arXiv:2512.19836v1 [math.MG] 22 Dec 2025

球凸体与 L_p 相对表面积

Elisabeth M. Werner *† Diliya Yalikun ‡

摘要

我们为球凸体定义了新的表面积测度，并称之为 L_p 相对表面积。我们证明这些测度是刚性运动不变赋值。我们为这些量建立了不等式，并证明了它们具有单调性，由此引出了球凸体熵的新概念。我们引入了加权球浮体。球凸体与加权球浮体的体积导数，为 L_p 相对表面积提供了一种几何解释。

关键词。 球凸体， L_p 仿射表面积，相对表面积，熵，浮体

2020年数学主题分类。 主要分类 52A20；次要分类 94A17。

1 引言

$\mathbb{R}^n$ 中的凸体是 $\mathbb{R}^n$ 的紧凸子集，且具有非空内部。 $\mathbb{R}^n$ 中形如 K 的凸体

$$K = \bigcap_{K \subset R\, B_2^n + x} R\, B_2^n + x, \tag{1}$$

其中 R 是正实数， B_2^n 是欧几里得单位球，这类集合称为 R-球凸。我们用 $\mathcal{K}_R$表示此类集合构成的类。该类最早在 [19, 38] 中引入并研究，随后得到广泛研究，例如见 [5, 15, 16, 17, 36, 44]。这一类与最优传输有关（见 [2], ），也与Kneser-Poulsen猜想（见 [14]）、Blaschke滚动定理 [22], 、Meissner多面体 [34] 、等宽体 [35, 42], 以及等周问题（例如见 [23]）有关。文献 [3, 4]给出了球凸体上等距变换的分类。特别地，文献 [55] 为这一类引入了一种浮体概念，即 K的-球浮体，

$$K_\delta^R = \bigcap_{\mathrm{vol}_n(K \setminus R\, B_2^n + x) \le \delta} R\, B_2^n + x, \tag{2}$$

其中，欧几里得球 $R\, B_2^n + x$ 替代了经典浮体定义中的超平面 H ， $K_\delta = \bigcap_{\text{体积}_n(H^- \cap K) \le \delta} H^+$， [6, 51]。 H^+ 和 H^- 是由超平面 H确定的两个闭半空间。注意，当 $R \to \infty$时，我们得到

*由美国国家科学基金会 DMS-2506790 项目资助

†美国俄亥俄州克利夫兰市阿德尔伯特路 2145 号，邮编 44106，美国凯斯西储大学数学系，elisabeth.werner@case.edu

‡美国俄亥俄州克利夫兰市阿德尔伯特路 2145 号，邮编 44106，美国凯斯西储大学数学系，dxy259@case.edu@case.edu

经典浮体。文献 [55] 还证明，具有其 R-球浮体的R-球凸体的体积右导数存在，

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n(K)-\mathrm{vol}_n\left(K_\delta^R\right)}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}=\alpha_n\int_{\partial K}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x), \tag{3}$$

其中 α_n 是仅依赖于 n 的常数， μ_K 是 K 的边界 ∂K 上通常的表面积测度，而 $1\le i\le n-1$ 是 K 在 x 处的主曲率。它们的乘积就是高斯曲率 $\kappa(K,x)$。关于经典浮体的相应结果已在 [51] 中得到证明，其极限为经典仿射表面积，这一概念可追溯至 Blaschke [18],

$$as(K)=\int_{\partial K}\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x). \tag{4}$$

当 $R\to\infty$ 时，(3) 的右侧趋于 (4)，这促使我们将 (3) 的右侧称为相对仿射表面积。但请注意，它并不是仿射不变量。

由于经典仿射表面积具有重要性质，使其成为一种有效而强大的工具，因此它在几何学中无处不在，例如 [28, 31, 39, 40, 41, 56] ；它还有众多应用，例如用多面体逼近凸体（例如 [11, 12, 20, 47, 48, 52], ）、闵可夫斯基问题 [29, 33], 、仿射曲率流、信息论和微分方程 [1, 10, 59, 60, 61]。新的相对表面积测度 (3) 也已出现在逼近问题中 [24, 25, 26]。

经典布伦－明可夫斯基理论的一个扩展，即 L_p 布伦－明可夫斯基理论，由 Lutwak 在开创性论文 [40] 中提出。 L_p 布伦－明可夫斯基理论的核心是 L_p 仿射表面积，定义见下文。Lutwak 针对 $p>1$ 在 [40], 中 $p>0$ 在 [32] 中，以及 [53] 中所有 p引入了这些概念。$p=1$ 的情形就是（经典）仿射表面积 (4)。如今， L_p 布伦－明可夫斯基理论已成为现代凸几何学的重要组成部分 [30, 37, 54, 57, 58, 62, 63, 64]。浮体和 L_p 仿射表面积在球面空间和双曲空间中的扩展已在 [7, 8, 13] 中得到发展。

相对表面积测度的 L_p 类似物迄今尚未出现。因此，自然要探讨在 R-球凸体背景下的 L_p 版本。本文将对其进行介绍。

本文组织如下：第 2 节介绍我们的部分结果。第 3 节给出 L_p-相对表面积的定义，展示其一些性质，并证明这些量所满足的不等式。第 4 节引入球凸体的一种新的熵概念。第 5 节定义加权球浮体，并说明其与 L_p-相对表面积的相关性。第 6 节给出其余证明。

进一步的记号。以 a 为中心、半径为 r 的闭欧几里得球记作 $B_2^n(a,\ r)$。简记为 $B_2^n=B_2^n(0,\ 1)$ 和 $S^{n-1}=\partial B_2^n$。 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得范数记作 $\|\cdot\|$。我们用 $H(x,\ \xi)$ 表示经过 x 且垂直于向量 ξ 的超平面。连接 x 和 y 的线段记作 $[x,y]$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K ，$\mathrm{vol}_n(K)$，或简记为 $|K|$ ，表示其体积。我们用 $N(x)$ 或 $N_K(x)$ 表示边界点 x 处 K 的单位外法向量。在全文中，不失一般性地假设 $0\in\mathrm{int}(K)$，即 K 的内部。 K 的极体或对偶体是

$$K^\circ=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle\le 1\}.$$

关于凸体的更多信息和细节，请参阅相关书籍，例如 [27, 49]。最后， c、 d、 d_1、 d_2 是绝对常数，可能在不同的行中取不同的值。

2 结果

现在我们介绍本文的一些结果。
我们用 $\mathcal{K}_R^+$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中所有满足以下条件的 R-球凸体：对所有 $x \in \partial K$， $\kappa_i(K,x) > \frac{1}{R}$，对所有 $1 \leq i \leq n-1$。

第一个定理引出了我们对 L_p 相对表面积的定义。我们采用的方法不仅在经典情形 [43], 中有效，在球面空间和双曲空间 [9, 10],中也同样有效，即将浮体运算与极性变换复合。

定理 1. 设 $K \in \mathcal{K}_R^+$ ，且令 K_δ^R为其 R-球浮体。那么

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\mathrm{vol}_n\left((K_\delta^R)^\circ\right) - vol_n\left((K)^\circ\right)}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = c_n \int_{\partial K} \frac{\kappa(K,x)}{\langle x, N(x)\rangle^{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K,x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_K(x),$$

其中 $c_n = \frac{n^2(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\,(\sigma(S^{n-2}))^{\frac{2}{n+1}}}$。
注意，若 $R \to \infty$，则右侧得到 $-n/(n+2)$-仿射表面积[40, 43, 53]。因此，自然地将该积分表达式称为 $-n/(n+2)$-相对表面积，并由此定义所有 $p \neq -n$ 的 L_p-相对表面积，即 R-球凸体 K 的

$$\Omega_p^R(K) = \int_{\partial K} \left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x, N(x)\rangle}\right)^{\frac{n(p-1)}{n+p}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K,x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_K(x).$$

对于 $R \to \infty$，我们得到 Lutwak [40] 定义的 L_p-仿射表面积（另见 [32, 53]），

$$as_p(K) = \int_{\partial K} \frac{\kappa(K,x)^{\frac{p}{n+p}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} d\mu_K(x).$$

我们给出了 L_p 相对表面积的不等式，其中包括定理 4 中的不等式。

定理 4。 设 $s > -n$, $r > -n$, $t > -n$为实数。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体，满足 $0 \in \mathrm{int}(K)$ 且 $\mu_K(\{x \in \partial K\colon \kappa_i(K,x) > \frac{1}{R}$，对所有 $i, 1 \leq i \leq n-1\}) > 0$均成立。*(i)* 若 $1 < \frac{(n+r)(t-s)}{(n+t)(r-s)} < \infty$，则

$$\Omega_r^R(K) \leq (\Omega_t^R(K))^{\frac{(r-s)(n+t)}{(t-s)(n+r)}} (\Omega_s^R(K))^{\frac{(t-r)(n+s)}{(t-s)(n+r)}}.$$

(ii) 若 $\frac{(n+r)t}{(n+t)r} > 1$，则

$$\left(\frac{\Omega_r^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right) \leq \left(\frac{\Omega_t^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)^{\frac{r(n+t)}{t(n+r)}}.$$

当且仅当 K 是一个椭球时，两个不等式中均取等号。

由定理 4 中的不等式，我们可以推出 p 中 $\left(\Omega_p^R(K)\,\Omega_\infty^R(K)\right)^{n+p}$ 的单调性，从而得到极限的存在

$$E^R(K)=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n+p}.$$

$E^R(K)$ 是一种熵幂，并且与某些概率测度 P 和 Q 的库尔贝克-莱布勒散度 $D_{KL}(P||Q)$ 有关，参见第 4 节。命题 8 给出了这一点。

命题 8. 设 K 是一个 R-球凸体，满足 $0\in int(K)$ 且 $\mu_K(\{x\in\partial K:\kappa_i(K,x)>\frac{1}{R},$ 对所有 $i,1\le i\le n-1\})>0$ 均成立。那么

$$D_{KL}(P\|Q)=\log\left(\frac{\Omega_0^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\,E^R(K)^{-\frac{1}{n}}\right).$$

最后，在定义 3 中，我们引入加权 R-球浮体 $F_R(K,f,\delta)$，其中从一个 R-球凸体中切出一个体积为 δ 、由函数 f 加权的集合。体积导数进而导出定理 10 中的加权相对表面积。作为推论（推论 11），我们得到 L_p 相对表面积的几何刻画。

定理 10. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体。设 $f:K\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足在 K 上 $f\ge c$，其中 $c>0$ 是一个常数。那么

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\mathrm{vol}_n(K)-\mathrm{vol}_n(F_R(K,f,\delta))}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}=c_n\int_{\partial K}(f(x))^{-\frac{2}{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x),$$

其中 $c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1\text{ 体积 }(B_2^{n-1})}{n-1}\right)^{\frac{2}{n+1}}$。

