arXiv:2512.19998v1 [math.RT] 23 Dec 2025

准分裂 ADE 型移位扭 Yangian

KANG LU、WEIQIANG WANG 和 ALEX WEEKES

摘要。对于所有 ADE 型准分裂 Satake 图及偶球余权μ，我们引入移位 iYangian ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$，并建立其 PBW 基。我们构造了 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的 iGKLO 表示，这些表示可经由称为截断移位 i Yangian ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu^\lambda$的商因子化。在 AI 型且 μ 支配时，${}^\imath\mathcal{Y}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$ 的一个变体可与另一种定义中的截断移位 iYangian 对应，而后者同构于 BCD 型有限 W 代数。这一新系列代数与仿射格拉斯曼切片的不动点轨迹有关，并具有相应应用，后续论文将对此加以阐述。

目录

1. 引言 1 2. 移位 iYangian 4 3. i移位 iYangian 的 GKLO 表示 10 4. iGKLO 同态定理的证明 17 5. TSTY 两种定义的对应 31 参考文献 37

1. 引言

1.1. 目标。对于复单李代数 $\mathfrak{g}$ or $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$，杨超代数 $Y(\mathfrak{g})$ 存在一种自然的变体，称为与余权 μ相关联的移位 Yangian Y_μ；事实上，当 μ 支配时，它们是 $Y(\mathfrak{g})$ 的子代数。支配情形下的移位 Yangian 最早由 Brundan-Kleshchev [BK06], 在 A 型中引入，他们证明某个商代数 $Y_\mu^{N\varpi_1^\vee}(\mathfrak{gl}_N)$ 与一个 A 型有限 W 代数同构。受 [GKLO05], 启发，$\mathfrak{g}$ 为 ADE 型的一般情形下的一族截断移位 YangianY_μ^λ由 [KWWY14] 针对支配的 μ 引入，而一般的 μ 则由 [BFN19], 引入；人们证明它们能够量子化广义仿射 Grassmann 切片 [BFN19,Wee19]。因此，前述 BK 识别可被视为对某些仿射格拉斯曼切片与幂零 Slodowy 切片之间的泊松代数同构进行量子化的一个实例[WWY20, MV22]。

在本文及其续篇中，我们将为上述联系增添新的 twist，并提出 $\imath$计划（参见 [Wan23]），为一系列新的代数如何量子化新的泊松簇提供一个框架。本文引入移位 iYangian，并研究其 iGKLO 表示，为

2020 数学主题分类。主要分类 17B37。关键词和短语。
Drinfeld 表示，扭 Yangian。

续篇中关于仿射格拉斯曼流形 i 切片的几何应用奠定代数基础[LWW25]。

1.2. **移位 i杨扬子代数**。 与 Satake 图相关联，Letzter 提出了量子对称对$(\mathbf{U},\mathbf{U}^\imath)$，Kolb 将其推广到 Kac-Moody 型，其中$\mathbf{U}$ 是 Drinfeld-Jimbo 量子群，而$\mathbf{U}^\imath$ 是$\mathbf{U}$的余理想子代数，如今称为 i量子群。量子群$\mathbf{U}$ 作为与对角 Satake 图相关联的 i量子群出现。$\imath$仿射量子群和杨超代数的推广称为仿射 i量子群和扭 Yangian（或 i杨扬子代数）。扭 Yangian 早先已在 [Ols92、MR02、GR16]中以 R 矩阵形式定义，是对扭当前代数（即当前代数的对合不动点子代数）的变形。

近期，A I 型扭 Yangian 的 Drinfeld 表示已在[LWZ25b] 中通过高斯分解构造；此类表示随后推广到了所有分裂型的扭 Yangian [LWZ25a]，继而推广到所有准分裂型 [LZ25]，其方法是从相应（准）分裂型仿射 i量子群的 Drinfeld 表示出发，进行退化构造 [LW21、LWZ24]。然而，扭 Yangian 的两种定义（分别通过 R 矩阵和 Drinfeld 表示给出）目前仅在 AI 型和 AIII 型中得到确认。本文将采用 Drinfeld 表示给出的定义，并称其为 i杨扬子代数。这些 i杨扬子代数和仿射 i量子群由底层有限型准分裂 Satake 图$(\mathbb{I},\tau)$决定。这里，τ是 Dynkin 图的图对合 $\mathbb{I}$；当 $\tau=\mathrm{id}$ 时，相应情形称为分裂型。

对于任意拟分裂 Satake 图 （$\mathbb{I}$， τ），都有一个对称对 （$\mathfrak{g}$， $\mathfrak{g}^{\omega_\tau}$），其中 $\omega_\tau=\omega_0\circ\tau$ 对应于 Chevalley 对合 ω_0，相应的 i杨扬子代数为 ${}^\imath\mathcal{Y}={}^\imath\mathcal{Y}_0$。通过修改 Drinfeld 表示中的 i杨扬子代数，我们引入移位 iYangian ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$；参见定义 2.2。这里 μ 是任意偶球权（见定义 2.1），这些自然条件是由 iGKLO 表示的必要性以及仿射格拉斯曼流形 i 切片的几何性质所施加的。注意，已有一族 A 型 AI 的移位 iYangian ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$，其中 μ 是支配且为偶的（由于 $\tau=\mathrm{id}$，因而自动为球的），并且在[LPT+25]中发挥了基础性作用。

定理 A （PBW 基定理2.16）。 设 μ 是任意偶球余权。则根向量中的有序单项式集合（2.22）构成${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的一个基。

移位 iYangian 之间的移位同态，$\iota^\tau_{\mu,\ \nu}\colon\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu\to{}^\imath\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu}$（见引理 2.7），对于 ν反支配的以及 μ， $\nu+\tau\nu$偶球面的情形，由定理 A可知它们是单射。

1.3. **iGKLO 与截断移位 iYangian**。 回顾从移位 Yangian 到差分算子环的 GKLO 同态 [GKLO05、KWWY14、BFN19]，，其像称为截断移位 Yangian。我们定义一种差分算子环的变体 $\mathcal{A}$，如（3.6）–（3.7）所示。我们构造从移位 iYangian 到 $\mathcal{A}$的 iGKLO 同态，首先针对 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{gl}_n)$，见定理 3.4，然后推广到一般情形 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$。

定理 B (定理 3.6)。 设 $(\mathbb{I},\tau)$为任意拟分裂 Satake 图。设 λ为一个支配 τ-不变余权，且 μ 为满足奇偶性约束（3.5）的偶球余权。那么存在唯一的同态$\Phi^\lambda_\mu\colon\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu[z]\longrightarrow\mathcal{A}$ 其在生成元上的公式已指定。

求出 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 在 Φ_μ^λ 下各生成元像的显式公式，是这里的主要挑战之一，因为我们要对所有类型进行完全一般的处理。值得注意的是，对于一般的 λ、μ，我们的公式包含一些非齐次项，这是后文几何应用所要求的[LWW25]。值得注意的是，同一奇偶性条件（3.5）也自然出现在相关文献 loc. cit. 的几何情形中。

定理 B 的证明很长，将占用第 4节。由于有 3 个仿射秩一子代数，因此 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 会出现几种不同类型的 Serre 关系，需要进行不同的计算。要验证 $\Phi_\mu^\lambda:\ {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu[z]\to\mathcal{A}$ 是一个同态，既繁琐又充满技术挑战。

对于具有偶数个节点的 AIII 型 Satake 图$_{2n}$，文献 [LZ25] 还基于 [SSX25] 提出了一种移位 iYangian 的变体，但并未建立 PBW 基；作者还构造了一个到环 $\mathcal{A}$的同态，该同态可经由相应的库仑支分解。在此情形下，我们从这些作者那里学到了一种生成函数技巧，并借此验证了 iGKLO 同态所需的 Serre 关系（2.9）。AIII 型$_{2n}$ 在所有 ADE Satake 图中独具特殊性，因为它不包含分裂秩一子图。

$(\mathbb{I},\tau)$ 型的截断移位 i杨扬子代数（TSTY）定义为同态 Φ_μ^λ 的像，并记为 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$。这族代数将在下文中发挥基础性作用，并且具有若干良好性质；下面介绍其中之一。

命题 C 命题（命题 3.12）。 TSTY 的中心${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 是一个多项式代数 .

1.4. **两个 TSTY 的故事**。 通过 AI 型扭 Yangian 的 Drinfeld 表示的抛物推广， [LWZ25b], 在 [LPT+25]中给出了移位 iYangian $\mathcal{Y}_\mu$ 的一种截然不同的定义，其中 μ 是一个分拆，并假设其在如下意义下是偶的：它所对应的幂零元在底层经典李代数上诱导出一个偶 Z分次。令人惊奇的是，这种偶性与本文所使用的、作为支配余权的 μ上的偶性条件（对所有 ADE 型均成立）相容。在 [LPT+25] （推广了 [BK06]）中，以生成元与关系的形式给出了 AI 型截断移位 iYangian（TSTY）的一族，其记为 $\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$；其中一个主要结果（同上）是，$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$ 与有限 W-代数之间存在代数同构，该有限 W-代数量子化了相应的 BCD 型 Slodowy 切片。

将组合数据$(n,\ell;\ \sigma)$（用于$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$）以及 TSTY 中使用的一对$(N\varpi_1^\vee,\mu)$在此对齐${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$非常简单。我们引入${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$的一个变体，记为 ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$，见（5.22）。

定理 D (定理 理 5.8)。 TSTY代数的这两个版本同构：$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)\cong{}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$。

这尤其给出了 TSTY ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$的一个表示。一般而言，给出 TSTY ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 的表示仍是一个未解决问题；参见猜想3.10。

作为移位 Yangian 的一种 q类比，A 型移位仿射量子群见[FT19] 中构造，并通过同态映入带框架箭图规范理论的量子化 K 理论库仑分支。在一项正在进行的工作中，我们已经能够通过 iGKLO 表示来表述分裂型和准分裂型的移位仿射 i 量子群及其截断。

1.5. **结构安排**。 本文的组织结构如下。在第 2节中，我们构造移位 iYangian 并建立其 PBW 基。我们将在第

节构造移位 iYangian 3，由此定义 TSTY ${}^{\imath}\mathcal{Y}^{\lambda}_{\mu}$。随后，我们确定${}^{\imath}\mathcal{Y}^{\lambda}_{\mu}$的中心。第 4 节给出定理 B的详细技术证明。最后，在第 5节中，我们将 [LPT+25] 中构造的 AI 型 TSTY 与通过 iGKLO 定义的一种 TSTY 变体对应起来。

致谢。 K.L. 和 W.W. 得到了美国国家科学基金会 DMS-2401351 项目的部分资助。A.W. 得到了 NSERC探索基金的资助。W.W. 感谢爱丁堡的 ICMS 在 2023年8月为部分联系的构想提供了富有启发性的氛围，也感谢新加坡国立大学（数学系和 IMS）在本项工作的最后阶段提供了卓越的研究环境和支持。本项工作的主要结果及其后续工作已在 [LPT+25]中宣布。感谢 Yaolong Shen、Changjian Su 和 Rui Xiong 与我们交流他们的工作；也感谢他们以及 Curtis Wendlandt 富有帮助的讨论。

2. 移位 iYangian

本节将介绍与所有准分裂ADE Satake图（$\mathbb{I}$，τ）及偶球余权 μ 相关的移位 iYangian ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}$ 。我们还将建立它们的 PBW 基，以及移位 iYangian 之间的移位态射。

2.1. 准分裂 ADE 型的移位 iYangian。 设 $C=(c_{ij})_{i,\ j\in\mathbb{I}}$ 为 ADE 型的 Cartan 矩阵， $\mathfrak{g}$ 为相应的单李代数。固定一个单根系 $\{\alpha_i \mid i\in\mathbb{I}\}$，其对应的正根集合为 Δ^+ 。设 τ 为$\mathfrak{g}$的 Dynkin 图的一个对合，即 $c_{ij}=c_{\tau i,\ \tau j}$且满足 $\tau^2=\mathrm{id}$；注意， $\tau=\mathrm{id}$ 也是允许的。我们称 $(\mathbb{I},\ \tau)$ 为准分裂 Satake 图，并称当 $\tau=\mathrm{id}$ 时，Satake 图为分裂的。分裂 Satake 图在形式上与 Dynkin 图完全相同。记 $\mathbb{I}_0$ 为 $\mathbb{I}$中 τ 的不动点集合，即$\mathbb{I}_0=\{i\in\mathbb{I}\mid \tau i=i\}$。设 $\mathbb{I}_1$为 $\mathbb{I}$中长度为 2 的 τ-轨道的代表元集合，并定义$\mathbb{I}_{-1}=\tau\mathbb{I}_1$；可以方便地选取 $\mathbb{I}_1$，使其底层 Dynkin 子图连通。于是 $\mathbb{I}=\mathbb{I}_1\sqcup\mathbb{I}_0\sqcup\mathbb{I}_{-1}$。令

$$ {}^{\imath}\mathbb{I}=\mathbb{I}_1\sqcup\mathbb{I}_0. \tag{2.1}$$

对合 τ自然作用于 $\mathfrak{g}$的（余）根格和（余）权格。本文中的权或余权均指整权。

定义 2.1. 若存在某个余权 μ_1使得 $\mu=\mu_1+\tau\mu_1$，则称余权 μ为球的。若存在某个余权 μ'使得 $\mu=2\mu'$，则称余权μ 为偶，即对所有 $i\in\mathbb{I}$，$\langle\mu,\ \alpha_i\rangle\in2\mathbb{Z}$。

