = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega(G))/G$可以理解为“近乎”紧致的，也就是说， M 是紧致的，只是有有限多个“尖点”例外；这些尖点与 G中的极大抛物子群的共轭类一一对应。通过考察几何有限群 G的极限集的性质，也可以理解 M 内部测地线的行为。事实上，Ahlfors、Beardon、Greenberg、Maskit、Marden、Thurston 等人的工作得出了一系列等价的解析、几何、拓扑和动力系统“有限性条件”，这些条件适用于给定的几何.....

有限群 G.这些几何有限性的刻画包括著名的 $thick-thin$商流形的分解 $M=\mathbb{H}^3/G$，该分解由 Thurston 给出。

虽然 Maskit 的研究通常聚焦于二维理论，但在 Maskit 被引用最多的论文中，有一篇与 Alan Beardon 合著的论文（[BM74]），作者完全根据克莱因群 G 的极限集特征，给出了其为几何有限群的判定。事实上， G 是几何有限群，当且仅当 G 的极限集由逼近点（在较新的文献中称为圆锥极限点）和（尖点）抛物固定点（较新的称法为有界抛物固定点）组成。对几何有限群 G 的极限集所作的这一刻画，是五种密切相关且彼此等价的几何有限性概念之一；这些概念都以多种方式得到了推广。对于复平面 $\mathbb{H}^n$ 上的等距变换离散群，Bowditch、Tukia 等人推广了几何有限性的概念（[Bow93]）；对于 $Isom$ 上的等距变换离散群（X），其中 X 是一个 n 维的曲率受限的哈达玛流形，也就是说，X 是一个完备、单连通的黎曼流形，且所有截面曲率都介于两个负常数之间，Bowditch 完成了这一推广（[Bow95]）。其他推广还包括收敛群。在所有这些情形中，圆锥极限点都与商流形中测地线的行为有关：对于等距变换离散群，若一条以 z 为终点的测地射线在商流形中的投影无限多次返回某个紧集，则极限点 z 是圆锥极限点。因此，回到福克斯群这一范畴， $\mathbb{H}^2$ 被模群 PSL（2，$\mathbb{Z}$）取商后的测地线行为与数论之间存在颇为有趣的联系。对于无限体积的几何有限流形，终止层状猜想的证明源自 Maskit、Kra 等人的工作。

任何克莱因群领域的专家都熟悉 Bernard Maskit 的著作，但即便只是考虑过研究这一领域的人，也可能都熟悉 Maskit 于1988年出版的《克莱因群》([Mas88])。书中涵盖了许多重要主题——事实上，其中许多主题都是 Maskit 深度参与发展的。

尽管作者在许多情况下都力求以较为一般的方式探讨这些主题（例如，研究双曲 n–空间等距变换的离散子群，而不是双曲 2– 或 3–空间的等距变换），但整体方法主要立足于二维。也就是说，这种方法主要着眼于通过考察克莱因群在黎曼球面上的作用，来发展克莱因群的平面理论，而非通过考察克莱因群在上半空间中的作用，研究由此得到的双曲流形三维理论。应当注意，这种方法或许会让人觉得，Maskit 的工作与过去40年间令人振奋的几何化及双曲三维流形研究相去甚远；但这主要是视角问题，因为这些领域要么密不可分，要么在某些情况下完全相同。