3 L_p-相对表面积

定义 1。 设 $K\in\mathcal{K}_R$。设 $-\infty\le p\le\infty$、$p\ne-n$。则 L_p-相对表面积 K 为

$$\Omega_p^R(K)=\int_{\partial K}\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N(x)\rangle}\right)^{\frac{n(p-1)}{n+p}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x).$$

当 K 足够光滑时，Ω_p^R可写为

$$\Omega_p^R(K)=\int_{S^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{r_i(K,u)}-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\frac{f_K(u)^{\frac{n^2+2n+p}{(n+1)(n+p)}}}{h_K(u)^{\frac{n(p-1)}{n+p}}}d\sigma(u),\tag{5}$$

其中，对于满足 $N_K(x)=u$ 的 $u\in S^{n-1}$，$r_i(K,u)=(\kappa_i(K,N_K^{-1}(u)))^{-1}$，$f_K=\kappa^{-1}$ 是曲率函数，而 σ 是球面的表面积测度。

注释与例子。

1. 对于 $p=1$，我们得到在 [55], 中引入的相对“仿射”表面积 $as^R(K)$

$$as^R(K)=\Omega_1^R(K)\;=\;\int_{\partial K}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x).$$

2. 若 $R>1$, B_2^n 是 R-球凸的，则对所有 $p\neq -n$ 都有

$$\Omega_p^R(B_2^n)=\Omega_1^R(B_2^n). \tag{6}$$

Ne接下来，我们考察 $\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{K}_R$中的椭球情形。我们首先回顾 Petty 的一个定理 [46]。

定理2。 *[46]* 设 K 是 C_+^2中的一个凸体。 K 是椭球，当且仅当对所有 x属于 ∂K

$$\frac{\kappa(K,x))^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N(x)\rangle}=k,$$

其中 $k>0$ 是一个常数。

因此，对所有 $p\neq -n$，我们得到

$$\Omega_p^R(\mathcal{E})=k^{\frac{n(p-1)}{n+p}}\,\Omega_1^R(\mathcal{E}), \tag{7}$$

特别地,

$$\Omega_{\pm\infty}^R(\mathcal{E})=k^n\,\Omega_1^R(\mathcal{E}),\qquad\qquad \Omega_0^R(\mathcal{E})=k^{-1}\,\Omega_1^R(\mathcal{E}). \tag{8}$$

3. 注意到

$$\Omega_p^R(K)=\int_{\partial K}\frac{\kappa(K,x)^{\frac{p}{n+p}}}{\langle x,N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x). \tag{9}$$

对于 $R\to\infty$，我们得到通常的 L_p-仿射表面积 [40, 32, 53]。
特别地，对于 $p=1$、 $p=0$ 和 $p=\pm\infty$，我们得到

$$as^R(K)=\Omega_1^R(K) \;=\; \int_{\partial K}\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x), \tag{10}$$

$$\Omega_0^R(K) \;=\; \int_{\partial K}\langle x,N(x)\rangle\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x) \tag{11}$$

and

$$\Omega_{\pm\infty}^R(K) \;=\; \int_{\partial K}\frac{\kappa(K,x)}{\langle x,N(x)\rangle^n}\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x). \tag{12}$$

因此，$\Omega_p^R(K)$ 可视为一种加权的 L_p-“仿射”表面积，其权重 t

$$w_K(x)=\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{13}$$

特别地，由于 $n\,\mathrm{vol}_n(K)=\int_{\partial K}\langle x,\ N(x)\ \rangle d\mu_K(x)$，(11) 可视为 K 的加权体积；而 $n\,\mathrm{vol}_n(K^\circ)=\int_{\partial K}\frac{\kappa(K,\ x)\langle x,\ N(x)\rangle^n}{}\,d\mu_K(x)$，(12) 可视为 K° 的加权体积。

4. 设 K 是一个 R-球凸体。那么，对于所有 i 和所有$-x$， $\kappa_i(K,\ x)\geq\frac{1}{R}$。对于一个 R-球凸体，可能出现 $\kappa_i(x)$ 中一个或全部 $=\frac{1}{R}$ 的情形。如果 $\kappa_i(x)$ 中一个或全部 $=\frac{1}{R}$ 在 $-\partial K$ 上几乎处处成立，那么对所有 p，$\Omega_p^R(K)=0$。例如， R-球多面体（即有限个 R-球的交集）就是这种情形。特别地，对所有p，$\Omega_p^R(RB_2^n)=0$。

3.1 L_p相对表面积的有界性

已有研究表明，在 [40] ($p > 1$； $p = 1$ 是可追溯至 Blaschke [18] 的经典情形）、 [32]($0 < p < 1$) 中，以及对 [62] 中所有 p，对于满足 $0 \in \text{int}(K)$ 的凸体 K，

$$\text{If } p \geq 0: \ \frac{as_p(K)}{as_p(B_2^n)} \leq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{n-p}{n+p}}; \quad \text{If } -n < p < 0: \ \frac{as_p(K)}{as_p(B_2^n)} \geq \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{n-p}{n+p}}. \tag{14}$$

当且仅当 K 是一个椭球时，两种情形下等号都成立。对于 $p = 0$，任意 K下等号都显然成立。若进一步 K 属于 C_+^2 且 $p < -n$，则对于某个绝对常数$\gamma > 0$,

$$\gamma^{\frac{np}{n+p}} \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{\frac{n-p}{n+p}} \leq \frac{as_p(K)}{as_p(B_2^n)}.$$

对于一个 R-球凸体，我们有 $\kappa_i(K, x) \geq \frac{1}{R}$，对所有 i及所有 x均成立。因此，$\kappa(K, x) \geq \frac{1}{R^{n-1}}$ 对所有 $x \in \partial K$ 均成立。此外，$\langle x, N(x)\rangle \leq R$，故结合 (14)，可得

$$0 \leq \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n^2(p-1)}{(n+1)(n+p)}} as_1^R(K) \leq \Omega_p^R(K) \leq n|B_2^n|^{\frac{2p}{n+p}}|K|^{\frac{n-p}{n+p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$0 \leq \Omega_p^R(K) \leq n|B_2^n|^{\frac{2p}{n+p}}|K|^{\frac{n-p}{n+p}}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$0 \leq \Omega_p^R(K) \leq \left(\frac{1}{R}\right)^{n\frac{(n-1)(p-1)}{n+1)(n+p)}} \Omega_1^R(K), \quad -n < p \leq 1.$$

因此，当 $-n < p \leq \infty$时，$\Omega_p^R(K) < \infty$。在 $-\infty \leq p < -n$ 的范围内，我们得到

$$0 \leq \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{n^2(p-1)}{n+1)(n+p)}} \Omega_1^R(K) \leq \Omega_p^R(K) \leq as_p(K), \quad -\infty \leq p < -n.$$

于是，$\Omega_p^R(K)$可能无界。一个例子是 $B_r^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^r + x_2^r \leq 1\}$，当 $1 < r < 2$时$_{2-r}$。那么，当$R \geq {}^{2^-}_{r-1}{}^{2r}$ 时， B_r^2 是 R-球凸的，但当$p(r-1) \geq -2$时，$\Omega_p^R(B_r^2)$无界；高维情形也类似。

3.2 齐次性和赋值性质

显然， L_p-相对仿射表面积在刚性运动下保持不变。下面的命题陈述了它的其他一些性质。

命题 3. 设 K 是一个 R-球凸体，且 $-\infty \leq p \leq \infty$、 $p \neq -n$。
(i) 设 $a \in \mathbb{R}$、 $a > 0$。则 Ω_p^R是次数为 $n\frac{n-p}{n+p}$的齐次函数，——

$$\Omega_p^{aR}(aK) = a^{n\frac{n-p}{n+p}} \Omega_p^R(K).$$

(ii) 对于 $0 \leq p \leq \infty$，有以下等周不等式

$$\Omega_p^R(K) \leq as_p(K) \leq n \operatorname{vol}_n(B_2^n)^{\frac{2p}{n+p}} \operatorname{vol}_n(K)^{\frac{n-p}{n+p}}.$$

第一个不等式取等号当且仅当 $R = \infty$，第二个不等式取等号当且仅当 K 是一个椭球。

(iii) L_p-相对仿射表面积 Ω_p^R 是一个赋值，即对于 R-球凸体 K和 L，若满足 $K\cap L$ 且 $K\cup L$ 仍为 R-球凸体，

$$\Omega_p^R(K\cup L)+\Omega_p^R(K\cap L)=\Omega_p^R(K)+\Omega_p^R(L).$$

3.3 L_p -相对表面积的不等式

定理 4。设 $s>-n$、$r>-n$、$t>-n$ 为实数。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体，满足 $0\in \mathit{int}(K)$ 且 $\mu_K(\{x\in\partial K\colon \kappa_i(K,x)>\frac{1}{R},\ \text{对所有 } i, 1\le i\le n-1\})>0$ 均成立。*(i)* 若 $1<\frac{(n+r)(t-s)}{(n+t)(r-s)}<\infty$，则

$$\Omega_r^R(K)\le(\Omega_t^R(K))^{\frac{(r-s)(n+t)}{(t-s)(n+r)}}(\Omega_s^R(K))^{\frac{(t-r)(n+s)}{(t-s)(n+r)}}.$$

(ii) 若 $\frac{(n+r)t}{(n+t)r}>1$，则

$$\left(\frac{\Omega_r^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)\le\left(\frac{\Omega_t^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)^{\frac{r(n+t)}{t(n+r)}}.$$

两个不等式中等号成立，当且仅当 K 是一个椭球。

注记。
若 $\mu_K(\{x\in\partial K\colon \kappa_i(K,x)>\frac{1}{R},\ \text{对所有 } i,\ 1\le i\le n-1\})=0$，则对所有 p，$\Omega_p^R(K)=0$。
$\frac{(n+r)(t-s)}{(n+t)(r-s)}=1$ 在以下情形之一发生：要么 $s=-n$（此情形已排除），要么 $r=t$。在这种情况下，(i) 中显然等号成立。
同样，当 $t=-n$（这种情况已被排除）时，或者当 $r=s$ 时，就会出现 $\frac{(n+r)(t-s)}{(n+t)(r-s)}=\infty$。在这种情况下，(i) 中的等号同样显然成立。
同理，$\frac{(n+r)t}{(n+t)r}=1$ 表示 $r=t$，因此 (ii) 中的等号显然成立；而 $\frac{(n+r)t}{(n+t)r}=\infty$ 表示 $t=-n$（这种情况已被排除），或者 $r=0$，因此 (ii) 中的等号显然成立。