在下文讨论移位 iYangian 时，我们假设移位余权 μ是偶球面的；值得注意的是，之后考察仿射格拉斯曼切片的不动点轨迹时，也需要满足同一条件。

记 $[A,B]_+=AB+BA$。

定义 2.2。 设 μ 为偶球余权。准分裂型的移位 ***iYangian*** ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}:={}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}(\mathfrak{g})$是 $\mathbb{C}$-代数，其生成元为 $H_i^{(r)}$、 $B_i^{(s)}$ （其中 $i\in\mathbb{I}$、 $r\in\mathbb{Z}$ 和 $s\in\mathbb{Z}_{>0}$），满足以下关系，其中 r、r_1、$r_2\in\mathbb{Z}$和 s、s_1以及 $s_2\in\mathbb{Z}_{>0}$:

$$H_i^{(r)}=0 \text{ for } r<-\langle\mu,\alpha_i\rangle,\quad H_i^{(-\langle\mu,\alpha_i\rangle)}=1, \tag{2.2}$$

$$[H_i^{(r_1)},H_j^{(r_2)}]=0, \tag{2.3}$$

$$[H_i^{(r+2)}, B_j^{(s)}] - [H_i^{(r)}, B_j^{(s+2)}] = \frac{c_{ij} - c_{\tau i,j}}{2}[H_i^{(r+1)}, B_j^{(s)}]_+ + \frac{c_{ij} + c_{\tau i,j}}{2}[H_i^{(r)}, B_j^{(s+1)}]_+ + \frac{c_{ij}c_{\tau i,j}}{4}[H_i^{(r)}, B_j^{(s)}], \tag{2.4}$$

$$[B_i^{(s_1+1)}, B_j^{(s_2)}] - [B_i^{(s_1)}, B_j^{(s_2+1)}] = \frac{c_{ij}}{2}[B_i^{(s_1)}, B_j^{(s_2)}]_+ + 2\delta_{\tau i,j}(-1)^{s_1}H_j^{(s_1+s_2)}, \tag{2.5}$$

以及 Serre 关系：对于 $c_{ij} = 0$,

$$[B_i^{(s_1)}, B_j^{(s_2)}] = (-1)^{s_1-1}\delta_{\tau i,j}H_j^{(s_1+s_2-1)}, \tag{2.6}$$

且对于 $c_{ij} = -1, i \neq \tau i \neq j$,

$$\mathrm{Sym}_{s_1,s_2}\big[B_i^{(s_1)}, [B_i^{(s_2)}, B_j^{(s)}]\big] = 0, \tag{2.7}$$

且对于 $c_{ij} = -1, i = \tau i$,

$$\mathrm{Sym}_{s_1,s_2}\big[B_i^{(s_1)}, [B_i^{(s_2)}, B_j^{(s)}]\big] = (-1)^{s_1-1}[H_i^{(s_1+s_2)}, B_j^{(s-1)}], \tag{2.8}$$

且对于$c_{i,\tau i} = -1$,

$$\mathrm{Sym}_{s_1,s_2}\big[B_i^{(s_1)}, [B_i^{(s_2)}, B_{\tau i}^{(s)}]\big] = 4\,\mathrm{Sym}_{s_1,s_2}(-1)^{s_1-1}\sum_{p\geqslant 0}3^{-p-1}[B_i^{(s_2+p)}, H_{\tau i}^{(s_1+s-p-1)}]. \tag{2.9}$$

这里，若 $c_{ij} = -1$ 且 $s = 1$，我们在 (2.8) 中采用以下约定：

$$[H_i^{(r)}, B_j^{(s-1)}] = \sum_{p\geqslant 0}2^{-2p}\big([H_i^{(r-2p-2)}, B_j^{(s+1)}] - [H_i^{(r-2p-2)}, B_j^{(s)}]_+\big),$$

若 $s > 1$，则可由 (2.18) 推得，参见 [LWZ25b，引理 4。11]。

备注 2.3. 若 $\tau = \mathrm{id}$，则球余权 μ 自动满足偶性条件。在准分裂情形下，通过修改（2.2）中的第二个关系为 $H^{(-\langle\mu,\alpha_i\rangle)}{}_i = (-1)^{\langle\mu_1,\alpha_{\tau i}\rangle}$，其中 $\mu = \mu_1 + \tau\mu_1$。那么定理 A和 B （关于 PBW 基和 iGKLO 表示）仍然成立。为与后文的几何考量相一致，我们将 μ 限制为偶数 [LWW25]。也可以修改仿射格拉斯曼流形的设定以适应这一变化，但我们没有采用这种做法。

由于 τ 是一个对合，由（2.6）可得

$$H_i^{(r)} = (-1)^r H_{\tau i}^{(r)}, \tag{2.10}$$

尤其是,

$$H_i^{(2r+1)} = 0, \qquad \text{if } \tau i = i. \tag{2.11}$$

Lem引理 2.4 ([LZ25，引理 3.4])。 若 $c_{\tau i,j} = 0$，则关系 (2.4) 等价于

$$[H_{i,r+1}, B_{j,s}] - [H_{i,r}, B_{j,s+1}] = \frac{c_{ij}}{2}[H_{i,r}, B_{j,s}]_+. \tag{2.12}$$

引理 2.5. 假设关系 (2.2)–(2.5)在一个具有与 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$相同生成元集合的代数中成立。

(1) 如果 (2.8)仅对特殊情形成立 $s = s_1 = 1$ 且所有 $s_2 > 0$，那么 (2.8) 对所有s，s_1，$s_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$成立。

(2) 若 (2.9)成立 在特殊情形下 $s = s_1 = s_2 = 1$，那么 (2.9) 对所有 s， s_1， $s_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$.

证明。 第(1)部分可由与 [LWZ25b， §4.3]相同的论证得到，而第 (2) 部分可由与 [LZ25，命题 3.12] 相同的论证得到。□

定义 2.6。 准分裂型的 Cartan 双倍 iYangian ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\infty$ 是具有生成元 $\mathbb{C}$-代数 $H_i^{(r)}$， $B_i^{(s)}$，其中 $i \in \mathbb{I}$， $r \in \mathbb{Z}$，并且 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 仅满足关系 (2.3)–(2.8)（即不包括 (2.2)）。

设 Q 为 $\mathfrak{g}$ 的根格。考虑阿贝尔群（称为 $\imath$根格）

$$Q^\imath = Q/\langle \beta + \tau\beta \mid \beta \in Q \rangle. \tag{2.13}$$

对于 $\beta \in Q$，记其像为 $\beta \in Q^\imath$。代数 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 具有由 $Q^\imath$ 定义的分次，规定次数 $\deg H_i^{(r)} = 0$ 和 $\deg B_i^{(s)} = \alpha_i$。事实上，不难看出， ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 的定义关系都是齐次的。令 $T = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[Q]$ 表示特征格为 Q的环面。那么， ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 按 $Q^\imath$ 进行的分次对应于 T的一个子群 $T^\imath$ 的作用：

$$T^\imath = \{t \in T \mid \tau(t) = t^{-1}\} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[Q^\imath]. \tag{2.14}$$

由于 τ置换了 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{I}}$关于 Q的基，我们可以识别 $Q^\imath \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{I}_1} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{I}_0}$，其中 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}_1}$-因子的基为 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{I}_1}$，而 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{I}_0}$ 由 $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{I}_0}$生成。若我们将 $Q^\imath$ 除以其挠子群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{I}_0}$，就得到 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 关于 $\mathbb{Z}^{\mathbb{I}_1}$的诱导分次。这对应于元素 $\{H^{(-\langle\mu,\alpha_i\rangle+1)}{}_i \mid i \in \mathbb{I}_1\}$的伴随作用。

引理 2.7。 设 μ、 ν为余权，使得 μ和 $\nu + \tau\nu$均为偶球面。进一步假设 ν 是反支配的。则存在一个同态

$$\iota^\tau_{\mu,\nu} : {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu \longrightarrow {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu} \tag{2.15}$$

定义为

$$H_i^{(r)} \mapsto H_i^{(r-\langle\nu+\tau\nu,\alpha_i\rangle)}, \qquad B_i^{(s)} \mapsto \begin{cases} B_i^{(s-\langle\nu,\alpha_i\rangle)}, & \text{if } \langle\nu,\alpha_i\rangle \text{ is even}, \\ \sqrt{-1}B_i^{(s-\langle\nu,\alpha_i\rangle)}, & \text{if } \langle\nu,\alpha_i\rangle \text{ is odd}, \end{cases}$$

对于 $r \in \mathbb{Z}$和 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$。

特别地，若 $\tau = \mathrm{id}$，我们称 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 为分裂型移位 *iYangian*。

注2.8：若 $\mu = 0$，则 ${}^{\imath}\mathcal{Y} := {}^{\imath}\mathcal{Y}_0$ 恰为通过退化仿射分裂型与准分裂型 [LWZ25a] （对于$\tau = \mathrm{id}$）及 [LZ25] （对于 $\tau \neq \mathrm{id}$）中引入的扭 Yangian 的 Drinfeld 表示 $\imath$量子群的 Drinfeld 表示（参见 [LW21、LWZ24]）。对于单边广义 Cartan 矩阵， ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 该定义在形式上也成立 C，正如 [LWZ25b]所示。

若 μ 是支配且球的，即对于某个余权 μ_1有 $\mu = \mu_1 + \tau\mu_1$，则我们有同态

$$\iota^\tau_{\mu,-\mu_1} : {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu \longrightarrow {}^{\imath}\mathcal{Y}.$$

根据下文证明的 PBW 定理，同态 $\iota^\tau_{\mu,-\mu_1}$ 是单射，因此将 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 识别为 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$的子代数；参见定理 2.16。

对于 $i \in \mathbb{I}$，我们设

$$B_i(u) = \sum_{r>0} B_i^{(r)} u^{-r}.$$

注记 2.9。 固定 $i \in \mathbb{I}$ 使得 $c_{i,\,\tau i} = 0$，由 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 生成的 $H_i^{(r)}$、$B_i^{(s)}$、$B_{\tau i}^{(s)}$、$r \in \mathbb{Z}$ 和 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ 构成的子代数（利用引理 2.4 和定理 2.16）与 $\mathfrak{sl}_2$的一个移位 Yangian 同构。具体而言，该对应如下给出：

$$e(u) \to B_i(u), \quad f(u) \to B_{\tau i}(-u), \quad h(u) \to H_i(u).$$

若 $i = \tau i$，则 $H_i^{(r)}$、$B_i^{(s)}$、$r \in \mathbb{Z}$和 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$生成 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$的一个子代数，该子代数与秩 1 的分裂型 A 的一个移位 iYangian 同构。

对于分裂型，定义 2.2大为简化，因此将其单独列出如下很方便。

定义 2.10。 分裂型的移位 *iYangian* ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu = {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{g})$ 是具有生成元 $\mathbb{C}$-代数，其中生成元为$H_i^{(r)}$、$B_i^{(s)}$（$i \in \mathbb{I}$、$r \in \mathbb{Z}$时）以及 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$，满足以下关系，其中 r、r_1、$r_2 \in \mathbb{Z}$ 和s、s_1、$s_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$H_i^{(p)} = 0 \text{ for } p < -\langle \mu, \alpha_i \rangle \text{ and } H_i^{(-\langle \mu, \alpha_i \rangle)} = 1, \tag{2.16}$$

$$[H_i^{(r_1)}, H_j^{(r_2)}] = 0, \qquad H_i^{(2r+1)} = 0, \tag{2.17}$$

$$[H_i^{(r+2)}, B_j^{(s)}] - [H_i^{(r)}, B_j^{(s+2)}] = c_{ij}[H_i^{(r)}, B_j^{(s+1)}]_+ + \frac{1}{4}c_{ij}^2[H_i^{(r)}, B_j^{(s)}], \tag{2.18}$$

$$[B_i^{(s_1+1)}, B_j^{(s_2)}] - [B_i^{(s_1)}, B_j^{(s_2+1)}] = \frac{1}{2}c_{ij}[B_i^{(s_1)}, B_j^{(s_2)}]_+ + 2\delta_{ij}(-1)^{s_1}H_i^{(s_1+s_2)}, \tag{2.19}$$

$$[B_i^{(s_1)}, B^{(s_2)}{}_j] = 0, \qquad \text{if } c_{ij} = 0, \tag{2.20}$$

$$\mathrm{Sym}_{s_1,s_2}\big[B_i^{(s_1)}, [B_i^{(s_2)}, B_j^{(s)}]\big] = (-1)^{s_1-1}[H_i^{(s_1+s_2)}, B_j^{(s-1)}], \qquad \text{if } c_{ij} = -1. \tag{2.21}$$

注意，${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 有一个生成集

$$\big\{B_\beta^{(r)} | \beta \in \Delta^+, r > 0\big\} \cup \big\{H_i^{(2p)} | i \in \mathbb{I}_0, 2p > -\langle \mu, \alpha_i \rangle\big\} \cup \big\{H_i^{(p)} | i \in \mathbb{I}_1, p > -\langle \mu, \alpha_i \rangle\big\}. \tag{2.22}$$

引理 2.11. 设 μ 是一个偶余权，ν 是一个反占优余权。那么存在一个同态 $\iota_{\mu,\,\nu}^{\tau}$: ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu \to {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu+2\nu}$，其定义为

$$H_i^{(r)} \mapsto H_i^{(r-2\langle \nu, \alpha_i \rangle)}, \qquad B_i^{(s)} \mapsto \begin{cases} B_i^{(s-\langle \nu, \alpha_i \rangle)}, & \textit{if } \langle \nu, \alpha_i \rangle \textit{ is even}, \\ \sqrt{-1}B_i^{(s-\langle \nu, \alpha_i \rangle)}, & \textit{if } \langle \nu, \alpha_i \rangle \textit{ is odd}, \end{cases}$$