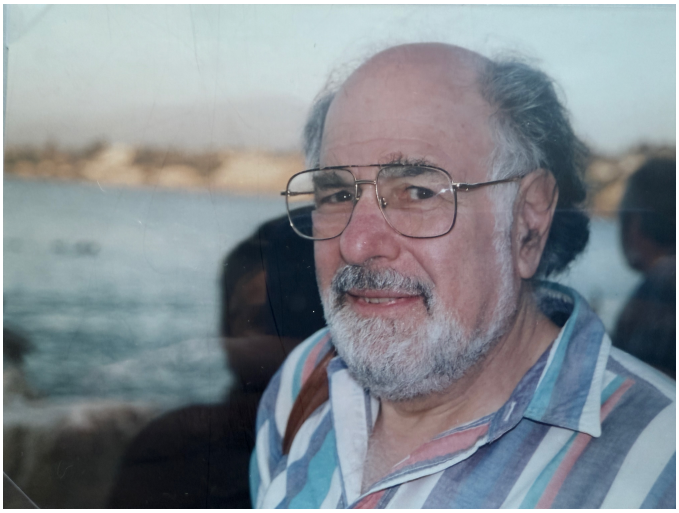

图2：Bernie 在智利

他的每一位学生都有自己作为 Bernie 的学生、由他担任导师的独特经历，但所有人都会认同，Bernie 对学生而言都是一位至关重要的人物。Bernie 虽然没有给学生过多的建议和指导，却总能为每个人提供恰到好处的帮助，因此，他让每位学生都能根据各自的能力和数学成熟度，独立



图 3：Clifford Earle、William Harvey 和 Bernie



图 4：Bernie 与学生们庆祝 60 岁生日（从左到右依次为 Perry Susskind、Ed Taylor、Bernie、Jim Anderson、Andy Haas 和 Ara Basmajian）

地站稳脚跟。Bernie 许多论文中的论证大多具有拓扑性质，对精确性、严谨性和一丝不苟的态度要求极高。除了带领学生走过通常的过程——将一个具体但可能尚不明晰的数学问题或想法发展成一篇可行的学位论文——Bernie 还以低调谦逊的方式，亲自示范了何谓细致谨慎的思考。这种思维方式指引着我们所有人此后在数学（或非数学）职业生涯中的道路。

在讲授克莱因群课程、陈述定理时，Bernie 常常只写下结论，并宣布会在证明过程中视需要补上假设，仿佛是在模仿一种



图 5：Bernie、Wilma 和 Ruben Hidalgo

比单纯的“定理—证明”更引人入胜的创作过程。Peter Buser 讲述了一条颇有意思的标准，据说 Bernie 可能会用它来判定一篇论文是否完成。“那是在奥伯沃尔法赫，也可能是在别的地方。我和 Bernie 坐在一张桌子旁，讨论数学出版。我担心的是一篇已经写完、却还未完成的论文，而我怎么也无法把它完成。‘嗯，’他说。过了一会儿，他又说：‘然后你改进一段文字，换一种记号，后来又觉得先前的版本更好，于是重新考虑一番。你知道，出现这种情况，就说明材料已经成熟了。’我写作时常常会想起这一幕。”

我们中的一位曾在2008年3月于纽约大学为他举办的纪念宴会上谈到，Bernie授课时，学生们不仅受益于、也很欣赏观看、聆听并学习他如何即兴推演一个不简单的论证，而这个论证并非事先准备好的。（对此，Bernie打趣说，他没意识到自己是位好老师；他倒觉得自己只是懒得提前备课。）有时，Bernie在课堂上提出一个论断后，会问：“我需要担心吗？”有时答案是“是”，接下来便会有一番详细阐释。另一些时候，则会出现一幕现实版的逸闻：学生质疑教授在课堂上所作的某个观察“显而易见”，于是教授沉默地站了好几

分钟，陷入沉思，随后又重申：“是的，这很显而易见。”在这件事中，Bernie会问：“我需要担心吗？”然后默默站上一两分钟，深思之后宣布：“不，我不必担心。”他的学生通常都会松一口气，因为他——以及我们——都不必担心。

