arXiv:2512.19830v1 [math.DG] 22 Dec 2025

奇异高迪雄猜想

GUILHERME CERQUEIRA-GONC¸ALVES

Abstract. 1984 年，高迪雄猜想，在所有紧复流形上都可以找到具有指定里奇曲率的 Gauduchon 度量。Sz´ekelyhidi-Tosatti-Weinkove [TW17、TW19、STW17] 通过研究带梯度项的 (`)-多重次调和函数的 Monge-Amp$n-1$ere 方程，解决了这一猜想。本文研究这一猜想的奇异版本。通过调整 C^0GL25b [中的一种技巧，我们在可平滑化厄米簇上为这一问题（无梯度项）得到一个 估计。我们还证明了全纯 K¨ahler 族上解的光滑性，从而推广了 [TW17]。

Contents

引言 1
1. 准 $(n-1)$-多重次调和函数 4
2. L^∞ 可平滑化厄米簇上的先验估计 9
3. C^2 全纯族上的估计 14
4. 定理 B 的证明 19
参考文献 20

Introduction

Yau 对卡拉比猜想的解 [Yau78]规定了固定 K¨ahler 类中 K¨ahler 度量的里奇形式。在厄米情形下，高迪雄 [Gau84，IV.5] 提出了关于 Gauduchon 度量的类似问题，即寻找一个厄米度量 ω_G 使得$\partial\partial\omega_G^{n-1}=0$。这一问题，即 Gauduchon 猜想，已由 Sz´ekelyhidi、Tosatti 和 Weinkove [TW17、TW19、STW17]解决。本文研究其奇异版本。

自 [Gau77a]以来，人们便知道任意厄米度量的共形类中都存在 Gauduchon 度量，因此它们是厄米几何中无处不在的对象。近期，Barbaro 和 Oti- man [BO25]研究了局部共形 K +Chern-Ricci 平坦）流形上的卡拉比-丘-高迪雄度量（Gauduchon¨。与伪有效锥 [Lam99], 相关的 Gauduchon 锥，也促使人们对这类度量进行更深入的研究，参见 [Pop15、PU18、OV25b、OV25a]。

奇异空间上的退化偏微分方程与极小模型纲领及模空间理论密切相关。近期的一些进展包括 Eyssidieux、Guedj 和 Zeriahi 对 Yau 定理的 K¨ahler 奇异版本 [EGZ09]，以及 Pan 构造奇异厄米簇上的 Gauduchon 度量 [Pan22，Pan25]。关于奇异厄米簇的一个重要未解问题是 Reid 猜想 [Rei87]，该猜想认为，通过 Clemens 和 Friedman 提出的节点过渡，Calabi-Yau三维簇构成一个连通模空间 [Cle83，Fri86]；这些过渡由非 K¨ahler Calabi-Yau 簇的平滑化和双亚纯变换组成。人们相信，这些构造与

日期：2025年12月17日。

Hull-Strominger系统 [Hul86，Str86]密切相关。研究这类系统时，需要考察 Calabi-Yau 半 K¨ahler 度量（也称为 balanced 度量，其定义见 $d\omega_B^{n-1}=0$ [Gau77b]）。这些度量与本文研究的 Calabi-Yau-Gauduchon方程密切相关，参见 [FWW10，FWW15，TW17，GS25，Chu12，FLY12，CPY24]。

厄米流形（M，β）上配备 Gauduchon度量 β 时，Calabi-Yau-Gauduchon问题可归结为寻找一个厄米度量 α，使其满足以下性质（见 [STW17，定理 1。3]）：

(1) α 是 Gauduchon 度量，即 $\partial\partial\alpha^{n-1}=0$。(2) $[\alpha^{n-1}]=[\beta^{n-1}]$ 属于 Aeppli 上同调 $H^{n-1,n-1}_A(M)$。(3) $Ric^{BC}(\alpha)=\eta$，其中 $\eta\in c_1^{BC}(M)$ 是一个固定的闭实 (1，1) 形式。

回顾一下，$(n-1,\ n-1)$-Aeppli上同调群定义如下：

$$H_A^{n-1,n-1}(M)=\frac{\{\partial\overline{\partial}\text{-closed real }(n-1,n-1)\text{ currents}\}}{\{\partial\gamma+\overline{\partial\gamma}\ \mid\ \gamma\ \ (n-2,n-1)\text{ current}\}}.$$

根据 [Pan22，定理 A]，对于任意紧致可平滑化Hermitian簇 X，也就是说，对于可由设定（SF）中的光滑流形族逼近的簇，存在一个奇异Gauduchon度量，即一个厄米度量 β，它在正则部分 X^{reg} 上光滑且为 Gauduchon 度量，并且在 X上有界。这样的度量是由该族中邻近光滑纤维上的度量取极限构造而成的。根据 [Pan22，定理 B] β^{n-1} 可推广为一个（$n-1$，$n-1$）多重闭流 T_G，即$\partial\partial\overline{T}_G=0$，它定义了一个 Aeppli类。（关于紧致 Hermitian簇上的推广，见 [Pan25]。）因此，前两点都有对应的奇异情形。在奇异簇上指定 Bott-Chern Ricci形式等价于（见 [GL23，定理 4。5]）求解

$$\omega^n=\mu \tag{CY}$$

其中 μ 是适配体积（见定义 1.20）。因此，可以将奇异 Calabi–Yau–Gauduchon 问题表述如下：

CYG 问题。设 X 是紧致可平滑化*Hermitian*簇，β 是 X 上的奇异*Gauduchon*度量，其 *Gauduchon*类为 $[\beta^{n-1}]\in H^{n-1,n-1}_A(X)$ 且 $\eta\in c_1^{BC}(X)$ 是 X上的闭实(1,1)形式。是否存在 X 上的奇异度量 α，使得

(1) α 是 X上的高迪雄度量，即，$\overline{X}^{\mathrm{reg}}$上的 $\partial\partial\alpha^{n-1}=0$。(2) $[\alpha^{n-1}]=[\beta^{n-1}]\in H^{n-1,n-1}_A(X)$。

(3) $Ric^{BC}(\alpha)$ X^{reg}上的 $=\eta$？

备注。预期的度量需要比 [Pan22，定义 12]中的有界高迪雄度量更奇异。若该解与某个光滑度量准等距，则根据 X，由 [GGZ24，引理 16]可知，[EGZ09，引理 64] 表明，所需高迪雄度量的体积需要相对于 X上的某个光滑度量是 L^p $p>1$。

我们回顾一下平滑族的概念：

设定（SF）。设 $\mathfrak{X}$ 是一个 $n+1$ 维、不可约、既约的复解析空间$(n+1)$。假设

- $\pi:\ \mathfrak{X}\to\mathbb{D}$ 是一个适当的满射全纯映射，其纤维 X_t 连通：$=\pi^{-1}(t)$；
- π 在挖去原点的圆盘$\mathbb{D}^*$上是光滑的；
- X_0 是一个 n 维的正规紧复解析空间。
- X_0 仅具有孤立奇点。

设 ω、β 是 $\mathfrak{X}$ 上按照定义 *1.18*所定义的厄米度量。对于每个 $t \in \mathbb{D}$，我们通过限制定义纤维 ω_t 上的厄米度量 X_t （即 $\omega_t := \omega|_{X_t}$）。

若 X 其作为某个族的中心纤维出现， $X_0 = X$ 则称其可平滑化， $\mathfrak{X}$ 其中该族如上所述。在光滑情形下，CYG 问题已在 [STW17，定理 1 中得到解决。4] 其方法是研究一个复 Monge-Amp`ère 方程，该方程针对 $(n-1)$-多重次调和函数并带有梯度项。该方程由 Popovici [Pop15] 发现，Tossati 和 Weinkove 也独立地发现了它 [TW19] （参见 [FWW10、FWW15]，其中有更早的相关讨论）。我们将限制在不含梯度项的情形，这一情形在 [TW17], 中进行了研究，即：

对于 $(\mathfrak{X}, \beta, \omega)$ 这样一个设定（SF）中的平滑化，固定 $p > 1$ 和 $0 \leqslant f_t \in L^p(X_t, \omega_t^n)$ 一个密度族，$1 \leqslant \rho_t \in L^\infty(X_t)$ 一个满足 $f_t, \rho_t \in C^\infty(X_t)$ $\forall t \neq 0$ 的函数族。假设族 $(f_t)_{t\in\mathbb{D}}$ 和 $(\rho_t)_{t\in\mathbb{D}}$ 满足：存在常数 c_f, $C_f, G > 0$ 使得 $\forall t \in \mathrm{D}$,

$$c_f \leqslant \int_{X_t} f_t^{\frac{1}{n}} \omega_t^n \quad \text{and} \quad ||f_t||_{L^p(X_t, \omega_t^n)} \leqslant C_f, \tag{DB}$$

$$\sup_{X_t} \rho_t \leqslant G \quad \text{and} \quad \inf_{X_t} \rho_t = 1. \tag{GB}$$

于是我们 研究满足以下条件的方程：$\sup_{X_t} \varphi_t = 0$ 和 $\alpha_t >$ 0:

$$\alpha_t^n := \left(\rho_t \beta_t + \frac{(\Delta_{\omega_t}\varphi_t)\omega_t - dd_t^c\varphi_t}{n-1}\right)^n = c_t f_t \omega_t^n, \tag{CYG}$$

其中 $(\varphi_t,\ c_t) \in L^\infty(X_t) \cap$拟亚全纯$_{n-1}(X_t,\ \rho_t\beta_t,\ \omega_t) \times \mathbb{R}_{>0}$ 为未知量。空间 X 上具有两个厄米度量 $\beta,\ \omega$ 的 $(n-1)$-拟多重次调和函数集合 $\mathrm{PSH}_{n-1}(X,\ \beta,\ \omega)$ 可定义（见定义 1.13）为满足以下条件的拟次调和函数集合：$\alpha_\varphi := \beta + (\Delta_\omega\varphi)_{n-1}^{\omega - dd^c\varphi} \geqslant 0$，其中不等式按流的意义成立。

根据 [DNGG23，引理 4.4]，平滑化的适配体积满足这些积分界（DB），前提是中心纤维 X_0 具有典范奇点。根据 [Pan22，定理 A]， β_t 的高迪雄因子满足一致界（GB）。因此，上述问题的一个 L^∞ 界可给出一个简化的奇异 Calabi-Yau-Gauduchon 问题的界。

现在可以陈述我们的第一个结果：

定理 *A.* *在设定（SF）及上述一致假设（DB）（GB）下，对于每个$t \in D$，令 $(\varphi_t, c_t) \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(X_t, \beta_t, \omega_t) \cap L^\infty(X_t) \cap \mathbb{R}_{>0}$ 为复 $(n-1)$Monge-Amp`ere 方程 (CYG) 的解。*

那么存在一个与 t无关的一致常数 $C > 0$，使得 $\forall t \in \mathbb{D}_{1/2}$,

$$c_t + c_t^{-1} + ||\varphi_t||_{L^\infty} \leqslant C.$$

关于 C 上述内容的精确依赖关系，见定理2.6。

在 [TW17] 和 [Pan22]中得到的高阶估计并非定量结果。前者源于针对 C^1-估计的爆破分析，后者则源于局部化论证。因此，在方程（CYG）中存在奇点时，要获得高阶估计更为困难。鉴于此，本文余下部分将专注于不存在奇异纤维的族，即复流形 M 的复结构变形，此处假设其为 K¨ahler。

为强调第二部分不存在奇异纤维这一事实，我们将用 M 表示复流形，用 $\mathcal{M}$ 表示全纯族。

在这样的设定下，我们得到第二个结果：

定理 *B.* 假设满足设定（*SF*）的全纯族 $(\mathcal{M}, \beta, \omega)$，其中心纤维 M_0 是一个光滑 *Kähler* 流形，且 ω 是一个 *Kähler* 度量，$f \in C^\infty(\mathcal{M})$ 满足对每个 $t \in D$，令 $f_t := f|_{M_t} \in C^\infty(M_t)$，其中 $M_t := \pi^{-1}(t)$。那么，对每个 $t \in D_2^1$，存在方程的唯一解 $(u_t, c_t) \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(X, \beta, \omega) \cap C^\infty(M_t) \times \mathbb{R}_{>0}$： -

$$\left(\beta_t + \frac{1}{n-1}\Big((\Delta_{\omega_t} u_t)\omega_t - dd^c u_t\Big)\right)^n = c_t f_t \beta_t^n, \quad \sup_{M_t} u_t = 0$$

