arXiv:2512.19952v1 [math.NT] 23 Dec 2025

罗杰斯–拉马努金连分数

布鲁斯·C·伯恩特和ÖRS REBÁK

摘要。本文的主要目的是综述罗杰斯–拉马努金连分数的性质、取值、恒等式和推广形式；该连分数与罗杰斯–拉马努金恒等式密切相关。许多这类结果见于拉马努金致哈代的前两封信、拉马努金笔记及其遗失的笔记本。文中还简要介绍了这些笔记本和遗失的笔记本的历史。

1. 连分数简介

（有限）连分数是如下形式的表达式

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots+\cfrac{a_n}{b_n}}}}=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}.$$

例如，

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1}}}=1+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}=\frac{5}{3}. \tag{1.1}$$

注意，在上面的右端，所谓的加号 $+$ 出现在“分母”中，以免与求和混淆；求和中的 $+$号出现在相邻连分数之间。

假设我们写成

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}=b_0+\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots. \tag{1.2}$$

点号 $\cdots$ 表示这个过程不会终止，也就是说，(1.2) 是一个无穷连分数。举例来说，令 $\phi:=(\sqrt{5}+1)/2$，即黄金比例。注意到 $\phi=1+1/\phi$。递归展开后，我们得到连分数

$$\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots. \tag{1.3}$$

无穷连分数比有限连分数有趣得多。而且，当连分数的“分子”和“分母”

2020 数学 学科分类号。 11–02, 11A55, 11F27, 05A30, 11F32.
关键词及 *d* 短语。罗杰斯–拉马努金连分数、theta函数、拉马努金遗失的笔记本 k.

是实变量或复变量的函数时，它们就更加有趣了。特别地，类比幂级数，连分数的“分子”可能是x的连续幂。为了确定这类表达式（1.2）何时有意义，我们需要建立关于连分数收敛与发散的定理，这类似于关于无穷级数收敛与发散的定理。关于连分数收敛的定理，请参阅 Lisa Lorentzen 和 Haakon Waadeland 的优秀著作 [21]。

回到 (1.1)，我们指出，这个优美的无穷连分数

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\cdots \tag{1.4}$$

确实收敛，这与将加号“向上”移动后得到的和不同。我们将在本文结尾讨论 (1.4)。

2. Rogers–Ramanujan连分数

最著名的连分数之一是罗杰斯–拉马努金连分数，其定义为

$$R(q):=\frac{q^{1/5}}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{q}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{q^2}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{q^3}{1}\,\frac{}{+}\cdots, \qquad |q|<1, \tag{2.1}$$

它最初由 L. J. Rogers 在一篇当时似乎未受关注的论文中研究， [32] 时间是1894年。其交错对应式 $S(q)$ 定义为 [1, 第 57] 页

$$S(q):=-R(-q)=\frac{q^{1/5}}{1}\,\frac{}{-}\,\frac{q}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{q^2}{1}\,\frac{}{-}\,\frac{q^3}{1}\,\frac{}{+}\cdots, \qquad |q|<1. \tag{2.2}$$

这里以及下文中，对于任意复数 z 和有理数 a，我们取 z^a的主值支。读者或许会想知道，为什么 (2.1) 右侧会有因子 $q^{1/5}$ 。如果没有它， $R(q)$ 的定义岂不是更简单？有了因子 $q^{1/5}$， $R(q)$ 就是一个模形式，因此可以运用模形式理论来研究 $R(q)$。

连分数 $R(q)$ 对单位圆盘内部的所有 q 都收敛，也就是说，对$|q|<1$成立。我们将证明，该定义可以扩展到满足 $|q|=1$的一些取值。回顾 (1.3)，可知 (2.1) 在 $q=1$ 处收敛，其值为黄金比例的倒数。类似地，我们发现，连分数 (2.2) 在 $q=1$ 处收敛于黄金比例 ϕ。因此，通过初等方法，我们分别证明了：

$$R(1)=\frac{1}{\phi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{and} \qquad S(1)=\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \tag{2.3}$$

其中我们在 (2.2) 中取了主值 $(-1)^{1/5}=-1$ 。因此，条件 $|q|<1$ 并非必要条件。然而，对于 $|q|>1$，连分数 (2.1) 发散。

对于单位圆上的其他点， $R(q)$ 是否收敛？我们无法完全回答这个问题。不过，I. Schur [33] 证明了以下定理。

定理 2.1。 设 q 为一个本原 n次单位根。若 n 是 *5* 的倍数，则$R(q)$ 发散。设 n 不是 *5* 的倍数。令 $\lambda=\left(\frac{n}{5}\right)$为勒让德符号。此外，令 ρ 表示 n模 *5* 的最小正剩余。那么，若 n不是 *5* 的倍数，

$$R(q)=\lambda q^{(\lambda\rho n-1)/5}R(\lambda).$$

注意，由 (2.3) 可知， $R(\lambda)$ 存在。在他的第一本笔记本第 383 页上， [28], 拉马努金断言，当 n 是 5 的倍数时， $R(q)$ 发散；但他对 n 不是 5 的倍数时的求值并不正确。更多详情请参见 [9,第 35–36] 页。

