arXiv:2512.19881v1 [math.DS] 22 Dec 2025

通过一个例子说明紧致、非一致化的李–约克混沌动力系统

Mehrnaz Pourattar，Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi

Abstract. 本文的主要目的是将混沌对和李–约克混沌的概念推广到非一致紧动力系统。我们证明，对于至少含有两个元素的有限（紧致 Alexandroff）拓扑空间 X，以下命题等价：

- 单边移位 $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 是李–约克混沌的，
- 单边移位 $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 至少有一个混沌对，
- 单边移位 $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 至少有一个非渐近对，
- 存在 $a,\ b \in X$ 使得 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$，
- $\bigcap\{\overline{\{a\}} :\ a \in X\} = \varnothing$。

2020年数学主题分类： 37B02,54C05
关键词： 亚历山德罗夫空间、渐近对、李–约克混沌、单边移位、混沌对。

1. Introduction

动力系统（$X,\ f$）或不太正式地说，$f :\ X \to X$，我们指的是一个拓扑空间X和连续映射 $f :\ X \to X$。李和约克在 [12] 提出的思想自1975年以来受到许多数学家的沿用。李–约克混沌及其相关主题已在单位区间（例如 [6, 7, 8, 15]）、紧度量空间（例如[13]）和一致动力系统（例如 [3]）中得到研究；我们的主要目标是将这一概念推广到一般的紧拓扑空间中。

2. Preliminaries

简要回顾李–约克混沌紧度量空间和紧致一致动力系统。

注 1. 在紧致度量空间 (X, d) 和连续映射 $f :\ X \to X$ 中，若 $(x, y) \in X \times X$ 满足以下两个条件，则称其为混沌对（或称 x, y 是混沌的）：

(m-1) $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y)) = 0$,
(m-2) $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y)) > 0$.

我们也称 $A \subseteq X$ 为 X 的混沌子集，若其中任意两个不同的点 $x, y \in A$ 都是混沌的。若 X 具有不可数混沌集（例如参见 [5]），则称 $f : X \to X$ 是李–约克混沌的。

在紧致度量空间 X 中，$\{U \subseteq X \times X :\ \exists \varepsilon > 0\, \{(x, y) \in X \times X :\ d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq U\}$ 是 X 上唯一的相容一致结构。
对于任意集合 A，令 $\Delta_A := \{(a,\ a) :\ a \in A\}$。此外，值得一提的是，在紧致豪斯多夫空间 X 中，$\{U \subseteq X \times X :\ \Delta_X \subseteq U^\circ\}$ 是唯一相容的

一致结构。接下来我们来讨论紧致豪斯多夫（因而是一致）动力系统中的李–约克混沌。

注 2. 在紧豪斯多夫一致空间 $(X,\mathcal{U})$ 和连续映射 $f:X\to X$ 下，我们称 $(x,y)\in X\times X$ 为混沌对（或称 x,y 是混沌的），如果满足以下两个条件：

(u-1) 对每个 $U\in\mathcal{U}$, $\{n\in\mathbb{N}: (f^n(x)\ f^n(y))\in U\}\neq\varnothing$，(u-2) 存在 $U\in\mathcal{U}$ 使得 $\{n\in\mathbb{N}: (f^n(x)\ f^n(y))\notin U\}$ 是无穷的。

我们还称 $A\subseteq X$ 为 X 的混沌子集，如果其中每一对不同的点 $x,y\in A$ 都是混沌的。$f:X\to X$ 是李 – 约克混沌的，如果 X 具有不可数混沌集（例如参见 [3, 16]）。

现在，我们可以为一般的紧致动力系统给出李–约克混沌的定义。

定义 3. 在紧空间 X 中，对于连续映射 $f:\ X\to X$，我们称 $(x,y)\in X\times X$ 是一个混沌对（或称 x,y 是混沌的），如果以下两个条件成立：

(g-1) 对于 $X\times X$中 Δ_X的每个开邻域 U，$\{n\in\mathbb{N}: (f^n(x)\ f^n(y))\in U\}\neq\varnothing$,
(g-2) 存在 $X\times X$ 中 Δ_X 的一个开邻域 U，使得 $\{n\in\mathbb{N}: (f^n(x)\ f^n(y))\notin U\}$ 是无限的。

我们还称 $A\subseteq X$ 是 X 的一个混沌子集，如果其中任意两个不同的点 $x,y\in A$ 都是混沌的。$f:X\to X$ 是李–约克混沌的，当且仅当 X 有一个不可数混沌集。