以及任意 $k \in \mathbb{N}$

$$||u_t||_{C^k(M_t)} + c_t + c_t^{-1} \leqslant C$$

对于一个与 t 无关的一致 $C > 0$。因此，C 取决于 M 的复结构。

这一已有结果在一般的 Kähler 流形 M 非 Kähler 高迪雄（或半 Kähler）度量中实现了具有预设里奇曲率的度量；如果假设 β 是非 Kähler 高迪雄（或半 Kähler），则这些度量随复结构光滑变化，C^∞因为它们具有与之无关的界。参见第 1节或 [TW17]。

文章结构：

- 第 1 节向读者介绍了 $n-1$-多重次调和函数、$\mathbb{C}^n$流形，并引入奇异情形。
- 第 2 节为归一化常数建立了两种不同的一致界，并证明了定理 A。
- 第 3 节和第 4 节将 C^2，C^1 以及 [TW17] 中的高阶估计推广到全纯族，从而完成定理 B的证明

致谢。作者首先感谢他的博士导师 *Vincent Guedj* 对他的支持、指导和评论。作者还感谢 *Chung-Ming Pan* 和 *Tat Dat T^o* 提供有益的讨论和参考资料。此外，作者感谢 *Hoang-Chinh Lu* 就 *Hessian*方程进行讨论。本研究得到 *EUR-MINT*（由国家研究机构管理的未来投资计划，项目编号为 *ANR-18-EURE-0023*）的支持。

1. Quasi $(n-1)$-plurisubharmonic functions

我们设定 $d^c = \frac{i}{2}(\partial - \bar{\partial})$；因此 $dd^c = i\partial\bar{\partial}$, $\omega_{\mathbb{C}^n}$ $\mathbb{C}^n$的典范度量。固定 $n \geqslant 3$ 我们空间的复维数，因为对于 $(n-1)$-拟亚全纯函数，当 $n = 2$时它们就是拟亚全纯函数。我们定义关于厄米度量 ω 的复拉普拉斯算子如下：

$$\Delta_\omega g := tr_\omega(dd^c g) = n\frac{dd^c g \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n}.$$

1.1. $(n-1)$-多重次调和函数。

固定 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 域。

1.1.1. 基本性质与示例。

定义 1.1。若 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 上是一个 $(n-1)$-多重次调和函数，则称其满足以下条件：

(1,1)-形式是半正的

$$\widehat{dd^c u} := (\Delta u)\omega_{\mathbb{C}^n} - dd^c u \geqslant 0.$$

注意，$dd^c(\cdot)$ 是一个线性算子。以下等价定义在文献中随处可见，参见 [HL11、HL12、Ver10、Din22]。

命题 1.2. 设 $u \in C^2(\Omega)$。那么 u 在$(n-1)$意义下是Ω 上的多重次调和函数，当且仅当满足以下等价条件之一：

(1) u的复海森矩阵的特征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 满足 $\lambda_i := \sum_{k\neq i}\lambda_k \geqslant 0$。(2) 对于任意维数为 $n-1$ 的复超平面，$H \subset \mathbb{C}^n$, $u|_{H\cap\Omega}$ 是次调和函数。(3) $dd^c u \wedge \omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n}$ 这个$(n-1,n-1)$形式是（弱）正的。(4) $dd^c u \wedge \omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n}$ 这个$(n-1,n-1)$形式是强正的。

我们请读者参阅 [Dem12，第三章，推论 1。9] 对于 (3) $\Longleftrightarrow$ (4)。我们特别指出，(3) $\Longleftrightarrow$ u 是（$n-1$）-拟亚全纯，这可由霍奇星算子的计算得到：

$$\frac{1}{(n-1)!} * (dd^c u \wedge \omega^{n-2}_{\mathbb{C}^n}) = \frac{1}{n-1}((\Delta u)\omega_{\mathbb{C}^n} - dd^c u) = \frac{1}{n-1}\widehat{dd^c u}.$$

本文中采用的霍奇星算子约定遵循 [TW17，第 2],节，即：固定 p，$q \in \{1,\dots,n\}$，霍奇星算子 $*$（在本小节中由 $\omega_{\mathbb{C}^n}$ 诱导）将一个（p，q）形式 ψ映射为一个（$n-p$，$n-q$）形式 $*\psi$，使得对于任意（p，q）形式 φ:

$$\varphi \wedge *\overline{\psi} = \langle \varphi, \psi\rangle_{\omega_{\mathbb{C}^n}} \frac{\omega^n_{\mathbb{C}^n}}{n!}, \quad \overline{*\psi} = *\overline{\psi}, \quad **\psi = (-1)^{p+q}\psi, \tag{1.1}$$

由命题 1.2可知 u 是次调和的，因此我们定义 m-次调和函数，以比较这些正性概念。

定义 1.3。设 $1 \leqslant m \leqslant n$。我们称 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 上是 m-次调和的，如果

$$(dd^c u)^k \wedge \omega^{n-k}_{\mathbb{C}^n} \geqslant 0, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant m.$$

我们用 $\mathrm{PSH}_{n-1}(\Omega)$ 表示 Ω 中 $(n-1)$-多重次调和（简称 $(n-1)$-拟亚全纯）函数的集合，用 $\mathrm{SH}_m(\Omega)$ 表示 m-次调和函数的集合，并用 $\mathrm{PSH}(\Omega) = SH_n(\Omega)$ 表示 Ω 中的多重次调和函数。所有这些集合均不包含函数 $u \equiv -\infty$。我们引入非正则的 $(n-1)$-拟亚全纯函数：

定义 1.4。设 $u \in \mathrm{SH}_1(\Omega)$ 是 Ω 上的次调和函数。若Ω中$\mathrm{PSH}_{n-1}(\Omega)$，则 :

$$\widehat{dd^c u} := (\Delta u)\omega_{\mathbb{C}^n} - dd^c u \geqslant 0$$

作为双次数为$(1,1)$的实流。

命题 1.5。设 $u, v \in \mathrm{PSH}_{n-1}(\Omega)$ 和 $\lambda > 0$。那么，

(i) $u+v, \lambda u, \max\{u,v\} \in PSH_{n-1}(\Omega)$。*(ii)* 若 $(w_i)_{i=1}^{+\infty} \subset PSH_{n-1}(\Omega)$，且 $w_i \searrow w \not\equiv -\infty$ 在 Ω 上逐点成立，则 $w \in PSH_{n-1}(\Omega)$。*(iii)* 若 u 连续，且 χ_ε 是磨光核族，则它们的卷积 $u_\varepsilon = u \star \chi_\varepsilon$是光滑的 $(n-1)$-拟亚全纯函数，并在局部一致收敛到 u 。*(iv)* $PSH(\Omega) \subset SH_2(\Omega) \subset PSH_{n-1}(\Omega) \subset SH_1(\Omega)$。

上述 (i)-(iii) 的证明与经典的次调和函数证明类似，与所选定义无关。包含关系 $\mathrm{SH}_2(\Omega) \subset \mathrm{PSH}_{n-1}(\Omega)$ 成立，因为 $\mathrm{SH}_2(\Omega)$ 中光滑函数的特征值 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 满足 $(\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \geqslant 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \geqslant \lambda_j$, $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ 因为 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geqslant 0$。

例 1.6. (1) $g_\varepsilon(z) = -\frac{1}{(|z|^2+\varepsilon^2)^{(n-2)}} \in C^\infty(C^n) \cap PSH_{n-1}(C^n)$ 对于 $\varepsilon > 0$。注意，$g_\varepsilon \searrow G_{n-1}(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n-2)}} \in PSH_{n-1}(C^n)$ 且 $G_{n-1}(0) = -\infty$。回忆一下，$n \geqslant 3$。[1] *(2)* $u: C^3 \to R$, $u(z_1, z_2, z_3) = -|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ 使得 $u \in PSH_{n-1}(C^3) \backslash SH_2(C^3)$. *(3)* $v: C^3 \to R$, $v(z_1, z_2, z_3) = -\frac{3}{2}|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$ 使得 $v \in SH_1(C^3) \backslash PSH_{n-1}(C^3)$.

现在我们将复（$n-1$）Monge-Amp`ère 算子定义为 MA

[1]也可以证明 $G_{n-1} \in$拟亚全纯$_{n-1}(\mathbb{C}^n)$，根据 [HL14，定理 9。2] 因为原点是一个可去奇点。

定义 1.7。给定 $u \in C^2(\Omega) \cap$拟亚全纯$_{n-1}(\Omega)$，我们定义

$$\widehat{MA}(u) := \det(\widehat{dd^c u})$$

用特征值表示，我们有

$$\widehat{MA}(u) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{\lambda}_i = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \neq i} \lambda_j \right)$$

其中 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 是 u的复海森矩阵的特征值。

注 1.8. 需要强调的是，算子 MA 不具备复 *Monge-Amp`ère* 算子的一些性质，例如 *Din22* 中的比较原理，[Din22，定理 4。1]这使得为该算子发展多重势理论更加困难。

（$n-1$）-多重次调和函数的极大性概念，对于第 4.1 节将要构建的爆破分析至关重要。

定义 1.9. 若对于任意相对紧开集$\Omega_1 \Subset \Omega$ 以及 $\forall v \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(\Omega_2)$ 满足 $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$ 且 $v \leqslant u$ 在 $\partial\Omega_1$ 上成立，则 $v \leqslant u$ 在 Ω_1上成立，我们称 $u \in$拟亚全纯$_{n-1}(\Omega)$ 是极大的。

1.1.2. 径向例子。

引理 1.10。设 $G_{n-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ 如例 *1.6*中所示，且 $\chi : \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to \mathbb{R}$ 光滑，则$u(z) = \chi(G_{n-1}(z)) \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(\mathbb{C}^n)$ 当且仅当 χ 是非递减且凸的。

证明。直接计算表明，u 的复海森矩阵的特征值为：$\lambda_1 = (n-2)|z|^{-2(n-1)}\left[(n-2)|z|^{-2(n-2)}\chi'' - (n-2)\chi'\right]$，$\lambda_j = (n-2)|z|^{-2(n-1)}\chi'$，$\forall j > 1$，因此，$dd^c u$ 的特征值为：

$$\widehat{\lambda}_1 = (n-1)(n-2)|z|^{-2(n-1)}\chi', \quad \widehat{\lambda}_j = (n-2)^2|z|^{-2(2n-3)}\chi''; \quad \forall j > 1.$$

证明完毕。 □

根据上面的引理 1.10，MA 对于径向函数，其形式为：

$$\widehat{MA}(u) = (n-1)(n-2)^{2n-1}|z|^{-4(n-1)^2}(\chi' \circ G_{n-1})(\chi'' \circ G_{n-1})^{n-1}.$$

例子 1.11 表明，$MA(u)$ 的可积性与经典 Monge-Amp`ère 情形之间存在差异，针对 $L^1(\log L)^p$-范数。

Examp例 1.11。令 $\chi(t) = -\log(\log(\log(-t)))$，在零点附近计算可得：

$$\chi'(t) = \frac{1}{(-t)\log(-t)\log(\log(-t))}, \quad \chi''(t) \sim -\frac{1}{(-t)^2\log(-t)\log(\log(-t))}.$$

因此，密度 $f := MA(u)$，对于 $u(z) = \chi(G_{n-1}(z))$ 在附近满足：

$$f \sim \frac{1}{|z|^{2n}(-\log(|z|))^n(\log(-\log(|z|)))^n}, \quad and \quad \log(f) \sim -\log(|z|),$$

那么在零点附近有 h

$$\int^{+\infty} f(\log(f))^p \sim \int_0 \frac{1}{|z|^{2n}(-\log|z|)^{n-p}(\log(-\log|z|))^n} dV_{\mathbb{C}^n}$$