在 1913 年 1 月 16 日写给 G.H. Hardy 的第一封信中，在近 70 条定理、恒等式和猜想之中，Srinivasa Ramanujan [27, 第 xxvii 页], [12, 第 29] 页提出了在 $e^{-2\pi}$ 处的连分数 (2.1)，更确切地说，

$$\begin{aligned} R(e^{-2\pi}) &= \frac{e^{-2\pi/5}}{1}+\frac{e^{-2\pi}}{1}+\frac{e^{-4\pi}}{1}+\frac{e^{-6\pi}}{1}+\cdots \\ &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}=5^{1/4}\sqrt{\phi}-\phi, \end{aligned} \tag{2.4}$$

黄金比例 (1.3) 在这个著名的恒等式中出现了两次。拉马努金 [27,第 xxvii 页], [12, 第 29]页还给出了哈代所需的 $R(q)$ 在 $-e^{-\pi}$处的求值，即利用 (2.2)，

$$S(e^{-\pi})=\frac{e^{-\pi/5}}{1}-\frac{e^{-\pi}}{1}+\frac{e^{-2\pi}}{1}-\frac{e^{-3\pi}}{1}+\cdots=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5^{1/4}}{\sqrt{\phi}}-\frac{1}{\phi}. \tag{2.5}$$

（ [27, 第 xxvii 页]的 (2.5) 中有一处印刷错误；请将右侧第一个分母中的“3”改为“2”。）哈代在 1913年2月8日 的回信中， [12, 第 47–48] 页列出了若干“值得注意的定理”，其中之一便是 (2.4)。

拉马努金进一步断言， [27, 第 xvii 页], [12, 第 29]页

$$\frac{1}{1}+\frac{e^{-\pi\sqrt{n}}}{1}+\frac{e^{-2\pi\sqrt{n}}}{1}+\frac{e^{-3\pi\sqrt{n}}}{1}+\cdots \tag{2.6}$$

“如果 n 是任意正有理数，就可以准确求出。”本文稍后将证明，拉马努金的说法是正确的；但对于给定的 n 值，求出其求值可能极其困难。正如我们将在第 5 节中所述，要确定特定 n 值对应的 (2.6)，必须确定相关类不变量的值。这些都是代数数，而且往往难以确定。

在1913年2月27日致哈代的第二封信中，拉马努金 [12, p. 57] 重申了他在（2.6）中的断言。随后，他明确记下了这一情形 $n=20$，即：

$$\frac{1}{1}+\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1}+\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1}+\frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1}+\cdots=e^{2\pi/\sqrt{5}}\left\{\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}. \tag{2.7}$$

在陈述（2.5）之前，拉马努金 [27, p. xviii], [12, p. 57]向哈代给出了一个关于 $R(q)$、涉及黄金比例的优美恒等式。我们按照拉马努金记下的原文引述如下。

“If

$$F(x):=\frac{1}{1}+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{1}+\frac{x^5}{1}+\cdots,$$

then

$$\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+e^{-2\alpha/5}F(e^{-2\alpha})\right\}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+e^{-2\beta/5}F(e^{-2\beta})\right\}=\frac{5+\sqrt{5}}{2} \tag{2.8}$$

条件为 $\alpha\beta=\pi^2$。”

请注意这个恒等式中美妙的对称性。拉马努金热爱对称性，并且在类似于 $\alpha\beta=\pi^2$ 上述的假设下证明了许多恒等式。这个恒等式也被称为“模关系”，因为它令人联想到模形式理论中的变换 $z\mapsto -1/z$、 $z\in\mathbb{C}$ 以及 $\mathrm{Im}(z)>0$。如果我们在 (2.8) 中令 $\alpha=\beta=\pi$，就能得到拉马努金的求值 (2.4)。(2.8) 的首个发表证明由 G. N. Watson [36]于 1929年给出。

哈代在1913年3月26日（巧合的是，这一天正是保罗·埃尔德什出生的日子）给拉马努金第二封信的回信中，[12,pp.77–78] 最后以如下呼吁作结：

“我最希望的是，能对你关于如下类型连分数的某些结果给出确切的证明

$$\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+}\cdots;$$

而且我确信，为了你自己的利益，你最好尽快给我一个证明。”

3. 罗杰斯–拉马努金恒等式

罗杰斯–拉马努金连分数与罗杰斯–拉马努金恒等式有关。为陈述这些恒等式，我们首先需要定义

$$(a;q)_0 := 1, \qquad (a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k), \qquad n \geq 1,$$

并且，若 $|q|<1$,

$$(a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n.$$

罗杰斯–拉马努金函数 $G(q)$ 和 $H(q)$，以及罗杰斯–拉马努金恒等式如下：

$$G(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}, \qquad |q|<1, \tag{3.1}$$

$$H(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n} = \frac{1}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty}, \qquad |q|<1. \tag{3.2}$$