其中 $r \in \mathbb{Z}$和 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$。

注记 2.12。 对于 $\mu = 0$，${}^{\imath}\mathcal{Y}_0$正是通过分裂型仿射 [LWZ25a] 中引入的扭杨超代数，其构造方式是通过退化 $\imath$量子群。与注记 2.8类似，若 μ 是支配的，则 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$ 可识别为一个子代数 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_0$。

2.2. **PBW 基**。 取一个正根 β，并固定一个任意的有序分解 $\beta = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_\ell}$，使其分解为单根，且元素 $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \cdots [e_{i_{\ell-1}}, e_{i_\ell}] \cdots]]$ 是根子空间 $\mathfrak{g}_\beta$中的非零元素。对于任意 $r > 0$，我们定义 $\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{g})$中的一个根向量

$$B_\beta^{(r)} := \Big[B_{i_1}^{(r)}, \big[B_{i_2}^{(1)}, \cdots [B_{i_{\ell-1}}^{(1)}, B_{i_\ell}^{(1)}] \cdots \big]\Big].$$

命题 2.13。 移位 *iYangian* ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 由以下元素的有序单项式张成(2.22)。

证明。 为简化记号，在此证明中，我们按照子集 (2.22) 来确定次序，也就是说，元素 $H_i^{(s)}$ 在有序单项式中总是位于元素 $B_\beta^{(r)}$ 的右侧。

由 (2.4，通过对 r 作归纳，容易看出 $H_i^{(r)} B_j^{(s)}$ 可以改写为 $H_i^{(r)} B_j^{(s)} = B_j^{(s)} H_i^{(r)} + \sum_{p,\ p':\ p+p'<r+s} m_{p,\ p'} B^{(p')}{}_j \quad H_i^{(p)}$，其中 $m_{p,\ p'} \in \mathbb{C}$. 因此，代数 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 由以下形式的元素张成 $B^{(n_1)}{}_{j_1} B^{(n_2)}{}_{j_2} \cdots B^{(n_k)}{}_{j_k} H^{(m_1)}{}_{i_1} H^{(m_2)}{}_{i_2} \cdots H^{(m_\ell)}{}_{i_\ell}$.

接下来，我们通过设定 $B_j^{(s)} = 1$ 和 $H_i^{(r)} = 0$的次数，在 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 上定义一个过滤。令 $\mathbf{gr}\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 为相关分次空间，$B_j^{(s)}$（分别为 $B_\beta^{(r)}$）为 $B_j^{(s)}$（分别为 $B_\beta^{(r)}$）的相应像。令 $\mathbf{gr}\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu^{>0}$为由 $B_j^{(s)}$ 生成的 $\mathbf{gr}\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 的子代数。仿照 [Lu24 定理 4.2] 的证明，可以论证 $B_\beta^{(r)}$ 中的有序单项式张成 $\mathbf{gr}{}^\imath\mathcal{Y}_\mu^{>0}$。这是因为 $B_j^{(s)}$ 满足相应通常Yangian正半部的关系，因此结论可由通常Yangian的相应结果推出，参见 [Lev93]。综上，命题得证。□

注 2.14。 对于 $\mu = 0$，元素（2.22）中的有序单项式构成 ${}^\imath\mathcal{Y}_0$的一组基，参见 [LWZ25a，定理 4。12] 以及 [LZ25，定理 3。6]。

定理 2.15。 设 μ是偶球余权且反支配的。那么，由元素 (2.22) 构成的有序单项式集合是 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的一个基。

定理 2.15 的证明将在下文§2.3 中给出。我们可以将定理 2.15 加强如下。

定理 2.16 (PBW 基)。 设 μ 是任意偶球余权。

(1) 根向量 (2.22) 构成的有序单项式集合是 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的一个基。(2) 对于任意反支配的 ν，若 $\nu + \tau\nu$ 是偶球的，则移位同态$\imath^\tau_{\mu,\ \nu}$： ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu \to {}^\imath\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu}$ 在 (2.15) 中是单射。

证明。由引理2.7，我们有一个移位同态$\imath^\tau_{\mu,\ \nu}$： ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu \to {}^\imath\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu}$。我们选取 ν 使得 $\mu + \nu + \tau\nu$ 是反支配的。于是，在移位同态$\imath^\tau_{\mu,\ \nu}$下，${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 的根向量被映射为（相差一个标量倍数的）${}^\imath\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu}$ 的根向量。由命题2.13可知，${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 的根向量所构成的有序单项式集合是 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的生成集。由定理2.15可知，该集合双射地映射为 ${}^\imath\mathcal{Y}_{\mu+\nu+\tau\nu}$中的线性无关有序单项式集合（由根向量构成）。因此，该生成集也线性无关，故构成 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$的一组基，从而证明了第一个结论。第二个结论由第一个结论得出。□

2.3. **PBW 基定理2.15的证明**。我们将采用 [FKP+18, §3.12]的策略。回顾${}^{\imath}\mathcal{Y}_\infty$ 定义2.6。

定义 2.17. 代数 ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}$ 是 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\infty$ 关于关系 $H_i^{(p)}=0$ 的商，其中 $i\in\mathbb{I}$ 且 $p<0$。

我们用记号 $\widetilde{H}_i^{(r)}$ 和 $\widetilde{B}_i^{(s)}$ （亦即 $\widetilde{B}_\beta^{(s)}$ ）表示 ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}$ 的生成元。

引理 2.18. 集合中元素的有序单项式

$$\big\{\widetilde{B}_\beta^{(r)}\mid \beta\in\Delta^+, r>0\big\}\cup\big\{\widetilde{H}_i^{(2p)}\mid i\in\mathbb{I}_0, p\geqslant 0\big\}\cup\big\{\widetilde{H}_i^{(p)}\mid i\in\mathbb{I}_1, p\geqslant 0\big\}, \tag{2.23}$$

~构成 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$ 的一组基。

证明. 显然，对于 $i\in\mathbb{I}$，元素 $\widetilde{H}_i^{(0)}$ 在 ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}$ 中是中心的。可以验证映射

$${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}\to {}^{\imath}\mathcal{Y}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\xi_i\mid i\in\mathbb{I}],\quad \text{defined by}\quad \widetilde{H}_i^{(r)}\mapsto H_i^{(r)}\otimes\xi_i\xi_{\tau i},\quad \widetilde{B}_i^{(r)}\mapsto B_i^{(r)}\otimes\xi_i,$$

诱导出一个代数同态。接着仿照命题 2.13，可知~（2.23）中各元素的有序单项式生成 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$。最后，类似于定理 2.16，我们证明这个生成集双射地映到 ${}^{\imath}\mathcal{Y}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[\xi_i$ 的一个基的子集上：$i\in\mathbb{I}]$。这里还需要用到 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$ 的 PBW 定理（见注 2.14）。因此，这个生成集线性无关，故为一组基。□

推论 2.19. 若 ${}_\sim\mu$ 是反支配的，则 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$ 作为多项式环上的右模是自由的，

$$\mathcal{R}:=\mathbb{C}[\widetilde{H}_i^{(2p)},\widetilde{H}_j^{(q)}\mid i\in\mathbb{I}_0, 0\leqslant 2p\leqslant -\langle\mu,\alpha_i\rangle, j\in\mathbb{I}_1, 0\leqslant q\leqslant -\langle\mu,\alpha_j\rangle] \tag{2.24}$$

其一组基由该集合中各元素的有序单项式构成

$$\big\{\widetilde{B}_\beta^{(r)}\mid \beta\in\Delta^+, r>0\big\}\cup\big\{\widetilde{H}_i^{(2p)}\mid i\in\mathbb{I}_0, 2p>-\langle\mu,\alpha_i\rangle\big\}\cup\big\{\widetilde{H}_i^{(p)}\mid i\in\mathbb{I}_1, p>-\langle\mu,\alpha_i\rangle\big\}.$$

~进一步假设 μ 是反支配的，则存在一个满同态 $\pi:\ {}^{\imath}\mathcal{Y}\twoheadrightarrow {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu$，定义如下：

$$\widetilde{H}_i^{(r)}\to H_i^{(r)},\qquad \widetilde{B}_i^{(s)}\to B_i^{(s)}.$$

投影 π 的核是双边理想

$$\mathcal{I}_\mu:=\big\langle \widetilde{H}_i^{(2r)}-\delta_{2r,-\langle\mu,\alpha_i\rangle}, \widetilde{H}_j^{(p)}-\delta_{p,-\langle\mu,\alpha_j\rangle}\big\rangle_{2-\text{sided}}, \tag{2.25}$$

其中 $i\in\mathbb{I}_0$、$0\leqslant 2r\leqslant -\langle\mu,\ \alpha_i\rangle$、$j\in\mathbb{I}_1$、$0\leqslant p\leqslant -\langle\mu,\ \alpha_j\rangle$。

另记 $\mathcal{I}_\mu^{\text{left}}$为由 (2.25) 中相同元素生成的左理想。

引理 2.20。我们有$\mathcal{I}_\mu=\mathcal{I}_\mu^{\text{left}}$。

证明。 只需证明 $\mathcal{I}_\mu^{\text{left}}$ 也是右理想。

~回顾一下，在代数 ${}^{\imath}\mathcal{Y}$中，若 $i\in\mathbb{I}_0$，则有以下关系

$$\widetilde{H}_i^{(2r-1)}=0,\qquad [\widetilde{H}_i^{(0)},\widetilde{B}_j^{(s)}]=0,\qquad [\widetilde{H}_i^{(2)},\widetilde{B}_j^{(s)}]=2c_{ij}B_j^{(s+1)}\widetilde{H}_i^{(0)},$$

$$[\widetilde{H}_i^{(r+2)},\widetilde{B}_j^{(s)}]=[\widetilde{H}_i^{(r)},\widetilde{B}_j^{(s+2)}]+c_{ij}[\widetilde{H}_i^{(r)},\widetilde{B}_j^{(s+1)}]+\frac{1}{4}c_{ij}^2[\widetilde{H}_i^{(r)},\widetilde{B}_j^{(s)}]+2c_{ij}\widetilde{B}_j^{(s+1)}\widetilde{H}_i^{(r)}.$$

因此，对 r 进行显然的归纳可知，对于任意 $r \geqslant 1$，有

$$[\widetilde{H}_i^{(r)}, \widetilde{B}_j^{(s)}] \in \left\langle \widetilde{H}_i^{(0)}, \widetilde{H}_i^{(1)}, \ldots, \widetilde{H}_i^{(r-1)} \right\rangle^{\mathrm{left}}.$$

注意，此处 $\widetilde{H}_i^{(p)} = 0$ 在 p 为奇函数时成立。因此，对于 $1 \leqslant 2r \leqslant -\langle \mu,\ \alpha_i \rangle$，我们有

$$(\widetilde{H}_i^{(2r)} - \delta_{2r,-\langle \mu,\alpha_i\rangle})\widetilde{B}_j^{(s)} \in \widetilde{B}_j^{(s)}(\widetilde{H}_i^{(2r)} - \delta_{2r,-\langle \mu,\alpha_i\rangle}) + \mathcal{I}_\mu^{\mathrm{left}} = \mathcal{I}_\mu^{\mathrm{left}}.$$

类似的计算也适用于 $i \in \mathbb{I}_1$。这意味着右乘 $\widetilde{B}_j^{(s)}$ 保持 $\mathcal{I}_\mu^{\mathrm{left}}$不变。显然，右乘 $\widetilde{H}_j^{(r)}$ 也保持 $\mathcal{I}_\mu^{\mathrm{left}}$不变。由于代数 ${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}$ 由 $\widetilde{B}_j^{(s)}$ 和 $\widetilde{H}_j^{(r)}$ 生成，我们得出 $\mathcal{I}_\mu^{\mathrm{left}}$是一个右理想。□

定理 2.15 的证明。令 $\Gamma\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ 为如下定义的同态：将 $\widetilde{H}_i^{(2p)} - \delta_{2p,\ -\langle \mu,\ \alpha_i\rangle}$以及 $\widetilde{H}_j^{(q)} - \delta_{q,\ -\langle \mu,\ \alpha_j\rangle}$ 映为 0，其中 $i \in \mathbb{I}_0$，$0 \leqslant 2p \leqslant -\langle \mu,\ \alpha_i\rangle$，$j \in \mathbb{I}_1$和 $0 \leqslant q \leqslant -\langle \mu,\ \alpha_j\rangle$。由引理 2.20 可得，${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu$ 是右模 ${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}$ 关于同态 Γ的基变换，

$${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu = {}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathbb{C}.$$

根据推论 2.19，${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}$ 是一个关于 $\mathcal{R}$的自由右模。因此，推论 2.19中的基给出了 ${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu$ 关于 $\mathbb{C}$的一个基，证明完毕。□

3. 移位 iYangian 的 iGKLO 表示

本节将构造任意准分裂ADE型的移位 iYangian 的一族 iGKLO 表示。

3.1. 差分算子环。 固定一个支配的 τ-不变余权 λ，即 $\tau\lambda = \lambda$，以及一个偶球余权 μ，使得 $\lambda \geqslant \mu$。记

$$\lambda - \mu = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mathbf{v}_i \alpha_i^\vee, \tag{3.1}$$