在个人交往中，Bernie 对学生比较内敛，但常邀请我们去他家聚会，那里总有美味佳肴和饮品。最后，我们要提及 Bernie 学术生涯中的最后一个篇章。退休前几年，Bernie 对计算心理语言学的一个领域产生了兴趣，这个领域称为多重编码理论，由他的妻子兼学术伙伴 Wilma Bucci 开创。Bernie 在这一领域作出了重要贡献（见[Sus25]），主要是将数学平滑技术引入口语叙事中某些数学测量指标的计算。我们都认为，这很可能是受 Wilma 的影响，Bernie 随着岁月流逝变得越来越知足。他们喜欢美食和美酒，也喜欢与朋友相聚。Bernie 有一段时间喜欢打网球——他年轻时是手球选手——而很少有人会想到，Bernie 和 Wilma 还学会了跳探戈。

我们撰写这篇纪念文章，最初是为了缅怀我们的导师，并让更多人了解他的研究，以及他在二维和三维拓扑与几何领域重要发展中所发挥的作用。多年前，作为刚获得博士学位的年轻学者，我们或许还未能充分理解 Bernie 在这些领域贡献的广度与深度。如今，经过多年亲自在这些领域工作的历练，重新审视 Bernie 对数学的贡献，成为一项极其有益的工作。

William Abikoff

我第一次见到 Bernie，是在1969年石溪黎曼曲面会议上。当时我在贝尔实验室担任工程师，最近刚通过布鲁克林理工学院的数学博士资格考试。我对一个关于随机函数之和的特定问题很感兴趣，但别人劝我打消这个念头——实际上，是把我笑退了。我便不请自来地参加了那场会议。我只认识一位与会者，那就是 Lesley Sibner。会场中洋溢的热情



图6：Bernie 和 Wilma 在智利

令人难以招架。天黑后，与会者们一边交谈，一边社交；而我走投无路，只好开车去柯朗数学研究所的图书馆——那是当时唯一一家夜间开放的研究图书馆——试着弄明白那些兴致勃勃的人们在谈论什么。他们中有几位不仅热情地接纳了我，还让我觉得自己也属于那里。即使现在，半个多世纪过去了，每当回想起他们——Bernie、Lipa Bers、Ernie Rauch 和 Bob Gunning——那些时刻依然让我珍惜。我没过多久就成了“Bers Mafia”的外围成员。

大概是应 Lipa 的建议，我于1971年圣诞节前后去麻省理工学院探望 Bernie。我们很快就在职业和私人层面都建立了深厚的联系。当时，克莱因群领域的圈子里都是与他同时代的人。还有我。我成了某种意义上的小弟弟。

我们都走过从布朗克斯进入数学领域并在其中发展的非传统道路。Bernie 曾在 RPI 开始本科阶段的学习，后来因家庭问题退学。随后，他花了一些时间帮忙打理家族生意，同时在纽约大学完成本科课程。从研究生阶段开始，他主要关注代数与几何构造之间的相互作用及其后果。后来，他的好奇心促使他思考一些问题，这些问题源自他的人生伴侣 Wilma Bucci 的研究成果；在许多方面，她都与他相伴一生。

有一次，我们碰面讨论一个正在思考的问题；说实话，这个问题让我们都很恼火。他有一个证明存在漏洞；我也有一个证明，是同一个

证明，只不过处于不同的情形，也同样存在漏洞。但漏洞各不相同。我们合作起来，就得到了证明。

尽管他的许多工作早于计算机在几何学中的广泛应用，但他的构造都是可计算的。在某些情况下，瑟斯顿有界像定理会与这些构造结合使用——这种相互依存关系是瑟斯顿双曲化定理大部分证明的关键。只有纤维化于圆上的流形需要采用不同的方法。在发展双曲化思想的同时，瑟斯顿在尚未完成完整证明之前，就相当公开地进行演讲。瑟斯顿至少使用了一个 Bernie 尚未证明的组合定理。在哥伦比亚大学的一次演讲中，Bill 告诉 Bernie，他在演讲中使用的组合定理尚未得到证明。菲利克斯·克莱因被认为是最早进行这类构造的人（参见 [Mas65a] 中的参考文献）。在克莱因的工作与 Bernie 的工作之间的八十年间，除了福克斯型，即不变圆盘的情形外，文献中很少出现构造主义方面的贡献。最先浮现在脑海中的两项成果，是莱斯特·福特于1926年出版的著作，以及神秘的芬切尔–尼尔森手稿；后者在20世纪40年代末被宣布即将出版，却最终直到2003年才问世。