当且仅当 $p \leqslant n-1$ 时，该值有限。然而，对于 *Monge-Amp`ère* 算子，已知临界指数为 $p = n$，参见 [GL25b，例 2。4]。

注 1.12. 经计算可得 $\left(\widehat{MA}(G_{n-1})\right)^{\frac{1}{n-1}} = \delta_0$，即原点处的狄拉克质量。

1.2. 流形上的拟 $(n-1)$-多重次调和函数。 本文中，(M,β,ω) 表示一个配备两个厄米度量的 Hermitian 流形。固定一个几何常数 $C_{\beta,\omega}>1$，使得

$$C_{\beta,\omega}^{-1}\beta \leqslant \omega \leqslant C_{\beta,\omega}\beta. \tag{GC}$$

1.2.1. 光滑情形。

定义 1.13. 设 $u\in C^2(M)$，若以下形式是半正的，则称 u 为相对于 (β,ω) 的拟$(n-1)$多重次调和函数

$$\alpha_u := \beta + \frac{(\Delta_\omega u)\omega - dd^c u}{n-1} \geqslant 0.$$

我们用 $C^2(M)\cap \mathrm{PSH}_{n-1}(M,\beta,\omega)$ 表示相对于 (β,ω) 的 (C^2)-光滑拟 $(n-1)$多重次调和函数的集合；当 $\beta=\omega$ 时，$\mathrm{PSH}_{n-1}(M,\omega)$ 表示.....；$\mathrm{SH}_1(M,\beta,\omega)$ 表示相对于 (β,ω) 的拟次调和函数集合，而 $\mathrm{PSH}(M,\omega)$ 表示相对于 ω 的拟多重次调和函数集合。所有这些集合均不包含函数 $u\equiv-\infty$。

对 α_u 关于 ω 取迹，我们在命题 2.3中说明，u如上所述，是相对于 (β,ω) 的拟次调和函数。关于这些函数的基本性质，参见 HL11、HL12、ADO23、AO22、TW17、Pop15]。

所关注的算子，即复数 $(n-1)$Monge-Amp`ere 算子 MA_{n-1}，是 :

定义 1.14。 给定 $u\in C^2(M)\cap$拟亚全纯$_{n-1}(M,\beta,\omega)$，我们定义 $A_u\colon T^{1,0}M\to T^{1,0}M$相对于 ω由 α_u 定义的自同态，即 $A_u:=\omega^{-1}\cdot\alpha_u$。并令

$$MA_{n-1}(\beta,\omega,u) := \det(A_u).$$

Not意，对任意常数 $C>0$, $MA_{n-1}(\beta,C\omega,u) = C^{-n}MA_{n-1}(\beta,\omega,u)$.

注 *1.15*。设 $\Phi_u=\omega_0^{n-1}+dd^c u\wedge\omega^{n-2}$，对于 ω_0，它是 M 上的高迪雄非 *Kähler* 度量。那么 Φ_u^{n-1} 是高迪雄非 *Kähler* 度量[2]，并且对任意 $u\in C^2(M)\cap$拟亚全纯$_{n-1}(M,\omega_0,\omega)$，$[\omega_0^{n-1}]=[\Phi_u]$ 属于 *Aeppli* 上同调，因为 ω 是 *Kähler* 度量，且根据命题 *1.2* 中 $(n-1)$*-psh* 定义的等价性。根据 [*TW17*，方程 *(2.2)*] $\det(\Phi_u)\det(\omega^{n-1}) = \frac{\alpha_u^n}{\omega^n}$，因此，对 *(1, 1)* 形式求解 ~~$(n-1)$~~*-Monge-Amp`ere* 方程，等价于对 $(n-1,n-1)$ 形式求解该方程，而这又等价于在此情形下证明高迪雄猜想。

1.2.2. 非光滑情形。

定义 1.16。 设 $u\in\mathrm{SH}_1(M,\beta,\omega)$ 是 M 上的拟次调和函数。若 u 是相对于 $(n-1)$ 的拟 $(n-1)$-多重次调和函数，则称其为相对于 (β,ω) 的拟 $(n-1)$-多重次调和函数：

$$\alpha_u := \beta + \frac{(\Delta_\omega u)\omega - dd^c u}{n-1} \geqslant 0$$

作为双次数为 $(1,1)$ 的流。

该定义等价于 [HL12] 中的定义。记 $\mathrm{PSH}_{n-1}(M,\beta,\omega)$ 为所有不恒等于 $-\infty$ 的、相对于 $(n-1)$-拟多重次调和函数的集合，其中相对于 (β,ω)。

注记 1.17。 关于 [CX25] 对$(n-1)$-多重次调和性及$(n-1)$*Monge-Amp`ere* 弱理论的粘性方法，也请读者参阅。

[2]参见 [Mic82，引理 4。8] 关于 $(n-1)$ 次方根的存在性与唯一性。

1.3. 复解析空间上的分析。设 X 是一个纯维数为 $n \geqslant 1$的紧致正规复解析空间。记 X^{reg} 为 X 的正则点所构成的复流形，记 $X^{\mathrm{sing}} := X \setminus X^{\mathrm{reg}}$ 为奇点集。由于 X 是正规空间，该集合是X 的一个复余维为 $\geqslant 2$的解析子集。

根据定义，对于每个点 $x_0 \in X$，都存在一个邻域 U，使得 x_0 存在一个局部嵌入 $j : U \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ 到$\mathbb{C}^N$ 的一个解析子集上，其中 $N \geqslant 1$为某个值。这些局部嵌入使我们能够将 X 上给定次数的光滑形式空间定义为 X^{reg} 上满足以下条件的光滑形式：在 X 上局部是某个环境空间形式在$\mathbb{C}^N$上的限制。其他微分概念和算子，例如全纯、多重次调和函数以及（$n-1$）-多重次调和函数，也可以用这种方式定义，而流则通过对偶定义（见 [Dem85]）。

定义 1.18。 ω 上的厄米度量 X 是指 ω 上的厄米度量，且对于任意局部嵌入 $X \underset{\mathrm{loc.}}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^N$，$\omega$都能光滑地延拓为$\mathbb{C}^N$上的厄米度量。

根据 [Pan22中引入的定义 1。2]我们设：

定义 1.19. 簇上的厄米度量 ω_G X 称为：

- 高迪雄度量，若其满足 $dd^c(\omega_G^{n-1}) = 0$ 在 X_{reg}上；
- 有界高迪雄度量，若存在一个光滑厄米度量 ω 于 X，以及一个正函数 $\rho \in L^\infty(X) \cap C^\infty(X_{\mathrm{reg}})$，使得 $\omega_G = \rho\omega$ 且 $dd^c(\rho\omega)^{n-1} = 0$ 在 X_{reg}上成立。[3]

1.3.1. 适配体积与典范奇点。

定义 1.20. 假设 X 是$\mathbb{Q}$-戈伦斯坦的，即 X 是正规空间，且 K_X 对某个 $r \in \mathbb{N}$是 r-***Cartier*** 的，亦即 rK_X 是一个秩一局部自由层。若 σ 是 rK_X 在X^{reg} 上的一个平凡化，且 h^r 是 rK_X 上的光滑度量，我们考虑适配体积形式：

$$\mu_h := \left(\frac{i^{rn^2} \sigma \wedge \overline{\sigma}}{|\sigma|^2_{h^r}} \right)^{\frac{1}{r}}$$

它与平凡化 σ的选择无关。本文中，“簇”一词始终指 Q-戈伦斯坦复解析空间。

定义 1.21。 若厄米簇 X 具有典范奇点，则对于任意奇点 $\widetilde{\ }$的解消 $p : X \to X$，以及任意 rK_X的局部生成元 τ，亚纯多重典范形式 $p^*\tau$ 是全纯的。

现在我们在这一背景下定义（Bott-Chern）里奇曲率

定义 1.22。 设 X 为紧厄米簇，rK_X在局部平凡化上相对于 $h^r \equiv 0$ 的参考适配体积为 μ，对于 $\mu = f\omega^n$，我们将度量 ω的（***Bott-Chern***）里奇曲率流定义为

$$Ric^{BC}(\omega) := -dd^c \log\left(\frac{\omega^n}{\mu}\right) = -dd^c \log(f)$$

我们强调，根据 [GGZ24，引理 1，6], 里奇曲率并非光滑形式，除非X 是光滑的。详见 [EGZ09第 5、6 节以及 7]，了解更多详情。

[3]我们对高迪雄因子的约定与 Pan 的约定不同，区别在于省略了 $\frac{1}{n-1}$ 次幂。

1.3.2. 可平滑簇。 可平滑化簇是指满足设定（SF）的某个族的中心纤维的厄米簇。设$\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$，$\mathbb{D}_r^* := \mathbb{D}_r \backslash 0$ 且$\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$。体积（$X_t$，$\omega_t$）一致，存在一致常数 $C_V \geqslant 1$ 使得：

$$C_V^{-1} \leqslant \mathrm{Vol}_{\omega_t}(X_t) \leqslant C_V, \quad \forall t \in \overline{\mathbb{D}}_{1/2}. \tag{VB}$$

对于非 K¨ahler 可平滑簇的例子，可以参见 [LT96，定理 1]；对于非可平滑奇点的例子，可以参见 [Har74，第 0 节1]。

回顾 [DNGG23，引理 44] ，可平滑化的适配体积满足以下积分界（DB）：当中心纤维 X_0 具有典范奇点，且 β_t 的高迪雄因子根据 [Pan22，定理 A], 满足一致界（GB）。

1.4. **有用结果**。 以下结果是 [Pan23，命题 33] 中全局一致 Skoda 可积性结果的简化版本。它将与命题2.5中的界有关。

命题 1.23。 若 $\pi : (\mathfrak{X}, \omega) \to \mathbb{D}$ 是满足设定（*SF*）的族，则存在常数 α，A_α 使得对所有 $t \in \mathbb{D}_{1/2}$ 以及所有 $u_t \in$ 拟亚全纯 (X_t, ω_t) 满足上确界$_{X_t} u_t = 0$，

$$\int_{X_t} e^{-\alpha u_t} \omega_t^n \leqslant A_\alpha. \tag{SB}$$

下面陈述 [TW17，定理 5。2] 关于 $(n-1)$-拟亚全纯函数的刘维尔定理。它将是定理 4.1中爆破论证的关键。

定理 1.24。 若 $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ 是 $(n-1)$-拟亚全纯函数，定义于 $\mathbb{C}^n$ 上，且是 *Lipschitz* 连续的、极大的，并满足

$$\sup_{\mathbb{C}^n}(|u| + |\nabla u|) < +\infty$$

则 u是常数。

2. L^∞ a priori estimate on smoothable Hermitian varieties

2.1. **比较结果与有用事实**。 现在我们联系不同的正性概念，并证明关于 $(n-1)$-拟亚全纯函数的一些有用事实。

命题 2.1。 对于 (M, β, ω) 厄米流形，配备两个厄米度量和一个常数 $C_{\beta,\ \omega} > 0$ 使得 $C_\beta^{-1}{}_{,\ \omega}\omega \leqslant \beta$。则 拟亚全纯$_{n-1}$ $(M, C_\beta^{-1}{}_{,\ \omega}\omega) \subset$ 拟亚全纯$_{n-1}$ (M, β, ω) 。

证明。 我们有如下计算：

$$\begin{aligned}
\alpha_u = \beta + \frac{1}{n-1}((\Delta_\omega u)\omega - dd^c u) &= \beta + C_{\beta,\omega}^{-1}\omega - C_{\beta,\omega}^{-1}\omega + \frac{1}{n-1}((\Delta_\omega u)\omega - dd^c u), \\
&= (\beta - C_{\beta,\omega}^{-1}\omega) + (C_{\beta,\omega}^{-1}\omega + \frac{1}{n-1}((\Delta_{C_{\beta,\omega}^{-1}\omega} u)C_{\beta,\omega}^{-1}\omega - dd^c u)), \\
&\geqslant C_{\beta,\omega}^{-1}\omega + \frac{1}{n-1}((\Delta_{C_{\beta,\omega}^{-1}\omega} u)C_{\beta,\omega}^{-1}\omega - dd^c u).
\end{aligned}$$