其中，对于 $i \in \mathbb{I}$，$\mathbf{v}_i \in \mathbb{N}$。记 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$，令

$$\mathfrak{v}_i = \begin{cases} \mathbf{v}_i, & \text{if } \tau i \neq i \\ \lfloor \frac{1}{2}\mathbf{v}_i \rfloor, & \text{if } \tau i = i, \end{cases} \qquad \theta_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \tau i \neq i \\ \delta_{\overline{\mathbf{v}}_i,\bar{1}}, & \text{if } \tau i = i. \end{cases} \tag{3.2}$$

引入 ϑ_i，定义为

$$\vartheta_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{if } \tau i \neq i, \\ \max\{\theta_j \mid j \in \mathbb{I} \text{ and } c_{ij} \neq 0\}, & \text{if } \tau i = i. \end{cases} \tag{3.3}$$

记 $\mathbf{w}_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$。我们还令

$$\mathfrak{w}_i = \begin{cases} \mathbf{w}_i, & \text{if } \tau i \neq i \\ \lfloor \frac{1}{2}\mathbf{w}_i \rfloor, & \text{if } \tau i = i, \end{cases} \qquad \varsigma_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \tau i \neq i \\ \delta_{\overline{\mathbf{w}}_i,\bar{1}}, & \text{if } \tau i = i. \end{cases} \tag{3.4}$$

注意

$$\mathfrak{v}_{\tau i} = \mathfrak{v}_i, \qquad \mathfrak{w}_{\tau i} = \mathfrak{w}_i, \qquad \text{for all } i \in \mathbb{I}.$$

回顾 $C = (c_{ij})$ 是 Cartan 矩阵。在本文中，我们将对维数向量施加以下基本奇偶性条件$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_i)_{i\in\mathbb{I}}$；参见 (3.1)–(3.2)：

$$c_{ij}\theta_i\theta_j = 0, \qquad \text{for } i \neq j \in \mathbb{I}, \tag{3.5}$$

也就是说，至少一个 $\mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{v}_j$ 在 $i \neq j \in \mathbb{I}$ 相连时为偶数。此条件在本节中是必要的，而且后来也证明它是 [LWW25 第 5] 节中几何构造所必需的；例如参见 [LWW25 定理 5。11]。

注 3.1。设 $i \in \mathbb{I}$。若 $\theta_i = 1$，则 μ 的偶性以及奇偶性条件（3.5）推出$\mathbf{w}_i = \langle\lambda, \alpha_i\rangle$ 为偶数，因此 $\varsigma_i = 0$。

令 $\boldsymbol{z} := (z_{i,s})_{i\in{}^{\imath}\mathbb{I},1\leqslant s\leqslant\mathfrak{w}_i}$ 为形式变量，并将多项式环记为

$$\mathbb{C}[\boldsymbol{z}] = \mathbb{C}[z_{i,s}]_{i\in{}^{\imath}\mathbb{I},1\leqslant s\leqslant\mathfrak{w}_i}$$

并定义新的 $\mathbb{C}$-代数

$${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{g})[\boldsymbol{z}] := {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[\boldsymbol{z}],$$

其含有新的中心元$z_{i,s}$。考虑 $\mathbb{C}$-代数

$$\mathcal{A} := \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]\langle w_{i,r}, \eth_{i,r}^{\pm1}, (w_{i,r} \pm w_{i,r'} + m)^{-1}, (w_{i,r} + \tfrac{1}{2}m)^{-1}\rangle_{i\in{}^{\imath}\mathbb{I},1\leqslant r\neq r'\leqslant\mathfrak{v}_i,m\in\mathbb{Z}}, \tag{3.6}$$

满足以下关系

$$[\eth_{i,r}^{\pm1}, w_{j,r'}] = \pm\delta_{ij}\delta_{r,r'}\eth_{i,r}^{\pm1}, \qquad [w_{i,r}, w_{j,r'}] = [\eth_{i,r}, \eth_{j,r'}] = 0, \qquad \eth_{i,r}^{\pm1}\eth_{i,r}^{\mp1} = 1. \tag{3.7}$$

将记号 $z_{i,s}$,$w_{i,r}$, 和 $\eth_{i,r}$ 推广到所有 $i \in \mathbb{I}$ 上是方便的。首先令

$$z_{\tau i,s} = -z_{i,s}, \qquad \text{for } i \in \mathbb{I}_1 \text{ and } 1 \leqslant s \leqslant \mathfrak{w}_i. \tag{3.8}$$

我们进一步令

$$w_{\tau i,r} := -w_{i,\mathfrak{v}_i+1-r}, \qquad \eth_{\tau i,r} := \eth_{i,\mathfrak{v}_i+1-r}^{-1}, \qquad \text{for } i \in \mathbb{I}_1 \text{ and } 1 \leqslant r \leqslant \mathfrak{v}_i. \tag{3.9}$$

给定 u 中的一个首一多项式 $f(u)$，我们定义

$$f^-(u) := (-1)^{\deg f} f(-u) \tag{3.10}$$

为根与 $f(u)$ 的根互为相反数的首一多项式。对于每个 $i \in \mathbb{I}_0$，定义

$$W_i(u) = \prod_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}(u - w_{i,r}), \qquad Z_i(u) = \prod_{s=1}^{\mathfrak{w}_i}(u - z_{i,s}), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{W}_i(u) = u^{\theta_i}\prod_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}(u^2 - w_{i,r}^2), \qquad \mathbf{Z}_i(u) = u^{\varsigma_i}\prod_{s=1}^{\mathfrak{w}_i}(u^2 - z_{i,s}^2). \tag{3.12}$$

于是我们有 $\deg \mathbf{W}_i(u) = \mathbf{v}_i$ 以及 $\mathbf{W}_i(u) = \mathbf{W}_i^-(u)$，类似地，$\deg\mathbf{Z}_i(u) = \mathbf{w}_i$ 以及 $\mathbf{Z}_i^-(u) = \mathbf{Z}_i(u)$。我们还定义

$$\mathbf{W}_i^\circ(u) = \prod_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}(u^2 - w_{i,r}^2), \quad \mathbf{W}_{i,r}(u) = u^{\theta_i}(u + w_{i,r})\prod_{s=1,s\neq r}^{\mathfrak{v}_i}(u^2 - w_{i,s}^2). \tag{3.13}$$

引入

$$\overline{W}_i^-(u) := u^{\theta_i} W_i^-(u), \qquad \overline{Z}_i^-(u) := u^{\varsigma_i} Z_i^-(u). \tag{3.14}$$

为简便起见，设

$$\varkappa(u) = 1 - \frac{1}{2u}, \qquad \boldsymbol{\varkappa}(u) = 1 - \frac{1}{4u^2}. \tag{3.15}$$

对于每个 $i \in \mathbb{I}_1$，我们固定一个 $\zeta_i \in \mathbb{N}$ 的选取，使得 $1 \leqslant \zeta_i \leqslant \mathfrak{v}_i$，并将其通过以下方式延拓到 $i \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_{-1}$

$$\zeta_{\tau i} = \mathfrak{v}_i - \zeta_i.$$

对于 $i \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_{-1}$，设

$$\begin{aligned} W_i(u) &= \prod_{r=1}^{\zeta_i} (u - w_{i,r}), \qquad \mathbf{W}_i(u) = \prod_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} (u - w_{i,r}), \\ \mathbf{Z}_i(u) &= \prod_{s=1}^{\mathfrak{w}_i} (u - z_{i,s}), \qquad \mathbf{W}_{i,r}(u) = \prod_{s=1, s\neq r}^{\mathfrak{v}_i} (u - w_{i,s}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

由（3.8）和（3.9）可知，对于 $i \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_{-1}$ 有

$$\mathbf{W}_i(u) = W_i(u) W_{\tau i}^-(u), \qquad \mathbf{W}_{\tau i}(u) = \mathbf{W}_i^-(u), \qquad \mathbf{Z}_{\tau i}(u) = \mathbf{Z}_i^-(u).$$

我们选取一个首一多项式 $Z_i(u)$，对于每个 $i \in \mathbb{I}_1 \cup \mathbb{I}_{-1}$，使得

$$\mathbf{Z}_i(u) = Z_i(u) Z_{\tau i}^-(u) = (-1)^{\deg Z_{\tau i}} Z_i(u) Z_{\tau i}(-u).$$

3.2. **AI 型的 iGKLO 表示。** 首先研究分裂型 A 扭曲杨氏量的移位版本（即 AI 型）较为方便，它对应于 $\mathfrak{gl}_n$ 而非 $\mathfrak{sl}_n$。我们将通过高斯分解，使用 [LWZ25b] 中建立的 Drinfeld 型表示。在这种情况下，$\mathbb{I} = \mathbb{I}_0 = \{1, \ldots, n-1\}$。

给定 设洛朗级数 $X(u) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} X^{(r)} u^{-r}$，用 $(X(u))^\star$ 表示其主部：

$$(X(u))^\star := \sum_{r>0} X^{(r)} u^{-r}.$$

定义 3.2. 与偶余权 μ 相关联的移位 *iYangian* ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{gl}_n)$ 是由 $D_i^{(r)}$、$\widetilde{D}_i^{(\tilde{r})}$ 和 $E_j^{(s)}$ 生成的结合 $\mathbb{C}$-代数，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$、$1 \leqslant j < n$、$r \in \mathbb{Z}_{\geqslant \langle \mu, \varepsilon_i \rangle}$、$\tilde{r} \in \mathbb{Z}_{\geqslant -\langle \mu, \varepsilon_i \rangle}$和 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$满足以下关系

$$D_i^{(\langle \varepsilon_i, \mu \rangle)} = 1, \qquad [D_i(u), D_j(v)] = 0, \qquad D_i(u)\widetilde{D}_i(u) = \widetilde{D}_i(u) D_i(u) = 1, \tag{3.17}$$

$$\widetilde{D}_i(u) D_{i+1}(u) = \widetilde{D}_i(-u+i) D_{i+1}(-u+i), \tag{3.18}$$

$$[D_i(u), E_i(v)] = \frac{D_i(u)(E_i(u) - E_i(v))}{u - v} + \frac{(E_i(v) - E_i(-u+i)) D_i(u)}{u + v - i}, \tag{3.19}$$

$$[E_i(v), D_{i+1}(u)] = \frac{D_{i+1}(u)(E_i(u) - E_i(v))}{u - v} + \frac{(E_i(v) - E_i(-u+i)) D_{i+1}(u)}{u + v - i}, \tag{3.20}$$

$$[E_i(u), E_{i+1}(v)] = \frac{-E_i(u) E_{i+1}(v) + [E_i^{(1)}, E_{i+1}(v)] - [E_i(u), E_{i+1}^{(1)}]}{u - v}, \tag{3.21}$$

$$[E_i(u)\ E_j(v)] = 0, \qquad \text{如果 } c_{ij} = 0, \tag{3.22}$$

$$[E_i(u),E_i(v)]=-\frac{(E_i(u)-E_i(v))^2}{u-v}-\frac{(\widetilde{D}_i(u)D_{i+1}(u))^\star-(\widetilde{D}_i(v)D_{i+1}(v))^\star}{u+v-i}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}&\big[B_i^{(1)},[B_i(u),B_j^{(1)}]\big]+\big[B_i(u),[B_i^{(1)},B_j^{(1)}]\big]\\&\qquad=\big(B_j(-u+\tfrac{1}{2})H_i(u)-B_j(u+\tfrac{1}{2})H_i(u)\big)^\star,\quad \text{if } c_{ij}=-1,\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$D_i(u)=\sum_{r\geqslant\langle\varepsilon_i,\mu\rangle}D_i^{(r)}u^{-r},\quad \widetilde{D}_i(u)=\sum_{r\geqslant-\langle\varepsilon_i,\mu\rangle}\widetilde{D}_i^{(r)}u^{-r},\quad E_j(u)=\sum_{s>0}E_j^{(s)}u^{-s},$$

$$B_i(u)=E_i(u+\tfrac{i}{2}),\quad H_i(u)=\widetilde{D}_i(u+\tfrac{i}{2})D_{i+1}(u+\tfrac{i}{2}). \tag{3.25}$$

引理 3.3。 对于任意偶余权 μ，存在一个同态

$$\eta_\mu:{}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{sl}_n)\longrightarrow{}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{gl}_n)$$

定义为

$$B_i(u)\mapsto B_i(u),\qquad H_i(u)\mapsto H_i(u).$$

证明。 这可由与 [LWZ25b，§4] 中相同的计算得到。需要注意的是，Serre 关系（3.24）与（2.21）的表述不同。事实上，Serre 关系（3.24）对应于[LPT+25，引理 6。5], 更多细节请参见 [LPT+25，注 4。3] □

为了描述 $\mathfrak{gl}_n$ （参见 [FPT22，定理 2。35] 关于 $\mathfrak{gl}_n$的移位 Yangian），我们需要引入额外的记号。回顾 $\mathbf{W}_i(u)$ 和 $\mathbf{Z}_i(u)$ 中的多项式，它们来自 §3.1 ，并注意到 $i=\tau i$ 对所有 $i\in\mathbb{I}$。我们记

$$\vartheta_0=0,\quad \mathfrak{v}_0=0,\quad \mathfrak{v}_n=0,\quad \mathbf{W}_0(u)=\mathbf{W}_n(u)=1,$$