证明。我们沿用 [62] 中针对 L_p 仿射表面积的证明。
(i) 由 H¨older 不等式——它要求满足条件 $\frac{(n+r)(s-t)}{(n+t)(s-r)}>1$

$$\begin{aligned}\Omega_r^R(K)&=\int_{\partial K}\Big(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N(x)\rangle}\Big)^{\frac{n(r-1)}{n+r}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x)\\&=\int_{\partial K}\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(t-1)(r-s)(n+t)}{(n+t)(t-s)(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{(r-s)(n+t)}{(t-s)(n+r)}}\\&\quad\times\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(s-1)(t-r)(n+s)}{(n+s)(t-s)(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{(t-r)(n+s)}{(t-s)(n+r)}}d\mu_K(x)\\&\le\big(\Omega_t^R(K)\big)^{\frac{(r-s)(n+t)}{(t-s)(n+r)}}\big(\Omega_s^R(K)\big)^{\frac{(t-r)(n+s)}{(t-s)(n+r)}}.\end{aligned}$$

我们应用了 H¨older 不等式，其中 $p=\frac{(t-s)(n+r)}{(r-s)(n+t)}$，$q=\frac{(t-s)(n+r)}{(t-r)(n+s)}$，

$$f=\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(t-1)(r-s)(n+t)}{(n+t)(t-s)(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{(r-s)(n+t)}{(t-s)(n+r)}}$$

$$g=\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(s-1)(t-r)(n+s)}{(n+s)(t-s)(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{(t-r)(n+s)}{(t-s)(n+r)}}.$$

当且仅当存在某个常数 $c>0$，使得 $|f|^p=c|g|^q$ 几乎处处成立时，H¨older 不等式取等号；也就是说，当且仅当

$$\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}=c^{\frac{(n+s)(n+t)}{n(n+1)(t-s)}}.$$

根据 Petty 定理 2，当且仅当 K 是一个椭球时，这种情况才会发生。

(ii) 同样，再次使用 H¨older 不等式——现在该不等式施加了条件 $\frac{(n+r)t}{(n+t)r}>1$，

$$\begin{aligned}\Omega_r^R(K) &= \int_{\partial K}\Big(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N(x)\rangle}\Big)^{\frac{n(r-1)}{n+r}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x)\\ &= \int_{\partial K}\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(t-1)r(n+t)}{(n+t)t(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{r(n+t)}{t(n+r)}}\\ &\quad\times\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{-n\frac{t-r}{t(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n(t-r)}{t(n+r)}}d\mu_K(x)\\ &\le \big(\Omega_t^R(K)\big)^{\frac{r(n+t)}{t(n+r)}}\big(\Omega_0^R(K)\big)^{\frac{(t-r)n}{(n+r)t}}.\end{aligned}$$

现在，我们对 $p=\frac{t}{(n+r)r(n+t)}$、 $q=\frac{t}{(n+r)n(t-r)}$应用了 H¨older 不等式，

$$f=\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n\frac{(t-1)r(n+t)}{(n+t)t(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{r(n+t)}{t(n+r)}}$$

$$g=\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{-n\frac{t-r}{t(n+r)}}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n(t-r)}{t(n+r)}}.$$

当且仅当存在某个常数 $c>0$ 时，H¨older 不等式中的等号成立，

$$\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}=c^{\frac{n+t}{t(n+1)}}.$$

同样，根据 Petty 定理 2，当且仅当 K 是一个椭球时，这种情况才会发生。 □

4 熵及其不等式

由定理 4 (ii) 可知，如果 $0<r<t$ 或 $-n<r<t<0$，那么

$$\left(\frac{\Omega_r^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)^{\frac{n+r}{r}}\le\left(\frac{\Omega_t^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)^{\frac{n+t}{t}}.$$

由定理 4 (i) 可知，如果 $s\to\infty$ 和 $\frac{n+r}{n+t}>1$，那么

$$\frac{\Omega_r^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\le\left(\frac{\Omega_t^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{\frac{n+t}{n+r}}.$$

因此，下一个命题是定理 4 的推论。

命题 5. 设 K 是 R 中的一个球凸体，且其内部包含 0 ，并满足$\mu_K(\{x \in \partial K\colon \kappa_i(K,x) > \frac{1}{R}$, 对所有 $i, 1 \leq i \leq n-1\}) \geqslant 0$。那么

(i) The function $p \to \left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n+p}$ *is decreasing in* $p \in (-n, \infty)$.

(ii) The function $p \to \left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_0^R(K)}\right)^{\frac{n+p}{p}}$ *is increasing in* $p \in (-n, \infty)$.

Petty 定理 2 表明，除非K 是椭球（此时（i）和（ii）中的量为常数），否则命题5（i）、（ii）具有严格单调性。由（7）和（8）可知，（i）中的量等于 $k^{-n(n+1)}$，而（ii）中的量等于 $k^{p\frac{n+1}{n+p}}$。

命题 5 引出了下面的定义。

定义 2. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体，其内部包含0 ，且满足$\mu_K(\{x \in \partial K\colon \kappa_i(K,x) > \frac{1}{R}$，对所有的 $i, 1 \leq i \leq n-1\}) > 0$均成立。定义

$$E^R(K) = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n+p}$$

.

注意，由（6）、（7）和（8）可知，当 $R > 1$ 时， $E^R(B_2^n) = 1$；对于 R-球椭球 $\mathcal{E}$ ，有 $E^R(\mathcal{E}) = \frac{1}{k^{n(n+1)}}$，其中 k 是定理2中的常数。

命题6. 设 K 是 R 中的一个 $\mathbb{R}^n$ -球凸体，且其内部包含 0 ，并且满足$\mu_K(\{x \in \partial K\colon \kappa_i(K, x) > \frac{1}{R}$，对所有 $i, 1 \leq i \leq n-1\}) > 0$。则

$$\begin{aligned}&\log E^R(K)\\ &= -\frac{n}{\Omega_\infty^R(K)}\int_{\partial K}\frac{\kappa(K,x)}{\langle x, N_K(x)\rangle^n}\log\left(\frac{\kappa(K,x)}{\langle x, N_K(x)\rangle^{n+1}}\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x).\end{aligned}$$

证明. 根据定义 2 和洛必达法则，我们有

$$\begin{aligned}
\log E^R(K) &= \log\left(\lim_{p\to\infty}\left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n+p}\right) = \lim_{p\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)}{(n+p)^{-1}} \\
&= -\lim_{p\to\infty}\frac{(n+p)^2\frac{d}{dp}\left(\Omega_p^R(K)\right)}{\Omega_p^R(K)} \\
&= -\lim_{p\to\infty}\frac{(n+p)^2}{\Omega_p^R(K)}\int_{\partial K}\frac{d}{dp}\left[\exp\left(\frac{n(p-1)}{n+p}\log\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)\right)\right] \\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x) \\
&= -\lim_{p\to\infty}\frac{(n+p)^2n(n+1)}{(n+p)^2\Omega_p^R(K)}\int_{\partial K}\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{\frac{n(1-\frac{1}{p})}{1+\frac{n}{p}}}\log\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right) \\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x) \\
&= -\frac{n(n+1)}{\Omega_\infty^R(K)}\int_{\partial K}\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right)^{n}\log\left(\frac{\kappa(K,x)^{\frac{1}{n+1}}}{\langle x,N_K(x)\rangle}\right) \\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x) \\
&= -\frac{n}{\Omega_\infty^R(K)}\int_{\partial K}\frac{\kappa(K,x)}{\langle x,N_K(x)\rangle^n}\log\left(\frac{\kappa(K,x)}{\langle x,N_K(x)\rangle^{n+1}}\right) \\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x).
\end{aligned}$$

□

对于 $R\to\infty$，我们得到 [45] 的熵表达式。

根据命题 5 和 E^R(*K* 的定义，可以立即得到下一个推论).

推论 7。 在与命题 *5* 相同的假设下，对于所有 $p\geq 0$

$$E^R(K)\leq\left(\frac{\Omega_p^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n+p}\leq\left(\frac{\Omega_0^R(K)}{\Omega_\infty^R(K)}\right)^{n},$$

当且仅当 K 是一个椭球时，不等式取等号。

设 $(X,\ \mu)$ 是一个测度空间，并设 $dP=pd\mu$ 和 $dQ=qd\mu$ 是定义在 X 上、关于测度 μ 绝对连续的概率测度。从 P 到 Q 的 ***Kullback-Leibler*** 散度 或相对熵 定义为 [21]

$$D_{KL}(P\|Q)=\int_X p\log\frac{p}{q}d\mu. \tag{15}$$

信息不等式（也称为吉布斯不等式） [21] 适用于 Kullback-Leibler 散度：设 P 和 Q 如上。则

$$D_{KL}(P\|Q)\geq 0, \tag{16}$$

当且仅当 $P = Q$ 时等号成立。

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 R-球凸体，使得 $0 \in \text{int}(K)$，且对所有 $i, 1 \le i \le n-1\}$， $\mu_K($ $\{x \in \partial K : \kappa_i(K,x) > \frac{1}{R},) > 0$。令

$$p(x) = \frac{\kappa(K,x)}{\Omega_\infty^R(K)\langle x, N_K(x)\rangle^n}, \quad q(x) = \frac{\langle x, N_K(x)\rangle}{\Omega_0^R(K)}. \tag{17}$$

Let

$$w_K(x) = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{R\,\kappa_i(K,x)}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

设 $d\,w_K = w_K d\mu_K$ 为式（13）中引入的权，并令 $d\,w_K = w_K d\mu_K$。则 $dP = p\ d\,w_K$ 和 $dQ = q\ d\,w_K$ 是 ∂K 上相对于 μ_K 绝对连续的概率测度。

下一个命题表明， E^R 是一种熵幂。

命题 8。设 K 为满足 $0 \in \mathit{int}(K)$ 且 $\mu_K(\{x \in \partial K : \kappa_i(K,x) > \frac{1}{R}$ 的 R-球凸体，对所有 $i, 1 \le i \le n-1\}) > 0$ 均成立。则

$$D_{KL}(P\|Q) = \log\left(\frac{\Omega_0(K)}{\Omega_\infty(K)}\,E^R(K)^{-\frac{1}{n}}\right).$$

由信息不等式，按照推论 7，我们看到 $E^R(K) \le \left(\Omega_0^R(K)\,\Omega_\infty^R(K)\right)^n$；当且仅当 K 是椭球时等号成立。