定义 4. 在动力系统 f 中：$X\to X$ 我们称 $(x,y)\in X\times X$ 为近端对（或称 x,y 近端），如果存在 $z\in X$ 以及一个属于 $\mathbb{N}$ 的网 $\{n_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，使得网 $\{f^{n_\alpha}(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和 $\{f^{n_\alpha}(y)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 都收敛到 z [9]。注意，在动力系统 f 中：$X\to X$:

- 如果 X 是带有相容度量 d 的紧度量空间，那么 $x,y\in X$ 近端，当且仅当 (m-1) 成立。
- 如果 X 是带有相容一致结构 $\mathcal{U}$ 的紧豪斯多夫空间，那么 $x,y\in X$ 近端，当且仅当 (u-1) 成立。
- 如果 X 是紧致的，那么 $x,y\in X$ 近端，当且仅当 (g-1) 成立。

定义 5. 在动力系统 f 中：$X\to X$ 我们称 $(x,y)\in X\times X$ 为渐近对（或称 x,y渐近），如果 $\{n\in\mathbb{N}:$ 对于 $X\times X$ 中 Δ_X 的每个开邻域 U，$f^n(x)\ f^n(y)\notin U\}$ 都是有限的。注意，在动力系统f 中：$X\to X$:

- 若 X 是具有相容度量 d 的紧度量空间，$x,\ y\in X$ 渐近等价，当且仅当 d（m-2）不成立。
- 若 X 是具有相容一致结构 $\mathcal{U}$ 的紧豪斯多夫空间，$x,\ y\in X$ 渐近等价，当且仅当（u-2）不成立。

因此：

- 紧度量动力系统 $f:\ X\to X$ 满足定义 1 当且仅当其满足定义 2 （分别地，定义3），
- 紧豪斯多夫动力系统 $f:\ X\to X$ 满足定义 2 当且仅当其满足定义 3。
- 在紧致动力系统 $f:\ X\to X$ 中，点 $x,\ y\in X$ 是混沌的，当且仅当它们是近端且非渐近的。

3. Exploring via an example

本节在拓扑空间 X 中，为 $X^{\mathbb{N}}$ 配备乘积（逐点收敛）拓扑，并考察单边移位 $\sigma: X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$。

亚历山德罗夫空间由 P. lexandroff 于 [1]提出。针对亚历山德罗夫空间的拓扑空间的各种子类别，如有限拓扑空间、 [14], 函数 Alexandroff 空间、 [2], Khalimsky空间 [11],等。

让我们回顾一下，如果任意非空集合族 X 的交集都是开集（或者等价地，每个点都有一个最小的开邻域），则拓扑空间 X 是亚历山德罗夫空间。

若 X 是一个至少包含两个元素的亚历山德罗夫空间，对于每个 $x \in X$，假设 $V(x)$ 表示 x 的最小开邻域。对于 $x_1, \ldots, x_n \in X$，令$G(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1) \times V(x_2) \times \cdots \times V(x_n) \times X \times X \times \cdots$，则 $\{G(x_1, \ldots, x_n) : n \in \mathbb{N}$，且 $x_1, \ldots, x_n \in X\}$是 $X^{\mathbb{N}}$的拓扑基。对于 $n \in \mathbb{N}$，也令$\Gamma_n = \bigcup\{G(x_1, \ldots, x_n) \times G(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in X\}$。

引理6。设 X 是一个紧 Alexandroff 空间，且 $U \subseteq X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$。存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\Gamma_N \subseteq U$，当且仅当 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$ 包含于 U的内部。

证明。考虑 $N \in \mathbb{N}$，显然 Γ_N是 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ 的开子集；此外，对于 $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$，有 $(a, a) \in G(a_1, \ldots, a_N) \times G(a_1, \ldots, a_N) \subseteq \Gamma_N$，因此 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}} \subseteq \Gamma_N$。于是 Γ_N 是包含 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$ 的 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ 的开子集。

现在假设 V是 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ 的一个开子集，且包含 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$。由 X 的紧致性以及蒂赫诺夫定理， $X^{\mathbb{N}}$ 是紧致的。映射 $X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} x \mapsto (x, x)$