这正是我们要证明的。 □

在坐标中进行计算时，对于固定的点 $x \in M$，我们常使用其附近的坐标图 U_x，使得 x $\omega_{i\bar{j}}(x) = \delta_{i\bar{j}}$，$\beta(x) = \gamma_i \delta_{i\bar{j}}$ 以及 $dd^c u(x) = \lambda_i \delta_{i\bar{j}}$ +对某个光滑函数而言均为非对角项 u，其中 O.D.T. 表示“非对角项”（类似于 [TW17]），包含 $dz^k \wedge dz^l$，其中 $k \neq l$。不过，这些项不会影响我们的计算。

此外， $u \in \mathrm{PSH}_{n-1}(M, \beta, \omega)$ 的条件可以解释为：

$$\widehat{\lambda}_i := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \geqslant -(n-1)\gamma_i, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

我们首先证明一个关于拟亚全纯$_{n-1}(M,\ \beta,\ \omega)$的支配原理，如 [GL25a，推论 2 所示。3]我们的证明更简单，因为只需处理光滑函数:

引理 2.2. 令 $u, v \in$拟亚全纯$_{n-1}(M,\beta,\omega)\cap C^\infty(M)$满足 $\alpha_u^n \leqslant c\alpha_v^n$在 $\{u<v\}$上，对某个 $c\in[0,1)$成立。那么 $u\geqslant v$。

证明。 反设 $\{u<v\}$ 非空，并固定 $x_0\in M$ 使得

$$(u-v)(x_0) = \min_M (u-v) < 0.$$

若 $a\in(c,\ 1)$，且 x是 M上的一个点，满足 $(u-av)(x) = \min_X(u-av)$，则

$$\begin{aligned} u(x)-v(x) &= (u-av)(x)+(a-1)v(x)\\ &\leqslant (u-av)(x_0)+(a-1)v(x)\\ &\leqslant (u-v)(x_0)+(a-1)(v(x)-v(x_0))\\ &\leqslant (u-v)(x_0)+(1-a)\operatorname{Osc}_M(v) \end{aligned}$$

Since $(u-v)(x_0) < 0$，我们可以固定 $a\in(c,\ 1)$，使其充分接近 1，且满足

$$(u-v)(x_0)+(1-a)\operatorname{Osc}_M(v) < 0$$

于是，由上可知，我们可以找到 $x_a\in\{u<v\}$，使得 $(u-av)(x_a) = \min_M(u-av)$。经典最大值原理保证在 x_a 处有 $dd^c(u-av)\geqslant 0$，从而推出

$$\alpha_u \geqslant a\alpha_v + (1-a)\beta$$

因为 $(\Delta_\omega(u-av))\omega - dd^c(u-av)\geqslant 0$。由于这些形式是正的，我们得到

$$(\alpha_u)^n \geqslant a^n c^{-n}(\alpha_u)^n + (1-a)^n\beta^n$$

矛盾，因为 $ac^{-1}\geqslant 1$，且 $(1-a)\beta^n>0$ 在 x_a。 □

以下 算术-几何平均不等式的推论将会很有用 :

命题 2.3。 设光滑的 $u\in$ 拟亚全纯$_{n-1}(M,\beta,\omega)$ 满足复$(n-1)$*Monge-Amp`ère* 方程 $\alpha_u^n = bg\omega^n$，其中函数为 $0<g\in C^\infty(M)$且某个常数为$b>0$。则 $u\in \mathrm{SH}_1(M,\beta,\omega)$，并且以下不等式成立:

$$(nb^{\frac{1}{n}})g^{\frac{1}{n}}\omega^n \leqslant (\beta+dd^cu)\wedge\omega^{n-1}$$

证明。

$$\begin{aligned} u\in \mathrm{PSH}_{n-1}(M,\beta,\omega) &\Longrightarrow \beta + \frac{1}{n-1}\Big((\Delta_\omega u)\omega - dd^cu\Big)\geqslant 0,\\ &\overset{\text{(Trace)}}{\Longrightarrow} \beta\wedge\omega^{n-1} + \frac{1}{n-1}\left((n\frac{dd^cu\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n})\omega^n - dd^cu\wedge\omega^{n-1}\right)\geqslant 0,\\ &\Longrightarrow u\in \mathrm{SH}_1(M,\beta,\omega). \end{aligned}$$

现在对 α_u 的特征值应用算术-几何平均不等式，我们得到:

$$\begin{aligned} (\beta+dd^cu)\wedge\omega^{n-1} &\geqslant n\left[\left(\beta+\frac{1}{n-1}\left((n\frac{dd^cu\wedge\omega^{n-1}}{\omega^n})\omega - dd^cu\right)\right)^n\right]^{\frac{1}{n}},\\ &\geqslant (nb^{\frac{1}{n}})g^{\frac{1}{n}}\omega^n. \end{aligned}$$

□

命题 2.4。设 $v \in$拟亚全纯$(M,\ \omega) \cap C^2(M)$。则 $v \in$拟亚全纯$_{n-1}(M,\ \omega)$且 $\omega_v^n \leqslant \alpha_v^n$。

证明。

$$\begin{aligned}\omega + \frac{1}{n-1}\left((n\frac{dd^c v \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n})\omega - dd^c v\right) &= \omega + \frac{1}{n-1}\left((n\frac{(dd^c v+\omega) \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n})\omega - n\omega - dd^c v\right), \\ &= \frac{1}{n-1}\left((n\frac{(dd^c v+\omega) \wedge \omega^{n-1}}{\omega^n})\omega - (\omega + dd^c v)\right), \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\mathrm{tr}_\omega(\omega_v)\omega - (\omega_v)\right)\end{aligned}$$

由于 $v \in$PSH$(M,\ \omega)$，由上一步计算可得 $v \in$PSH$_{n-1}(M,\ \omega)$。现在，根据 $dd^c v$ 的特征值描述，我们有 $v \in$ PSH$(M,\ \omega)$:

$$1 + \lambda_i \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \frac{n-1+\widehat{\lambda}_i}{n-1} = \frac{\sum_{j\neq i}(1+\lambda_j)}{n-1} \geqslant 0, \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

对上面的每一项应用算术—几何平均不等式，得到:

$$\frac{\sum_{j\neq i}(1+\lambda_j)}{n-1} \geqslant \left[(\prod_{j\neq i} 1+\lambda_j)\right]^{\frac{1}{n-1}}, \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

将所有 $i \in \{1,\dots n\}$ 对应的不等式相乘，得到:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\widehat{\lambda}_i}{n-1}\right) \geqslant \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i)$$

这正是我们想要用特征值表述证明的结论。 □

在本节余下部分，对于紧 Hermitian 流形 M，我们的方程将取为一个未知的 $u \in C^2(M) \cap$PSH$_{n-1}(M,\ \rho_\beta\beta,\ \omega)$，并满足 $\sup_M u = 0$ 归一化:

$$MA_{n-1}(\rho_\beta\beta, \omega, u) = MA_{n-1}(u) := \frac{\left(\rho_\beta\beta + \left(\frac{(\Delta_\omega u)\omega - dd^c u}{n-1}\right)\right)^n}{\omega^n} = cf, \tag{2.1}$$

对于（$M,\ \beta,\ \omega$）是一个具有两种厄米度量的紧 Hermitian 流形，$1 \leqslant \rho_\beta$ 由 β 相对于 [Gau77a] 和 $f \in C^\infty(M)$ 定义的归一化高迪雄因子。

我们考虑的几何常数如下:

- Vol$_\omega(M)$ 表示相对于度量 ω 而言，M 的体积,
- $1 \leqslant G_\omega$ 是来自 [Pan22，定理 A],的度量 ω的高迪雄因子 ρ_ω 的一致上界
- $1 < C_{\beta,\ \omega}$ 是一致常数，使得 $C_\beta^{-1}{}_{,\ \omega}\beta \leqslant \omega \leqslant C_{\beta,\ \omega}\beta$,
- $0 < A_\alpha$，α 是命题 1.23 中的一致常数,
- $0 < v_{m_0}^-(\omega)$ 是如下定义的一致常数：给定 $0 < m_0$ 一致常数,

$$v_{m_0}^-(\omega) := \inf\left\{\int_M (\omega + dd^c u)^n \ :\ u \in \mathrm{PSH}(M,\omega) \text{ with } -m_0 \leqslant u \leqslant 0\right\}.$$

该常数为正，因为 ω 根据 [GL22第 3 号命题，4]是厄米的。

2.2. L^p **归一化常数的界**。以下结果借鉴了 [KN15引理 5、9], [Pan23引理 27] 以及 [GL25a定理 A的思想，我们得到：

Pro位置 2.5。归一化常数 c 对于 (2.1) 满足以下两个界 :

$$C_{\beta,\omega}^{-1}b \leqslant c \leqslant \left(\frac{C_{Lap}}{n||f^{\frac{1}{n}}||_{L^1(M,\omega^n)}}\right)^n$$

其中 $b = b(f, C_\beta^{-1}{}_{,\omega}\omega, A_\alpha) > 0$ 是 *Monge-Amp`ère* 方程 $(C_\beta^{-1}{}_{,\omega}\omega + dd^c u)^n = bf\omega^n$ 的归一化常数，并且 C_{Lap}：=体积$_\omega(M)G_\omega^{n-1}G_\beta C_{\beta,\omega}$。

参见 [Pan23，第 2 节，以及 3] Monge-Amp`ère 常数的精确定义。

证明。对常数进行上界估计。

根据 [Pan22，定理 A], ，存在一个一致常数 $G_\omega > 1$ ，使得相对于 (ρ_ω M, ω) 的归一化高迪雄因子有界于 1 和 G_ω之间。对于所有光滑的$u \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(M, \rho_\beta\beta, \omega)$，我们计算

$$\begin{aligned}\int_M (\rho_\beta\beta + dd^c u)\wedge\omega^{n-1} &\leqslant \int_M (\rho_\beta\beta + dd^c u)\wedge(\rho_\omega\omega)^{n-1}\\ &\leqslant \int_M \rho_\omega^{n-1}\rho_\beta\beta\wedge\omega^{n-1} + \int_M udd^c(\rho_\omega\omega)^{n-1} \leqslant G_\omega^{n-1}G_\beta C_{\beta,\omega}\,\mathrm{Vol}_\omega(M)\end{aligned}$$

命题2.3 现在给出

$$nc^{\frac{1}{n}}f^{\frac{1}{n}}\omega^n \leqslant (\rho_\beta\beta + dd^c u)\wedge\omega^{n-1}$$

积分后，我们 可以利用 Hessian 算子的质量上界得出 :

$$nc^{\frac{1}{n}}||f^{\frac{1}{n}}||_{L^1(M,\omega^n)} \leqslant C_{Lap}, \quad \text{hence} \quad c \leqslant \left(\frac{C_{Lap}}{n||f^{\frac{1}{n}}||_{L^1(M,\omega^n)}}\right)^n.$$

从下方估计该常数。

我们利用厄米流形上复 Monge-Amp`ere 方程解的存在性，该结果见 [TW10，推论 1] 或 [GL23，定理 B] ，其中考虑两种不同度量的情形。于是存在一对 $(v, b) \in$ 拟亚全纯$(M, C_\omega^{-1}\omega) \cap C^\infty($ $M) \times \mathbb{R}_{>0}$ 使得：

$$(C_{\beta,\omega}^{-1}\omega + dd^c v)^n = bf\omega^n, \quad \sup_M v = 0$$

现在我们利用命题 2.4 得到如下比较关系：

$$bc^{-1}MA_{n-1}(\beta,\omega,u) \leqslant bf \leqslant MA_{n-1}(C_{\beta,\omega}^{-1}\omega, C_{\beta,\omega}^{-1}\omega, v) \leqslant C_{\beta,\omega}MA_{n-1}(\beta,\omega,v)$$

然后，根据支配原理（引理 2.2），对于 v 和 u ，我们得到

$$C_{\beta,\omega}^{-1}bc^{-1}\alpha_u^n \leqslant \alpha_v^n \Rightarrow C_{\beta,\omega}^{-1}bc^{-1} \leqslant 1. \Rightarrow c \geqslant C_{\beta,\omega}^{-1}b.$$