罗杰斯 [32] 证明了

$$R(q) = q^{1/5}\frac{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty}{(q^2;q^5)_\infty(q^3;q^5)_\infty} = q^{1/5}\frac{H(q)}{G(q)}, \qquad |q|<1. \tag{3.3}$$

因此，$R(q)$ 可以表示为罗杰斯–拉马努金函数 (3.1) 和 (3.2) 的商。

这些恒等式 (3.1) 和 (3.2) 是拉马努金在1913年1月16日写给哈代的第一封信中传达的 [27, 第 344] 页内容。然而，拉马努金第一封信中的那一页已经遗失！1914年，拉马努金在提交给《印度数学学会杂志》的一道题目 [25], [27, 第 330] 页中写道：“检验下列结果的正确性”，即 (3.1) 和 (3.2)。拉马努金的表述似乎表明，当时他尚未证明 (3.1) 和 (3.2)，因此在写信给哈代时也同样没有证明。我们推测，哈代曾将拉马努金信中包含恒等式 (3.1) 和 (3.2) 的那一页抽出，以便展示给其他人看，因此这张被抽出的纸页再也没有放回拉马努金信中的原处。

P. A. MacMahon 在其 1916年 出版的著名著作 [22]，中未加证明地陈述了这些恒等式，并专门用整整一章讨论它们。在假定这些恒等式成立的前提下，他为 (3.1) 和 (3.2) 找到了组合解释。第一个恒等式意味着，正整数 n 的互异非连续部件分拆的数量，等于将 n 分拆为模 5 同余于 1 或 4 的部件的分拆数量。第二个恒等式意味着，正整数 n 的互异非连续部件分拆数量（其中每个部件至少为 2），等于将 n 分拆为模 5 同余于 2 或 3 的部件的分拆数量。

1917年，拉马努金在翻阅《伦敦数学会会刊》的旧卷时，偶然发现了罗杰斯 1894年 发表的论文 [32]，其中证明了上述恒等式。随后，拉马努金找到了自己的证明，而罗杰斯则大幅简化了他先前的证明。哈代安排将这两份证明于 1919年 一同发表 [30]。自 1917年 以来，这些恒等式激发了大量持续开展的研究，涉及 q-级数理论中的其他恒等式及其组合解释。

后来，哈代写道 [18, p. 91]：“ [罗杰斯–拉马努金恒等式] 最初由罗杰斯于1894年发现。罗杰斯是一位才华横溢但声望相对不高的数学家，如今人们主要因为拉马努金重新发现了他的工作而记得他。罗杰斯是一位出色的分析学家；从较小的范围来说，他的才能与拉马努金的才能颇为相似。但没有人太关注他所做的任何工作，而他证明这些公式的那篇论文更是完全被忽视了。”

在给哈代的第一封信中，拉马努金 [27, p. xxviii], [12, p. 57] 颇具诱惑性地告诉他，自己已经证明了关于其他连分数的定理。

“上述定理是关于连分数的一个定理的特例

$$\frac{1}{1}+\frac{ax}{1}+\frac{ax^2}{1}+\frac{ax^3}{1}+\frac{ax^4}{1}+\frac{ax^5}{1}+\cdots,$$

而该连分数又是以下连分数的特例

$$\frac{1}{1}+\frac{ax}{1+bx}+\frac{ax^2}{1+bx^2}+\frac{ax^3}{1+bx^3}+\cdots,$$

而后者又是关于连分数的一般定理的特例。”然而，拉马努金没有提供有关这些更一般定理的任何信息。

在他的第二本笔记本中 [28, p. 196], [8, p. 30], 拉马努金给出了他对哈代隐瞒的信息。他第二本笔记本第16章的第15条如下：

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq^{n^2}}{(aq;q)_n(q;q)_n}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq^{n(n+1)}}{(aq;q)_n(q;q)_n}}=1+\frac{bq}{1-aq}+\frac{bq^2}{1-aq^2}+\frac{bq^3}{1-aq^3}+\cdots,\qquad |q|<1. \tag{3.4}$$

在一条推论中，拉马努金记录了（3.4）在 $a=0$时的特殊情形，即

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq^{n^2}}{(q;q)_n}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^nq^{n(n+1)}}{(q;q)_n}}=1+\frac{bq}{1}+\frac{bq^2}{1}+\frac{bq^3}{1}+\cdots,\qquad |q|<1. \tag{3.5}$$

若 $b=1$，利用罗杰斯–拉马努金恒等式（3.1）和（3.2），（3.5）便化为罗杰斯–拉马努金连分数的公式（3.3）。

4. 插曲：拉马努金笔记

在上一段中，我们简要提到了拉马努金笔记。拉马努金于1887年12月22日出生在印度南部城镇埃罗德，他大概在1903年或1904年进入家乡贡伯戈讷姆的政府学院时，开始在笔记本中记录自己的发现。他在石板上做研究，因为纸张十分昂贵。因此，对他来说，在笔记本中记录证明的费用高得难以承受。1914年抵达英格兰后，他专注于发表自己的研究成果；从他写给一位朋友的一封信中