这导致 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$的紧致性。对于每个 $z = (z_n)_{n\geq 1}$，存在 $n_z \in \mathbb{N}$ 以及 X的开子集 $U_1, \ldots, U_{n_z}, W_1, \ldots, W_{n_z}$，使得 $(z, z) \in (U_1 \times \cdots \times U_{n_z} \times X \times X \times \cdots) \times (W_1 \times \cdots \times W_{n_z} \times X \times X \times \cdots) \subseteq V$，因此

$$\begin{aligned}(z, z) \in A^z &:= G(z_1, \ldots, z_{n_z}) \times G(z_1, \ldots, z_{n_z}) \\ &\subseteq (U_1 \times \cdots \times U_{n_z} \times X \times X \times \cdots) \times (W_1 \times \cdots \times W_{n_z} \times X \times X \times \cdots) \\ &\subseteq V .\end{aligned}$$

由于 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}} \subseteq \bigcup\{A^z : z \in X^{\mathbb{N}}\}$和 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$是紧致的，因此存在 $z^1, \ldots, z^p \in X^{\mathbb{N}}$，使得 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}} \subseteq A^{z^1} \cup \cdots \cup A^{z^p}$。令

$$N = \max_{1\leq i\leq p} n_{z^i} .$$

我们断言 $\Gamma_N \subseteq V$。对于每个 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$，都存在 $j \in \{1, \ldots, p\}$，使得 $(y, y) \in A^{z^j}$，因此 $y_i \in V(z_i^j)$ 且 $V(y_i)$；对于每个 $i \in \{1, \ldots, n_{z^j}\}$（其中 $z^j = (z_i^j)_{i\in\mathbb{N}}$），$\subseteq V(z_i^j)$，于是 $G(y_1, \ldots, y_{n_{z^j}}) \subseteq G(z_1^j, \ldots, z_{n_{z^j}}^j)$，所以

$$\begin{aligned}G(y_1, \ldots, y_N) \times G(y_1, \ldots, y_N) &\subseteq G(y_1, \ldots, y_{n_{z^j}}) \times G(y_1, \ldots, y_{n_{z^j}}) \\ &\subseteq G(z_1^j, \ldots, z_{n_{z^j}}^j) \times G(z_1^j, \ldots, z_{n_{z^j}}^j) \\ &= A^{z^j} \subseteq U\end{aligned}$$

由此可得 $\Gamma_N \subseteq U$。 □

引理 7。在亚历山德罗夫空间 X 中，对于 X 的非空子集 D，我们有

$$\bigcap\{\overline{\{x\}} : x \in D\} = \{z \in X : D \subseteq V(z)\} .$$

特别地， $\bigcap\{\{x\} : \overline{x} \in D\} = \{z \in X : V(z) = X\}$。

证明。注意，对于每个 $E \subseteq X$ 和 $x \in X$， x 属于 E，当且仅当 x 的每个开邻域都与 E 相交；等价地， $V(x) \cap E \neq \varnothing$。考虑以下方程

$$\begin{aligned}\bigcap\{\overline{\{x\}} : x \in D\} &= \{z \in X : \forall x \in D\ z \in \overline{\{x\}}\} \\ &= \{z \in X : \forall x \in D\ V(z) \cap \{x\} \neq \varnothing\} \\ &= \{z \in X : \forall x \in D\ x \in V(z)\} = \{z \in X : D \subseteq V(z)\}\end{aligned}$$

□

引理 8. 在非空紧空间 X 中，以下陈述等价：

a. $\bigcap\{\overline{\{x\}} : x \in X\} \neq \varnothing$，b. 对所有 x， $y \in X$，我们有 $\{x\} \cap \{y\} \neq \varnothing$；

c. 存在 $z \in X$，使得 X 是 z 的唯一开邻域。

证明。显然，(a) 蕴含 (b)。

现在假设对所有 x， $y \in X$, $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \varnothing$。我们断言，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 y_1, ……， $y_n \in X$, $\{y_1\} \cap \cdots \cap \{y_n\} \neq \varnothing$。为此，注意到

- for all $y_1, y_2 \in X$ we have $\overline{\{y_1\}} \cap \overline{\{y_2\}} \neq \varnothing$ by the assumption.
- Consider $k \geq 2$ such that $\overline{\{y_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{y_k\}} \neq \varnothing$ for all $y_1, \ldots, y_k \in X$ also consider $y_{k+1} \in X$. Choose $b \in \overline{\{y_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{y_k\}}$, then $\overline{\{b\}} \subseteq \overline{\{y_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{y_k\}}$ and by the assumption $\overline{\{y_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{y_{k+1}\}} \supseteq \overline{\{b\}} \cap \overline{\{y_{k+1}\}} \neq \varnothing$ which shows $\overline{\{y_1\}} \cap \cdots \cap \overline{\{y_{k+1}\}} \neq \varnothing$.