根据 [GL23，定理 B] 常数 b有统一的下界，因此 c 也有统一的下界。 □

对于 设定（SF），根据 [Pan22，Pan23], 命题 2.5 中的常数均可控。

2.3. L^∞ **先验 估计**。借鉴 [GL25b，定理 B] 我们证明：

定理 2.6。对于 (M, β, ω) 如上文 ((2.1)) 所述，具有两个厄米度量的紧 *Hermitian* 流形。那么，我们有如下的一致界：

(A): $c \leqslant C_0$,

$$for\ C_0 = \left(\frac{C_{Lap}}{n||f^{\frac{1}{n}}||_{L^1(M,\omega^n)}}\right)^n > 0,\ where\ C_{Lap} := \mathrm{Vol}_\omega(M)G_\omega^{n-1}G_\beta C_{\beta,\omega}$$

(B): $-C \leqslant u \leqslant 0$，对于 $C = C(C_{\beta,\omega}^{-1}, ||f||_{L^p(M,\omega^n)}, n, p, ||u||_{L^1(M,\omega^n)}, v_{m_0}^{-C_0}(C_\beta^{-1}\omega))$ > 0以及一个 $m_0 > 0$一致依赖于 $f, C_0, C_{\beta,\omega}$。(C): $c_0 \leqslant c$,

$$for\ c_0 = \frac{v_{m_0}^-(C_{\beta,\omega}^{-1}\omega)}{||f||_{L^1(M,\omega^n)}} > 0.$$

证明。 常数 (A) 的上界可完全按照命题2.5

从下方估计解。

为得到第二个界 (B)，我们通过赝拟调和包络与复 Monge-Amp`ere 进行比较，即:

首先，为简化记号，我们将 ρ_β 替换为 ρ，并根据 (GC) 设 $\widetilde{\omega} := C_\beta^{-1}\omega \leqslant \beta$。现在考虑 $\psi := P_{\widetilde{\omega}}(u)$，即 u 的 $\widetilde{\omega}$-拟亚全纯包络。函数 ψ 是 C^1，1 且根据 GL22 定理 2.3] ，包络的复 Monge-Amp`ere 算子支撑于接触集上，即 $MA_{\widetilde{\omega}}(\psi)$ 集中在 $\mathcal{C} := \{\psi = u\}$ 上。

已知在接触集 $\mathcal{C}$ 上，函数 u 是 $\widetilde{\omega}$-拟亚全纯的。因此在 $\mathcal{C}$ 上，算子 $MA_{\widetilde{\omega}}(u)$ 是一个 $\widetilde{\omega}$-拟亚全纯函数的复 Monge-Amp`ere。

由于命题 2.4 中的不等式是逐点比较，我们有:

$$MA_{\widetilde{\omega}}(u)|_{\mathcal{C}} \leqslant MA_{n-1}(\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}, u)|_{\mathcal{C}} \leqslant C_{\beta,\omega} MA_{n-1}(\beta, \omega, u)|_{\mathcal{C}} \leqslant C_{\beta,\omega} MA_{n-1}(\rho\beta, \omega, u)|_{\mathcal{C}}$$

在 $\mathcal{C}$ 的所有点处。由于 $u \in$ 拟亚全纯$_{n-1}(M, \rho\beta, \omega)$，我们得到:

$$MA_{\widetilde{\omega}}(\psi) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}} MA_{\widetilde{\omega}}(u) \leqslant C_{\beta,\omega} \mathbb{1}_{\mathcal{C}} MA_{n-1}(\rho\beta, \omega, u) \leqslant C_{\beta,\omega} MA_{n-1}(\rho\beta, \omega, u).$$

于是，我们得到:

$$MA_{\widetilde{\omega}}(\psi) \leqslant C_{\beta,\omega} MA_{n-1}(\rho\beta, \omega, u) = C_{\beta,\omega} cf \leqslant C_{\beta,\omega} C_0 f,$$

其中，最后一个不等式由前一步中的界限（A）得出。对于一个一致受控的常数 $m_0 > 0$，我们有 $Osc_M(\psi) \leqslant m_0$，由 [GL23，定理 A]。由于我们有$\psi \leqslant u \leqslant 0$，且振荡受到控制，我们得到:

$$\int_M MA_{\widetilde{\omega}}(\psi)\widetilde{\omega}^n \geqslant v_{m_0}^-(\widetilde{\omega})$$

其受到控制 制，因为 m_0 可由 [GL22的命题 3 控制。4]我们计算:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (-\sup_M(\psi))^\delta v_{m_0}^-(\widetilde{\omega}) &\leqslant \int_M (-\psi)^\delta MA_{\widetilde{\omega}}(\psi)\widetilde{\omega}^n, \\ &= \int_{\mathcal{C}} (-\psi)^\delta MA_{\widetilde{\omega}}(\psi)\widetilde{\omega}^n = \int_M (-u)^\delta MA_{\widetilde{\omega}}(\psi)\widetilde{\omega}^n, \\ &\leqslant C_0 \int_M (-u)^\delta f\widetilde{\omega}^n \leqslant C_0 C_{\beta,\omega}^{-n} ||f||_{L^p(M,\omega^n)} ||u||_{L^1(M,\omega^n)}^{1/q}. \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由¨的 H$\delta = \frac{1}{q}$ older 不等式推出。$||u||_{L^1(M,\omega^n}$这一项可由 SH 的紧性控制，这里的紧性是在 L^1 中$_1(M, \beta, \omega)$，见 [GP24，引理 8]。

这意味着得 ψ 一致有界。由于根据定义 $\psi \leqslant u$，我们得出 :

$$-u \leqslant m_0 + \left(\frac{C_0 C_{\beta,\omega}^{-n} ||f||_{L^p(M,\omega^n)} ||u||_{L^1(M,\omega^n)}^{1/q}}{v_{m_0}^-(\widetilde{\omega})} \right)^q.$$

从下方估计常数。

要证明最后一个界（C），只需比较 Monge-Amp`ère 质量：

$$MA_{\widetilde{\omega}}(\psi) \leqslant cf \Longrightarrow v_{m_0}^{-}(\widetilde{\omega}) \leqslant c \int_M f\widetilde{\omega}^n \Longrightarrow \frac{v_{m_0}^{-}(\widetilde{\omega})}{C_{\beta,\omega}^{-n}||f||_{L^1(M,\omega^n)}} \leqslant c$$

对 $\widetilde{\omega}$ 积分，并且由于 ψ 一致有界。 □

2.4. **定理 A 的定理 A**。在定理 A中，L^∞ 对解 u_t 所作的估计，其中解来自复（$n-1$）-Monge-Amp`ère 方程族，以下常数均受控：

1(1) $||f_t^n||_{L^1(X_t,\omega_t^n)}$ $||f_t||_{L^p(X_t,\omega_t^n)}$ 由密度界（DB）的假设控制。(2) G_ω, G_β 受控，因为 ρ_t 满足高迪雄界（GB）。(3) $\mathrm{Vol}_{\omega_t}(X_t)$ 由体积界（VB）控制。(4) $v_{m_0}^{-}(\omega)$ 是一致的；对于一个 m_0，一致性由 GL22，命题 3.4] 保证。

因此，定理 2.6 完成了定理 定理 A的证明。

这些界 上述条件在设定（SF） 中成立， X_0 具有典范奇点，因为 ：

（1）根据 [DNGG23，引理 4，4] 适配体积满足（DB）。（2）根据 [Pan22，定理 A，], 任意可平滑化簇的高迪雄因子满足（GB）。（3）根据 [Pan22，第 1], 任意可平滑化簇的体积满足（VB）。

3. C^2 Estimate on holomorphic families

从这里开始，我们将在一个全纯族 π ： （$\mathcal{M}$， β， ω） $\to \mathbb{D}$ 中，在设定（SF）下工作，且不存在奇异纤维，即中心纤维 $M_0 = \pi^{-1}$（0）是一个复流形。我们还将进一步限定，固定度量 ω 为 K¨ahler 度量，因为这是定理 B的几何推论所处的设定。

本节中，我们将证明一个 C^2-估计，该估计依赖于梯度的范数，正如 [HMW10], 所述，其最初的策略可追溯至 [CW01]。我们的证明是对 [TW17，定理 41]的更精确描述，将使该估计在族中保持一致。为帮助读者理解，我们将使记号与其保持一致，并在此处省略相关计算，同时引用其论文。

3.1. **一致常数**。 首先，我们列出估计所依赖的一些一致常数，并固定其记号。回顾一下，在此设定中， M 是一个凯勒流形，ω 是一个凯勒度量，而 β 是厄米度量。

度量比较常数 如（GC）中所示，令$C_{\beta,\ \omega} > 1$ 满足：

$$C_{\beta,\omega}^{-1}\beta \leqslant \omega \leqslant C_{\beta,\omega}\beta$$

双截面曲率界： 令 $B > 0$ 为满足以下条件的常数：

$$-B|\xi_1|^2|\xi_2|^2 \leqslant R_{i,\bar{j},k,\bar{l}}\xi_1^i\overline{\xi_1^j}\xi_2^k\overline{\xi_2^l} \leqslant B|\xi_1|^2|\xi_2|^2, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^n.$$

L^∞**估计：** 令 $C_{L^\infty} > 0$ 为定理2.6 中的一致常数，即：

$$c + c^{-1} + \sup_M |u| \leqslant C_{L^\infty}.$$

记号： 为了采用与 [TW17 第 4] 节类似的记号，我们对厄米形式与黎曼度量作如下对应：

$$\alpha_u = \alpha \rightsquigarrow \widetilde{g}, \quad \omega \rightsquigarrow g, \quad \beta \rightsquigarrow h. \text{ Hence } \widetilde{g}_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}} + \frac{1}{n-1}\left((\Delta u)g_{i\bar{j}} - u_{i\bar{j}}\right).$$

and

$$\left(\beta + \frac{(\Delta_\omega u)\omega - dd^c u}{n-1}\right)^n = f\omega^n, \tag{3.1}$$

对于 $\sup_M u = 0$ 和 $0 < f \in C^\infty(M)$。[4]

3.2. 流形上的一致 C^2 估计。我们有如下 C^2-估计：

定理 3.1。对于(M, β, ω) 紧致 ***Kähler*** 流形，其中 ω 是 ***Kähler*** 度量，β是厄米度量。那么，存在一致常数 $C > 0$，使得：

$$||dd^c u||_{L^\infty} \leqslant C(\sup_M |\nabla u|_g^2 + 1)$$

对于 $C = C(B,\ C_{L^\infty},\ ||h||_{C^2},\ ||\log(f)||_{C^2},\ ||f||_{L^\infty},\ n,\ C_{\beta,\ \omega})$

证明。如 [TW17中的公式 (4.2)]，我们使用张量 η:

$$\eta_{i\bar{j}} = u_{i\bar{j}} - (n-1)h_{i\bar{j}} + (tr_g h)g_{i\bar{j}} = (tr_g\widetilde{g})g_{i\bar{j}} - (n-1)\widetilde{g}_{i\bar{j}}; \qquad \widetilde{g}_{i\bar{j}} = \frac{1}{n-1}((tr_g\widetilde{g})g_{i\bar{j}} - \eta_{i\bar{j}}) \tag{3.2}$$

我们将对[5]应用最大值原理：

$$H(x,\xi) = \log(\eta_{i\bar{j}}\xi^i\overline{\xi^j}) + \psi_1(|\nabla u|_g^2) + \psi_2(u),$$

对于 $x \in M$，$\xi \in T^{1,\ 0}_x M$个 g单位向量以及函数 ψ_1，ψ_2 定义为

$$\psi_1(s) = -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{s}{2K}\right),\ \text{for } 0 \leqslant s \leqslant K-1,\ \text{for } K = \sup_M |\nabla u|_g^2 + 1. \tag{3.3}$$

$$\psi_2(t) = -A\log\left(1 + \frac{t}{2L}\right),\ \text{for } -L+1 \leqslant t \leqslant 0,\ \text{for } L = C_{L^\infty} + 1, A = 2L(C_0+1). \tag{3.4}$$