Bernie 的工作在许多领域都具有重要的当代意义，包括复分析、双曲几何和纽结理论。它让组合群论重焕生机，也是几何群论的精神先驱。要我谈论它未来的影响，就需要我并不具备的预言能力。

Wilma Bucci

我于1978年平安夜遇见了 Bernie，那已经是将近半个世纪以前的事了。当时，他正和两个年幼的儿子一起滑雪旅行，并住在他姐姐家；他的姐姐是一名心理学家，也是我的朋友。那时，Bernie 的三个儿子都未满20岁；我的儿子和女儿也在相同的年龄段。我们都有一个强烈的愿望，那就是尽己所能为家人做到最好。Bernie 对数学确实充满热情，但他同样重视自己的家庭。在我们共同生活的岁月里，家庭与工作之间的冲突如何影响我们的生活，曾有许多具体事例。比如，我们认识约一年后，Bernie 参与组织了一次聚焦于比尔·瑟斯顿当时颇具新意的工作的会议——这次会议聚焦于比尔·瑟斯顿的工作，而这项工作在当时尚属新颖。我和 Bernie 在缅因州旅行时，在鲍登学院找到了举办这次会议的理想场所。我们一起开车前往会议，会议于1980年夏天举行。一位年轻的亲戚留在新泽西州照看我的孩子；Bernie 的儿子们则和他们的母亲在一起。会议期间，Thurston 每天都讲解他的工作。每天讲座结束后，Bernie、Lipman Bers 和其他同事都会即兴聚在一起，专门讨论并梳理 Thurston 所讲的内容。随后，我和 Bernie 回到会议附近的营地，在安顿下来度过夜晚之前，先打电话回家查看孩子们的情况。（那时候还没有手机，所以我们必须在会场附近找公用电话。）大约到了第三天晚上，我得到了家长最不愿听到的那种答复：“现在一切都没事了。”我的女儿出了自行车事故，被送进了急诊室，手臂骨折了，不过据说她已经没有大碍。我告诉 Bernie，我必须马上回家；他说他要和我一起回去。他把情况告诉了 Lipa（Lipman Bers）和其他同事。Lipa 说他们需要 Bernie 留下来。Bernie 说他要和我一起回去。玛丽·伯斯说，他当然得和 Wilma 一起走。Bernie 开车送我回家，我们一起处理了这个家庭问题；多年来，无论在哪个层面上遇到多少问题，我们都是这样共同面对的。

随着孩子们变得更加独立，我们进行了大量旅行，一起参加了许多会议，也去欧洲和南美洲拜访同事，其中包括在法国度过美好的一年。我们以巴黎郊外的高等科学研究所为据点，去市场买菜、做饭、喝葡萄酒。无论身在何处，我们总是一起做饭，Bernie 大多负责备菜。Bernie 是一位经验丰富的徒步旅行者和露营爱好者。我们两次驾车横穿美国，在国家公园和森林里露营；夏天则住在伯克利，Bernie 在数学科学研究所工作，我通勤去加州大学旧金山分校。Bernie 认真而出色地演奏竖笛，我们还跳各种舞——民间舞蹈、康特拉舞、各种交谊舞，后来又迷上了阿根廷探戈。

