arXiv:2512.19761v1 [math.GM] 20 Dec 2025

戴德金 ζ 函数广义黎曼猜想相关的若干级数

MUHAMMAD ATIF ZAHEER

摘要。假设广义黎曼猜想成立，我们求得了一个闭式表达式，其中涉及与戴德金 ζ 函数相关的黎曼 ξ 函数类比函数的导数，以及戴德金 ζ 函数的非平凡零点。反过来，我们证明，若这一闭式表达式成立，那么戴德金 ζ 函数在某一高度以上的所有零点都位于临界线上。由此得到黎曼猜想的大量等价命题。

1. 引言

与次数为 n、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的数域 K 相关联的戴德金 ζ 函数 $\zeta_K(s)$，对 $\sigma > 1$ 定义为绝对收敛级数

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^s},$$

其中，求和遍及整数环 $\mathcal{O}_K$（属于 K）的所有非零理想 $\mathfrak{a}$，而 $\mathfrak{a}(N)$ 表示 $\mathcal{O}_K$ 中非零理想 $\mathfrak{a}$ 的范数，即 $N(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O}_K\colon \mathfrak{a}]$。在特殊情形 $K = \mathbb{Q}$ 下，戴德金 ζ 函数化为经典的黎曼 ζ 函数；$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$。

与黎曼 ζ 函数类似，戴德金 ζ 函数也有欧拉乘积表示

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}} \tag{1.1}$$

当 $\sigma > 1$ 时，其中的乘积遍历 $\mathcal{O}_K$ 的所有素理想 $\mathfrak{p}$。这是 $\mathcal{O}_K$ 中非零理想的素因子分解唯一性的结果。因此，$\zeta_K(s)$ 在半平面 $\sigma > 1$ 内不为零。

与黎曼 ζ 函数的情形相同，戴德金 ζ 函数也可唯一地解析延拓至整个复平面，唯在 $s = 1$ 处有一个简单极点。戴德金证明了解析类数公式，表明 $\zeta_K(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个简单极点，其留数为

$$\frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2} R_K h_K}{\omega_K |\Delta_K|^{1/2}}, \tag{1.2}$$

其中 r_1 和 r_2 分别表示实嵌入的个数和复嵌入对的个数，R_K 是 K的调节子，h_K 是 K的类数，ω_K 是 K中包含的单位根个数，而 Δ_K 是域扩张 $K/\mathbb{Q}$的判别式。这是“局部—整体原理”的一个例子；戴德金 ζ 函数 $\zeta_K(s)$ 由局部成分组装而成，即由 $\mathcal{O}_K$的素理想构成，如欧拉乘积（1.1）所示；但它也以综合的方式反映了该域的整体不变量，这一点可由类数公式（1.2）揭示。

2020 数学主题分类。 11M26, 11R42。关键词和短语。 戴德金 ζ 函数，广义黎曼猜想，黎曼 ξ 函数。

戴德金 ζ 函数满足函数方程

$$\zeta_K(1-s) = |\Delta_K|^{s-1/2} 2^{n(1-s)} \pi^{-ns} \left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{r_2} \Gamma(s)^n \zeta_K(s),$$

该函数由 Hecke [Hec17]发现。关于 Hecke的证明，即证明 $\zeta_K(s)$ 的函数方程的详细论述，可参见 [Neu99，第 7 章第 §5] 节。该证明归结为情形 $K = \mathbb{Q}$ 下 $\zeta(s)$ 的函数方程。此外，由上述函数方程可见，$\zeta_K(s)$ 在 $s = 0$ 处有一个 $r_1 + r_2 - 1$ 阶零点，因为含余弦的项在 $s = 1$ 处产生 $r_1 + r_2$ 阶零点，而 $\zeta_K(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个简单极点，其他项解析且在 $s = 1$ 处不为零。

2. 一些预备知识

数学领域中最著名的难题之一是黎曼猜想（RH）。该猜想断言，$\zeta(s)$ 的所有非平凡零点 $\rho = \beta + i\gamma$ 都满足 $\beta = 1/2$。对于戴德金 ζ 函数，也可以提出类似的论断：$\zeta_K(s)$ 的所有满足 $0 < \beta_K < 1$ 的零点 $\rho_K = \beta_K + i\gamma_K$ 都位于临界线上，即 $\beta_K = 1/2$。这通常被称为广义黎曼猜想（ERH）。