对于之后选定的 $C_0 > 0$ 一致的对象。

我们在 H 的一个相对紧 W 子集上处理 g单位切丛的 M，其中 $\eta_{i\bar{j}}\xi^i\xi^j \geqslant 0$，当 $H = -\overline{\infty}$ 时 $\eta_{i\bar{j}}\xi^i\xi^j = 0$。因此，其最大值在 $\mathring{W}$ 某点（x_0，ξ_0）处取得。按照 [TW17第 324],页所述，选取相对于 g的正规 x_0 全纯坐标，使得：

$$g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}, \quad \eta_{i\bar{j}} = \eta_i\delta_{ij}, \quad \eta_1 \geqslant \eta_2 \geqslant \cdots \geqslant \eta_n. \tag{3.5}$$

$$\widetilde{g}_{i\bar{j}} = \lambda_i\delta_{ij}, \quad \eta_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k - (n-1)\lambda_i, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n. \tag{3.6}$$

我们有量 λ_n，η_1，$tr_\omega\alpha$ 是一致等价的：

$$\frac{1}{n}tr_g\widetilde{g} \leqslant \lambda_n \leqslant \eta_1 \leqslant (n-1)\lambda_n \leqslant (n-1)tr_g\widetilde{g}. \tag{3.7}$$

由于 η_1 是 $(\eta_{i\bar{j}})$ 的最大特征值，因此 H 的最大值在向量 $\xi_0 = \frac{\partial}{\partial z^1}$ 处取得，而该向量可在局部延拓为 $\xi_0 = g_{1\bar{1}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z^1}$。最后，我们令：

$$Q(x) = H(x,\xi_0) = \log\left(g_{1\bar{1}}^{-1}\eta_1\right) + \psi_1(|\nabla u|_g^2) + \psi_2(u). \tag{3.8}$$

的最大值 Q 在 x_0 处取得。我们将证明 $\eta_1(x_0) \leqslant CK$，从而完成证明。不失一般性，我们可以假设 $\eta_1 > 1$ 且 $u_{1\bar{1}} > 0$ 在 x_0处。我们定义张量 $\Theta^{i\bar{j}}$及其线性算子，如 [TW17第 324] 页所示：

$$\Theta^{i\bar{j}} = \frac{1}{n-1}\left((tr_g\widetilde{g})g^{i\bar{j}} - \widetilde{g}^{i\bar{j}}\right) > 0, \quad L(v) = \Theta^{i\bar{j}}v_{i\bar{j}} = \frac{1}{n-1}\left((tr_g\widetilde{g})\Delta v - \widetilde{\Delta}v\right). \tag{3.9}$$

由 g-正规坐标的选取，我们得到 $\nabla\xi_0(x_0) = 0$，对于协变导数，在 x_0处得到与 [TW17中的 (4.7) 和 (4.9)]类似的恒等式：

$$0 = Q_i = \frac{\eta_{1i}}{\eta_1} + \psi_1' \cdot \left(\sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi}u_{\bar{p}}\right) + \psi_2' \cdot u_i. \tag{3.10}$$

[4]我们将归一化常数包含在密度中 f，因为我们已经有一个 L^∞-估计。[5]这里我们的记号与 [TW17]略有不同。

由于 $\Theta^{i\bar{j}}$ 在 x_0处是对角的，并将(ξ^i)记作 ξ_0的坐标，我们得到：

$$\begin{aligned} L(Q) =& \sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}\eta_{1i\bar{i}}}{\eta_1} - \sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2} + \sum_i \Theta^{i\bar{i}}(\xi^1_{i\bar{i}} + \overline{\xi^1_{i\bar{i}}}) + \psi_2' \sum_i \Theta^{i\bar{i}} u_{i\bar{i}} \\ &+ \psi_2'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2 + \psi_1'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left| \sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi} u_{\bar{p}} \right|^2 \\ &+ \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{p\bar{i}}|^2 + \psi_2' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{pi}|^2 + \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}(u_{pi\bar{i}}u_{\bar{p}} + u_{\bar{p}i\bar{i}}u_p), \end{aligned} \tag{3.11}$$

经过复杂的直接计算，对（$n-1$）Monge-Amp`ère 方程作协变微分，并像 [HMW10第552] 页中那样交换导数，我们得到，由于 $L(Q) \leqslant 0$，在 x_0：

$$\begin{aligned} 0 \geqslant& \frac{\sum_{i,j} \widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}} - u_{j\bar{i}\bar{1}} + \widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1} - u_{i\bar{j}1} + \widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1} - \sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2} \\ &+ \frac{1}{\eta_1}\left(F_{1\bar{1}} - \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left(\sum_a u_{a\bar{i}} R_{i\bar{a}1\bar{1}} - \sum_a u_{a\bar{1}} R_{i\bar{a}1\bar{i}} \right) \right. \\ &\left. - \sum_i \widetilde{g}^{i\bar{i}} h_{i\bar{i}1\bar{1}} - \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left(\widehat{h}_{1\bar{1}i\bar{i}} - (tr_g h)_{i\bar{i}} \right) \right) \\ &+ \psi_2' \sum_i \Theta^{i\bar{i}} u_{i\bar{i}} + \psi_2'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2 + \psi_1'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left| \sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi} u_{\bar{p}} \right|^2 \\ &+ \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{p\bar{i}}|^2 + \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{pi}|^2 + \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}(u_{pi\bar{i}}u_{\bar{p}} + u_{\bar{p}i\bar{i}}u_p), \end{aligned} \tag{3.12}$$

这对应于 [TW17，(4.16)]，，对于 $e^F = \widehat{f}$和 $h_{i\bar{j}} = (n-1)h_{i\bar{j}}$，所有中间步骤也都相同。由于所有中间计算都与 [TW17]中的相同，我们略去这些步骤，只更精确地说明常数和不等式：

在 [TW17的方程 (4.17)]**：** 在 x_0

$$\sum \Theta^{i\bar{i}} = tr_{\widetilde{g}} g, \quad \text{and} \quad |u_{i\bar{j}}| = |\eta_{i\bar{j}} + (n-1)h_{i\bar{j}} - (tr_g h)g_{i\bar{j}}| \leqslant C_1\eta_1, \tag{3.13}$$

对于 $C_1 = 1 + (2n-1)||h||_{L^\infty}$，由 (3.2) 且由于 $\eta_1 > 1$ 是（$\eta_{i\bar{j}}$）在 x_0处的最大特征值。现在，我们继续对 (3.12)**的第二行和第三行作下界估计。在** [TW17的方程 (4.18) 和 (4.19)]**：**

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta_1}\left(F_{1\bar{1}} - \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left(\sum_a u_{a\bar{i}} R_{i\bar{a}1\bar{1}} - \sum_a u_{a\bar{1}} R_{i\bar{a}1\bar{i}} \right) \right. \\ &\left. - \sum_i \widetilde{g}^{i\bar{i}} h_{i\bar{i}1\bar{1}} - \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left(\widehat{h}_{1\bar{1}i\bar{i}} - (tr_g h)_{i\bar{i}} \right) \right) \geqslant -C_2 tr_{\widetilde{g}} g - C_3, \end{aligned} \tag{3.14}$$

对于 $C_2 = 2n(||h||_{C^2} + C_1 B)$ 和 $C_3 = ||F||_{C^2}$。由于 $\eta_1 > 1$ 并利用方程（3.13），以及双截曲率的界 B。取 $\widetilde{g}$-迹于 $\widetilde{g}$，可得：

$$\sum_i \Theta^{i\bar{i}} u_{i\bar{i}} = \frac{1}{n-1}((tr_{\widetilde{g}} g)\Delta u - \widetilde{\Delta} u) = n - tr_{\widetilde{g}} h, \tag{3.15}$$

现在我们来估计式（3.12）中的最后一项：

在 [TW17中，方程 (4.20) 和 (4.23)]**：**

再次利用偏微分方程的协变微分并交换导数：

$$\begin{aligned}
&\psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}(u_{pi\bar{i}}u_{\bar{p}} + u_{\bar{p}i\bar{i}}u_p) \\
&= \psi_1' \sum_{p} (F_p u_{\bar{p}} + F_{\bar{p}} u_p) - \psi_1' \sum_{i,p} \widetilde{g}^{i\bar{i}}(h_{i\bar{i}p}u_{\bar{p}} + h_{i\bar{i}\bar{p}}u_p) \\
&\quad + \psi_1' \sum_{i,p,q} \Theta^{i\bar{i}} u_q u_{\bar{p}} R_{p\bar{q}i\bar{i}} \\
&\geqslant -||F||_{C^1}(1+|\nabla u|_g^2)|\psi_1'| - (||h||_{C^1} + n^2 B) tr_{\widetilde{g}} g (|\nabla u|_g^2 + 1)|\psi_1'| \\
&\geqslant -C_4 tr_{\widetilde{g}} g - C_5.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

对于 $C_4 = \frac{||h||_{C^1} + n^2 B}{2}$ 和 $C_5 = \frac{||F||_{C^1}}{2}$。利用柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式，关于双截曲率 B，$\frac{1}{2K} \geqslant \psi_1' \geqslant \frac{1}{4K}$ 以及（3.13）。

将（3.12）与（3.14）、（3.15）和（3.16）结合可得：

$$\begin{aligned}
0 \geqslant\ & \frac{\sum_{i,j} \widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}} - u_{j\bar{i}\bar{1}} + \widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1} - u_{i\bar{j}1} + \widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1} - \sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2} \\
&+ \psi_2'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2 + \psi_1'' \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left| \sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi}u_{\bar{p}} \right|^2 + \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{p\bar{i}}|^2 \\
&+ \psi_1' \sum_{i,p} \Theta^{i\bar{i}}|u_{pi}|^2 - tr_{\widetilde{g}} g(C_{\beta,\omega}\psi_2' + C_2 + C_4) - (n\psi_2' + C_3 + C_5),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

由于 $-\frac{A}{L} \leqslant \psi_2' \leqslant -\frac{A}{2L} = -(C_0+1)$。然后取 $C_0 = \frac{C_2+C_4}{C_\beta \cdot \omega} + 2\frac{n||h||_{C^1}^2}{n-1}\frac{}{C_\beta (\ ) \cdot \omega}$ 唯一需要控制的项是 $\sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{2(\eta_1)}$，因为其他项均为正。如 [TW17第 328] 页中所述，我们定义：

$$\delta = \frac{1}{1+2A} = \frac{1}{1+4L(C_0+1)},$$

由于 L 和 C_0均为一致的，现在我们有如下两种情形，如 [HMW10、TW17]所示。

情形 1（假设 $\lambda_2 \leqslant (1-\delta)\lambda_n$）。我们利用（3.10）和（3.13）得到

$$\begin{aligned}
-\sum_i \frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1\bar{1}i}|^2}{(\eta_1)^2} &= -\sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left| \psi_1' \left(\sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi}u_{\bar{p}} \right) + \psi_2' u_i \right|^2 \\
&\quad - 2(\psi_1')^2 \sum_i \Theta^{i\bar{i}} \left| \sum_p u_p u_{\bar{p}i} + \sum_p u_{pi}u_{\bar{p}} \right|^2 - 8(C_0+1)^2 K tr_{\widetilde{g}} g,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

因为 $|\psi_2'| \leqslant \frac{A}{L} = 2(C_0+1)$。然后，利用 $\psi_1'' = 2(\psi_1')^2$，$\psi_2'' > 0$，ψ_1'，$-\psi_2' - C_0 \geqslant 1$，$\psi_1' \geqslant \frac{1}{4K}$并消去无用的正项后，由（3.17）得到

$$0 \geqslant \frac{1}{4K}\Theta^{n\bar{n}}u_{n\bar{n}} - 8(C_0+1)^2 K tr_{\widetilde{g}} g - C_6, \tag{3.19}$$