5 几何解释

5.1 加权 C-球浮体

定义 3. 设 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个固定凸体， K 是一个 C-球凸体。设$0 \le \delta$，并设 f：$K \to \mathbb{R}$ 是一个可积严格正函数。我们将 K 的加权C-球浮体 $F_C(K, f, \delta)$ 定义为

$$F_C(K,f,\delta) = \bigcap_{\int_{K\setminus(C+x)} f\,dm \le \delta} C + x.$$

当 $C = RB_2^n$时，我们简记为 $F_R(K,f,\delta) = F_{RB_2^n}(K,f,\delta)$，并称其为加权$R$-球凸浮体。

显然， $F_C(K,\ f,\ 0) = K$。另请注意，当 $f = 1$时，我们得到 [55]的 R-球浮体。由变换公式立即可得，对于任意线性变换 T，若 $\det T \ne 0$,

$$F_{TC}(TK, f\circ T^{-1}, \delta) = T\left(F_C\left(K, f, \frac{\delta}{|\det T|}\right)\right).$$

下一个命题描述了加权 R-球浮体的另一项性质。其证明与 [55] 中非加权情形的证明相同，但为完整起见，我们仍将其列出。

命题 9. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体，并设 $f : K \to \mathbb{R}$ 是连续严格正函数。对于所有满足 $F_R(K,f,\delta) \ne \emptyset$ 的 δ，以及所有 $x_\delta \in \partial F_R(K,f,\delta) \cap \mathit{int}(K)$，至少存在一个 R-球 $R\,B_2^n$，使得 $\int_{K\setminus R\,B_2^n} f dm = \delta$。

证明. 不失一般性，我们选取 $\delta > 0$ 足够小，使得 $F_R(K, f, \delta) \neq \emptyset$。特别地，我们取 $\delta < \frac{1}{2}\int_K f dm$。设 $x \in \partial F_R(K, f, \delta)$。我们选取一个序列 $x_k, k \in \mathbb{N}$，使得 $x_k \notin F_R(K, f, \delta)$ 且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$。根据 $F_R(K, f, \delta)$ 的定义，对于每个 x_k，我们找到一个球 $B_2^n(y_k, R)$，使得 $x_k \notin B_2^n(y_k, R)$ 且 $\int_{K\setminus B_2^n(y_k,R))} f dm = \delta$。由紧致性可知，存在一个子列 $B_2^n(y_{k_j}, R)$，$j \in \mathbb{N}$，它在豪斯多夫度量下收敛到一个 R-球 $B_2^n(y, R)$；也就是说，球心序列收敛到该球的球心，并且存在一列属于 $\partial B_2^n(y_{k_j}, R)$ 的元素收敛到一个属于 $\partial B_2^n(y, R)$ 的元素。因此 $\int_{K\setminus B_2^n(y,R))} f dm = \delta$ 且 $x \in \partial B_2^n(y, R)$。

□

定理 10. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体。设 $f: K \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，使得 $f \geq c$ 在 K 上成立，其中 $c > 0$ 是一个常数。那么

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mathrm{vol}_n(K) - \mathrm{vol}_n(F_R(K, f, \delta))}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = c_n \int_{\partial K} (f(x))^{-\frac{2}{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_K(x),$$

where $c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}\right)^{\frac{2}{n+1}}$.

推论 11. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体。设 $p \in \mathbb{R}$、$p \neq -n$，并设 $f_p: K \to \mathbb{R}$ 满足对所有 $x \in \partial K$

$$f(x) = \left(\frac{\langle x, N_K(x)\rangle^{n(n+1)(p-1)}}{\kappa(K, x)^{n(p-1)}}\right)^{\frac{1}{2(n+p)}}.$$

那么，取上述的 c_n，

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\mathrm{vol}_n(K) - \mathrm{vol}_n(F_R(K, f_p, \delta))}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = c_n\, \Omega_p^R(K).$$

6 其余证明

我们还需要更多记号和引理，以及下面的命题 12。命题 12 的证明可参见例如 [55]。

命题 12. 对于 $1 \leq i \leq n$，设 $c_i > 0$。那么

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma(\xi)}{(\sum_{i=1}^n c_i \xi_i^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left[\prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = \sigma(S^{n-1})\left[\prod_{i=1}^n c_i^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}.$$

对于下一个引理，我们回顾一下滚动函数，它也称为内达到度 $r_K : \partial K \to [0, \infty)$，适用于凸体 K。该概念由 McMullen 在 [?], 中引入，另见 [51]。对于$x \in \partial K$ 具有唯一外法向量 $N_K(x)$的情形，它定义为

$$r_K(x) = \max\{\rho : B_2^n(x - \rho N_K(x), \rho) \subset K\},$$

即， $r_K(x)$ 是包含 x 且位于 K 内的欧几里得球的最大半径。如果 $N_K(x)$ 不唯一，则 $r_K(x) = 0$。根据 McMullen [?] （亦见 [51]）， $r_K(x)$ 在 ∂K 上几乎处处 > 0 。文献 [51] 证明，对于所有 $0 \leq \alpha < 1$,

$$\int_{\partial K} \frac{1}{r_K(x)^\alpha} d\mu_K(x) < \infty. \tag{18}$$

在本节中，令 $f : K \to \mathbb{R}$ 为一个连续函数，使得

$$f \geq c \tag{19}$$

其中 K $c > 0$ 是一个常数。

Th下一个引理及其证明与 [51], 的引理 6 类似；另请参见 [55]的引理 6。

引理 13。 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体，且 0是其内点。设$x \in \partial K$满足 $r_K(x) > 0$，并令 x_δ 为 $[0, x] \cap \partial F_R(K, f, \delta)$中的唯一点。那么存在 δ_0，使得对所有 $\delta \leq \delta_0$,

$$\frac{\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} \leq \gamma_n \, r_K(x)^{-\frac{n-1}{n+1}}, \tag{20}$$

其中 γ_n 仅取决于 n和 K 。

证明。 由于 0 是 K 的内点，因此存在 $s > 0$ 使得

$$B_2^n(0, \tfrac{1}{s}) \subseteq K \subseteq B_2^n(0, s). \tag{21}$$

我们取 $\delta_0 = \frac{c}{2}\mathrm{vol}_n(B_2^n(0, \frac{1}{4s}))$，其中 c是式 (19) 中的常数。为了证明 (20)，我们分两种情况讨论： $s^{-2} r_K(x) \leq \|x - x_\delta\|_2$ 和 $s^{-2} r_K(x) \geq \|x - x_\delta\|$。 首先假设 $s^{-2} r_K(x) \leq \|x - x_\delta\|$。 更具体地说，我们将证明

$$\frac{\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} \leq \frac{2^{2\frac{n-1}{n+1}} (n/c)^{\frac{2}{n+1}} s^{6\frac{n-1}{n+1}}}{(\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}))^{\frac{2}{n+1}}} \, r_K(x)^{-\frac{n-1}{n+1}}. \tag{22}$$

设 $\delta \leq \delta_0$，并令 $z + RB_2^n$ 为一个 R-球，它与 $F_R(K, f, \delta)$ 在 x_δ 处相切，并从 K 中截取一个加权体积恰好为 δ 的集合，即 $\int_{K \setminus (z + RB_2^n)} f dm = \delta$。根据命题 9 (ii)，这样的 R-球存在。若 $z + RB_2^n$ 不包含 $B_2^n(0, \frac{1}{2s})$，则 $K \setminus (z + RB_2^n)$ 包含一个半径为 $\frac{1}{4s}$ 的欧几里得球。于是，由 $f \geq c > 0$ 在 K 上，

$$\delta = \int_{K \setminus (z + RB_2^n)} f dm \geq c \, \mathrm{vol}_n(B_2^n(0, \tfrac{1}{4s})).$$

这是不可能的，因为 δ 小于 $\delta_0 = \frac{c}{2}\mathrm{vol}_n(B_2^n(0, \frac{1}{4s}))$。因此

$$B_2^n(0, \tfrac{1}{2s}) \subseteq z + RB_2^n. \tag{23}$$

令 $T(x_\delta)$ 为 $z + RB_2^n$ 在 x_δ 处的切超平面，并令 $T(x_\delta)$ 为包含 $z + RB_2^n$ 的半空间。于是

$$C = [x, B_2^n(0, \tfrac{1}{2s})] \cap T(x_\delta)^-$$

是一个底面为椭球的圆锥。我们不考虑圆锥 C，而考虑 co ne

$$\tilde{C} = [x, B_2^n(0, \tfrac{1}{2s})] \cap H(x_\delta)^-,$$

其中， $H(x_\delta)$ 是经过 x_δ 且垂直于 x 的超平面。通过一个简单的几何论证

$$\mathrm{vol}_n(\tilde{C}) \leq \mathrm{vol}_n(C).$$

圆锥 $\tilde{C}$ 的高度为 $\|x-x_\delta\|$，底面半径为 $\frac{1}{2s}\frac{\|x-x_\delta\|}{\|x\|}$。因此，再次利用 K 上的 $f \geq c > 0$，

$$\delta = \int_{K\setminus(z+RB_2^n)} f dm \geq c\ \mathrm{vol}_n(K \cap H(x_\delta)^-) \geq \frac{c}{n}\frac{\|x-x_\delta\|^n}{\|x\|^{n-1}}\ \mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}(0,\tfrac{1}{2s})).$$

因此

$$\frac{\|x-x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} \leq \frac{(n/c)^{\frac{2}{n+1}}\|x\|^{2\frac{n-1}{n+1}}(2s)^{2\frac{n-1}{n+1}}}{(\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}))^{\frac{2}{n+1}}\|x-x_\delta\|^{\frac{n-1}{n+1}}}.$$

由于 $\|x\| \leq s$ 根据 (21)，且根据假设 $s^{-2}r_K(x) \leq \|x-x_\delta\|$，我们得到

$$\frac{\|x-x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} \leq \frac{(n/c)^{\frac{2}{n+1}}2^{2\frac{n-1}{n+1}}s^{4\frac{n-1}{n+1}}}{(\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}))^{\frac{2}{n+1}}\|x-x_\delta\|^{\frac{n-1}{n+1}}} \leq \frac{(n/c)^{\frac{2}{n+1}}2^{2\frac{n-1}{n+1}}s^{6\frac{n-1}{n+1}}}{(\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1}))^{\frac{2}{n+1}}} r_K(x)^{-\frac{n-1}{n+1}}.$$

这就证明了 (22)。

现在考虑 $s^{-2}r_K(x) \geq \|x-x_\delta\|$ 的情形。同样，令 $T(x_\delta)$ 表示 $z+RB_2^n$ 在 x_δ 处的切超平面。于是，由于 $B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),\ r_K(x)) \subseteq K$

$$\begin{aligned}\delta &= \int_{K\setminus(z+RB_2^n)} f dm \geq \int_{(K\cap T(x_\delta)^-)} f dm \geq \int_{(B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),r_K(x))\cap T(x_\delta)^-)} f dm \\ &\geq c\,\mathrm{vol}_n\left((B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),r_K(x))\cap T(x_\delta)^-)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