Bernie和我组建家庭、共度人生，但在共同生活的最初几十年里，我们在研究上各走各的路。大约在2000年，随着他临近从石溪退休，

Bernie的研究从全心专注于数学，转向日益关注与我作为心理学家和心理语言学家的工作相关的研究问题。Bernie将他富有创造性的思维方式带入与我的研究相关的棘手问题中。当他审视我的工作时——我的工作涉及使用计算机辅助测量研究语言过程——Bernie往往首先断言这些问题不可能解决，但随后却着手解决它们；在此过程中，他引入了我的研究领域此前未曾考虑过的数学技术。直到生命的最后几天，Bernie仍在不断提出新的想法，并将一些他原计划开展的项目构想作为遗产留给了我们。其中一些新想法已载于Bernie生前撰写的最后一篇论文中，该论文将发表于专门纪念其工作的《心理语言学研究杂志》特刊。Bernie还指导这一领域的学生完成学位论文、论文和海报。美国、加拿大、意大利、以色列和阿根廷的研究中心都在应用Bernie关于指称过程的测量方法，而这些中心的同事们所开展的工作也在不断拓展这一理论及其应用。

弗雷德·加德纳：一些回忆

Bernie留下了丰硕的出版成果，以及一部如今已成为克莱因群领域必不可少的参考书。但在这里，我也想着重谈谈他的慷慨、公正，以及提出一针见血意见的能力。正是这些品质，使他凝聚起三代卓有成就、活跃于学术一线的数学家。故事始于20世纪60年代初：那时他获得了博士学位，并开始与自己的学位论文导师 Lipman Bers 在纽约大学展开持续多年的合作。20世纪30年代，核物理学家开始对黎曼曲面理论产生兴趣。尤其是赫尔曼·外尔，他在十年前出版了专著《Die Idee der Riemannschen Fl¨ache》。此外，薛定谔早先运用复分析，为波动方程求得离散解，从而描述了原子中轨道半径可能取值的离散性。然而，在 Bernie 的一生中，真正吸引众多关注的，是克莱因群和黎曼曲面这一主题的丰富内涵。在我的记忆中，有几个特别的时刻格外鲜明。第一个发生在 Bers 的复分析研讨班上。Bernie 是研讨班的积极参与者，研讨班在哥伦比亚大学数学楼四层举行。丹尼斯·沙利文刚从圣保罗的纯粹与应用数学研究所回来，便来报告一篇他与 Ma˜n´e 和萨德合写的论文。那篇论文研究的是有理函数迭代；在合作研究过程中，他们提出了全纯运动这一概念。借助这一概念，他们得以证明：动力系统在极限集上单射作用时，其变形曲线必然可由拟共形共轭实现。这后来成为全纯运动研究的开端。大约在同一时期，另一个后来被称为沙利文词典的成果也逐渐形成。它汇集了一系列对应关系，将克莱因群的思想与定理（包括 Ahlfors、Bers、Maskit 等人的工作）同方兴未艾的动力系统及有理映射迭代研究联系起来。

另一个这样的时刻发生在20世纪80年代中期，比尔·瑟斯顿来到同一个研讨班，讲解他关于测度叶状结构和层状结构的非凡理论中的若干部分。这一理论始于他在20世纪70年代中期发表的《瑟斯顿关于曲面的著作》。与此同时，Bernie的专业知识和一针见血的提问，为这种学术氛围作出了极大贡献。

Bernie参加研讨班时，你会发现其他数学家也在认真研究相关主题，而他正是这方面的专家；你还会遇到合作者。他那本关于克莱因群的著作中，精彩的第八章题为《动物园之旅》。他带我们去了那里，我们在那里度过了愉快的时光。

Jane Gilman

我在哥伦比亚大学读研究生时认识了 Bernie，那时他已是一位声名卓著的数学家。我们都是 Lipman Bers 的学生，但据说在众多研究泰希米勒理论的 Bers 学生中，Bernie 是最出色的。我对 Bernie 十分敬仰；不过后来与他合作时，我才明白，人们不必敬畏 Bernie，只需敬畏他的数学才华。他平易近人，为人也非常友善。我还结识了他的一些