并任取一个

$$\mathbf{Z}_0(u)=u^{-\theta_1}\prod_{x\in\mathbb{C}}(u^2-x^2)^{m_x},$$

仅对有限多个 $x\in\mathbb{C}$ 满足 $m_x\in\mathbb{Z}, m_x\neq 0$ ，并且

$$\langle\lambda,\varepsilon_1\rangle=\theta_1-2\sum_{x\in\mathbb{C}}m_x.$$

定理 3.4。 设 μ 为偶余权。存在一个同态 $\Phi_\mu^\lambda:\ {}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{gl}_n)[z]\to\mathcal{A}$，定义为

$$\begin{aligned}D_i(u)\mapsto&\frac{\mathbf{W}_i(u-\frac{i-1}{2})}{\mathbf{W}_{i-1}(u-\frac{i}{2})}\prod_{j=0}^{i-1}\Big(\boldsymbol{\varkappa}(u-\tfrac{j}{2})^{\vartheta_j}\mathbf{Z}_j(u-\tfrac{j}{2})\Big),\\E_i(u)\mapsto&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(w_{i,r})^{-\vartheta_i}\mathbf{W}_{i-1}(w_{i,r}-\frac{1}{2})\overline{W}^-_{i+1}(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}-w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r}^{-1}\\&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(-w_{i,r})^{-\vartheta_i}\mathbf{Z}_i(w_{i,r}+\frac{1}{2})W_{i+1}(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}+w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r}\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$+\sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i+\mathfrak{v}_{i-1}+\mathfrak{v}_{i+1}}}\frac{\theta_i Z_i(0)}{(u-\frac{i}{2})\mathbf{W}_i^{\circ}(\frac{1}{2})}\prod_{j\leftrightarrow i}W_j(0).$$

~（$D_i(u)$ 的像是 $D_i(u)$ 的像的逆。）

定理3.4 将在下文§4 中证明。

公式 $E_i(u)$ 在 (3.26) 中有一定的灵活性，其中因子 $\mathbf{Z}_i(w_{i,r}+\frac{1}{2})$ 可以拆分为两个因子，分别对应前两重求和。这样，利用记号 (3.12) 和 (3.14)（另见 (3.10)），($E_i(u)$ 在 (3.26) 中的公式可以改写为

$$\begin{aligned}E_i(u)\mapsto&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(w_{i,r})^{-\vartheta_i}Z_i(w_{i,r}-\frac{1}{2})\mathbf{W}_{i-1}(w_{i,r}-\frac{1}{2})\overline{W}_{i+1}^{-}(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}-w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r}^{-1}\\&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(-w_{i,r})^{-\vartheta_i}\overline{Z}_i^{-}(w_{i,r}+\frac{1}{2})W_{i+1}(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}+w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r}\\&+\sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i+\mathfrak{v}_{i-1}+\mathfrak{v}_{i+1}}}\frac{\theta_i Z_i(0)}{(u-\frac{i}{2})\mathbf{W}_i^{\circ}(\frac{1}{2})}\prod_{j\leftrightarrow i}W_j(0).\end{aligned}$$

固定图 $\mathbb{I}$ 的一个任意定向。对于 $i,\ j\in\mathbb{I}$，若存在箭头 $j\leftrightarrow i$，则记作 $j\leftarrow i$ 或 $j\rightarrow i$。我们给出 iGKLO 的另一个版本，其假设为 $\theta_i=0$对于 i 是偶数（回顾奇偶性假设 (3.5)），其公式与传统的 Gelfand-Zeitlin 公式更为相似。本文其他部分不会用到以下定理。

定理 3.5。设 μ为偶余权，且假设对于 i，$\theta_i=0$为偶数。那么存在一个同态 $\Phi_\mu^\lambda:{}^\imath\mathcal{Y}_\mu(\mathfrak{gl}_n)[z]\to\mathcal{A}$，定义如下：

$$D_i(u)\mapsto\frac{\mathbf{W}_i(u-\frac{i-1}{2})}{\mathbf{W}_{i-1}(u-\frac{i}{2})}\prod_{j=0}^{i-1}\Big(\boldsymbol{\varkappa}(u-\tfrac{j}{2})^{\vartheta_j}\mathbf{Z}_j(u-\tfrac{j}{2})\Big),$$

$$\begin{aligned}E_i(u)\mapsto&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(w_{i,r})^{-\vartheta_i}Z_i(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}-w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\prod_{j\rightarrow i}W_j(w_{i,r}-\tfrac{1}{2})\prod_{j\leftarrow i}W_j^{-}(w_{i,r}-\tfrac{1}{2})\eth_{i,r}^{-1}\\&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(-w_{i,r})^{-\vartheta_i}\overline{Z}_i^{-}(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}+w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\prod_{j\rightarrow i}W_j^{-}(w_{i,r}+\tfrac{1}{2})\prod_{j\leftarrow i}W_j(w_{i,r}+\tfrac{1}{2})\eth_{i,r}\\&+\sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i+\mathfrak{v}_{i-1}+\mathfrak{v}_{i+1}}}\frac{\theta_i Z_i(0)}{(u-\frac{i}{2})\mathbf{W}_i^{\circ}(\frac{1}{2})}\prod_{j\leftrightarrow i}W_j(0),\qquad \textit{for } i \textit{ odd},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E_i(u)\mapsto&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(w_{i,r})^{-\vartheta_i}Z_i(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}-w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\prod_{j\rightarrow i}\mathbf{W}_j(w_{i,r}-\tfrac{1}{2})\eth_{i,r}^{-1}\\&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{\varkappa(-w_{i,r})^{-\vartheta_i}\overline{Z}_i^{-}(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{(u-\frac{i-1}{2}+w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\prod_{j\leftarrow i}\mathbf{W}_j(w_{i,r}+\tfrac{1}{2})\eth_{i,r},\qquad \textit{for } i \textit{ even}.\end{aligned}$$

~（$D_i(u)$ 的像是 $D_i(u)$的像的逆。）

证明。 证明与定理 3.4 的证明类似。关键在于检验引理4.1对新的公式仍然成立。 □

3.3. **准分裂型的 iGKLO 表示。** 回顾多项式 $\mathbf{W}_i(u)$ 和 $\mathbf{Z}_i(u)$，它们来自§3.1。固定图 $\mathbb{I}$ 的任意一个定向，使得对于每个 $i \in \mathbb{I}$，若 $i \neq \tau i$，则 $i \to j$；或者若 $\tau j \to \tau i$，则 $j \to i$。令 $\tau i \to \tau j$。

$$\wp_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i \leftarrow \tau i, \\ -1, & \text{if } i \to \tau i, \\ 0, & \text{if } c_{i,\tau i} = 0, 2. \end{cases} \tag{3.27}$$

本节将给出关于任意准分裂 ADE 型移位 iYangian 的 iGKLO 表示的主要结果。

定理 3.6。 设 $(\mathbb{I}, \tau)$ 为任意一个拟分裂 *Satake* 图。设 λ 为支配的 τ-不变余权，且 μ 为满足约束条件 (3.5) 的偶球余权，并且 $\lambda \geqslant \mu$。那么存在一个同态

$$\Phi_\mu^\lambda : {}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}] \longrightarrow \mathcal{A}$$

使得（记号见(3.1)–(3.4) 以及 (3.11)–(3.16)）

$$H_i(u) \mapsto \Big(1 + \frac{\wp_i}{4u}\Big) \frac{\boldsymbol{\varkappa}(u)^{\vartheta_i} \mathbf{Z}_i(u)}{\mathbf{W}_i(u - \frac{1}{2}) \mathbf{W}_i(u + \frac{1}{2})} \prod_{j \leftrightarrow i} \mathbf{W}_j(u), \qquad \textit{for } i \in \mathbb{I},$$

$$\begin{aligned} B_i(u) \mapsto & - \sum_{r=1}^{\zeta_i} \frac{Z_i(w_{i,r} - \frac{1}{2})}{(u + \frac{1}{2} - w_{i,r}) \mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})} \prod_{j \to i} \mathbf{W}_j(w_{i,r} - \tfrac{1}{2}) \eth_{i,r}^{-1} \\ & - \sum_{r=1}^{\zeta_{\tau i}} \frac{Z_i^-(w_{\tau i,r} + \frac{1}{2})}{(u + \frac{1}{2} + w_{\tau i,r}) \mathbf{W}_{\tau i,r}(w_{\tau i,r})} \prod_{\tau j \leftarrow \tau i} \mathbf{W}_{\tau j}(w_{\tau i,r} + \tfrac{1}{2}) \eth_{\tau i,r}, \qquad \textit{for } i \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_0, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} B_i(u) \mapsto & - \sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\boldsymbol{\varkappa}(w_{i,r})^{-\vartheta_i} Z_i(w_{i,r} - \frac{1}{2})}{(u + \frac{1}{2} - w_{i,r}) \mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})} \prod_{j \to i} \mathbf{W}_j(w_{i,r} - \tfrac{1}{2}) \prod_{\substack{j \leftarrow i \\ j \in \mathbb{I}_0}} \overline{W}_j^-(w_{i,r} - \tfrac{1}{2}) \eth_{i,r}^{-1} \\ & - \sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\boldsymbol{\varkappa}(-w_{i,r})^{-\vartheta_i} \overline{Z}_i^-(w_{i,r} + \frac{1}{2})}{(u + \frac{1}{2} + w_{i,r}) \mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})} \prod_{\substack{j \to i \\ j \in \mathbb{I}_{\pm 1}}} \mathbf{W}_j(w_{i,r} + \tfrac{1}{2}) \prod_{\substack{j \leftarrow i \\ j \in \mathbb{I}_0}} W_j(w_{i,r} + \tfrac{1}{2}) \eth_{i,r} \\ & + \sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i + \sum_{i \leftrightarrow j \in {}^\imath\mathbb{I}} \mathfrak{v}_j}} \frac{\theta_i Z_i(0)}{u \mathbf{W}_i^\circ(\frac{1}{2})} \prod_{j \leftrightarrow i} W_j(0), \qquad \textit{for } i \in \mathbb{I}_0. \end{aligned}$$

定理3.6中除准分裂型 A 之外的情形$_{2n}$ 在§4.4 的证明与定理3.4类似。事实上，在 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 在 Φ_μ^λ 下的关系验证，要么与普通平移杨扬氏相似，要么与分裂型的移位 iYangian 相似，参见备注2.9。

对于准分裂型 A$_{2n}$，除 Serre 关系 (2.9) 外，所有关系都可以用与其他类型相同的方法验证。我们将详细验证关系 (2.5)，其中 $i = n$

以及 $j = n+1$ 以及 4.5 中的 Serre 关系 (§。请注意，上述定理中针对 $1 + \frac{\wp_i}{4u}$ 的额外因子 $H_i(u)$ 与 [LZ25,(6.24)] 相符。

注记 3.7。 也可以为分裂 BCFG 型的移位 iYangian 构造类似的 iGKLO 表示，参见 [LWZ25a]。证明这一点需要更深入地理解复杂的 Serre 关系。

3.4. **截断移位 i 杨扬子代数**。 受普通截断移位杨超代数的定义启发 [BFN19, §B(viii)] 以及 [KWWY14, §4。3],我们作如下定义。

定义 3.8. 设 λ 为一个支配的 τ-不变余权，且 μ 为一个偶球余权，满足$\lambda \geqslant \mu$。截断移位 i 杨扬子代数（TSTY）记作 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}^{\lambda}$，是由 iGKLO 同态 Φ_{μ}^{λ} : ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}] \to \mathcal{A}$的像给出的 $\mathbb{C}$-代数。

对 $i \in \mathbb{I}$，在 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}][\![u^{-1}]\!]$中定义一个“Cartan”级数 $\mathsf{A}_i(u)$，如下:

$$H_i(u) = \Big(1 + \frac{\wp_i}{4u}\Big) \frac{\boldsymbol{\varkappa}(u)^{\vartheta_i} \mathbf{Z}_i(u) \prod_{j \leftrightarrow i} u^{\mathbf{v}_j}}{(u^2 - \frac{1}{4})^{\mathbf{v}_i}} \frac{\prod_{j \leftrightarrow i} \mathsf{A}_j(u)}{\mathsf{A}_i(u - \frac{1}{2})\mathsf{A}_i(u + \frac{1}{2})}, \tag{3.28}$$

其中 $\wp_i$ 定义于（3.27）中。展开级数 A_i（u）可得到一族 GKLO 型的“Cartan”元素 $\mathsf{A}_i^{(r)}$，它们属于 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}]$，其中 $r > 0$， $i \in \mathbb{I}$:

$$\mathsf{A}_i(u) = 1 + \sum_{r>0} \mathsf{A}_i^{(r)} u^{-r}. \tag{3.29}$$

于是我们有以下简单引理。

引理 3.9。 定理 Φ_{μ}^{λ} 中的 *iGKLO* 同态*3.6* 将

$$\mathsf{A}_i(u) \mapsto u^{-\mathbf{v}_i} \mathbf{W}_i(u).$$

定义元素 $\mathsf{B}_i^{(r)}$，其中 $i \in \mathbb{I}$， $r > 0$，定义如下

$$\mathsf{B}_i(u) := u^{\mathbf{v}_i - \theta_i} (u + \tfrac{1}{2})^{\theta_i} B_i(u + \tfrac{1}{2}) \mathsf{A}_i(u) = u^{\mathbf{v}_i} \sum_{r>0} \mathsf{B}_i^{(r)} u^{-r}, \tag{3.30}$$

参见 [LPT+25， （11.5）]。不难看出，$\mathsf{A}_i^{(r)}$ 和$\mathsf{B}_i^{(r)}$ 对于 $i \in \mathbb{I}$， $r > \mathbf{v}_i$ 均属于同态Φ_{μ}^{λ}的核。受普通截断移位 Yangian 的情形启发[BFN19，备注 B。21]以及 [KWWY14，定理 4。10], 我们提出如下猜想。