因此， $\bigcap\{\overline{\{x\}} : x \in X\}$ 是紧空间 X 的一个非空闭子集族，具有有限交性质，所以 $\bigcap\{\{x\} : x \in X\} \neq \varnothing$。因此 (b) 蕴含 (a)。为完成证明，注意到 $\bigcap\{\{x\} : x \in X\} = \{x \in X : x \text{ 是 } x\}$ 的唯一开邻域。□

注 9. 若 $X = \{a, b\}$ 是一个含有两个元素的离散空间，则 $\sigma : \{a, b\}^{\mathbb{N}} \to \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 是李–约克混沌的 [3]。

定理 10. 在紧拓扑空间 X 中，若存在 a， $b \in X$ 使得 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$，则 $\sigma : \overline{X^{\mathbb{N}}} \to \overline{X^{\mathbb{N}}}$ 是李–约克混沌的。

证明. 取 a， $b \in X$ 使得 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$，则 $\overline{\{a, b\}}$ 在诱导拓扑下是一个含有两个元素的离散空间。根据注 9， $\sigma \restriction_{\{a,b\}^{\mathbb{N}}} : \{a, b\}^{\mathbb{N}} \to \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 是拓扑李–约克混沌的。因此 $\sigma \restriction_{\{a,b\}^{\mathbb{N}}} : \{a, b\}^{\mathbb{N}} \to \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 拥有一个不可数的拓扑李–约克混沌集，例如 A。对所有互不相同的 z， $w \in A$：

- z, w 在 $\sigma \restriction_{\{a,b\}^{\mathbb{N}}}$ 中是近端的： $\{a, b\}^{\mathbb{N}} \to \{a, b\}^{\mathbb{N}}$，因此存在一个网 $\{n_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$，它属于 $\mathbb{N}$，并且 $u \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$，使得网 $\{\sigma^{n_\alpha}(z)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 和 $\{\sigma^{n_\alpha}(w)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 在 $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 中收敛到 u，于是 $\{\sigma^{n_\alpha}(z)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 和 $\{\sigma^{n_\alpha}(w)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 在 $X^{\mathbb{N}}$ 中收敛到 u（注意， $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 配备积拓扑后，具有与 $X^{\mathbb{N}}$ 相同的子空间拓扑）。因此，对于 $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$， z, w 是近端的。

- z， w 在 $\sigma \restriction_{\{a,b\}^{\mathbb{N}}}$ 中不是渐近的： $\{a, b\}^{\mathbb{N}} \to \{a, b\}^{\mathbb{N}}$，因此存在 $\{a, b\}^{\mathbb{N}} \times \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ 的开子集 U，包含 $\Delta_{\{a,b\}^{\mathbb{N}}}$，使得 $\{n \in \mathbb{N} : (\sigma^n(z)\ \sigma^n(w)) \notin U\}$ 是无限的。存在 $X^{\mathbb{N}}$ 的开子集 W，包含 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$，使得 $W \cap \{a, b\}^{\mathbb{N}} = U$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $\sigma^n(z)\ \sigma^n(w) \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$，因此 $\{n \in \mathbb{N} : (\sigma^n(z)\ \sigma^n(w)) \notin T\} = \{n \in \mathbb{N} : (\sigma^n(z)\ \sigma^n(w)) \notin U\}$ 也是无限的，并且 z， w 在 σ 中不是渐近的： $X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$。

因此， A 是动力系统 σ 中 $X^{\mathbb{N}}$ 的李–约克混沌子集： $X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$，特别地， $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 是李–约克混沌的。□

定理 11. 对于至少含有两个元素的紧 Alexandroff 空间 X 和单边移位 $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$，以下陈述等价:

a. $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 是李–约克混沌；b. $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 至少有两个 Li–Yorke scrambled 点；c. $\sigma : X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ 至少有两个非渐近点；d. 存在 a， $b \in X$ 使得 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$；e. $\bigcap\{\{x\} : x \in X\} = \varnothing$；f. 对所有 $z \in X$, $V(z)$， $\neq X$。

证明。（d、e、f）由引理 7 和 8 等价。由定理 10 可知，（c）推出（a）。显然，（a）推出（b），且（b）也推出（c）。为证明（c）推出（f），假设存在 $z \in X$ 使得 $V(z) = X$，则 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ 是 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$中 $((z)_{n\in\mathbb{N}}, (z)_{n\in\mathbb{N}})$ 的唯一开邻域。因此， $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$中包含 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$ 的唯一开子集就是 $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ 本身，所以对于所有 $z, y \in X^{\mathbb{N}}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，以及所有包含 $\Delta_{X^{\mathbb{N}}}$ 的开集 U，都有 $(\sigma^n(z)\ \sigma^n(y)) \in U$；特别地， z, y 是渐近的。□