我们有一个关于 $\zeta_K(s)$ 的 de la Vall´ee–Poussin 型无零点区域。若 n 是域扩张 $K/\mathbb{Q}$ 的次数，且 d 是判别式，则存在一个绝对常数 $c > 0$，使得 $\zeta_K(s)$ 在以下区域内没有零点

$$\sigma > 1 - \frac{c}{n^2 \log(|d|(|t|+2)^n)}$$

[IK21，定理 5。33]。在直线 $\sigma = 1$ 附近可能存在一个非常接近的实零点，称为朗道-西格尔零点。据知，这样的零点至多有一个；若存在，则必为单零点。这个零点是否存在会产生非常重要的影响。Heath-Brown [HB83] 证明了，狄利克雷L函数的朗道-西格尔零点不存在，意味着孪生素数猜想成立。

我们考虑戴德金 ζ 函数 $\zeta_K(s)$ 的黎曼 ξ 函数类似物，也称为完备黎曼ζ函数，其定义如下

$$\xi_K(s) = \frac{1}{2} s(s-1) |\Delta_K|^{s/2} 2^{(1-s)r_2} \pi^{-ns/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_K(s). \tag{2.1}$$

它是一个阶为1的整函数，并满足函数方程

$$\xi_K(s) = \xi_K(1-s). \tag{2.2}$$

$\xi_K(s)$ 在 $K = \mathbb{Q}$ 的情形下化为 $\xi(s)$。此外，$\xi_K(s)$ 在 $s = 0$ 不为零，而 $\xi_K(s)$ 的零点与临界带 $0 < \sigma < 1$ 内 $\zeta_K(s)$ 的零点重合。

引理2.1。对于 k 奇数，$\xi_K^{(k)}(1/2) = 0$。

证明。 由函数方程（2.2）可直接得到 (s)的函数方程，对其反复求导可得

$$\xi_K^{(k)}(s) = (-1)^k \xi_K^{(k)}(1-s).$$

代入 $s = 1/2$即可立即得到结论。 □

引理 2.2. 若 m 是 $\zeta_K(s)$ 在 $s = 1/2$ 处的消失阶数，则 m 为偶数。2

证明。若 $\zeta_K(1/2) \neq 0$，则 $m = 0$，因此结论显然成立。由 2.1 中 $\xi_K(s)$的定义可知， m与 $\xi_K(s)$在 $s = 1/2$处的消失阶数相同。现在设$\zeta_K(1/2) = 0$。由于 $\xi_K(s)$ 是整函数，因此它可展开为幂级数

$$\xi_K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_K^{(k)}(1/2)}{k!} \left(s - \frac{1}{2}\right)^k.$$

由于$\xi_K(1/2) = 0$且 m 是满足以下条件的最小幂 k： $\xi_K^{(k)}(1/2) \neq 0$，由引理2.1 可知 m必为偶数。□

现在我们定义

$$\Xi_K(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right)^{-m} \xi_K(s),$$

其中， m 是 $\zeta_K(s)$在 $s = 1/2$处的消失阶数。由于 m 是偶数， $\Xi_K(s)$满足函数方程

$$\Xi_K(s) = \Xi_K(1 - s).$$

引理2.3。对于 k 奇数， $\Xi_K^{(k)}(1/2) = 0$。

引理 2.4。对于 k偶数，$(\Xi_K'/\Xi_K)^{(k)}(1/2) = 0$。

由于 $\Xi_K(s)$具有复共轭对称性，即$\Xi_K(s) = \overline{\Xi_K(\bar{s})}$，其高阶导数也具有这一性质，因此 $\Xi_K^{(k)}(s)$ 在实轴上取实值。详细证明见 [Ngu25，引理3]。

由于 $\Xi_K(s)$ 是一个阶为 1 的整函数，因此可以表示为一个 Hadamard 乘积 t

$$\Xi_K(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho_K \neq 1/2} \left(1 - \frac{s}{\rho_K}\right) e^{s/\rho_K}, \tag{2.3}$$

其中 A 和 B 是常数，乘积遍历 $\zeta_K(s)$ 的零点，这些零点不同于$1/2$ 且位于临界带 $0 < \sigma < 1$内。此乘积在不包含任何零点 $\rho_K \neq 1/2$的紧集上一致收敛。

3. 主要结果

过去一个世纪中，人们发现了大量与黎曼假设等价的陈述。关于算术等价命题和解析等价命题的详细介绍，分别见 [Bro17a] 和 [Bro17b] 。近期，Suman 和 Das [SD23] 证明了黎曼假设等价于

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|1/2 - \rho|^2} = \frac{\xi''(1/2)}{\xi(1/2)}.$$

后来， [SD22], 他们证明了黎曼假设成立当且仅当

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|1/2 - \rho|^4} = \frac{1}{2}\frac{\xi''(1/2)^2}{\xi(1/2)^2} - \frac{1}{6}\frac{\xi^{(4)}(1/2)}{\xi(1/2)}.$$

最近，Nguyen [Ngu25] 将 Suman 和 Das 的结果推广到了戴德金 ζ 函数，并证明了 $\zeta_K(s)$ 的广义黎曼假设等价于

$$\sum_{\rho_K \neq 1/2} \frac{1}{|1/2-\rho_K|^2} = \frac{\Xi_K''(1/2)}{\Xi_K(1/2)}.$$