现在我们处于 [51] 的引理 6（分别是 [55] 的引理 6）所述情形，其中 $H = T(x_\delta)$。为完整起见，我们给出论证。

令 θ 表示 x 与 $N_K(x)$ 之间的角。由 (21) 和 (23) 可得

$$\cos\theta \geq \frac{1}{s\|x\|} \geq \frac{1}{s^2}. \tag{25}$$

我们证明

$$x_\delta \in B_2^n(x-r_K(x)N_K(x), r_K(x)). \tag{26}$$

由此可得（该不等式由 (25) 得出）

$$\mathrm{vol}_1\left([0,x]\cap B_2^n(x-r_K(x)N_K(x), r_K(x)-K(x))\right) = 2r_K(x)\cos\theta \geq \frac{2r_K(x)}{s^2}. \tag{27}$$

根据假设 $s^{-2}r_K(x) \geq \|x-x_\delta\|$，我们得到 (26)。

令 Δ 表示从 x_δ 到 $B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),\ r_K(x))$ 边界的距离

$$\Delta = \min\{\|x_\delta - z\| \ :\ \|z-(x-r_K(x)N_K(x))\| = r_K(x)\}.$$

$B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),\ r_K(x))\cap T(x_\delta)^-$ 是球 $B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),\ r_K(x))$ 的一个高度为 Δ 的球冠。我们使用例如 [51] 的引理 8 来估计这个球冠的体积

$$\begin{aligned}\delta &\geq c\,\mathrm{vol}_n(B_2^n(x-r_K(x)N_K(x),r_K(x))\cap T(x_\delta)^-) \\ &\geq 2c\,(2r_K(x))^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}{n+1}\left\{\Delta^{\frac{n+1}{2}} - \frac{(n+1)(n-1)}{4r_K(x)(n+3)}\Delta^{\frac{n+3}{2}}\right\} \\ &= 2c\,(2r_K(x))^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}{n+1}\Delta^{\frac{n+1}{2}}\left\{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{4r_K(x)(n+3)}\Delta\right\}. \end{aligned}$$

Let θ、β和 γ如图1所示。若 $\theta = 0$，则 $\Delta = \|x-x_\delta\|$。若 $\Delta > 0$，则 $\gamma > 0$。B y

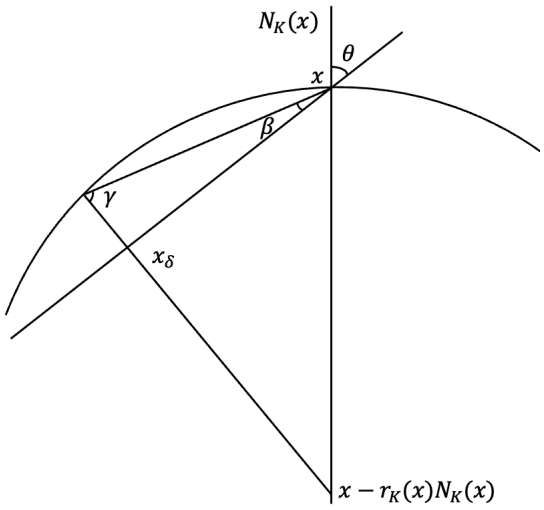


图1：这些角

三角形的正弦定理

$$\Delta = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\|x - x_\delta\|.$$

由于 $\beta \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$，我们有正弦函数 $\beta \le$ 正弦函数 γ。因此，$\Delta \le \|x - x_\delta\|$。此外，$\gamma \ge \theta$。结合 (21) 可得正弦函数 $\gamma \ge$ 正弦函数 $\theta \ge \frac{1}{s^2}$。因此

$$\delta \ge 2c\,(2r_K(x))^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}{n+1}(\sin\beta\|x - x_\delta\|)^{\frac{n+1}{2}}\left\{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{4\,r_K(x)(n+3)}\|x - x_\delta\|\right\}.$$

由此可得

$$r_K(x)^{-\frac{n-1}{n+1}} \ge 2c\left(\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}{n+1}\right)^{\frac{2}{n+1}}\frac{\sin\beta\|x - x_\delta\|_2}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}\left\{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{4\,r_K(x)(n+3)}\|x - x_\delta\|\right\}^{\frac{2}{n+1}}.$$

由于 $s^{-2}r_K(x) \ge \|x - x_\delta\|$,

$$r_K(x)^{-\frac{n-1}{n+1}} \quad \ge \quad 2c\left(\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})}{n+1}\right)^{\frac{2}{n+1}}\frac{\sin\beta\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}\left\{1 - \frac{(n+1)(n-1)}{4\,s^2(n+3)}\right\}^{\frac{2}{n+1}},$$

这意味着，选择 $s \geq (n+1)^{\frac{1}{2}}$，

$$\frac{\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} \leq \frac{1}{\sin\beta} \frac{1}{2c} \left(\frac{n+1}{\mathrm{vol}_{n-1}(B_2^{n-1})} \right)^{\frac{2}{n+1}} \left(\frac{4}{3} \right)^{-\frac{2}{n+1}} r(x)^{-\frac{n-1}{n+1}}.$$

只需验证正弦函数 β 有一个正的下界。设 α 为在 $x - r_K$处， x 与 x_δ之间的角$x(N_K)x_\delta$。我们有

$$\gamma = \beta + \theta \qquad 2\gamma + \alpha = \pi \qquad \alpha + \theta + \frac{\pi}{2} \leq \pi \tag{28}$$

事实上， $\gamma = \beta + \theta$ 可直接由图1得出。对于 $2\gamma + \alpha = \pi$，我们利用三角形内角和等于 π 这一事实。由(27)以及假设 $s^{-2} r_K(x) \geq \|x - x_\delta\|$, 可知 x_δ 处 x 与 $x - r_K$之间的角$x(N_K)x_\delta$大于 $\frac{\pi}{2}$。这意味着 $\alpha + \theta + \frac{\pi}{2} \leq \pi$。

由(28)

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2} - \theta) \leq \beta.$$

在区间$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上，正弦函数单调递增。由(25)

$$\sin(2\beta) \geq \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\tfrac{\pi}{2})\cos(-\theta) + \cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(-\theta) = \cos\theta \geq \tfrac{1}{s^2}.$$

□

6.1 定理 1 的证明

我们可以假设 $0 \in$ 属于$\mathrm{int}(K)$。设 $\delta > 0$。回忆一下，$\mathrm{vol}_n(K^\circ) = \int_{S^{n-1}} h_K^{-n}(u) d\sigma(u)$，其中 $h_K(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle$ 是 K的支撑函数。因此，

$$\mathrm{vol}_n\left((K_\delta^R)^\circ\right) - \mathrm{vol}_n\left(K^\circ\right) = \int_{S^{n-1}} \left(\frac{1}{h^n_{K_\delta^R}(u)} - \frac{1}{h^n_K(u)} \right) d\sigma(u). \tag{29}$$

对于 $u \in S^{n-1}$，令 $x \in \partial K$ 满足 $N_K(x) = u$。令 $x_\delta \in \partial K_\delta^R$ 满足 $x_\delta \in [0, x] \cap \partial K_\delta^R$。那么，对于某个绝对常数 d,

$$n \|x - x_\delta\| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u \right\rangle (1 - d\|x - x_\delta\|) \leq h_K(u) - h_{K_\delta^R}(u) \leq n \|x - x_\delta\| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u \right\rangle. \tag{30}$$

根据 [55] 的引理 8 和命题 12，我们有

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u \right\rangle \frac{\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} &= \frac{\left(n^2-1\right)^{\frac{2}{n+1}}}{2} \left[\int_{S^{n-2}} \frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(x, K) - \frac{1}{R} \right) \xi_i^2 \right)^{\frac{n-1}{2}}} \right]^{-\frac{2}{n+1}} \\ &= \frac{\left(n^2-1\right)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(x, K) - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \end{aligned}$$

因此，存在一个（新的）常数 d,

$$\begin{aligned} \frac{n(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}} (1 - d\,\delta^{\frac{2}{n+1}}) \delta^{\frac{2}{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(x, K) - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{n+1}} &\leq h_K(u) - h_{K_\delta^R}(u) \\ &\leq \frac{n(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}} \delta^{\frac{2}{n+1}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(x, K) - \frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

or

$$\frac{1}{h_K^n(u)}\left[1+\frac{n^2(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}h_K(u)}(1-d_1\,\delta^{\frac{2}{n+1}})\delta^{\frac{2}{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(x,K)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]$$
$$\leq \frac{1}{h^n_{K^R_\delta}(u)}$$
$$\leq \frac{1}{h_K^n(u)}\left[1+\frac{n^2(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}h_K(u)}\left(1+d_2\delta^{\frac{2}{n+1}}\right)\delta^{\frac{2}{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(x,K)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right].$$

根据（29）以及引理 13（我们将其应用于 K 上的 $f=1$），

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n\left((K^R_\delta)^\circ\right)-\mathrm{vol}_n\left(K^\circ\right)}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}=\int_{S^{n-1}}\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}\left(\frac{1}{h^n_{K^R_\delta}(u)}-\frac{1}{h^n_K(u)}\right)d\sigma(u)$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{S^{n-1}}\frac{1}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}\left(\frac{1}{h^n_{K^R_\delta}(u)}-\frac{1}{h^n_K(u)}\right)d\sigma(u)$$
$$=\frac{n^2(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}}\int_{S^{n-1}}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(N_K^{-1}(u),K)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{h_K^{n+1}(u)}d\sigma(u)$$
$$=\frac{n^2(n^2-1)^{\frac{2}{n+1}}}{2\left(\sigma(S^{n-2})\right)^{\frac{2}{n+1}}}\int_{\partial K}\frac{\kappa(x,K)}{\langle x,N_K(x)\rangle^{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(x,K)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}}d\mu_K(x).$$

6.2 命题 3 的证明

（i）的证明

K 是 R-球凸等价于 aK 是 aR-球凸。现在利用 $\mu_{aK}=a^{n-1}\mu_K$，对于 $y=a\,x,\,x\in\partial K$，$\langle y,\ N_{aK}(y)\rangle=a\langle x,\ N_K(x)\rangle$，以及对于 $1\leq i\leq n-1$

$$\kappa_i(aK,y)=\frac{1}{a}\kappa_i(K,x),\ \ \kappa(aK,y)=\frac{\kappa(K,x)}{a^{n-1}}.$$

于是（i）立即成立。

（ii）的证明

第一个不等式显然。第二个不等式是 L_p-仿射等周不等式，且等号成立当且仅当 K 是一个椭球 [40, 32, 62]。

(iii) 的证明

我们采用 Sch¨utt [50] 的方法，并将涉及的边界分解为互不相交的集合，即

$$\begin{aligned}\partial(C\cup K) &= \{\partial C\cap\partial K\}\cup\{\partial C\cap K^c\}\cup\{C^c\cap\partial K\}\\ \partial(C\cap K) &= \{\partial C\cap\partial K\}\cup\{\partial C\cap\mathrm{int}(K)\}\cup\{\mathrm{int}(C)\cap\partial K\}\\ \partial C &= \{\partial C\cap\partial K\}\cup\{\partial C\cap K^c\}\cup\{\partial C\cap\mathrm{int}(K)\}\\ \partial K &= \{\partial C\cap\partial K\}\cup\{\partial K\cap C^c\}\cup\{\partial K\cap\mathrm{int}(C)\},\end{aligned}\tag{31}$$