我们称 $\alpha \in A$ 是自映射 $f : A \to A$ 的准周期点，当且仅当 $\{f^n(\alpha) : n \geq 1\}$ 是有限的（或者等价地，存在 $s > t \geq 1$ 使得 $f^s(\alpha) = f^t(\alpha)$）。
在下面的注记中，我们关注广义移位。设 Λ 是非空集合，自映射 $\varphi : \Lambda \to \Lambda$，我们称 $\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$ 为广义移位。$(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \mapsto (x_{\varphi(\alpha)})_{\alpha\in\Lambda}$

广义移位最早于 [4]，中被引入，不过其动力学和非动力学性质已在多篇文献中得到研究（例如参见 [3, 10]）。

注 12。 设任意自映射 $\varphi : \Lambda \to \Lambda$和广义移位$\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$，则:

- 对于含有两个元素的有限离散 $X = \{a, b\}$，映射 [3] $\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$ 是（一致）李–约克混沌，当且仅当 $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ 至少有一个非准周期点，
- 采用定理中所述的类似方法11，对于紧 Alexandroff 空间 X 以下陈述等价：– $\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$ 是李 – 约克混沌的，– $\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$ 至少有两个 Li–Yorke scrambled 点，– $\sigma_\varphi : X^\Lambda \to X^\Lambda$ 至少有两个非渐近点，– $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ 至少有一个非拟周期点，并且存在a， $b \in X$ 使得 $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$。

—— ——

References

[1] P. Alexandroff, *Diskrete Räume*, Mat. Sb., 2 (1937), 501–518. [2] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, N. Golestani, *Functional Alexandroff spaces*,《Hacettepe 数学与统计学杂志》, 40/4 (2011), 515–522. [3] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, E. Hakimi, A. Hosseini, R. Rezavand, *Li-Yorke and Devaney chaotic uniform dynamical systems amongst weighted shifts* 326 2023 Topology Appl. ( ), Paper No. 108406, 15 pp.[4] F. Ayatollah Zadeh Shirazi, N. Karami Kabir, F. Heydari Ardi, *A note on shift theory*,《潘诺尼亚数学》, ITES-2007 会议论文集, 19/2 (2008), 187–195. [5] F. Blanchard, W. Huang, L'u. Snoha, *Topological size of scrambled sets*, Colloq. Math., 110 (2008), no. 2, 293–361.

[6] G. J. Butler, G. Pianigiani, *Periodic points and chaotic functions in the unit interval*, Bull. Aust. Math. Soc. 18 (1978), 255–265. [7] B.–S. Du, *Topological entropy and chaos of interval maps*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 11 (1987), 105–114. [8] B.–S. Du, *On the invariance of Li–Yorke chaos of interval maps*, J. Difference Equ. Appl. 11, No. 9 (2005), 823–828. [9] R. Ellis, *Lectures on topological dynamics*, W. A. Benjamin, 1969. [10] A, Giordano Bruno, *Algebraic entropy of generalized shifts on direct products*, Commun. Algebra 38, No. 11 (2010), 4155–4174. [11] S.–E. Han, *Semi–separation axioms of the infinite Khalimsky topological sphere*, Topology Appl., 275 (2020), Article ID 107006, 15 p. [12] T.–Y. Li, J. A. Yorke, *Period three implies chaos*, Am. Math. Mon. 82 (1975), 985–992. [13] L. Luo, B. Hou, *Li–Yorke chaos for invertible mappings on compact metric spaces*, Arch. Math. 108, No. 1 (2017), 65–69. [14] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, American Mathematical Monthly, 73/2 (1966), 154–57. [15] I. Mizera, *Continuous chaotic functions of an interval have generically small scrambled sets*, Bull. Aust. Math. Soc. 37, No. 1 (1988), 89–92. [16] M. Pourattar, F. Ayatollah Zadeh Shirazi, *On Li-Yorke chaotic transformation groups modulo an ideal* 27 2020 42 , Bol. Mat. ( ), no. 1, 25– .

Mehrnaz Pourattar，德黑兰大学科学与研究分校伊斯兰阿扎德大学数学系，伊朗德黑兰（mpourattar@yahoo.com）**Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi**，德黑兰大学理学院数学、统计与计算机科学系，伊朗德黑兰恩格拉布大道（f.a.z.shirazi@ut.ac.ir）