学生，尤其是他在1982年至1995年克莱因群研究时期于石溪指导的那些学生。除了在双曲几何和克莱因群领域发表重要论文外，这些学生也都非常友善，成为我数学世界里令人欣喜的新成员。我与 Bernie 的合作始于数学科学研究所举办的一场克莱因群专题学期，研究内容涉及双生成元 $PSL(2,\ \mathbb{R})$ 离散性问题：给定一对轴不相交的双曲元素，判断它们是否生成一个离散的非初等群。这个问题由来已久，相关论文中不乏错误或不完整的解答。也许因为问题表述简单，人们期待能找到一个简单的闭式解。我们在1991年的合作论文中给出了一个完整的几何算法，用以判定该群是否离散。这次合作深刻影响了我后来关于双生成元群的大部分研究。我还记得1987年，我和 Bernie 及其妻子 Wilma 从芬兰约恩苏大学的一场会议出发，连夜前往列宁格勒。当时笔记本电脑还很少见，但 Bernie 有一台，并在旅途中带着它。苏联海关官员不知道该拿它怎么办。我们因此耽搁了好几个小时。最后，笔记本电脑获准进入苏联。

琳达·基恩：追忆 Bernie Maskit

20世纪60年代初，我和 Bernie 都是 Lipman Bers 在纽约大学的学生。那是一段令人振奋的时光。Ahlfors 和 Bers 刚刚证明了一项重要定理，使得人们能够在黎曼曲面和克莱因群的模空间上赋予全纯结构；而 Bernie 对克莱因群的结构有着非凡的洞察力和深刻理解。从他的学位论文开始，他便成为研究克莱因群复杂性质的世界级专家，例如极限集可能会有多么复杂。在研究这些空间中趋近边界时会发生什么，这一点尤为重要。完成学位论文后，Bernie 在普林斯顿高等研究院待了两年，我在第二年加入了他。那时，人们似乎很有希望证明维数小于 5 的流形上的庞加莱猜想。

当时，这被视为数学界的圣杯，吸引了最优秀、最聪明的人才。因此，Bernie 的一项成果——他的平面性定理——指出，原本可能证明三维情形下该猜想的一种主要方法是错误的，这绝非小事。又过了三十八年，猜想才终于得到证明。那年，克利夫·厄尔也在高等研究院，我们三人一起畅谈数学，度过了美好时光。我们彼此阅读对方的作品。我尤其感谢 Bernie 仔细阅读了我关于福克斯群模空间的论文，并帮助我澄清其中的论述。那一年，Ahlfors 和 Bers 还组织了首届克莱因群会议，向与会者展示了他们的学生。会议在新奥尔良举行；在那里，我们不仅讨论数学，还品尝了 Ahlfors 在许多著名餐馆点的美食和葡萄酒。这是众多此类会议中的第一场，随着他们的学生人数不断增加，会议规模也逐渐扩大。在这个成就了许多人的学术群体中，Bernie 始终是核心人物。六十多年来，Bernie 一直是我的好友和出色的同事。

Irwin Kra：次日与回忆

昨天，我的好友 Bernie Maskit 去世了。虽然并非完全出乎意料——人终有一死——但这仍然是巨大的打击。又一根纽带断了。我们每周 Zoom 会面的日子也结束了。他是我的同事（在麻省理工学院和石溪大学工作，也是我为石溪大学数学系聘请的第一位或第二位教员）、合作者（共同发表过许多论文）、导师（在数学和行政事务方面），但最重要的是朋友（还有谁会从凌晨 3 点开始开车 60 英里，去取一件从国外寄来的货物呢？）。我又曾如何回报他呢？他是数学系里乐于合作的一员，也是许多同事和学生的朋友。很难接受他的离去，但无论如何，我们都必须面对。

Maskit 和我研究的问题很相似，主要涉及克莱因群及其相关的黎曼曲面；他采用拓扑和群论的方法，而我则是一名复分析学家。尽管如此，我们还是找到了共同的语言，并迅速开展了合作研究计划，这一点从我们共同发表的论文数量便可见一斑。当时我们