猜想 3.10。 存在一个同构

$${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}^{\lambda} \cong {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}] / \langle \mathsf{A}_i^{(r)},\ \delta_{\bar{\mathbf{v}}_j, \bar{0}} \mathsf{B}_j^{(s)} \mid i \in \mathbb{I}, j \in \mathbb{I}_0, r > \mathbf{v}_i, s > \mathbf{v}_j \rangle,$$

由满同态 Φ_{μ}^{λ}诱导。

注记 3.11. 在普通截断移位 Yangian 的类似（猜想性）表示中，不需要 $\mathsf{B}_j^{(r)}$ 这样的元素。在我们当前的扭曲情形中，由于级数 $\mathsf{A}_i(u)$ 对于 $i \in \mathbb{I}_0$总是偶数，因此我们需要对额外元素取商$\mathsf{B}_i^{(r)}$，其中 $r > \mathbf{v}_i$ 当 $i \in \mathbb{I}_0$ 且 $\mathbf{v}_i$ 为偶数时，参见[LPT+25， （11.6）]。

考虑由所有级数 $\mathsf{A}_i(u)$的系数在 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 上生成的子代数 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$ 。（等价地，该子代数由级数 $H_i(u)$的系数在 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$ 上生成。）利用引理 3.9可知，这个交换子代数是一个多项式环，其在 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$上的代数独立生成元如下：

$$\{\mathsf{A}_i^{(2r)} : i \in \mathbb{I}_0,\ 1 \leqslant 2r \leqslant \mathbf{v}_i\} \cup \{\mathsf{A}_i^{(r)} : i \in \mathbb{I}_1, 1 \leqslant r \leqslant \mathbf{v}_i\}. \tag{3.31}$$

我们称之为*Gelfand-Tsetlin* 子代数，它属于 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$；在许多情况下，它是 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$的极大交换子代数。我们预期，研究相应的 Gelfand-Tsetlin 模范畴会很有趣，这与 [Web24]类似。然而，我们注意到，代数 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 显然并不属于 [Web24], 的研究范畴，尤其是尚不清楚 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 是否通常是 Futorny-Ovsienko 意义下的伽罗瓦序 [FO10]。

注意， $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$是 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$的中心子代数。

命题 3.12。代数${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 的中心是多项式代数 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$。

证明。我们的证明受到 [FO10，定理 4.1(4)]的启发。首先注意，每个元素 $x \in {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$ 都可以唯一地写成和 $x = \sum x_{\boldsymbol{a}} \eth^{\boldsymbol{a}}$，其中我们使用了多重指标记号$\eth^{\boldsymbol{a}} = \prod_{i,\ r} \eth^{a_{i,\ r}}_{i\ r}$，其中所有$a_{i,\ r} \in \mathbb{Z}$，且

$$x_{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}](w_{i,r} : i \in {}^{\imath}\mathbb{I}, 1 \leqslant r \leqslant \mathfrak{v}_i).$$

我们将把 $x_{\boldsymbol{a}}$ 称为 x的系数，并从现在起假设 x 在 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$中是中心的。

我们首先断言 $x_{\boldsymbol{a}} = 0$ 对所有非平凡的 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$都成立，因此 $x = x_{\mathbf{0}} \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]\ (w_{i,\ r})$ 。事实上，设存在某个 $x_{\boldsymbol{a}} \neq 0$。应用 [FO10、引理 2.1(4)], 可知存在一个元素$f \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}][\mathsf{A}_i^{(r)}]$ 使得 $\eth^{\mathbf{a}} f \neq f \eth^{\mathbf{a}}$。但于是 $fx \neq xf$：左侧的 $\eth^{\boldsymbol{a}}$的系数为$fx_{\boldsymbol{a}}$，而右侧的系数为 $(\eth^{\boldsymbol{a}} f \eth^{-\boldsymbol{a}})\ x_{\boldsymbol{a}} \neq fx_{\boldsymbol{a}}$。

我们接下来断言事实上 $x \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$。为简化证明中的记号，不妨将 $x = x(w_{i,\ r})$ 看作变量 $w_{i,\ r}$的函数。对于任意 $j \in {}^{\imath}\mathbb{I}$，考虑交换子 $[\Phi_\mu^\lambda(B_j(u))\ x] = 0$。除以某个非零有理函数外，左侧 $\eth_{j,\ s}$ 的系数为$x(w_{i,\ r} + \delta_{i,\ j}\delta_{r,\ s}) - x(w_{i,\ r})$。这对所有 j，s都必须为零；由于 x 是关于变量 $w_{i,\ r}$的有理函数，唯一可能性是 x为常数。换言之， $x \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$，正如所断言的那样。□

注3.13。类似的论证可证明

$${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda \cap \mathbb{C}[\boldsymbol{z}](w_{i,r} : i \in {}^{\imath}\mathbb{I}, 1 \leqslant r \leqslant \mathfrak{v}_i)$$

是 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^\lambda$的极大交换子代数，参见 [FO10，定理 4.1(3)]。

4. iGKLO同态定理的证明

本节将证明定理3.4和3.6。我们将在§4.1–§4.3中证明定理3.4。随后，我们将在§4.4中证明定理3.6，但不包括准分裂型 A_{2n}，并在§4.5中完成剩余情形的证明。

显然，在 $D_i(u)$ 下， Φ_μ^λ 的像具有如下形式 $u^{-\langle \mu,\ \varepsilon_i \rangle} +$(u中的低阶项)。我们需要验证关系（3.17）–（3.24）在映射 Φ_μ^λ下保持不变。关系（3.17）、（3.18）和（3.22）显然成立。

我们将分别验证其余关系（3.19）–（3.21）、（3.23）和（3.24。

4.1. **关系** （3.19）–（3.21）。 我们先从关系（3.19）开始。为简化记号，我们写作

$$D_i(u) \mapsto \mathbf{W}_i(u-\tfrac{i-1}{2})\varphi_i(u),$$
$$E_i(u) \mapsto -\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{u-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\eth_{i,r}^{-1} - \sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\xi^-_{i,r}(w_{i,r})}{u-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\eth_{i,r} + \frac{\xi^0_i}{u-\frac{i}{2}}.$$

函数 $\varphi_i(u)$、$\xi^{\pm}_{i\,r,}(w_{i,\,r})$以及 ξ^0_i可直接从定理 3.4中的公式读出，我们不需要它们的显式形式。令

$$\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u) = u^{\theta_i}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{\mathfrak{v}_i}(u^2-w_{i,s}^2). \tag{4.1}$$

显然， $[D_i(u)\ E_i(v)]$ 在 Φ^λ_μ 下的像为

$$\begin{aligned}
&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\big((u-\tfrac{i-1}{2})^2-w_{i,r}^2\big)\eth_{i,r}^{-1}\\
&-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^-_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\big((u-\tfrac{i-1}{2})^2-w_{i,r}^2\big)\eth_{i,r}\\
&+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\big((u-\tfrac{i-1}{2})^2-(w_{i,r}-1)^2\big)\eth_{i,r}^{-1}\\
&+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^-_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\big((u-\tfrac{i-1}{2})^2-(w_{i,r}+1)^2\big)\eth_{i,r}\\
=&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\big(2w_{i,r}-1\big)\eth_{i,r}^{-1}\\
&\qquad -\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^-_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\big(1+2w_{i,r}\big)\eth_{i,r}.
\end{aligned}$$

另一方面， $\frac{1}{u-v}D_i(u)(E_i(u)\ -\ E_i(v))$在 Φ^λ_μ 下的像化简为

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\big(u-\tfrac{i-1}{2}+w_{i,r}\big)\eth_{i,r}^{-1}\\
+&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^-_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\big(u-\tfrac{i-1}{2}-w_{i,r}\big)\eth_{i,r} - \frac{\mathbf{W}_i(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^0_i}{(u-\frac{i}{2})(v-\frac{i}{2})}
\end{aligned}$$

而 $\frac{1}{u+v-i}(E_i(v)\ -\ E_i(-u+i))D_i(u)$ 在 Φ^λ_μ 下的像可化简为

$$-\sum_{r=1}^{a_i} \frac{\mathbf{W}^{\diamond}_{i,r}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi^+_{i,r}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}-w_{i,r}}\big(u-\tfrac{i-1}{2}-(w_{i,r}-1)\big)\eth_{i,r}^{-1}$$

$$-\sum_{r=1}^{a_i}\frac{\mathbf{W}_{i,r}^{\diamond}(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi_{i,r}^{-}(w_{i,r})}{v-\frac{i-1}{2}+w_{i,r}}\big(u-\tfrac{i-1}{2}+(w_{i,r}+1)\big)\eth_{i,r}+\frac{\mathbf{W}_i(u-\frac{i-1}{2})\varphi_i(u)\xi_i^0}{(u-\frac{i}{2})(v-\frac{i}{2})}.$$

综上上述公式可知，(3.19) 右端的像与左端的像相同，从而证明了关系 (3.19)。

的证明　　关系（3.20）的证明非常相似，最终归结为以下恒等式　　：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(u-\frac{i+1}{2})^2-w_{i,r}^2}-\frac{1}{(u-\frac{i+1}{2})^2-(w_{i,r}\pm 1)^2}\\=&\frac{1}{\big((u-\frac{i+1}{2})^2-w_{i,r}^2\big)\big(u-\frac{i-1}{2}\pm w_{i,r}\big)}-\frac{1}{\big((u-\frac{i+1}{2})^2-(w_{i,r}-1)^2\big)\big(u-\frac{i+1}{2}\mp w_{i,r}\big)}.\end{aligned}$$

为简化下一步中的记号，按照 [GKLO05]，我们设 $w_{i,\,0}=\frac{1}{2}$ 并引入　-

$$\chi_{i,0}^{+}=\sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i+\mathfrak{v}_{i-1}+\mathfrak{v}_{i+1}}}\frac{\theta_i Z_i(0)}{\mathbf{W}_i^{\circ}(w_{i,0})}\prod_{j\leftrightarrow i}W_j(0), \tag{4.2}$$

$$\chi_{i,r}^{+}=-\frac{\varkappa(w_{i,r})^{-\vartheta_i}\mathbf{W}_{i-1}(w_{i,r}-\frac{1}{2})\overline{W}_{i+1}^{-}(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r}^{-1},$$

$$\chi_{i,r}^{-}=-\frac{\varkappa(-w_{i,r})^{-\vartheta_i}W_{i+1}(w_{i,r}+\frac{1}{2})\mathbf{Z}_i(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})}\eth_{i,r},\qquad \text{for } 1\leqslant r\leqslant\mathfrak{v}_i.$$

注意，$\chi_{i\,,\,0}^{+}=0$ 当 $\theta_i=0$时。由（3.25）和（3.26）可推出

$$\Phi_{\mu}^{\lambda}(B_i(u))=\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi_{i,r}^{-}, \tag{4.3}$$

$$\Phi_{\mu}^{\lambda}(B_i^{(1)})=\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\chi_{i,r}^{+}+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\chi_{i,r}^{-}.$$

现在我们继续证明关系（3.21），并令 $j=i+1$。注意，根据（$\theta_i\theta_j=0$（3.5），不失一般性，我们假设 $\theta_j=0$。

引理 4.1. 令 $j=i+1$。我们有

$$\begin{aligned}(\pm w_{i,r}\mp w_{i,s}-1)\chi_{i,r}^{\pm}\chi_{i,s}^{\pm}&=(\pm w_{i,r}\mp w_{i,s}+1)\chi_{i,s}^{\pm}\chi_{i,r}^{\pm},\qquad &&\text{if } r\neq s,\\(\pm w_{i,r}\pm w_{i,s}-1)\chi_{i,r}^{\pm}\chi_{i,s}^{\mp}&=(\pm w_{i,r}\pm w_{i,s}+1)\chi_{i,s}^{\mp}\chi_{i,r}^{\pm},\qquad &&\text{if } r\neq s,\\(\pm w_{i,r}\mp w_{j,s}+\tfrac{1}{2})\chi_{i,r}^{\pm}\chi_{j,s}^{\pm}&=(\pm w_{i,r}\mp w_{j,s}-\tfrac{1}{2})\chi_{j,s}^{\pm}\chi_{i,r}^{\pm},\\(\pm w_{i,r}\pm w_{j,s}+\tfrac{1}{2})\chi_{i,r}^{\pm}\chi_{j,s}^{\mp}&=(\pm w_{i,r}\pm w_{j,s}-\tfrac{1}{2})\chi_{j,s}^{\mp}\chi_{i,r}^{\pm},\end{aligned}$$

其中 $r=0$可取为 $\chi_{i\,r,}^{+}$。

证明。 由直接计算可得。 □

注记 4.2。 或者，也可以设置 $w_{i,\,0}=-\frac{1}{2}$ 并引入 -

$$\chi_{i,0}^{-}=\sqrt{(-1)^{\mathfrak{w}_i+\mathfrak{v}_{i-1}+\mathfrak{v}_{i+1}}}\frac{\theta_i Z_i(0)}{\mathbf{W}_i^{\circ}(w_{i,0})}\prod_{j\leftrightarrow i}W_j(0).$$

那么上述引理对 $\chi_{i,r}^{-}$ 同样成立，其中 $r=0$。

关系（3.21）可等价地写为

$$\begin{aligned}&(u-v+\tfrac{1}{2})B_i(u)B_j(v)+B_i(u)B_j^{(1)}-B_i^{(1)}B_j(v)\\=&(u-v-\tfrac{1}{2})B_j(v)B_i(u)+B_j^{(1)}B_i(u)-B_j(v)B_i^{(1)}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