对于 $C_6 = C_3 + C_5$。由于 $\Theta^{nn} \geqslant \frac{1}{n}\sum_i \Theta^{ii} \geqslant \frac{1}{n} tr_{\widetilde{g}} g$：

$$\frac{1}{n}(tr_{\widetilde{g}} g)u_{n\bar{n}}^2 \leqslant 32(C_0+1)^2 K^2 tr_{\widetilde{g}} g + C_6 K. \tag{3.20}$$

根据假设 $\lambda_2 \leqslant (1-\delta)\lambda_n$ 以及 (3.2)

$$u_{n\bar{n}} \leqslant \lambda_1 - \delta\lambda_n + (2n-1)||h||_{L^\infty} \leqslant -\frac{\delta}{2}\lambda_n$$

由于 $\delta<1$ 且不失一般性 $\lambda_1<1$ 以及 $\frac{\lambda_n}{2}\geqslant\frac{1}{(2n-1)^{\frac{||h||_{L^\infty}+1}{\delta}}}$。因此 $u_{n\bar{n}}^2\geqslant\frac{\delta^2}{4}\lambda_n$，由 (3.20) 可得

$$\lambda_n\leqslant C_7K$$

对于 $C_7=\frac{8nC_6}{\delta^2}$，由于 $1\leqslant tr_{\tilde{g}}g\cdot\lambda_n$ 且不失一般性 $\frac{\lambda_n^2}{2}\geqslant\frac{1}{32(C_0+1)^2K^2(4n)\delta^2}$。由 (3.7)，这就得到了所需的估计 $\eta_1\leqslant(n-1)C_7K$。

情形 2(假设 $\lambda_2\geqslant(1-\delta)\lambda_n$)。与情形一类似，对于求和项 $i=1$

$$-\frac{\Theta^{1\bar{1}}|\eta_{1\bar{1}1}|^2}{(\eta_1)^2}\geqslant-2(\psi_1')^2\Theta^{1\bar{1}}\left|\sum_p u_pu_{\bar{p}i}+\sum_p u_{pi}u_{\bar{p}}\right|^2-8(C_0+1)^2nK\Theta^{1\bar{1}},$$

将其与 $2(\psi_1')^2=\psi_1''$、$\psi_1'\geqslant\frac{1}{4K}$、$-C_{\beta,\omega}\psi_2'-C_2-C_4\geqslant2^{n-1}||h||_{C^1}^2$ 以及 (3.17)

$$\begin{aligned}0\geqslant&\frac{\sum_{i,j}\tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}}-u_{j\bar{i}\bar{1}}+\widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1}-u_{i\bar{j}1}+\widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1}-\sum_{i=2}^n\frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2}\\&+\psi_2''\sum_i\Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2+\psi_1''\sum_{i=}^n\Theta^{i\bar{i}}\left|\sum_p u_pu_{\bar{p}i}+\sum_p u_{pi}u_{\bar{p}}\right|^2\\&+\frac{1}{4K}\sum_{i,p}\Theta^{i\bar{i}}|u_{pi}|^2+C_8tr_{\tilde{g}}g-8(C_0+1)^2nK\Theta^{1\bar{1}}-C_6,\end{aligned}\tag{3.21}$$

对于 $C_8=2^{n-1}||h||_{C^1}^2$。不失一般性，我们假设 $\frac{1}{4K}\Theta^{1\bar{1}}u_{1\bar{1}}^2\geqslant8(C_0+1)^2nK\Theta^{1\bar{1}}$ 然后由下文的引理 3.2 （这是 [TW17 引理 4. 的定量版本）3]，我们得出 $0\geqslant\frac{C_8}{2}tr_{\tilde{g}}g-C_6$ 这意味着所需的估计

$$\eta_1\leqslant(n-1)||f||_{L^\infty}\left(\frac{2C_6}{C_8}\right)^{n-1}.$$

□

引理 3.2。我们有 x_0 ，，

$$\begin{aligned}E:=&\frac{\sum_{i,j}\tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}}-u_{j\bar{i}\bar{1}}+\widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1}-u_{i\bar{j}1}+\widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1}-\sum_{i=2}^n\frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2}\\&+\psi_2''\sum_i\Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2+\psi_1''\sum_{i=}^n\Theta^{i\bar{i}}\left|\sum_p u_pu_{\bar{p}i}+\sum_p u_{pi}u_{\bar{p}}\right|^2\geqslant-\frac{C_8}{2}tr_{\tilde{g}}g\end{aligned}$$

当 $C_8=2^{n-1}||h||_{C^1}^2$ 时。

证明。利用（3.10），$\psi_1''=2(\psi_1)^2$ 以及 [HMW10，命题 2。3] 即 $\forall a;\ b\in\mathbb{C}^n$ 和 $0<\delta'<1$，$|a+b|^2\geqslant\delta'|a|^2-\frac{\delta'}{1-\delta'}|b|^2$ 我们有

$$\psi_1''\sum_{i=2}^n\Theta^{i\bar{i}}\left|\sum_p u_pu_{\bar{p}i}+\sum_p u_{pi}u_{\bar{p}}\right|^2\geqslant2\delta\sum_{i=2}^n\Theta^{i\bar{i}}\frac{|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2}-\frac{2\delta(\psi_2')^2}{1-\delta}\sum_{i=2}^n\Theta^{i\bar{i}}|u_i|^2\tag{3.22}$$

结合 $\psi_2''\geqslant\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}(\psi_2')^2$ 对所有 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{2A+1}$ 成立这一事实，回顾 $\delta=\frac{1}{2A+1}$，我们得到：

$$E\geqslant\frac{\sum_{i,j}\tilde{g}^{i\bar{i}}\tilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}}-u_{j\bar{i}\bar{1}}+\widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1}-u_{i\bar{j}1}+\widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1}-(1-2\delta)\sum_{i=2}^n\frac{\Theta^{i\bar{i}}|\eta_{1i}|^2}{(\eta_1)^2}\tag{3.23}$$

交换导数，消去无用的正项，并在 x_0 (3.2) 中， $g_{1\bar{i}}=0$ 对于$i>1$ 和 [HMW10，命题 2。3] 再次得到：

$$\begin{aligned}&\frac{\sum_{i,j}\widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{j\bar{j}}(g_{j\bar{i}}\sum_a u_{a\bar{a}\bar{1}}-u_{j\bar{i}\bar{1}}+\widehat{h}_{j\bar{i}\bar{1}})(g_{i\bar{j}}\sum_b u_{b\bar{b}1}-u_{i\bar{j}1}+\widehat{h}_{i\bar{j}1})}{(n-1)^2\eta_1}\\ \geqslant&(1-\frac{\delta}{2})\sum_{i=2}^n\frac{\widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{1\bar{1}}|\eta_{1\bar{i}}|^2}{(n-1)^2\eta_1}-\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\sum_{i=2}^n\frac{\widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{1\bar{1}}|[(tr_g h)g_{1\bar{1}}]_{\bar{i}}|^2}{(n-1)^2\eta_1}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

在情形 2 中，我们已 有 $\widetilde{g}^{i\bar{i}}\leqslant\frac{1}{(1-\delta)\lambda_n}$ 对于 $i>1$。不失一般性（$1-\delta$）$\lambda_n\geqslant\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}$ 于是

$$\frac{1-\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2}}\sum_{i=2}^n\frac{\widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{1\bar{1}}|[(tr_g h)g_{1\bar{1}}]_{\bar{i}}|^2}{(n-1)^2\eta_1}\leqslant\frac{C_8}{2}tr_{\widetilde{g}}g,$$

对于 $C_8=\frac{2^{n||h||^2_{C^1}}}{n-1}$，因为 x_0 周围的坐标是 g-正规坐标。剩下的唯一一步就是证明

$$(1-\frac{\delta}{2})\sum_{i=2}^n\frac{\widetilde{g}^{i\bar{i}}\widetilde{g}^{1\bar{1}}|\eta_{1\bar{i}}|^2}{(n-1)^2\eta_1}\geqslant(1-2\delta)\sum_{i=2}^n\Theta^{i\bar{i}}\frac{|\eta_{1\bar{i}}|^2}{(\eta_1)^2},$$

这正是 [TW17，公式 (4.39)] 因此证明请参阅该文。 □

3.3. **全纯族 C^2 估计的证明**。 由定理3.1 可知，某个 C^2 范数的常数取决于：

(1) $B>0$ 双截曲率的一致上下界。(2) C_{L^∞} 解的 L^∞ 一致 L^∞ 界（对应于3.1）。(3) $C^2\log(f)$ 的范数以及度量 ω和 β，还有 L^∞范数 f。

在 设定（SF）下，若不存在奇异纤维，则这些常数具有一致性：
(1) 由纤维的紧致性可知，常数 B 可在底流形 $\mathbb{D}$的紧子集上一致选取，因此在全纯族中是一致的。(2) 根据定理 2.6 ，即使族有奇点，常数 C_{L^∞} 也一致。(3) 由紧致性可知，所有范数在 $\mathbb{D}$的紧子集上也都是一致的。

因此，依赖于 $|\nabla u|^2_g$的 C^2 界沿全纯族保持一致。

4. Proof of Theorem B

4.1. **C^1 全纯族上的估计**。 由于 C^2上一节的估计依赖于 $\sup_M|\nabla u|^2_g$ ，我们改编 [TW17], 基于 [DK17], 的爆破论证，以得到全纯族的 C^1 估计。

定理 4.1。 给定固定设定中的一个全纯族$(\mathcal{M},\beta,\omega)$。则存在一个常数 $C>0$，它仅依赖于$||f||_{C^2(\mathcal{M},\ \omega)}$和$(M,\beta_0,\omega_0)$，使得

$$\sup_{\mathbb{D}_{\frac{1}{2}}}|\nabla u|_\omega\leqslant C.$$

特别是，常数 C 不依赖于复结构。

证明。 反设，$||f||_{C^2(\mathcal{M},\omega)}\leqslant C$是一致的，并且存在 u_t,C_t使得：$\sup|\nabla u_t|_{\omega_t}=C_tM_t$

令 $C_t\to+\infty$ 为 $t\to t_0$，为简便起见，我们设 $t_0=0$。接着，取一列指标$\{t_j\}$，并像 $\{j\}$ 那样简化记号，使得 $\sup_{M_j}|\nabla u_j|_{\omega_j}=C_j$，其中 $C_j\to+\infty$ 为 $j\to+\infty$。

我们有：$\sup u_j = 0$、$\sup |u_j| \leqslant C$（与 j 无关，这是由 L^∞-估计得到的）以及M_j M_j

$$\alpha_j = \beta_j + \frac{1}{n-1}((\Delta_j u_j)\omega_j - dd^t u_j), \quad \alpha_j^n = f_j \omega_j^n.$$

令 $x_j = \text{arcmax}_{M_j} |\nabla u_j|$。抽取一个子列 $x_j \to x_0 \in M = M_0$ 后，不妨设对于 $t_j \to 0$。

由于该族是全纯的，因此局部地存在 $V \subset \mathcal{M}$ open，使得 $V_t \subset X_t$、$V_0 \subset X = X_0$、$t \in I \subset B$，并令 $V = B_2(0) \times I$，使得 $\omega(0) = \omega_{\mathbb{C}^n} = \sum_j idz^j \wedge dz^j$ 对于$\omega = \omega_0$，在不致混淆时记纤维上的度量为 X。

假设当 j 足够大时，x_{t_j} 全都属于 $B_1(0) \times I'$；$I' \Subset I$。在 $B_{C_j}(0) \times I \subset \mathbb{C}^n \times I$ 中定义：

$$\widehat{u}(z,t) = u_j(C_j^{-1}z + x_j; t); \quad \Phi_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \Phi_j(z) = C_j^{-1}z + x_j$$

由于该族是全纯平凡的，我们将有 u_j，u 在足够小的邻域中定义良好。为简便起见，记作所有点都位于 $B_1(0) \subset X_0$ 上。于是有：

$$\sup_{B_{C_j}(0)} |\widehat{u}_{t,j}| \leqslant C; \forall t \in I, \forall j \text{ big enough}, \quad \text{for } \widehat{u}_{t,j} = \widehat{u}_j(\cdot, t).$$