至少在最初居留期间，拉马努金显然很少在笔记本中添加内容。然而，到1919年3月返回印度时，他已编写了第二本笔记本，这是第一本笔记本的修订版，但新增了许多定理。第二本笔记本共21章、256页，后面还附有100页未整理的成果。拉马努金还在一本简短的第三本笔记本中记录了自己的发现，该笔记本共33页。关于拉马努金笔记的历史和内容，更多信息 [28] 可见于第一作者关于拉马努金笔记的第一本书 [6] 。

5. 罗杰斯–拉马努金连分数的值

回顾 (2.2)，可知 $S(q) = -R(-q)$。如 (2.4) 和 (2.5) 所示，通常，如果能够求出 $R(e^{-2\pi\sqrt{n}})$，那么也能求出 $S(e^{-\pi\sqrt{n}})$，反之亦然。此外，由 (2.8) 可知，如果我们能确定 $R(e^{-2\alpha})$ 的值，那么也能求出 $R(e^{-2\pi^2/\alpha})$ 的值。

除了 (2.4)、(2.5) 和 (2.7) 中优美的求值结果外，拉马努金还求出了$R(e^{-\pi\sqrt{n}})$在若干其他 n 值下的结果，其中 n是正有理数。在他的第一本笔记本第 311 页 [28], [9, 第 20], 页，拉马努金用一种巧妙的方法，求出了当 $q = e^{-4\pi}$，$e^{-8\pi}$，$e^{-16\pi}$，$e^{-6\pi}$时，$R(q)$ 的值，且格式完全相同。定义

$$2c := 1 + \frac{a+b}{a-b}\sqrt{5}, \tag{5.1}$$

其中 a 和 b 是两个不同的实数。若 $a = 5^{1/4}$、$b = 1$和 c 由 (5.1) 给出，则

$$R(e^{-4\pi}) = \sqrt{c^2+1} - c. \tag{5.2}$$

若 $a = (60)^{1/4}$、$b = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$和 c 由 (5.1) 给出，则

$$R(e^{-6\pi}) = \sqrt{c^2+1} - c. \tag{5.3}$$

当 $q = e^{-8\pi}$ 和 $q = e^{-16\pi}$ 为 $R(q)$ 时，其值也可类似地求得 [9, 第 20–30] 页。(5.2) 的第一个证明由 K. G. Ramanathan 给出 [23]。利用拉马努金的参数化公式 (5.1)，陈庆发和第一作者 [10] 给出了涵盖全部四个值的首个证明。他们还确定了一些新的值。例如 [10,第 899], [1, 页， 65],

$$S(e^{-\pi/\sqrt{3/5}}) = \left(\frac{-5\sqrt{5} - 3 + \sqrt{30(5+\sqrt{5})}}{4}\right)^{1/5}.$$

第一作者、Chan 和张立成 [11]拓展了拉马努金在 (5.1) 中的思想。

[10] 和 [11], 的作者以及 Chan [15], 还发现了 $R(q)$ 的其他新值，这些值并非由格式（5.1）产生。具体而言，他们利用了模方程 [8, 第 4–5、213–214] 页中的结果进行了若干次求值。例如，Chan [15, 第 344、351–352], [11, 页 156] 证明了

$$S(e^{-\pi\sqrt{3}}) = \frac{-3 - \sqrt{5} + \sqrt{6(5+\sqrt{5})}}{4}.$$

接下来，我们定义一个类不变量。在拉马努金 [8,第 37], 页首次给出

$$\chi(q) := (-q; q^2)_\infty, \qquad |q| < 1.$$

当 $q = e^{-\pi\sqrt{n}}$ 时，对于正有理数 n，类不变量 G_n 由 [9,pp. 21, 183] 定义。

$$G_n := 2^{-1/4} q^{-1/24} \chi(q). \tag{5.4}$$

类不变量在确定 theta函数和连分数的值方面发挥着关键作用。类不变量是代数数，通常很难确定。这些资料 [26], [27, 第 23–39], [9,章 34] 包含 G_n的数值表。

罗杰斯–拉马努金连分数属于theta函数的范畴。由于篇幅有限，本文不定义一般的theta函数 [8, p。 34], 但我们将定义一个特定的theta函数。仿照拉马努金 [8, p. 36, Entry 22], ，将最著名的theta函数 $\varphi(q)$ 定义为

$$\varphi(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \qquad |q| < 1. \tag{5.5}$$

在 [13, 定理 5.2], 中，作者针对一类theta函数的商（5.5）证明了以下定理。他们还证明了一个类似的定理，只是将（5.6）左侧的“5”替换为“3”。另见 [9,第 330, 339]页。

定理 5.1。 如果 n 是一个正有理数，那么

$$\frac{\varphi(e^{-5\pi\sqrt{n}})}{\varphi(e^{-\pi\sqrt{n}})} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{2G_{25n}}{G_n^5}\right)^{1/2}. \tag{5.6}$$