例如，详细证明见 [55]。此外，集合 $\partial K\cap\partial L$、 $\partial K\cap L^c$ 和 $\partial L\cap K^c$ 两两不相交，集合 $\partial K\cap\partial L$、 $\partial K\cap\mathrm{int}(L)$ 和 $\partial L\cap\mathrm{int}(K)$ 两两不相交。对于所有 $i=1,\ldots,n-1$，分别对于所有 $x\in\partial L\cap K^c$ 和所有 $x\in\partial K\cap L^c$，我们有

$$\kappa_i(K\cup L,x)=\kappa_i(L,x),\ \ \text{respectively,}\ \ \kappa_i(K\cup L,x)=\kappa_i(K,x).\tag{32}$$

对于所有 $i = 1, \ldots, n-1$，以及几乎所有 $x \in \partial K \cap \partial L$，我们有

$$\kappa_i(K \cup L, x) = \kappa_i(K, x) \qquad \text{and} \qquad \kappa_i(K \cap L, x) = \kappa_i(L, x) \tag{33}$$

或者对所有 $i = 1$、.....、$n-1$

$$\kappa_i(K \cup L, x) = \kappa_i(L, x) \qquad \text{and} \qquad \kappa_i(K \cap L, x) = \kappa_i(K, x). \tag{34}$$

证明见例如 [55]。我们还有，证明见例如 [50]，对所有 $x \in \partial L \cap \partial K$，其中所有曲率 κ $(L \cup K,\ x)$、$\kappa(L \cap K,\ x)$、$\kappa(L,\ x)$ 和 $\kappa(K,\ x)$ 均存在，且

$$\kappa(L \cup K, x) = \min\{\kappa(L, x), \kappa(K, x)\} \qquad \kappa(L \cap K, x) = \max\{\kappa(L, x), \kappa(K, x)\}. \tag{35}$$

现在我们用 $\mu_{\partial K}$ 代替 μ_K，以明确所指的是哪种表面积测度。由 (31)、32、33、34 和 35

$$\begin{aligned}
\Omega_p^R(K \cup L) &= \int_{\partial(K \cup L)} \frac{\kappa(K \cup L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K \cup L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial(K \cup L)} \\
&= \int_{\partial K \cap \partial L} \frac{\min\left\{\kappa(L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}, \kappa(K, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}\right\}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K \cup L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial(K \cup L)} \\
&+ \int_{\partial L \cap K^c} \frac{\kappa(L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial L} \\
&+ \int_{\partial K \cap L^c} \frac{\kappa(K, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial K}.
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\Omega_p^R(K \cap L) &= \int_{\partial(K \cap L)} \frac{\kappa(K \cap L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K \cap L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial(K \cap L)} \\
&= \int_{\partial K \cap \partial L} \frac{\max\left\{\kappa(L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}, \kappa(K, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}\right\}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K \cap L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial(K \cap L)} \\
&+ \int_{\partial L \cap \mathrm{int}(K)} \frac{\kappa(L, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(L, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial L} \\
&+ \int_{\partial K \cap \mathrm{int}(L)} \frac{\kappa(K, x)^{\frac{n(p-1)}{(n+1)(n+p)}}}{\langle x, N(x)\rangle^{\frac{n(p-1)}{n+p}}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\kappa_i(K, x) - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_{\partial K}.
\end{aligned}$$

注意，在集合 $\partial K \cap \partial L$ 上，测度 $\mu_{\partial(K \cup L)}$、$\mu_{\partial(K \cap L)}$、$\mu_{\partial K}$ 和 $\mu_{\partial L}$ 全部相同。因此，

$$\Omega_p^R(K \cup L) + \Omega_p^R(K \cap L) = \Omega_p^R(K) + \Omega_p^R(L).$$

我们还用到了：对于任意实数 a 和 b，

$$a + b = \min\{a, b\} + \max\{a, b\}.$$

6.3 定理 10 的证明

下一个引理是标准结果，参见例如 [51]。

引理 14. 设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，满足 $0 \in \mathit{int}(L) \subset K$。那么

$$\mathrm{vol}_n(K) - \mathrm{vol}_n(L) = \frac{1}{n}\int_{\partial K} \langle x, N_K(x)\rangle \left[1 - \left(\frac{\|x_L\|}{\|x\|}\right)^n\right] d\mu_K(x),$$

其中 $x_L = [0,x] \cap \partial L$。

不失一般性，我们可以假设 $0 \in \mathrm{int}(F_R(K,f,\delta))$，并且当 $L = F_R(K,f,\delta)$ 时，记作 $x_\delta = x_{F_R(K,f,\delta)}$。

若 $R\,B_2^n$满足 $R\,B_2^n \cap \partial K \neq \emptyset$ 且 $K \subset R\,B_2^n$，则称其为 K的支撑 R-球。

在下一个引理中，我们估计由 R-球从椭球 $\mathcal{E}$ 上截下的高度为 h 的球冠 $C(h,\mathcal{E})$ 的体积。更确切地说，设椭球 $\mathcal{E}$ 由下式给出

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i^2}{a_i^2} + \frac{(x_n - a_n)^2}{a_n^2} = 1 \tag{36}$$

并设 R-球的方程为

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + (x_n - a)^2 = R^2, \tag{37}$$

也就是说， R-球以 $z = (0\cdots, 0, a)$ 为中心。不失一般性，我们可以假设 $a > R \geq a_n \geq a_{n-1}\cdots \geq a_1$。于是

$$C(h,\mathcal{E}) = \mathcal{E} \setminus B_2^n(z,R)$$

球冠的高度 h 为 $h = a - R$。

下一个引理及其证明见 [55]。

引理 15. 设给定 $\varepsilon > 0$。设椭球 $\mathcal{E}$ 满足：至少存在一个 i 使得 $\frac{a_n}{a_i^2} > \frac{1}{R}$。那么，对于充分小的 h，我们有

$$\begin{aligned}(1 - d_2\,\varepsilon)\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)(n+1)}(a-R)^{\frac{n+1}{2}} \int_{S^{n-2}} \frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_i^2} - \frac{1}{R}\right)\xi_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} &\leq \mathrm{vol}_n(C(h,\mathcal{E})) \\ &\leq (1 + d_1\,\varepsilon)\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)(n+1)}(a-R)^{\frac{n+1}{2}} \int_{S^{n-2}} \frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{a_i^2} - \frac{1}{R}\right)\xi_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}},\end{aligned}$$

其中 d_1 和 d_2 为常数。

引理 16。设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 R-球凸体。设 $x \in \partial K$ 满足：对于所有 $i = 1$、.....、$-n-1$， κ_i（x、K） $> \frac{1}{R}$。则

$$\lim_{\delta\to 0}\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \frac{\|x - x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = f(x)^{-\frac{2}{n+1}}\frac{\left(n^2-1\right)^{\frac{2}{n+1}}}{2}\left[\int_{S^{n-2}} \frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(x,K) - \frac{1}{R}\right)\xi_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}\right]^{-\frac{2}{n+1}}.$$

证明引理 16 需要更多的材料（例如参见 [52]）。
设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体，使得 $0 \in \partial K$ 且 $N_K(0) = -e_n$。此外，假设 $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i^2}{b_i^2} = 1$ 是 $x = 0$ 处的 Dupin示性曲线。那么， K 在 $x = 0$ 处的主高斯-克罗内克曲率为 b_i^2、 $i = 1, \ldots, n-1$，而 K 在 0 处的高斯-克罗内克曲率为 $\prod_{i=1}^{n-1} b_i^2$。设 $\mathcal{E}$ 为椭球

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i^2}{b_i^2} + \frac{\left(\xi_n - \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{\frac{2}{n-1}}\right)^2}{\left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{\frac{2}{n-1}}} \le \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{\frac{2}{n-1}} \right\}. \tag{38}$$

令 $b_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_n}}$ 和 $a_n = \left(\prod_{i=1}^{n-1} b_i\right)^{\frac{2}{n-1}}$，由 (38) 得

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_n}{a_i^2} \xi_i^2 + \frac{(\xi_n - a_n)^2}{a_n} \le a_n \right\}. \tag{39}$$

这意味着

$$\xi_n = a_n - a_n \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i^2} \xi_i^2}.$$

我们还需要两个椭球 $\mathcal{E}(\varepsilon^-)$ 和 $\mathcal{E}(\varepsilon^+)$，一个比 $\mathcal{E}$ 稍小，另一个稍大。

$$\mathcal{E}(\varepsilon^-) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_n}{(1-\varepsilon)^2 a_i^2} \xi_i^2 + \frac{(\xi_n - a_n)^2}{a_n} \le a_n \right\}. \tag{40}$$

$$\mathcal{E}(\varepsilon^+) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_n}{(1+\varepsilon)^2 a_i^2} \xi_i^2 + \frac{(\xi_n - a_n)^2}{a_n} \le a_n \right\}. \tag{41}$$

证明。设 $x \in \partial K$ 的外法向量为 $N_K(x)$。那么，在 x附近， ∂K 可以用椭球 $\mathcal{E}$近似。我们将其精确表述如下：
为方便起见（证明时也如此），将 K 平移 x 并旋转 K，使得 $x = 0$，且 $N_K(x) = -e_n$。设给定 $\varepsilon > 0$。设 $\mathcal{E}$ 为椭球（39），其中心位于 $a_n e_n$，主轴长度为 $a_1, \ldots, a_n$。我们还可以假设 $\mathcal{E}$ 的主轴与基向量 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ 重合，并且

$$R \ge a_n \ge \cdots \ge a_1. \tag{42}$$

设 $\mathcal{E}(\varepsilon^-)$ 为以 $a_n e_n$ 为中心的椭球（40），其主轴与 $\mathcal{E}$的主轴重合，但长度为（$1-\varepsilon$）a_1, $\ldots$,（$1-\varepsilon$）a_{n-1}, a_n。类似地，设 $\mathcal{E}(\varepsilon^+)$ 为以 $a_n e_n$ 为中心的椭球（41），其主轴与 $\mathcal{E}$ 相同，但长度为（$1+\varepsilon$）$a_1, \ldots,$（$1+\varepsilon$）a_{n-1}, a_n。那么

$$x = 0 \in \partial \mathcal{E} \quad \text{and} \quad N_{\mathcal{E}}(x) = N_K(x),$$