我们推广 Suman 和 Das 的结果，并得到许多涉及 $|1/2-\rho|^{k+1}$ 的和的闭式表达、且与 RH 等价的命题，其中 k 是奇正整数。我们在戴德金 ζ 函数的一般情形下进行这一工作，正如 Nguyen 对特殊情形 $k=1$ 所做的那样。

定理 3.1。 设 K 是一个数域，且 $k>1$ 是一个奇正整数。若广义黎曼假设成立，则

$$\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}\left(\frac{\Xi_K'}{\Xi_K}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{\rho_K \neq 1/2} \frac{1}{|1/2-\rho_K|^{k+1}}, \tag{3.1}$$

其中求和遍及 $\zeta_K(s)$ 的所有不同于 $1/2$ 的非平凡零点 ρ_K。此外，若上述等式成立，则 $\beta_K = 1/2$ 对于 $|\gamma_K| > (1/2)\cot(2\pi/(k+1))$。

证明。 对 Hadamard 乘积（2.3）取对数导数，得到

$$\frac{\Xi_K'}{\Xi_K}(s) = B + \sum_{\rho_K \neq 1/2}\left(\frac{1}{s-\rho_K} + \frac{1}{\rho_K}\right).$$

由于该和在不包含 $\zeta_K(s)$ 的非平凡零点的紧子集上一致收敛，我们可以逐项求导，并推出

$$\left(\frac{\Xi_K'}{\Xi_K}\right)'(s) = -\sum_{\rho_K \neq 1/2} \frac{1}{(s-\rho_K)^2}.$$

经过反复求导，我们得到恒等式

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\Xi_K'}{\Xi_K}\right)^{(k)}(s) = \sum_{\rho_K \neq 1/2} \frac{1}{(s-\rho_K)^{k+1}}$$

该恒等式对　任意正整数 k成立。对于 k 偶数的情形，结论可直接由引理2.4 得出　t

$$\sum_{\rho_K \neq 1/2} \frac{1}{(1/2-\rho_K)^{k+1}} = 0.$$

但这是众所周知的，简单地由零点在共轭及关于临界线反射下的对称性即可得到。现在假设 k 为奇数。注意到 $(\Xi_K'/\Xi_K)^{(k)}(1/2)$ 为实数，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\Xi_K'}{\Xi_K}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{\rho_K \neq 1/2}\frac{1}{(1/2-\rho_K)^{k+1}} + \frac{1}{2}\sum_{\rho_K \neq 1/2}\frac{1}{(1/2-\overline{\rho_K})^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\rho_K \neq 1/2}\frac{(1/2-\rho_K)^{k+1} + (1/2-\overline{\rho_K})^{k+1}}{|1/2-\rho_K|^{2(k+1)}} \\ &= \sum_{\rho_K \neq 1/2}\frac{\Re(1/2-\rho_K)^{k+1}}{|1/2-\rho_K|^{2(k+1)}}.\end{aligned}$$

若 ER H 成立，则 $\Re(1/2-\rho_K)^{k+1}=(-1)^{(k+1)/2}|1/2-\rho_K|^{k+1}$因此我们得到 (3.1).

现在假设（3.1）成立。那么我们有

$$\sum_{\rho_K\neq 1/2}\frac{\Re(1/2-\rho_K)^{k+1}-(-1)^{(k+1)/2}|1/2-\rho_K|^{k+1}}{|1/2-\rho_K|^{2(k+1)}}=0. \tag{3.2}$$

若 $k\equiv 1 \pmod 4$，则求和项中的分子恒非负，因此我们有$\Re(1/2-\rho_K)^{k+1}=-|1/2-\rho_K|^{k+1}$对每个零点 $\rho_K\neq 1/2$ 都成立。令 $1/2-\rho_K=|1/2-\rho_K|e(\phi_{\rho_K})$，其中我们用 $e(x)$ 表示 e^{ix}，而 ϕ_{ρ_K} 是 $1/2-\rho_K$ 的主辐角。于是可得

$$\Re\left(|1/2-\rho_K|^{k+1}\,e((k+1)\phi_{\rho_K})\right)=-|1/2-\rho_K|^{k+1}$$