因此，如果我们知道上式右侧所需的类不变量的值，就能确定左侧theta函数商的值。

我们给出一个例子。从 [9,第 189–190],页可知

$$G_1 = 1 \qquad \text{and} \qquad G_{25} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{5.7}$$

因此，在（5.6）中令 $n = 1$ ，并利用（5.7），经过代数化简后，我们得到[9,第 327]页

$$\frac{\varphi(e^{-5\pi})}{\varphi(e^{-\pi})} = \frac{1}{(5\sqrt{5}-10)^{1/2}}.$$

根据我们论文中的 [13, 定理 4.2], ，对于 $|q| < 1$，令

$$p := \frac{4q(-q;q^2)_\infty}{(-q^5;q^{10})_\infty^5} = \frac{4q\chi(q)}{\chi^5(q^5)}. \tag{5.8}$$

本文作者 [14] 建立了以下一般定理，可用于确定 R（q）的值，前提是已知所需的类不变量。

定理 5.2。对于 $0 < |q| < 1$,

$$R(q) = \frac{u}{\sqrt{p+1}+1} = \frac{\sqrt{p+1}-1}{v} \qquad and \qquad R(q^4) = \frac{\sqrt{p+1}-1}{u} = \frac{v}{\sqrt{p+1}+1},$$

with

$$u = (\alpha p)^{1/5} \qquad and \qquad v = (\beta p)^{1/5},$$

其中 α 和 β 是多项式方程的根

$$x^2 - ((p-1)^2+7)x + p^2 = 0. \tag{5.9}$$

u和 v 的值取决于 α 和 β的顺序。可以利用 [13, 定理 4.2(0)],中的定义来消除这种歧义，不过为求简洁，我们省略这些细节。

若 $q = e^{-\pi\sqrt{n}}$，其中 n 是一个正有理数，则 (5.8) 中 p 的值可以用类不变量 (5.4) 表示；事实上，(5.9) 的解会导出这些值

$$u, v = \left\{ \frac{p}{2} \left((p-1)^2 + 7 \pm (4-p)(4+p^2)^{1/2} \right) \right\}^{1/5},$$

其中，u 取 $+$号，v 取 $-$号。

定理 5.2 类似于 [13, 第 1 条目、定理 2.1、定理 4.2] 以及 [31,第 1.1 条目、定理 4.1] 中的定理，这些定理用于求出 $\varphi(e^{-\pi\sqrt{n}})$的值。当 n为正有理数时，我们可以利用定理 5.2 求出 $R(e^{-\pi\sqrt{n}})$的值。例如，在定理 5.2 中取$q = e^{-\pi}$ ，借助 (5.4) 和 (5.7)，可得 (5.2) 的一个更明确的形式，即

$$R(e^{-4\pi}) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{(5\sqrt{5}-10)^{1/2} - 1}{1 + (5-2\sqrt{5})^{1/2}}.$$

作为定理 5.2 的推论，我们注意到

$$\frac{1}{R(q)} - R(q^4) = \frac{2}{u} \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{R(q^4)} - R(q) = \frac{2}{v}.$$

Chan [15], 以及第一作者、Chan 和张 [11] 也利用类不变量确定了 $R(e^{-\pi\sqrt{n}})$的一些特定值。作者在论文[14]中推导出了 $R(e^{-\pi\sqrt{n}})$的更多求值。另请参阅易金熙 [39] 以及 N. D. Baruah 和 N. Saikia [5] 的论文，了解更多求值结果。

6. 涉及 $R(q)$的恒等式

在其笔记本 [28], 遗失的笔记本 [29], 以及收录于 [29], 的此前未发表手稿中，拉马努金记录了大量优美的恒等式，涉及 $R(q)$、$R(q^n)$、 $n \in \mathbb{N}$，以及自变量各异的 theta函数。我们仅选取其中一小部分。自拉马努金笔记和遗失的笔记本中的这些恒等式首次得到证明以来，文献中已出现许多不同的证明。此外，寻找新的恒等式仍持续吸引着众多研究人员。关于拉马努金涉及$R(q)$的恒等式，重要资料包括安德鲁斯和第一作者合著的首部关于拉马努金遗失的笔记本的著作第 1–4 章 [1], 第一作者著作的第 32 章 [9], 以及由安德鲁斯、第一作者、L. Jacobsen 和 R. L. Lamphere 合著的回忆录 [4] 。

$R(q)$最重要的恒等式之一为

$$\frac{1}{R(q)} - 1 - R(q) = \frac{(q^{1/5}; q^{1/5})_\infty}{q^{1/5}(q^5; q^5)_\infty}, \tag{6.1}$$

此式见于拉马努金第二本笔记本 [28, 第 16], [8, 页第 265–267] 页，以及他的遗失的笔记本 [29], [1, 第 11–18], 页，并由沃森首次证明 [35]。拉马努金还证明了与 (6.1) 相伴的恒等式，即 [1, 第 11], 页

$$\frac{1}{R^5(q)} - 11 - R^5(q) = \frac{(q;q)_\infty^6}{q(q^5;q^5)_\infty^6}. \tag{6.2}$$

Soon-Yi Kang [19] 给出了 (6.1) 和 (6.2) 两个公式的证明，还证明了几个相关定理，并利用她的结果确定了许多 $R(e^{-\pi\sqrt{n}})$ 和 $S(e^{-\pi\sqrt{n}})$ 的值，其中 n 是一个正有理数。Chadwick Gugg [17] 也为 (6.2) 给出了一个优雅的证明。值得注意的是，拉马努金 [29, p. 207], [1, p. 13] 还发现，事实上，上述两个恒等式是涉及 theta函数的非常一般的二元恒等式的特例!