并且（例如参见 [52]）存在一个 $\Delta_\varepsilon > 0$ 使得

$$H^-(\Delta_\varepsilon e_n, e_n) \cap \mathcal{E}(\varepsilon^-) \subseteq H^-(\Delta_\varepsilon e_n, e_n) \cap K \subseteq H^-(\Delta_\varepsilon e_n, e_n) \cap \mathcal{E}(\varepsilon^+). \tag{43}$$

这些包含关系说明了为何我们称 $\mathcal{E}$ 为 x中 ∂K 的逼近椭球。由于 f 在 K上连续，因此存在 $\eta>0$，使得对所有 $y\in B_2^n$（x，η）

$$(1-\varepsilon)f(x)\le f(y)\le(1+\varepsilon)f(x). \tag{44}$$

令 $x_\delta\in\partial F_R$(K，f，δ)。由于 $x_\delta\to x$与 $\delta\to 0$，且 $\mathcal{E}$是 ∂K在 x中的逼近椭球，我们可以将 δ取足够小，使得对于 x_δ中所有与 F_R(K，f，δ)相切的支撑球 $z+RB_2^n$，都有

$$\mathcal{E}(\varepsilon^-)\cap(z+RB_2^n)^c\subseteq H^-\left(\Delta_\varepsilon e_n,e_n\right)\cap\mathcal{E}(\varepsilon^-), \tag{45}$$

其中，对集合 A，A^c 表示其补集。关系式 (45) 表明，当δ足够小时，所有经过 x_δ 的 R-球都属于此集合；其中，$\mathcal{E}$ 是按式 (43) 的意义对 K 的良好逼近。此外，我们还将 δ 取足够小，使得

$$H^-\left(\Delta_\varepsilon e_n,e_n\right)\ \cap\ \mathcal{E}(\varepsilon^+)\subset B_2^n(x,\eta). \tag{46}$$

令 H (x$_\delta$，e_n) 为经过 x_δ 且垂直于 e_n 的超平面。
令$\langle\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|},\ N_K(x)\rangle\|x-x_\delta\|e_n=\langle\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|},\ N_K(0)\rangle\|x_\delta\|$ 为该超平面与 e_n-轴的交点。则以 $a=\left(R+\langle\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|},N_K(x)\rangle\|x_\delta\|\right)e_n$ 为球心、半径为 R 且经过 $\langle\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|},\ N_K(x)\rangle\|x-x_\delta\|e_n$ 的球，从 K中截取的加权体积比 δ 更多，因为 x_δ 位于 K 的内部，且不含这个 R-球。平移回去 x，并注意到 $\langle\frac{x_\delta}{\|x_\delta\|},\ N_K(x)\rangle=\langle\frac{x}{\|x\|},\ N_K(x)\rangle$，因为 x 与 x_δ 共线,一由式 (46) 和引理 15 可得，其中（新的）常数为 d_1

$$\begin{aligned}\delta\ &\le\ \int_{\left(\mathcal{E}(\varepsilon^+)\setminus B_2^n(a,R)\right)}f\,dm\le(1+\varepsilon)\,f(x)\,\mathrm{vol}_n\left(\mathcal{E}(\varepsilon^+)\setminus B_2^n\left(a,R\right)\right)\\ &\le\ f(x)\frac{(1+d_1\varepsilon)\,2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)(n+1)}\left[\langle\frac{x}{\|x\|},N_K(x)\rangle\|x-x_\delta\|\right]^{\frac{n+1}{2}}\int_{S^{n-2}}\frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{(1+\varepsilon)^2a_i^2}-\frac{1}{R}\right)\xi_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}.\end{aligned}$$

现在我们处理下界估计。我们沿用上述相同的坐标设置。特别地，$x=0$ 位于 ∂K 中，其外法向量为 $N_K(x)=N_K(0)=-e_n$。令 $\delta>0$ 足够小，使得（45）成立，并令 $x_\delta\in\partial F_R$ (K，f，δ)。我们用 θ表示 e_n与 x_δ之间的角。那么，向量 x_δ 可以在由 e_n和 e_1张成的二维坐标系中表示为，

$$x_\delta=\|x-x_\delta\|(\sin\theta,\cos\theta). \tag{47}$$

我们证明

$$\begin{aligned}\left|1-\frac{9\,a_n\sin\theta^2\|x-x_\delta\|^2((1-\varepsilon)a_1)^2}{\left(3((1-\varepsilon)a_1)^2-4\,a_n\cos^2\theta\|x-x_\delta\|\right)^2}\right|\cos\theta\|x_\delta-x\|\le\\ \le\inf_{y\in\partial\mathcal{E}(\varepsilon^-)}\|x_\delta-y\|\le\cos\theta\|x_\delta-x\|.\end{aligned} \tag{48}$$

右侧的不等式显然成立。我们证明左侧的不等式。由（42）可知，若向量 $\|x_\delta\|$(正弦函数 θ, 0)与长度为 a_1的主轴 e_1 方向平行，则 x_δ到 $\mathcal{E}$(ε⁻)的距离 $d_0=\inf_{y\in\partial\mathcal{E}(\varepsilon^-)}\|x_\delta-y\|$ 最小。

因此，我们可以将讨论限制在由$\{e_1,e_n\}$张成的二维平面内。为避免使用双重下标，下面将该空间中的 x_δ 写作 x_δ(1)，表示其第一坐标；写作 x_δ(n)，表示其第二坐标。为保持一致，对于一个属于span$\{e_1,e_n\}$的向量 $\xi\in$，我们也将 ξ(1)写作

表示其第一坐标，将 $\xi(n)$写作表示其第二坐标。二维平面$\mathrm{span}\{e_1, e_n\}$ 内 $\mathcal{E}(\varepsilon^-)$的椭球边界方程由下式给出

$$\xi(n) = a_n - a_n\sqrt{1 - \frac{\xi(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}.$$

我们可以假设 $x_\delta(1) \geq 0$，并且 δ 足够小，使得 $0 \leq \xi(1) \leq {}^{a_1}\!/_{(1-\varepsilon)\ 2}$。现在我们计算 x_δ 到 $\mathcal{E}(\varepsilon^-)$ 的距离。我们求

$$\|(\xi(1), \xi(n)) - (x_\delta(1), x_\delta(n))\|^2 = |\xi(1) - x_\delta(1)|^2 + \left| x_\delta(n) - a_n + a_n\sqrt{1 - \frac{\xi(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}} \right|^2$$

对 $\xi(1)$ 求导。该表达式的导数为

$$2(\xi(1) - x_\delta(1)) + 2\frac{a_n\xi(1)}{((1-\varepsilon)a_1)^2}\left(\frac{a_n - x_\delta(n)}{\sqrt{1 - \frac{\xi(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}} - a_n\right)$$

对于最小值 $(\xi_0(1)\ \xi_0(n))$，我们得到

$$\begin{aligned}
x_\delta(1) &= \xi_0(1)\left(1 + \frac{a_n}{((1-\varepsilon)a_1)^2}\left(\frac{a_n - x_\delta(n)}{\sqrt{1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}} - a_n\right)\right) \\
&= \xi_0(1)\left(1 - \frac{a_n x_\delta(n)}{((1-\varepsilon)a_1)^2\sqrt{1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}} + \frac{a_n^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}} - 1\right)\right) \\
&\geq \xi_0(1)\left(1 - \frac{4\,a_n x_\delta(n)}{3((1-\varepsilon)a_1)^2}\right).
\end{aligned}$$

后者成立，因为我们可以假设 $0 \leq \xi_0(1) \leq {}^{a_1}\!/_{(1-\varepsilon)\ 2}$。因此

$$\begin{aligned}
d_0^2 &= \|(\xi_0(1), \xi_0(n)) - (x_\delta(1), x_\delta(n))\|^2 \\
&= \left\| \left(\xi_0(1), (a_n - a_n\sqrt{1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}}\right) - (x_\delta(1), x_\delta(n)) \right\|^2 \\
&\geq \left| x_\delta(n) - a_n + a_n\sqrt{1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}} \right|^2 \geq \left| x_\delta(n) - a_n + a_n\left(1 - \frac{\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2}\right) \right|^2 \\
&= \left| x_\delta(n) - \frac{a_n\xi_0(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2} \right|^2 \geq \left| x_\delta(n) - \frac{a_n x_\delta(1)^2}{((1-\varepsilon)a_1)^2\left(1 - \frac{4\,a_n x_\delta(n)}{3((1-\varepsilon)a_1)^2}\right)^2} \right|^2 \\
&= \|x_\delta\|^2\cos^2\theta\left| 1 - \frac{a_n\|x_\delta\|^2\sin^2\theta}{((1-\varepsilon)a_1)^2\left(1 - \frac{4\,a_n\|x_\delta\|\cos\theta}{3((1-\varepsilon)a_1)^2}\right)^2} \right|^2.
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了（47）。以 $a = (R + d_0)e_n$ 为中心、半径为 R 的 R-球$d_0 =$（其中 $_{y\in\partial\mathcal{E}(\varepsilon^-)}\ \|x_\delta - y\|$，并且满足 $d_0 e_n$，从 K 截去的加权体积严格小于 δ，因为 x_δ 位于该 R-球的内部。因此，结合（44）和引理 15，并注意到 $\cos\theta = \langle {}^{x}\!/_{\|x\|},\ N_K(x)\rangle$，再通过 x 平移回去，我们得到一个（新的）常数

d_2

$$\begin{aligned}\delta &\geq \int_{\left(\mathcal{E}(\varepsilon^-)\setminus B_2^n(a,R)\right)} f dm \geq (1-\varepsilon)\, f(x)\, \mathrm{vol}_n\left(\mathcal{E}(\varepsilon^-)\setminus B_2^n(a,R)\right)\\ &\geq \frac{(1-d_2\,\varepsilon)\,2^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)(n+1)}\, f(x)\, \left[\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \|x-x_\delta\|\right]^{\frac{n+1}{2}}\\ &\qquad \int_{S^{n-2}} \frac{d\sigma(\xi)}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_n}{(1-\varepsilon)^2 a_i^2}-\frac{1}{R}\right)\xi_i^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}.\end{aligned}$$

□

现在我们准备证明定理 10。

定理 10 的证明

我们令 $x_\delta = [0,x]\cap \partial F_R(K,\ f,\ \delta)$。由引理 14 可得,

$$\mathrm{vol}_n(K)-\mathrm{vol}_n(F_R(K,f,\delta)) = \frac{1}{n}\int_{\partial K}\langle x, N_K(x)\rangle\left[1-\left(\frac{\|x_\delta\|}{\|x\|}\right)^n\right] d\mu_K(x).$$