并固定 $t \in I$，我们有

$$\nabla^{g_t} \widehat{u}_{t,j} = \nabla^{g_t} u_{t,j} C_{t,j}^{-1} Id$$

则$|\nabla^{g_t} \widetilde{u}_{t,\ j}|(0) = 1$。因此 $\sup |\nabla^{g_j} \widehat{u}_j| \leqslant C$，且与 t，j 无关。根据 C^2 估计：X_j

$$\sup_{B_{C_j}(0)} |\partial\bar{\partial}\widehat{u}_j|_{\omega_{\mathbb{C}^n}} \leqslant CC_j^{-2} \sup_{X_j} |\partial\bar{\partial} u_j|_\omega \leqslant C$$

如 [TW17] 所述，由 Sobolev嵌入和 Δ 对每个给定的$K \subset \mathbb{C}^n$ 紧致，$0 < \gamma < 1$ 以及 $p > 1$，存在常数 C 使得：

$$||\widehat{u}_j||_{C^{1,\gamma}(K)} + ||\widehat{u}_j||_{W^{2,p}(K)} \leqslant C.$$

因此，存在 $\widehat{u}_j$的一个子列，它收敛到 U于 $\mathbb{C}^n$，且 $\sup (|U| + |\nabla U|) \leqslant C$并且$\mathbb{C}^n \nabla U(0) \neq 0$，故其非常数。最后，证明的其余部分与 [TW17]中的证明完全相同。也就是说，证明 U 在$\mathbb{C}^n$中是极大的，因此满足定理1.24的所有假设，这意味着 U 为常数，从而导出矛盾。□

4.2. **全纯族上的高阶估计**。与经典的 Monge-Amp`ère 方程一样，高阶估计完全是局部的。因此，可以采用类似 [TW17定理 6 中的复 Evans-Krylov 型论证，1]从而得到一个 $C^{2,\ \gamma}$ 估计，该估计依赖于 log(f) 的二阶导数；再结合 Schauder估计和自举论证，即可得出定理 B。此外，还可以利用 [TWWY15定理 1.1 和 1 中发展的 Evans-Krylov-Caffarelli理论，2]得到仅依赖于 log(¨) 的 Hölder 界、度量以及解的f估计。这明确表明，结合第 C^2 3 节和第 4.1 节，估计在全纯族上保持一致。

至此，定理 B的证明结束。

References

[ADO23] S. Abja、S. Dinew 和 G.Olive. 与 Monge-Amp`ere 方程相当的凹齐次复退化椭圆方程的一致估计。*Potential Analysis*, 59(4):1507–1524, 2023.[AO22] S. Abja 和 G. Olive. 支配 Monge-Amp`ere 方程的凹齐次复退化椭圆方程的局部正则性。纯粹与应用数学年刊 *(4)*, 201(2):561–587, (2022).[BO25] G. Barbaro 和 A. Otiman. Calabi-Yau 局部共形 K¨ahler 流形。预印本，arXiv:2509.18364 [math.DG] (2025), 2025.

[Chu12] M.-T. Chuan. 节点过渡下 Hermitian-Yang-Mills度量的存在性。《分析与几何通讯》, 20(4):677–749, 2012.[Cle83] C. H. Clemens. 双重立体。《数学进展》, 47(2):107–230, 1983.[CPY24] T. Collins、S. Picard 和 S.-T. Yau. 节点过渡下切丛的稳定性。《纯粹与应用数学通讯》, 77(1):284–371, 2024.[CW01] K.-S. Chou 和 X.-J. Wang. Hessian方程的变分理论。《纯粹与应用数学通讯》, 54(9):1029–1064, 2001.[CX25] J. Cheng 和 Y. Xu. 紧Hermitian流形上复 Hessian 方程的黏性解。《泛函分析杂志》, 289(5):52, 2025. 编号 110936.[Dem85] J.-P. Demailly. Monge-Amp`ere 测度与仿射代数簇的几何刻画。法国数学会回忆录（新系列）, 113(19):124, 1985.[Dem12] J.-P. Demailly. 复解析与微分几何。作者个人网页，2012.[Din22] S. Dinew. m-次调和函数与 m-多重次调和函数：关于 Sadullaev 的两个问题。《图卢兹科学学院年刊》，数学（第六辑）, 31(3):995–1009, 2022.[DK17] S. Dinew 和 S. Ko-lodziej. 复 Hessian 方程的 Liouville 型与 Calabi-Yau型定理。《美国数学杂志》, 139(2):403–415, 2017.[DNGG23] E. Di Nezza、V. Guedj 和 H. Guenancia. 奇异 K¨ahler-Einstein 度量族。《欧洲数学会杂志》（JEMS）, 25(7):2697–2762, 2023.[EGZ09] P. Eyssidieux、V. Guedj 和 A. Zeriahi. 奇异 K¨ahler-Einstein 度量。《美国数学会杂志》, 22(3):607–639, 2009.[FLY12] J. Fu、J. Li 和 S.-T. Yau. 非 K¨ahler Calabi-Yau三维簇上的平衡度量。《微分几何杂志》, 90(1):81–129, 2012.[Fri86] R. Friedman. 三维簇双重点的同时解消。数学年刊, 274(4):671–689, 1986.[FWW10] J. Fu、Z. Wang 和 D. Wu. 型式 Calabi-Yau 方程。数学研究快报, 17(5):887–903, 2010.[FWW15] J. Fu、Z. Wang 和 D. Wu. 非负正交双截曲率 K¨ahler 流形上的型式方程。变分法与偏微分方程, 52(1-2):327–344, 2015.[Gau77a] P. Gauduchon. 零偏心率定理。C. R. S ´er. A-B, 285(5):A387–A390, 1977.[Gau77b] Paul Gauduchon. 具有非负里奇自同态的厄米丛。法国数学会通报, 105:113–140, 1977.[Gau84] P. Gauduchon. 紧厄米流形的挠率 1-形式。数学年刊, 267(4):495–518, 1984.[GGZ24] V. Guedj、H. Guenancia 和 A. Zeriahi. K¨ahler-Einstein 流的严格正性。Forum Math. Sigma, 12:论文编号 e68，27, 2024.[GL22] V. Guedj 和 C. H. Lu. 拟多重次调和包络 2：Monge-Amp`ere 体积的界。《代数几何》, 9(6):688–713, 2022.[GL23] V. Guedj 和 C. H. Lu. 拟多重次调和包络 3：在厄米流形上求解 Monge-Amp`ere 方程。纯粹与应用数学杂志, 800:259–298, 2023.[GL25a] V. Guedj 和 C. H. Lu. 紧Hermitian流形上的退化复Hessian方程。纯粹与应用数学季刊, 21(3):1171–1194, 2025.[GL25b] V. Guedj 和 C. H. Lu. 一致估计：从 Yau 到 Ko-lodziej。预印本，arXiv:2502.02313, 2025.[GP24] B. Guo 和 D. H. Phong. 关于全非线性偏微分方程的 L^∞ 估计。《数学年刊》 (2), 200(1):365–398, 2024.[GS25] F. Giusti 和 C. Spotti. Calabi-Yau三维簇小解消上的陈-里奇平坦平衡度量。《国际数学研究通知》, 2025(18):13, 2025. 编号 rnaf289.[Har74] R. Hartshorne. 代数奇点平滑化的拓扑条件。Topology, 13(3):241–253, 1974.[HL11] F. R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr. 黎曼流形上的 Dirichlet对偶与非线性 Dirichlet问题。《微分几何杂志》, 88(3):395–482, 2011.[HL12] F. R. Harvey 和 H. B. Lawson, Jr. 几何多重次调和性与凸性：导论。《数学进展》, 230(4-6):2428–2456, 2012.[HL14] F. R. Harvey 和 H. B. Lawson. 非线性次方程的可去奇点。Indiana Univ. Math. J., 63(5):1525–1552, 2014.

[HMW10] Z. Hou、X.-N. Ma 和 D. Wu. 紧 K¨ahler 流形上复 Hessian 方程的二阶估计. 数学研究快报, 17(3):547–561, 2010.[Hul86] C. M. Hull. 带挠率和时空超对称性的超弦紧化. 载于《超弦统一化与额外维度》（都灵，1985），第 347–375 页. 世界科学出版社, 新加坡, 1986.[KN15] S. Ko-lodziej 和 N. C. Nguyen. 厄米流形上的复 Monge-Amp`ere 方程弱解. 载于《分析、复几何与数学物理：纪念 Duong H. Phong》，第 644 卷《当代数学》，第 141–158 页. 美国数学会, 普罗维登斯，罗德岛州, 2015.[Lam99] A. Lamari. 曲面上的 K¨ahl´er 锥. 纯粹与应用数学杂志 (9), 78(3):249–263, 1999.[LT96] P. Lu 和 G. Tian. 连通和上的复结构 $S^3\times S^3$. 载于《流形与几何：1993 年 9 月在意大利比萨举行的会议论文集》，第 284–293 页. 剑桥：剑桥大学出版社, 1996.[Mic82] M. L. Michelsohn. 复几何中特殊度量的存在性. 数学学报, 149:261–295, 1982.[OV25a] L. Ornea 和 M. Verbitsky. 局部共形 K¨ahler 流形上的平衡度量与 Gauduchon 锥. 《国际数学研究通知》, 2025(3):10, 2025. 编号 rnaf014.[OV25b] L. Ornea 和 M. Verbitsky. 复流形上的 Lee–Gauduchon 锥. 载于《实几何与复几何》，第 237–250 页. 施普林格, 尚, 2025.[Pan22] C.-M. Pan. 奇异 Gauduchon 度量. 综合数学, 158(6):1314–1328, 2022.[Pan23] C.-M. Pan. 奇异 Chern-Ricci 平坦度量族. 几何分析杂志, 33(2):论文编号 66, 32 页, 2023.[Pan25] C.-M. Pan. 非 K¨ahler 簇上的 Gauduchon 度量与 Hermite-Einstein 度量. 预印本, arXiv:2503.02759 [math.DG] (2025), 2025.[Pop15] D. Popovici. 紧复流形上与 Gauduchon 度量相关的 Aeppli 上同调类. 法国数学会通报, 143(4):763–800, 2015.[PU18] D. Popovici 和 L. Ugarte. 具有小 Gauduchon 锥的紧复流形. 伦敦数学会会刊 (3), 116(5):1161–1186, 2018.[Rei87] M. Reid. 具有 $K=0$ 的三维簇的模空间仍可能是不可约的. 数学年刊, 278(1-4):329–334, 1987.[Str86] A. Strominger. 带挠率的超弦. 核物理 B, 274(2):253–284, 1986.[STW17] G. Sz´ekelyhidi、V. Tosatti 和 B. Weinkove. 具有指定体积形式的 Gauduchon 度量. 数学学报, 219(1):181–211, 2017.[TW10] V. Tosatti 和 B. Weinkove. 紧厄米流形上的复 Monge-Amp`ere 方程. 《美国数学会杂志》, 23(4):1187–1195, 2010.[TW17] V. Tosatti 和 B. Weinkove. 紧 K¨ahler 流形上 (`)-多重次调和函数的 Monge-Amp$n-1$ere 方程. 《美国数学会杂志》, 30(2):311–346, 2017.[TW19] V. Tosatti 和 B. Weinkove. Hermitian 度量、$(n-1,n-1)$ 形式与 Monge-Amp`ere 方程. 纯粹与应用数学杂志, 755:67–101, 2019.[TWWY15] V. Tosatti、Y. Wang、B. Weinkove 和 X. Yang. 复几何与近复几何中非线性椭圆方程的 $C^{2,\alpha}$ 估计. 变分法与偏微分方程, 54(1):431–453, 2015.[Ver10] M. Verbitsky. 标定几何中的多重次调和函数与 $q$-凸性. 数学杂志, 264(4):939–957, 2010.[Yau78] S.-T. Yau. 紧 K¨ahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp`ere 方程. I. 《纯粹与应用数学通讯》, 31(3):339–411, 1978.

Université de Toulouse, CNRS, Institut de Mathématiques de Toulouse, France电子邮箱：guicerqg@gmail.com / guilherme.cerqueira goncalves@math.univ-toulouse.fr网址：https://guicerqmath.github.io/