在他的遗失的笔记本第 206 页上 [29], [1, pp. 21–24], ，除了 Seung Hwan Son [34], [2, pp. 180–194] 和第二作者 [31], 证明的一组非常特别的 theta函数恒等式外，拉马努金还给出了四个精妙的公式，可对 (6.1) 和 (6.2) 进行因式分解。我们列出其中前两个，它们源自对 (6.1) 的因式分解。用拉马努金记号，首先令

$$\alpha := \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{and} \qquad \beta := \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

那么，若 $t = R(q)$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - \alpha\sqrt{t} = \frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{(q;q)_\infty}{(q^5;q^5)_\infty}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha q^{n/5}+q^{2n/5}}, \tag{6.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} - \beta\sqrt{t} = \frac{1}{q^{1/10}}\sqrt{\frac{(q;q)_\infty}{(q^5;q^5)_\infty}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\beta q^{n/5}+q^{2n/5}}. \tag{6.4}$$

注意，若在（6.3）中交换 α 和 β 的角色，便可得到（6.4）。将（6.3）和（6.4）相乘，即可推出（6.1）。

拉马努金在他的第二本笔记本第 321 页 [28], [9, p. 17] 以及他的遗失的笔记本第 365 页[29], [1, p. 92], [4, p. 27], 记录了一个优美的恒等式，将 $R(q)$与 $R(q^3)$联系起来。设 $u = R(q)$ 且 $v = R(q^3)$。那么，

$$(v-u^3)(1+uv^3) = 3u^2v^2.$$

他还指出了 [1, p. 92] 个类似的恒等式，分别联系以下各对： $R(q)$ $S(q)$； $R(q)$ $R(q^4)$；以及$R(q)$ $R(q^5)$。J. Yi [38]已给出了所有这些恒等式的证明。另请参阅 Gugg 的论文 [17]。

在他的第二本笔记本 [28,第 326],页中，拉马努金引入了参数

$$k := R(q)R^2(q^2)$$

并指出

$$R^5(q) = k\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \qquad \text{and} \qquad R^5(q^2) = k^2\left(\frac{1+k}{1-k}\right).$$

证明见 [4, 条目 24]或 [9, 第 12–14] 页。在他的遗失的笔记本 [29, 第 53, 56, 208], [1,页、第 33–39、81–84], 页中，拉马努金继续研究 k。例如，若 $k \le \sqrt{5}-2$，则

$$R(q^{1/2}) = \frac{k^{1/10}(1+k)^{4/5}(1-k)^{1/5}}{\sqrt{k}+\sqrt{1+k-k^2}}.$$

除一条恒等式外，S.-Y. Kang 在她的论文 [20] 中证明了拉马努金所有涉及 k 的恒等式。

7. 插曲：拉马努金遗失的笔记本

拉马努金于1920年4月26日去世。此后，他的妻子 Janaki 将亡夫的全部论文捐赠给了马德拉斯大学。1923年8月30日，马德拉斯大学注册主任 Francis Dewsbury 将一包拉马努金的论文寄给了哈代。遗憾的是，哈代和 Dewsbury 都没有记录寄送了哪些材料。20世纪30年代末的某个时候，哈代将这些材料转交给了 G. N. Watson；此前，Watson 曾至少用10年时间整理拉马努金笔记。Watson 是伯明翰大学的数学教授。他于1965年去世，此后不久，Robert Rankin 前往拜访 Watson 的

遗孀。Watson 把成堆杂乱无章、未经整理的论文——既有数学方面的，也有其他方面的——留在阁楼办公室的地板上。鉴于亡夫对剑桥的喜爱，Rankin 和沃森夫人商定，在接下来的几年里由 Rankin 整理 Watson 的论文，其中有价值的材料则送往剑桥的三一学院图书馆。Rankin 找到了数量可观的拉马努金手稿，其中大多数是不完整的或残缺的，并于1968年12月26日将它们寄往剑桥。显然，除了剑桥的图书管理员之外，Rankin 没有将这批寄送的材料告知任何人。