当 δ 足够小时，我们估计

$$\begin{aligned}&n\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \|x-x_\delta\|\,(1-d\|x-x_\delta\|)\\ &\leq \langle x, N_K(x)\rangle\left[1-\left(\frac{\|x_\delta\|}{\|x\|}\right)^n\right] = \langle x, N_K(x)\rangle\left[1-\left(1-\frac{\|x-x_\delta\|}{\|x\|}\right)^n\right]\\ &\leq n\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \|x-x_\delta\|,\end{aligned}$$

其中 d 是一个绝对常数。因此

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\int_{\partial K}\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \frac{\|x-x_\delta\|(1-d\|x-x_\delta\|)}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} d\mu_K(x)\\ &\leq \lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n(K)-\mathrm{vol}_n(F_R(K,f,\delta))}{\delta^{\frac{2}{n+1}}}\\ &\leq \lim_{\delta\to 0}\int_{\partial K}\left\langle \frac{x}{\|x\|}, N_K(x)\right\rangle \frac{\|x-x_\delta\|}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} d\mu_K(x).\end{aligned}$$

由 (18) 和引理 13，我们可以交换积分与极限。结合引理 16 和命题 12，可得

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n(K)-\mathrm{vol}_n(F_R(K,f,\delta))}{\delta^{\frac{2}{n+1}}} = c_n\int_{\partial K} f(x)^{-\frac{2}{n+1}}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\kappa_i(K,x)-\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{n+1}} d\mu_K(x).$$

参考文献

[1] B. Andrews，高斯曲率流：滚石的命运，《Invent. Math.》**138**（1999），151–161。

[2] S. Artstein-Avidan、S.Sadovsky 和 K. Wyczesany，对偶性动物园，《几何分析杂志》，**33** (238)，(2023)。

[3] S. Artstein-Avidan、A. Chor 和 D. Florentin，球体类的等距变换，arXiv 预印本，(2025)。[4] S. Artstein-Avidan, A. Chor, and D. Florentin，球体类等距变换的完整分类，arXiv 预印本，(2025)。[5] S. Artstein-Avidan 和 D. Florentin，球体深入研究，预印本，(2025)。[6] I. B´ar´any 和 D.G. Larman，凸体、经济帽覆盖、随机多面体，Mathematika 35 (1988)，274–291。[7] F. Besau 和 E. M. Werner，球面凸浮体，Adv. Math. 301 (2016)，867–901。[8] F. Besau 和 E. M. Werner，实空间形式中的浮体，J. Differential Geom. 110 (2018)，187–220。[9] F. Besau 和 E. M. Werner，常曲率空间中的浮体与对偶性，已投稿预印本。[10] F. Besau 和 E. M. Werner， L_p-浮动面积、曲率熵与球面上的等周不等式，已投稿预印本。[11] F. Besau、M. Ludwig 和 E. M. Werner，加权浮体与多面体逼近，Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018)，7129–7148。[12] F. Besau、A. Gusakova 和 Ch. Th¨ale，凸体中的随机多面体：弥合极值容器之间的差距，arXiv.2411.19163。[13] F. Besau 和 E. M. Werner， L_p-浮动面积、熵与球面上的等周不等式，已投稿预印本。[14] K. Bezdek，从 Kneser–Poulsen 猜想到球多面体，European Journal of Combinatorics，29 (2008)，820–1830。[15] K. Bezdek、R. Connelly 和 B. Csik´os，全等圆盘交集的周长，Beitr¨age Algebra Geom. 47 (2006)。[16] K. Bezdek 和 M. Nasz´odi，欧几里得三维空间中球多面体的刚性，European J. Combin. 27 (2006)。[17] K. Bezdek、Z. L´angi、M. Nasz´odi 和 P. Papez，球多面体，Discrete Comput. Geom. 38 (2007)。[18]W. Blaschke，微分几何讲义 II：仿射微分几何，Springer-Verlag (1923)。[19] W. Blaschke，《圆与球》，第3版，德格鲁伊特出版社，柏林，1956。[20] K. B¨or¨oczky，一般光滑凸体的逼近，Adv. Math. 153 (2000)，325–341。[21]T. Cover 和 J. Thomas，信息论基础，第二版，Wiley-Interscience，（John Wiley and Sons），霍博肯，新泽西州，（2006）。

[22] K. Drach, 《有界曲率黎曼流形中的布拉施克滚动定理》, arXiv 预印本（2024）。[23] K. Drach 和 K. Tatarko, 《曲率约束下的反等周问题》, arXiv 预印本（2023）。[24] F. Fodor、P. Kevei 和 V. Vigh, 《光滑凸圆盘中的随机圆盘多边形》, Adv. in Appl. Probab. 46 (2014), 899–918。[25] F. Fodor 和 D. Papvari, 《光滑凸圆盘中随机圆盘多边形的中心极限定理》, arXiv:2310.18143。[26] F. Fodor 和 B. Gr¨unfelder, 《关于广义随机多边形方差的注记》, Aequat. Math. (2025)。https://doi.org/10.1007/s00010-024-01147-0。[27] R. Gardner, 《几何断层成像》, 第二版, 剑桥大学出版社, 纽约, 2006。[28] O. Giladi、H. Huang、C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, 《具有极值仿射表面积的受约束凸体》, J. Funct. Anal. 279 (2020)。[29] L. Guo、D. Xi 和 Y. Zhao, 《临界区间中的弦明可夫斯基问题》, Math. Ann. 389 (2024), 3123–3162。[30] J. Haddad、D. Langharst、E. Putterman、M. Roysdon 和 D. Ye, 《高阶等周不等式与索博列夫不等式》, 即将发表于《泛函分析杂志》, arXiv:2305.17468。[31] S. Hoehner, 《极值广义仿射表面积》, J. Math. Anal. Appl. 505 (2022), 21页。[32] D. Hug, 《仿射表面积的贡献》, Manuscripta Math. 91 (1996), 283–301。[33] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang, 《对偶布伦-明可夫斯基理论中的几何测度及其相关明可夫斯基问题》, Acta Math. 216(2) (2016), 325–388。[34] Ryan Hynd, 《Meissner多面体的稠密性》, 《几何学专论》(2024) 218:89 https://doi.org/10.1007/s10711-024-00933-z。[35] Ryan Hynd, 《关于 $\mathbb{R}^3$中的极值等宽体》, 《离散与计算几何》(2025) https://doi.org/10.1007/s00454-025-00779-6。[36] Z. Kabluchko、A. Marynych 和 I. Molchanov, 《关于仿射映射族的一般凸性》, arXiv:2202.07887 (2022)。[37] D. Langharst 和 D. Xi, 《广义高阶 Lp 均值 zonotope》, 即将发表于《美国数学会会刊》, arXiv:2312.09500。[38] Z. L´angi、M. Nasz´odi 和 I. Talata, 《相对于凸体的球与纺锤凸性》, Aequat. Math. 85 (2013), 41–67。[39] M. Ludwig 和 M. Reitzner, 《SL(n)不变赋值的分类》, 《Ann. of Math.》172 (2010), 1219–1267。

[40] E. Lutwak, 《布伦-明可夫斯基-菲雷理论。II. 仿射表面积与几何极小表面积》, Adv. Math. 118 (1996)，244–294。[41] E. Lutwak、D. Yang 和 G. Zhang, 《 L_p 仿射等周不等式》, J. Differential Geom. 56 (2000)，111–132。[42] H. Martini、L. Montejano 和 D. Oliveros, 《等宽体》, 载于《凸几何及其应用导论》。Birkh¨auser/Springer，沙姆（2019）。[43] M. Meyer 和 E. M. Werner, 《关于 p-仿射表面积》, Adv. Math. 152 (2000)，288–313。[44] J. Pach 和 P. K. Agarwal, 《组合几何》, Wiley-Interscience 离散数学与优化丛书，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1995，Wiley-Interscience 出版物。[45] G. Paouris 和 E. M. Werner, 《锥测度的相对熵与 L_p 质心体》, 《伦敦数学会会刊》104 (2012)，253–286。[46] C. Petty, 《仿射等周问题》, 《离散几何与凸性》。《纽约科学院年刊》441 (1985)，113–127。[47] M. Reitzner, 《光滑凸体边界上的随机点》, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002)，2243–2278。[48] M. Reitzner, 《随机多面体》。载于《随机几何新视角》（I. Molchanov 和 W.S. Kendall 编）（2008），45–76，牛津大学出版社。[49]R. Schneider, 《凸体：布伦-明可夫斯基理论》, 第2版扩充版，剑桥大学出版社，剑桥，2014。[50] C. Sch¨utt, 《论仿射表面积》, 《美国数学会会刊》118(4) (1993)，1213–1218。[51] C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, 《凸浮体》, 《斯堪的纳维亚数学杂志》66 (1990)，275–290。[52] C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, 《从凸体边界上选取点所构成的随机多面体》, GAFA 研讨会笔记, 《数学讲义》1807，Springer-Verlag (2002)，241–422。[53] C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, 《表面体与 p-仿射表面积》, Adv. Math. 187 (2004)，98–145。[54] C. Sch¨utt 和 E. M. Werner, 《仿射表面积》。载于《调和分析与凸性》, Adv. Anal. Geom. 第9卷，第427–444页。德格鲁伊特出版社，柏林（2023）。[55] C. Sch¨utt、E. M. Werner 和 D. Yalikun, 《球凸体的浮体》, 《伦敦数学会杂志》112 (2025)。[56] F. E. Schuster 和 T. Wannerer, 《明可夫斯基赋值与广义赋值》, 《欧洲数学会杂志》20 (2018)，1851–1884。

[57] K. Tatarko 和 E. M. Werner，布伦－明可夫斯基理论中的 *Steiner*公式，Adv. Math.**355** （2019），1–27。[58] K. Tatarko 和 E. M. Werner， L_p-*Steiner quermassintegrals*，Adv. Math.**430**（2023）。[59] N.S. Trudinger 和 Xu-Jia Wang，仿射极大超曲面的 *Bernstein*问题，《Invent. Math.》**140** （2000），399–422。[60] N.S. Trudinger 和 Xu-Jia Wang，仿射完备局部凸超曲面。《Invent. Math.》**150** （2002），45–60。[61] N.S. Trudinger，X. Wang，*Monge-Ampère* 方程和仿射极大曲面方程的边界正则性，《Ann. of Math.》**167** （2008），993–1028。[62] E. M. Werner 和 D. Ye，新型 L_p 仿射等周不等式，Adv. Math. **218**（2008），762–780。[63] D. Ye，新型 *Orlicz*仿射等周不等式，《J. Math. Anal. Appl.》**427** （2015），905–929。[64] D. Ye，对偶 *Orlicz-Brunn-Minkowski*理论：对偶 *Orlicz* L_ϕ 仿射表面积和几何极小表面积，《J. Math. Anal. Appl.》**443** （2016），352–371。