相识时，克莱因群及其模空间（变形）正迎来复兴，这主要是因为当时刚刚发表了两篇重要、彼此独立却又相关的论文，第一篇出自 Lipman Bers，第二篇出自 Bernard Maskit。这场复兴也得到了许多重要贡献的推动（其中一些是合作论文），贡献者包括 L.V. Ahlfors、L.Bers、C.J. Earle、I. Kra、A. Marden、B. Maskit 等老一辈学者。或许更重要的是，这一领域吸引了许多年轻人。Maskit 是从简单的构件出发构造复杂有限生成克莱因群的权威。亲眼见证这一创造过程，以及他与学生和追随者之间的互动，令我十分激动。

Claude LeBrun：追忆 Bernie Maskit

去年三月，我的朋友、合作者和同事 Bernie Maskit 意外离世，我震惊不已，悲痛万分。20世纪80年代初，我在石溪担任助理教授时，Bernie 就与我结下了友谊。后来，他成为我们系的系主任；1988年我申请终身教职时，他正担任这一职务。系里最近有好几位助理教授未获终身教职，因此我有理由担心自己的前景。但 Bernie 温和而长辈般的鼓励，以及慷慨而实用的建议，帮助我设法渡过并熬过了这一过程，没有彻底陷入焦虑；与此同时，他也一路协助推动我的申请，最终让我如愿以偿。

我第一次学术休假结束回来后，Bernie 和我开始时不时一起吃午饭，一部分是为了讨论数学，也只是想聊聊生活、宇宙以及万事万物。我对自对偶四维流形的标量曲率所做的研究，使我确信局部共形平坦轨形的重要性，但也让我不得不费力思索有关克莱因群及其极限集的许多微妙问题。幸运的是，Bernie 是这方面的世界级专家，而且非常乐意向我讲解许多我需要理解的细节。我们的讨论经过多年才最终促成合作，但我们2008年合著的论文，关于最优4维度度量，等待得很值得。我们的文章构造了黎曼度量，使复射影平面五份或更多份连通和上的曲率张量 L^2-范数达到最小，进而使我们得以证明一个至今仍令我极为满意的分类结果。

不过，我们的论文发表后不久，Bernie 决定退休并搬到曼哈顿，此后我和他见面的次数就很少了。但我依然怀念他的笑声，也依然怀念我们之间的交谈。我相信，许多同事也一定有着同样的失落感。

Dennis P. Sullivan

1970年，我在麻省理工学院做博士后时，第一次见到 Bernie；那时他是初级教授。我问他研究什么，他回答说：“我研究二阶矩阵和曲面。”我掩饰住自己的惊讶，因为我当时属于研究五维或更高维流形的领域；该领域不包括三维和四维，因为它们太难了，也不包括二维，因为它太容易了。（参见下文的勘误）

70年代后期，受 Lipman Bers 提出的问题启发，我开始了解克莱因群及其极限集，并尝试用克莱因－Maskit 组合构造来回答 Bers 的问题。在此期间，我每年夏天都会访问石溪，并分别从 Bernie 和 Irwin Kra 那里学到了更多关于 Schottky群和自守形式的知识。我也明白了自己当初在麻省理工学院听到 Bernie 谦逊地回答“我研究二阶矩阵和曲面”时的反应有多么可笑，因为属为 g 的曲面的自同构群是一个深邃而丰富的数学对象，受到人们的积极研究，并且是多个领域的核心。

我从 Bernie 那里了解到他家乡亨廷顿有许多宜人的餐馆和丰富的文化活动。他住在那里，是因为他的配偶在纽约市工作，而他在石溪工作。

Bernie 聪明、谦逊又讨人喜欢。我很高兴有机会认识他。

Gadde Swarup：安息吧，Bernie Maskit

一位非常和善的人，他 [帮助我] 重振了我的研—

究……我曾与他短暂合作过，后来一段更长的合作机会却在邮件中遗失了。我与他共度过许多愉快时光……Mladen Bestvina 告诉我，我曾向他介绍 Maskit 组合定理，这促成了他与 Feighn 在词双曲群组合定理方面的重要工作。