乔治·安德鲁斯于1976年春访问了剑桥。剑桥数学家露西·斯莱特建议安德鲁斯，他或许会对翻阅三一学院图书馆收藏的沃森的论文感兴趣。翻阅时，他发现了一堆用拉马努金笔迹写成的论文，共有138页。安德鲁斯立即（也是自然而然地）将这堆论文命名为拉马努金遗失的笔记本。随后，人们又在剑桥和牛津的图书馆里找到了其他论文。所有这些论文汇集在一起，并于1988年出版成一卷 [29]。

8. 罗杰斯–拉马努金连分数的有限形式

在引言中，我们写道：“无限连分数比有限连分数有趣得多。”也许这个说法下得太仓促了。拉马努金第二本笔记本第16章第16条中给出了罗杰斯–拉马努金连分数的有限形式 [28,第 196], [8,页 31]。

对于每个正整数 n，令

$$\mu := \mu_n(a,q) := \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \frac{a^k q^{k^2} (q;q)_{n-k+1}}{(q;q)_k (q;q)_{n-2k+1}}$$

and

$$\nu := \nu_n(a,q) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{a^k q^{k(k+1)} (q;q)_{n-k}}{(q;q)_k (q;q)_{n-2k}}.$$

那么，

$$\frac{\mu}{\nu} = 1 + \frac{aq}{1} + \frac{aq^2}{1} + \cdots + \frac{aq^n}{1}. \tag{8.1}$$

注意（8.1）与（3.3）以及（3.5）的相似之处。

9. An Uncommon Continued Fraction ‘Identity’

我们回到（1.4），它可以宽泛地看作罗杰斯–拉马努金连分数的一个类比，其中 q 的幂被其自身的幂所替代。在致哈代的第二封信中 [12, 第 58], 页，以及他的第二本笔记本第 276 页 [28], [9, 第 67], 页，拉马努金提出了一个不同寻常的“恒等式”。“当 x 很小时，

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{3}{1} + \frac{4}{1} + \cdots = x\sqrt{e} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1+nx)^2/2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{360} - \frac{x^6}{5040} - \frac{x^8}{60480} - \frac{x^{10}}{1710720} \qquad \text{nearly.” (9.1)}$$

考虑（9.1）右侧的乘积。拉马努金希望哈代在“ x 很小时”对它进行考察。当 $x \to 0^+$时，无穷级数中的各项趋近于 $e^{-1/2}$，因此，当 $x \to 0$时，无穷级数趋于 ∞；或者不严谨地说，如果在求和项中令 $x = 0$ ，我们就会得到一个发散级数。此外，右侧还有一个因子 $x\sqrt{e}$，它当然会在 $x \to 0^+$时趋于 0。因此，当 x 趋于 0^+时，右侧的一个因子趋于 0，而

另一个则趋于 ∞。在极限中，当 $x \to 0^+$ 时，究竟哪一个会占上风？结果是平手。这个乘积既不趋于 0，也不趋于 ∞，而是趋于（9.1）左侧的无穷连分数。但拉马努金还告诉了我们更多。当 $x > 0$ 很小时，他给出了一个更好的近似。若将 x 中的多项式移到左侧，那么当 $x > 0$ 极其、极其小时，左侧的多项式为负。因此，经过修改后的左侧略小于连分数的值。于是，当 $x \to 0^+$时，无穷级数暂时“领先”于 $x\sqrt{e}$，但最终两者会打成平手。在他的笔记本中，拉马努金给出了许多近似，尤其是关于变量 x的幂的近似；他常在近似结果后加上“近似地”或“非常接近地”这样的字样。

精彩的公式 (9.1) 实际上是拉马努金第二本笔记中的一个更一般结果的特例 [28, p. 276], [4, p. 4], [9, p. 67]。在他的推广中，拉马努金给出了相关多项式系数的公式。如果令多项式的次数趋于无穷大，我们就得到一个不 收敛的无穷级数。沃森 [37] 在 1931年证明了拉马努金这一论断的一个版本。

连分数 (1.4) 尚无已知的初等求值方法 [16, p. 423]。然而，拉马努金 [24], [27, p. 329] 于 1914年在《印度数学学会杂志》上提出了以下非凡问题：

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{2}{1}+\frac{3}{1}+\frac{4}{1}+\cdots\right)=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

更一般的 恒等式见拉马努金第二本笔记本 [28, p. 152], [7, p. 166, 条目 43] .