在 Φ_μ^λ 下，（4.4）左端的像可化简为

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\left(\frac{w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(v+\frac{1}{2}-w_{j,s})}\chi_{i,r}^{+}\chi_{j,s}^{+}+\frac{w_{i,r}+w_{j,s}+\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(v+\frac{1}{2}+w_{j,s})}\chi_{i,r}^{+}\chi_{j,s}^{-}\right)\\+&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\left(\frac{-w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(v+\frac{1}{2}-w_{j,s})}\chi_{i,r}^{-}\chi_{j,s}^{+}+\frac{-w_{i,r}+w_{j,s}+\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(v+\frac{1}{2}+w_{j,s})}\chi_{i,r}^{-}\chi_{j,s}^{-}\right)\end{aligned}$$

而在 Φ_μ^λ 下，（4.4）左端的像为

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\left(\frac{w_{i,r}-w_{j,s}-\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(v+\frac{1}{2}-w_{j,s})}\chi_{j,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}+\frac{w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(v+\frac{1}{2}+w_{j,s})}\chi_{j,s}^{-}\chi_{i,r}^{+}\right)\\+&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\left(\frac{-w_{i,r}-w_{j,s}-\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(v+\frac{1}{2}-w_{j,s})}\chi_{j,s}^{+}\chi_{i,r}^{-}+\frac{-w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{1}{2}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(v+\frac{1}{2}+w_{j,s})}\chi_{j,s}^{-}\chi_{i,r}^{-}\right).\end{aligned}$$

显然，根据引理 4.1，这两个像相同，从而完成了对关系（3.21）的验证。

4.2. **关系** （3.23）。 从现在起，令 $\tilde{u}_i=u-\frac{i-1}{2}$ 且 $\tilde{v}_i=v-\frac{i-1}{2}$。于是有

$$E_i(u)\mapsto\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}+\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{u}_i+w_{i,s}}\chi_{i,s}^{-}.$$

为简便起见，我们设

$$\Omega_i(u):=\frac{\boldsymbol{\varkappa}(u-\frac{1}{2})^{\vartheta_i}\mathbf{W}_{i-1}(u-\frac{1}{2})\mathbf{W}_{i+1}(u-\frac{1}{2})\mathbf{Z}_i(u-\frac{1}{2})}{\mathbf{W}_i(u)\mathbf{W}_i(u-1)}.\tag{4.5}$$

这里 $\Omega_i(u)=\Omega_i(-u+1)$。此外，若 $\theta_i=\vartheta_i$，则

$$\Omega_i(u)=\frac{\mathbf{W}_{i-1}(u-\frac{1}{2})\mathbf{W}_{i+1}(u-\frac{1}{2})\mathbf{Z}_i(u-\frac{1}{2})}{(u-\frac{1}{2})^{2\theta_i}\mathbf{W}_i^{\circ}(u)\mathbf{W}_i^{\circ}(u-1)}.\tag{4.6}$$

为验证关系（3.23），只需检查以下内容：

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{u}_i+w_{i,r}}\chi_{i,r}^{-},\sum_{s=0}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{v}_i-w_{i,s}}\chi_{i,s}^{+}+\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{\tilde{v}_i+w_{i,s}}\chi_{i,s}^{-}\right]\\=&-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\left(\sum_{r=0}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi_{i,r}^{+}+\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,s})(\tilde{v}_i+w_{i,s})}\chi_{i,s}^{-}\right)^2\\&-\frac{1}{\tilde{u}_i+\tilde{v}_i-1}\Big(\big(\Omega_i(\tilde{u}_i)\big)^{\star}-\big(\Omega_i(\tilde{v}_i)\big)^{\star}\Big).\end{aligned}\tag{4.7}$$

我们将所有差分算子 $\chi_i^{\pm}$、$_r$ 移至右侧，然后比较不含差分算子的项，以及含有$\chi_i^{\pm}$、$_r\chi_i^{\pm}$、$_s$ 和 $\chi_i^{\pm}$、$_r\chi_i^{\mp}{}_s$、的项。

4.2.1. 涉及 $\chi_i^{\pm}$、$_r\chi_i^{\pm}$、$_s$ 和 $\chi_i^{\pm}$、$_r\chi_i^{\mp}$、$_s$ $(r\neq s)$ 的项。固定 $0\leqslant r$、$s\leqslant \mathfrak{v}_i$ 使得 $r\neq s$。我们汇集含有 χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}$、$_s$ 和 χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}{}_s$ 的项。等式（4.7）左端中含有 χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}$、$_s$ 和 χ_i^{+}、$_s\chi_i^{+}$、$_r$ 的项为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,s})}\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,s}^{+}-\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,s})}\chi_{i,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}\\&\qquad+\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,s})(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi_{i,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}-\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,s})(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,s}^{+}\\&=\frac{-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\big((w_{i,r}-w_{i,s})\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,s}^{+}+(w_{i,s}-w_{i,r})\chi_{i,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}\big)}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,s})(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,s})}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

该项　中含有χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}$、$_s$和χ_i^{+}、$_s\chi_i^{+}$、$_r$的右端（4.7）为

$$\frac{-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\big(\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,s}^{+}+\chi_{i,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}\big)}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,s})(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,s})}.\tag{4.9}$$

要证明（4.8）=（4.9），等价于证明

$$\frac{-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\big((w_{i,r}-w_{i,s}-1)\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,s}^{+}+(w_{i,s}-w_{i,r}-1)\chi_{i,s}^{+}\chi_{i,r}^{+}\big)}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,s})(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,s})}=0,\tag{4.10}$$

这立即由引理4.1得到。

为证明两边含有 $\chi_i^{\pm}{}_r\chi_i^{\pm}{}_s$ 和 $\chi_i^{\pm}{}_s\chi_i^{\pm}{}_r$（分别为 $\chi_i^{\pm}{}_r\chi_i^{\mp}{}_s$ 和 $\chi_i^{\mp}{}_s\chi_i^{\pm}{}_r$,）的项相匹配，计算过程几乎完全相同。事实上，这基本归结为证明恒等式 (4.10)，其中 $w_{i,r}$ 和 $w_{i,s}$ 分别被 $\pm w_{i,r}$ 和 $\pm w_{i,s}$（分别为 $\pm w_{i,r}$ 和 $\mp w_{i,s}$）替换。注意，我们允许 $r=0$ 出现在 $\chi_i^{+}{}_r$, 中。

4.2.2. 涉及 $\chi_i^{\pm}$、$_r\chi_i^{\pm}$、$_r$ $(r\geqslant 1)$. 等项。来自 χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}$、$_r$ 从 (4.7) 左端的项由下式给出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}\frac{1}{\tilde{v}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}-\frac{1}{\tilde{v}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}}\chi_{i,r}^{+}\\&=\Big(\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r}+1)}-\frac{1}{(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,r}+1)}\Big)\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,r}^{+}\\&=\frac{-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,r}+1)(\tilde{v}_i-w_{i,r}+1)}\chi_{i,r}^{+}\chi_{i,r}^{+}\end{aligned}\tag{4.11}$$

而含有 χ_i^{+}、$_r\chi_i^{+}$、$_r$ 从 (4.7) 右端的项由下式给出

$$-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi_{i,r}^{+}\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi_{i,r}^{+}.\tag{4.12}$$

显然 (4.11) =(4.12)，因为 χ_i^{+}、$_r$ 包含 $\eth_{i\,r}^{-1}$、。

关于χ_i^{-}，$_r\chi_i^{-}$，$_r$ 的情形可归结为类似的计算，只需将$w_{i,\ r}$ 替换为$-w_{i,\ r}$。

4.2.3. 常数项。 接下来，我们比较不含差分算子的项。我们将这类项称为 常数项。(4.7) 的左端常数项为

$$\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i+w_{i,r}-1)}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r}-1)}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}$$
$$-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i+w_{i,r}-1)}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}-\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i+w_{i,r})}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}.$$

（4.7）右端的常数项为

$$-(\tilde{u}_i-\tilde{v}_i)\Big(\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r})(\tilde{u}_i+w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i+w_{i,r}-1)}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}$$
$$+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r})(\tilde{v}_i+w_{i,r})(\tilde{u}_i-w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i-w_{i,r}-1)}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}$$
$$+\frac{1}{(\tilde{u}_i-\frac{1}{2})^2(\tilde{v}_i-\frac{1}{2})^2}\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0}\Big)-\frac{1}{\tilde{u}_i+\tilde{v}_i-1}\Big(\big(\Omega_i(\tilde{u}_i)\big)^\star-\big(\Omega_i(\tilde{v}_i)\big)^\star\Big),$$

这可以进一步简化为

$$\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(2w_{i,r}-1)}\Big(\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i+w_{i,r}-1)}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}-\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}\Big)$$
$$+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{(2w_{i,r}+1)}\Big(\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i+w_{i,r})}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}-\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r}-1)}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}\Big)$$
$$-\frac{1}{\tilde{u}_i+\tilde{v}_i-1}\Big(\big(\Omega_i(\tilde{u}_i)\big)^\star-\big(\Omega_i(\tilde{v}_i)\big)^\star-\frac{1}{(\tilde{u}_i-\frac{1}{2})^2}\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0}+\frac{1}{(\tilde{v}_i-\frac{1}{2})^2}\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0}\Big).$$

因此，我们需要证明

$$-\frac{1}{\tilde{u}_i+\tilde{v}_i-1}\Big(\big(\Omega_i(\tilde{u}_i)\big)^\star-\big(\Omega_i(\tilde{v}_i)\big)^\star-\frac{1}{(\tilde{u}_i-\frac{1}{2})^2}\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0}+\frac{1}{(\tilde{v}_i-\frac{1}{2})^2}\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0}\Big)$$
$$=\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{2(w_{i,r}-1)}{(2w_{i,r}-1)}\Big(\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r})(\tilde{v}_i+w_{i,r}-1)}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}-\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i-w_{i,r})}\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}\Big)$$
$$+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{2(w_{i,r}+1)}{(2w_{i,r}+1)}\Big(\frac{1}{(\tilde{u}_i+w_{i,r})(\tilde{v}_i-w_{i,r}-1)}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}-\frac{1}{(\tilde{u}_i-w_{i,r}-1)(\tilde{v}_i+w_{i,r})}\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}\Big).$$

Set

$$\mathbf{W}^\circ_{i,r}=(u+w_{i,r})\prod_{1\leqslant s\leqslant\mathfrak{v}_i}^{s\neq r}(u^2-w^2_{i,s}).$$

注意，对于 $r\geqslant 1$,

$$\eth^{\pm1}_{i,r}\mathbf{W}^\circ_{i,r}(w_{i,r})=\mathbf{W}^\circ_{i,r}(w_{i,r}\pm1)\frac{2(w_{i,r}\pm1)}{2w_{i,r}\pm1}\eth^{\pm1}_{i,r},$$

因此我们有

$$\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r} = -\frac{(2w_{i,r}-1)}{2(w_{i,r}-1)}\mathrm{Res}_{u=w_{i,r}}\Omega_i(u) = \frac{(2w_{i,r}-1)}{2(w_{i,r}-1)}\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}+1}\Omega_i(u), \tag{4.13}$$

$$\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r} = -\frac{(2w_{i,r}+1)}{2(w_{i,r}+1)}\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}}\Omega_i(u) = \frac{(2w_{i,r}+1)}{2(w_{i,r}+1)}\mathrm{Res}_{u=w_{i,r}+1}\Omega_i(u), \tag{4.14}$$

其中，$\mathrm{Res}_{u=a}f(u)$ 表示 $f(u)$ 在 $u=a$ 处的留数。

注意，由（4.2），我们有

$$\chi^+_{i,0}\chi^+_{i,0} = \frac{\theta_i\mathbf{W}_{i-1}(0)\mathbf{W}_{i+1}(0)\mathbf{Z}_i(0)}{\mathbf{W}^\circ_i(\frac{1}{2})\mathbf{W}^\circ_i(\frac{1}{2})}. \tag{4.15}$$

因此，为了证明 两边的常数项相等，证明（4.7）中的常数项相等，只需证明 at

$$\big(\Omega_i(\tilde{v}_i)\big)^\star - \big(\Omega_i(\tilde{u}_i)\big)^\star$$

等于

$$\begin{aligned}
&\theta_i\bigg(\frac{1}{(\tilde{v}_i-\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{(\tilde{u}_i-\frac{1}{2})^2}\bigg)\frac{\mathbf{W}_{i-1}(0)\mathbf{W}_{i+1}(0)\mathbf{Z}_i(0)}{\mathbf{W}^\circ_i(\frac{1}{2})\mathbf{W}^\circ_i(-\frac{1}{2})}\\
&+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}+1}\Omega_i(u)\bigg(\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}}+\frac{1}{\tilde{v}_i+w_{i,r}-1}-\frac{1}{\tilde{u}_i+w_{i,r}-1}-\frac{1}{\tilde{v}_i-w_{i,r}}\bigg)\\
&+\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\mathrm{Res}_{u=w_{i,r}+1}\Omega_i(u)\bigg(\frac{1}{\tilde{u}_i+w_{i,r}}+\frac{1}{\tilde{v}_i-w_{i,r}-1}-\frac{1}{\tilde{u}_i-w_{i,r}-1}-\frac{1}{\tilde{v}_i+w_{i,r}}\bigg);
\end{aligned}$$