参考文献

[ABH+25] James W. Anderson、Ara Basmajian、Ruben Hi- dalgo、Perry Susskind 和 Ed Taylor, *Bernard Maskit memorial tribute* , 《美国数学会通告》72（2025年），第7期，731–739。MR1306867[Ahl64] Lars V. Ahlfors, *Finitely generated Kleinian groups* **86** 1964 413 429 , 《美国数学杂志》（），–。MR167618[BM74]Alan F. Beardon 和 Bernard Maskit, *Limit points of Kleinian groups and finite sided fundamental polyhedra* **132** 1974 1 12 , 《数学学报》（），–。MR333164[Bow22] Brian H. Bowditch, *Notes on Maskit's planarity theorem* **68** 2022 1 24 , 《数学教学》（），第 -2 期，1– 。MR4420863[Bow93] B. H. Bowditch, *Geometrical finiteness for hyperbolic groups* **113** 1993 , 《泛函分析杂志》（），第2期，245 317 1218098 – 。MR[Bow95] , *Geometrical finiteness with variable negative curvature* **77** 1995 , 《杜克数学杂志》（），第1期，229 274 1317633 – 。MR[Gre66] L. Greenberg, *Fundamental polyhedra for kleinian groups* 2 **84** 1966 433 441 , 《数学年刊》（）（），–。MR200446[KM97]I. Kra 和 B. Maskit, *Lipman Bers, complexanalyst*, Lipa 的遗产（纽约，1995年），1997年，第389–415页。MR1476998[MAC+95]Cathleen S. Morawetz、William Abikoff、Carol Corillon、Irwin Kra、Tilla Weinstein 和 Jane Gilman, *Remembering Lipman Bers*, 《美国数学会通告》42（1995年），第1期，8–25。MR1306867[Mar74] Albert Marden, *The geometry of finitely generated Kleinian groups* 2 **99** 1974 383 , 《数学年刊》（）（），– 462。MR349992[Mar90] , *Book Review: Kleinian groups*, 《美国数学会通报》（新系列）22（1990年），第2期，310–315。MR1567847[Mas63] Bernard Maskit, *On a conjecture concerning planar coverings of surfaces* , 《美国数学会通报》69（1963年），396–398。MR148040 [Mas65a] , *On Klein's combination theorem*, 《美国数学学会汇刊》**120**（1965年），499–509。MR192047[Mas65b] *A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds* , 《数学年刊》（2）**81** （1965年），341–355。MR172252[Mas67] , *A characterization of Schottky groups*, 《数学分析杂志》**19** （1967年），227–230。MR220929[Mas68] , *On Klein's combination theorem. II*, 《美国数学学会汇刊》**131**（1968年），32–39。MR223570[Mas71a] , *On Klein's combination theorem. III*, 《黎曼曲面理论进展》（会议论文集，纽约州石溪，1969年），1971年，第297–316页。MR289768[Mas71b] *On Poincaré's theorem for fundamental polygons* **7** 1971 219 230 , 《数学进展》（），–。MR297997[Mas88] , *Kleinian groups*, 数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], 第287卷，施普林格出版社，柏林，1988年。MR959135[Pap62] C. D. Papakyriakopoulos, *A reduction of the Poincaré conjecture to other conjectures* , 《美国数学会通报》**68**（1962年），360–366。MR148039[Pap63] , *A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjectures* 2 **77** , 《数学年刊》（）（1963年），250–305。MR145496[Sus25] Perry Susskind, *Maskit's mathematical contributions: The smoothing operator and DAIT measures* **54** 2025 , 《心理语言学研究杂志》（），第47期。