参考文献

[1] G. E. Andrews 和 B. C. Berndt，《拉马努金遗失的笔记本》第一部分，施普林格出版社，纽约，2005年。[2] G. E. Andrews 和 B. C. Berndt，《拉马努金遗失的笔记本》第二部分，施普林格出版社，纽约，2009年。[3] G. E. Andrews 和 B. C. Berndt，《拉马努金遗失的笔记本》第三部分，施普林格出版社，纽约，2012年。[4] G. E. Andrews、B. C. Berndt、L. Jacobsen 和 R. L. Lamphere，拉马努金笔记本未整理部分中的连分数，美国数学会回忆录99（1992），第477号，vi+71 页。[5] N. D. Baruah 和 N. Saikia，拉马努金连分数的一些新显式值，《印度数学杂志》46（2004），第2–3期，197–222。[6] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》第一部分，施普林格出版社，纽约，1985年。[7] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》第二部分，施普林格出版社，纽约，1989年。[8] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》第三部分，施普林格出版社，纽约，1991年。[9] B. C. Berndt，《拉马努金笔记》第五部分，施普林格出版社，纽约，1998年。[10] B. C. Berndt 和 H. H. Chan，罗杰斯–拉马努金连分数的一些取值，《加拿大数学杂志》47（1995），第5期，897–914。[11] B. C. Berndt、H. H. Chan 和 L.–C. Zhang，罗杰斯–拉马努金连分数的显式求值，《纯粹与应用数学杂志》480（1996），141–159。[12] B. C. Berndt 和 R. A. Rankin，《拉马努金：书信与评论》，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1995年；伦敦数学会，伦敦，1995年。[13] B. C. Berndt 和 Örs Rebák，拉马努金七次 theta 函数恒等式的三次与五次类比，《拉马努金杂志》66（2025），第66篇，40页。[14] B. C. Berndt 和 Örs Rebák，罗杰斯–拉马努金连分数与五次 theta 函数恒等式，准备中。[15] H. H. Chan，论拉马努金的三次连分数，《算术学报》73（1995），第4期，343–355。[16] S. R. Finch，《数学常数》，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[17] C. Gugg，拉马努金关于 $R(q)$与 $R(q^5)$之间关系的模方程的新证明，《拉马努金杂志》20（2009），第2期，163–177。[18] G. H. Hardy，《拉马努金：关于其生平与工作的十二讲》，剑桥大学出版社，剑桥，1940年；第4版，AMS Chelsea，普罗维登斯，1999年。[19] S.-Y. Kang，拉马努金关于罗杰斯–拉马努金连分数和 theta 函数的显式求值公式，《算术学报》90（1999），第1期，49–68。

[20] S.-Y. Kang，关于罗杰斯–拉马努金连分数及拉马努金遗失的笔记本中相关 theta 函数恒等式的一些定理，《拉马努金杂志》3（1999），第1期，91–111。[21] L. Lorentzen 和 H. Waadeland，《连分数及其应用》，North Holland，阿姆斯特丹，1992年。[22] P. A. MacMahon，《组合分析》第二卷，剑桥大学出版社，伦敦，1916年；Chelsea出版社于纽约于1960年重印。[23] K. G. Ramanathan，论罗杰斯–拉马努金连分数，《印度科学院院刊（数学科学）》93（1984），第2–3期，67–77。[24] S. Ramanujan，问题541，《印度数学学会杂志》6（1914），79。[25] S. Ramanujan，问题584，《印度数学学会杂志》6（1914），199。[26] S. Ramanujan，模方程及对 π的近似，《数学季刊》45（1914），350–372。[27] S. Ramanujan，《斯里尼瓦瑟·拉马努金论文集》，G. H. Hardy、P. V. Seshu Aiyar 和 B. M. Wil-son 编，剑桥大学出版社，剑桥，1927年。[28] S. Ramanujan，《斯里尼瓦瑟·拉马努金笔记本》（两卷），塔塔基础研究院，孟买，1957年；第二版，2012年。[29] S. Ramanujan，《遗失的笔记本及其他未发表论文》，Narosa出版社，新德里，1988年。[30] S. Ramanujan 和 L. J. Rogers，组合分析中的某些恒等式的证明，《剑桥哲学学会会刊》19（1919），211–216。[31] Ö. Rebák，拉马努金七次 theta 函数恒等式中缺失的三个项，《拉马努金杂志》60（2023），第4期，885–911。[32] L. J. Rogers，关于某些无穷乘积展开的第二篇回忆录，《伦敦数学学会会刊》25（1894），318–343。[33] I. Schur，《对加法数论和连分数理论的贡献》，《普鲁士科学院物理—数学类会议录》（1917），302–321。[34] S. H. Son，拉马努金遗失的笔记本中的七次 theta 函数恒等式，《算术学报》98 4，361 2001 374 ( )，第–期。[35] G. N. Watson，拉马努金提出的定理（七）：关于连分数的定理，《伦敦数学学会杂志》4（1929），39–48。[36] G. N. Watson，拉马努金提出的定理（九）：两个连分数，《伦敦数学学会杂志》4（1929），231–237。[37] G. N. Watson，拉马努金提出的定理（十一），《伦敦数学学会杂志》6（1929），59–65。[38] J. Yi，罗杰斯–拉马努金连分数与 Dedekind eta函数的模方程，《拉马努金杂志》5（2001），第4期，377–384。[39] J. Yi，通过模方程求罗杰斯–拉马努金连分数 $R(q)$的值，《算术学报》97（2001），第2期，103–127。数学系，伊利诺伊大学，西格林街1409号，厄巴纳，伊利诺伊州 61801, USA
电子邮箱地址： berndt@illinois.edu

挪威特罗姆瑟北极大学数学与统计系，邮编 9037，挪威特罗姆瑟电子邮箱地址： ors.rebak@uit.no