对每个零点 $\rho_K\neq 1/2$ 都成立，这又意味着 $\cos((k+1)\phi_{\rho_K})=-1$，因此 $\phi_{\rho_K}=((2n+1)\pi)/(k+1)$，其中 $0\leqslant n\leqslant k$。由于 $-1/2<1/2-\beta_K<1/2$，可知若$|\gamma_K|>(1/2)\cot(2\pi/(k+1))$，则 $\tan^{-1}(2|\gamma_K|)>\pi/2-2\pi/(k+1)$。由此得到 $|\phi_{\rho_K}-\pi/2|<2\pi/(k+1)$ 或 $|\phi_{\rho_K}-3\pi/2|<2\pi/(k+1)$。因此必有 $\phi_{\rho_K}=\pi/2$ 或 $3\pi/2$，从而 $1/2-\beta_K=\Re(1/2-\rho_K)=|1/2-\rho_K|\cos(\phi_{\rho_K})=0$，即 $\beta_K=1/2$。

若 $k\equiv 3$ (模 4)。那么，和式（3.2）中每一项的分子对每个零点 $\rho_K\neq 1/2$均非正。因此 $\Re(1/2-\rho_K)^{k+1}=|1/2-\rho_K|^{k+1}$于是

$$\Re\left(|1/2-\rho_K|^{k+1}\,e((k+1)\phi_{\rho_K})\right)=|1/2-\rho_K|^{k+1}$$

对每个零点 $\rho_K\neq 1/2$，这推出 $\cos((k+1)\phi_{\rho_K})=1$，于是 $\phi_{\rho_K}=2\pi n/(k+1)$，其中 $0\leqslant n\leqslant k$。同样可知，若 $|\gamma_K|>(1/2)\cot(2\pi/(k+1))$，则必有 $\phi_{\rho_K}=\pi/2$或 $3\pi/2$。因此 $1/2-\beta_K=\Re(1/2-\rho_K)=|1/2-\rho_K|\cos(\phi_{\rho_K})=0$，即 $\beta_K=1/2$。证毕。 □

注意，所有零点 ρ_K of $\zeta_K(s)$ 均位于临界线上的高度阈值，对 K是统一的，并且仅取决于 Ξ'_K/Ξ_K 的导数阶数 k。

推论 3.2. 陈述 (3.1) 等价于 $k=3$ 的广义黎曼假设。

证明。 只需观察 $\cot(2\pi/(k+1))=0$ 对于 $k=3$，即可得出结论。 □

推论 3.3. 设 k 为奇正整数。若黎曼假设成立，则

$$\frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{\rho}\frac{1}{|1/2-\rho|^{k+1}}, \tag{3.3}$$

其中求和遍及 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点 ρ。此外，若上述等式成立，则 $\beta=1/2$ 对于 $|\gamma|>(1/2)\cot(2\pi/(k+1))$

推论 3.4. 若 $k<12\pi\cdot 10^{12}$，则 (3.3) 等价于黎曼假设。

证明。 由于不等式 $\cot^{-1}(x)\leqslant 1/x$ 对 $x>0$成立，我们有

$$\frac{2\pi}{\cot^{-1}(6\cdot 10^{12})}\geqslant 12\pi\cdot 10^{12}\geqslant k+1$$

这进而意味着

$$\frac{1}{2}\cot\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)\leqslant 3\cdot 10^{12}.$$

既然 $\beta=1/2$ 对于 $|\gamma|\leqslant 3\cdot 10^{12}$ [PT21], 由推论3.3 可知，黎曼假设成立。 □

参考文献

[Bro17a] Kevin Broughan.《黎曼猜想的等价命题：第 *1* 卷，算术等价命题》，第 164 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017 年。[Bro17b] Broughan, Kevin.《黎曼猜想的等价命题：第 *2* 卷，解析等价命题》，第 165 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017 年。[HB83] D Roger Heath-Brown. 孪生素数与西格尔零点。《伦敦数学学会会刊》，3(2):193–224，1983 年。.[Hec17] Erich Hecke. 关于任意代数数域的 ζ 函数。哥廷根科学学会消息¨数学物理学部，1917:77–89，1917 年。[IK21] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski.解析数论，第 53 卷。美国数学学会，2021 年。[Neu99] J¨urgen Neukirch. 代数数论。施普林格，1999 年。[Ngu25] Vincent Nguyen. 一些与戴德金 ζ 函数的广义黎曼猜想等价的级数。*arXiv* 预印本 *arXiv:2509.21518*，2025 年。[PT21] Dave Platt and Tim Trudgian. 黎曼猜想在 3· 10 12 以内成立。《伦敦数学学会通报》，53(3):792–797，2021 年。[SD22] Shekhar Suman and Raman Kumar Das. 关于黎曼猜想的一个等价命题的注记。拉马努金数学与数学科学学会期刊，10(1)，2022 年。[SD23] Shekhar Suman and Raman Kumar Das. 关于黎曼猜想的一个级数等价命题的注记。《印度纯粹与应用数学杂志》，54:117–119，2023 年。

宾夕法尼亚州立大学大学公园校区数学系，宾夕法尼亚州州学院 16802电子邮件地址：mvz5421@psu.edu