这可由以下标准结果推出，参见 [KWWY14，定理 4 的证明5] 以及 [BFN19，附录 B.52]。

引理 4.3。(1) 对于任意有理函数 $\gamma(u)$，其简单极点为 $\{a_k\}\subset\mathbb{C}$，并且在 $u=\infty$ 处可能有高阶极点，我们有

$$\gamma(u)^\star = \sum_k \frac{1}{u-a_k}\mathrm{Res}_{u=a_k}\gamma(u).$$

(2) 设 $\theta_i\in\{0,1\}$ 如前。对于任意偶有理函数 $\gamma(u)$，其简单极点为 $\{a_k\}\subset\mathbb{C}^\times$，并且在 $u=\infty$ 处可能有高阶极点，我们有

$$\big(u^{-2\theta_i}\gamma(u)\big)^\star = \frac{1}{u^2}\theta_i\gamma(0)+\sum_k\frac{1}{u-a_k}\mathrm{Res}_{u=a_k}u^{-2\theta_i}\gamma(u).$$

事实上，我们有两种情况。如果 $\theta_i=\vartheta_i$，则所需等式由引理 4.3 和 (4.6) 得出。如果 $\theta_i\neq\vartheta_i$，则只有在 $\theta_i=0$ 和 $\vartheta_i=1$时才会发生。因此 $\max\{\theta_{i-1},\theta_{i+1}\}=1$，且 $\mathbf{W}_{i-1}(u)$ 和 $\mathbf{W}_{i+1}(u)$ 中至少有一个是奇函数。由此可知，$\Omega_i(u)$ 在 $u=\frac{1}{2}$ 处至多有一个简单极点。然而，$\Omega_i(u+\frac{1}{2})$ 是偶函数，因此 $\Omega_i(u)$ 在 $u=\frac{1}{2}$ 处必为正则。

4.3. **Serre 关系 (3.24).** 我们对 $j = i+1$ 的情况进行证明；另一种情况 $j = i-1$ 类似。本节余下部分中，为了简化公式，有时我们用 ${}^{p}\chi_i^{+}{}_{,q}^{\ r}$ 表示 ~~$\frac{p}{q}\chi_i^+{}_{,r}$~~，其中 p, q 是关于 u 和 $w_{j,s}$ 的多项式，其他情形也类似。我们对这些比值作如下理解：含有差分算子的项 $\chi_i^{\pm}{}_{,r}$ 总是置于标量有理函数的右侧。此外，设定 $\chi_i^-{}_{,0} = \chi_j^-{}_{,0} = 0$ 也很方便。

我们从（3.24）的左端开始。我们有

$$\begin{aligned}
&\big[\Phi_\mu^\lambda(B_i^{(1)}), [\Phi_\mu^\lambda(B_i(u)), \Phi_\mu^\lambda(B_j^{(1)})]\big] + \big[\Phi_\mu^\lambda(B_i(u)), [\Phi_\mu^\lambda(B_i^{(1)}), \Phi_\mu^\lambda(B_j^{(1)})]\big] \qquad (4.16)\\
=&\Big[\sum_{r_1=0}^{\mathfrak{v}_i}(\chi_{i,r_1}^+ + \chi_{i,r_1}^-), \Big[\sum_{r_2=0}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\frac{\chi_{i,r_2}^+}{u+\frac12-w_{i,r_2}} + \frac{\chi_{i,r_2}^-}{u+\frac12+w_{i,r_2}}\Big), \sum_{s=0}^{\mathfrak{v}_j}(\chi_{j,s}^+ + \chi_{j,s}^-)\Big]\Big]\\
+&\Big[\sum_{r_1=0}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\frac{\chi_{i,r_1}^+}{u+\frac12-w_{i,r_1}} + \frac{\chi_{i,r_2}^-}{u+\frac12+w_{i,r_1}}\Big), \Big[\sum_{r_2=0}^{\mathfrak{v}_i}(\chi_{i,r_2}^+ + \chi_{i,r_2}^-), \sum_{s=0}^{\mathfrak{v}_j}(\chi_{j,s}^+ + \chi_{j,s}^-)\Big]\Big].
\end{aligned}$$

我们先考虑 $r_1 \neq r_2$ 这一情形。由引理 4.1，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r_1}}\chi_{i,r_1}^+, [\chi_{i,r_2}^+, \chi_{j,s}^+]\Big] + \Big[\chi_{i,r_2}^+, \Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r_1}}\chi_{i,r_1}^+, \chi_{j,s}^+\Big]\Big]\\
=&\Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r_1}}\chi_{i,r_1}^+, \frac{-1}{w_{i,r_2}-w_{j,s}-\frac12}\chi_{i,r_2}^+\chi_{j,s}^+\Big]\\
&+\Big[\chi_{i,r_2}^+, \frac{-1}{(u+\frac12-w_{i,r_1})(w_{i,r_1}-w_{j,s}-\frac12)}\chi_{i,r_1}^+\chi_{j,s}^+\Big]\\
=&\frac{-1}{(u+\frac12-w_{i,r_1})(w_{i,r_2}-w_{j,s}-\frac12)}\Big(\chi_{i,r_1}^+\chi_{i,r_2}^+\chi_{j,s}^+ - \frac{w_{i,r_1}-w_{j,s}+\frac12}{w_{i,r_1}-w_{j,s}-\frac12}\chi_{i,r_2}^+\chi_{i,r_1}^+\chi_{j,s}^+\Big)\\
&+\frac{-1}{(u+\frac12-w_{i,r_1})(w_{i,r_1}-w_{j,s}-\frac12)}\Big(\chi_{i,r_2}^+\chi_{i,r_1}^+\chi_{j,s}^+ - \frac{w_{i,r_2}-w_{j,s}+\frac12}{w_{i,r_2}-w_{j,s}-\frac12}\chi_{i,r_1}^+\chi_{i,r_2}^+\chi_{j,s}^+\Big)\\
=&\frac{-1}{(u+\frac12-w_{i,r_1})(w_{i,r_1}-w_{j,s}-\frac12)(w_{i,r_2}-w_{j,s}-\frac12)}\Big((w_{i,r_1}-w_{i,r_2}-1)\chi_{i,r_1}^+\chi_{i,r_2}^+\chi_{j,s}^+\\
&\qquad +(w_{i,r_2}-w_{i,r_1}-1)\chi_{i,r_2}^+\chi_{i,r_1}^+\chi_{j,s}^+\Big) = 0.
\end{aligned}$$

同类型的计算表明

$$\Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r_1}}\chi_{i,r_1}^{*_1}, [\chi_{i,r_2}^{*_2}, \chi_{j,s}^{*_3}]\Big] + \Big[\chi_{i,r_2}^{*_2}, \Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r_1}}\chi_{i,r_1}^{*_1}, \chi_{j,s}^{*_3}\Big]\Big] = 0$$

当 $*_i \in \{\pm\}, i = 1, 2, 3$ 成立，且 $r_1 \neq r_2$ 时。具体而言，在上述计算中，只需分别将 $w_{i,\ r_1}$, $w_{i,\ r_2}$, $w_{j,\ s}$ 改为 $*_1 w_{i,\ r_1}$, $*_2 w_{i,\ r_2}$, $*_3 w_{j,\ s}$。

类似地，可以得到

$$\Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r}}\chi_{i,r}^*, [\chi_{i,r}^*, \chi_{j,s}^\pm]\Big] + \Big[\chi_{i,r}^*, \Big[\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r}}\chi_{i,r}^*, \chi_{j,s}^\pm\Big]\Big] = 0$$

对于 $*\in\{\pm\}$对于 $r\geqslant 1$。因此，式（4.16）的右端等于

$$\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,0}}\chi^{+}_{i,0},\big[\chi^{+}_{i,0},\chi^{*}_{j,s}\big]\Big]+\Big[\chi^{+}_{i,0},\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,0}}\chi^{+}_{i,0},\chi^{*}_{j,s}\Big]\Big] \tag{4.17}$$

plus

$$\begin{aligned}\sum_{*\in\{\pm\}}\sum_{s=0}^{\mathfrak{v}_j}\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Bigg(&\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi^{+}_{i,r},\big[\chi^{-}_{i,r},\chi^{*}_{j,s}\big]\Big]+\Big[\chi^{-}_{i,r},\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi^{+}_{i,r},\chi^{*}_{j,s}\Big]\Big]\\&+\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi^{-}_{i,r},\big[\chi^{+}_{i,r},\chi^{*}_{j,s}\big]\Big]+\Big[\chi^{+}_{i,r},\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi^{-}_{i,r},\chi^{*}_{j,s}\Big]\Big]\Bigg).\end{aligned} \tag{4.18}$$

我们将通过比较包含相同$\chi^{+}_{j,s}$的各项来证明 Serre 关系（3.24）。$\chi^{-}_{j,s}$ 情形类似。

回顾我们的假设（3.5），$\chi^{+}_{i,0}$ 和$\chi^{+}_{j,0}$ 不可能同时非零。因此，如果 $s\neq 0$，则由引理4.1和（4.15）可知，部分（4.17）可以变换为

$$\frac{2\theta_i\mathbf{W}_{i-1}(0)\mathbf{W}_j(0)\mathbf{Z}_i(0)}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,0})w_{j,s}^2\mathbf{W}_i^{\circ}(\frac{1}{2})\mathbf{W}_i^{\circ}(\frac{1}{2})}\chi^{+}_{j,s}. \tag{4.19}$$

再次利用引理4.1，部分（4.18）可改写为

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Bigg(\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi^{+}_{i,r},\big[\chi^{-}_{i,r},\chi^{+}_{j,s}\big]\Big]+\Big[\chi^{-}_{i,r},\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi^{+}_{i,r},\chi^{+}_{j,s}\Big]\Big]\\&\quad+\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi^{-}_{i,r},\big[\chi^{+}_{i,r},\chi^{+}_{j,s}\big]\Big]+\Big[\chi^{+}_{i,r},\Big[\frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi^{-}_{i,r},\chi^{+}_{j,s}\Big]\Big]\Bigg)\\=&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Bigg(\Big[\frac{\chi^{+}_{i,r}}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}},\frac{\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{w_{i,r}+w_{j,s}+\frac{1}{2}}\Big]+\Big[\chi^{-}_{i,r},\frac{-\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(w_{i,r}-w_{j,s}-\frac{1}{2})}\Big]\\&\quad+\Big[\frac{\chi^{-}_{i,r}}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}},\frac{-\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{w_{i,r}-w_{j,s}-\frac{1}{2}}\Big]+\Big[\chi^{+}_{i,r},\frac{\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(w_{i,r}+w_{j,s}+\frac{1}{2})}\Big]\Bigg)\\=&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Bigg(\frac{\chi^{+}_{i,r}\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})(w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{1}{2})}-\frac{(w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{3}{2})\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u-\frac{1}{2}-w_{i,r})((w_{i,r}+\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}\\&\quad-\frac{\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u-\frac{1}{2}-w_{i,r})(w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{1}{2})}+\frac{(w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{3}{2})\chi^{+}_{i,r}\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})((w_{i,r}-\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}\\&\quad-\frac{\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{1}{2})}+\frac{(w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{3}{2})\chi^{+}_{i,r}\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u-\frac{1}{2}+w_{i,r})((w_{i,r}-\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}\\&\quad+\frac{\chi^{+}_{i,r}\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u-\frac{1}{2}+w_{i,r})(w_{i,r}+w_{j,s}-\frac{1}{2})}-\frac{(w_{i,r}-w_{j,s}+\frac{3}{2})\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})((w_{i,r}+\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}\Bigg)\\=&\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Bigg(\frac{2(w_{i,r}-1)\chi^{+}_{i,r}\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u+\frac{1}{2}-w_{i,r})((w_{i,r}-\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}-\frac{2(w_{i,r}+1)\chi^{-}_{i,r}\chi^{+}_{i,r}\chi^{+}_{j,s}}{(u-\frac{1}{2}-w_{i,r})((w_{i,r}+\frac{1}{2})^2-w_{j,s}^2)}\end{aligned}$$

$$-\frac{2(w_{i,r}+1)\chi^-_{i,r}\chi^+_{i,r}\chi^+_{j,s}}{(u+\frac12+w_{i,r})((w_{i,r}+\frac12)^2-w^2_{j,s})}+\frac{2(w_{i,r}-1)\chi^+_{i,r}\chi^-_{i,r}\chi^+_{j,s}}{(u-\frac12+w_{i,r})((w_{i,r}-\frac12)^2-w^2_{j,s})}\Big).$$

回忆一下$\mathbf{W}^\diamond_{j,s}(u)$来自（4.1），并设（参见（4.5））

$$\Omega_{i;j,s}(u)=\frac{\boldsymbol{\varkappa}(u-\frac12)^{\vartheta_i}\mathbf{W}_{i-1}(u-\frac12)\mathbf{W}^\diamond_{j,s}(u-\frac12)\mathbf{Z}_i(u-\frac12)}{\mathbf{W}_i(u)\mathbf{W}_i(u-1)}.$$

注意，$\big((u-\frac12)^2-w^2_{j,s}\big)\Omega_{i;j,s}(u)=\Omega_i(u)$。

我们分两种情况，即 $s=0$ 和 $s\geqslant 1$，利用（4.13）–（4.14）重写上述公式。如果 $s=0$，则上述公式等于

$$\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\frac{(1-2w_{i,r})}{(w_{i,r}-\frac12)^2-w^2_{j,s}}\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}+\frac12}\Omega_i(u+\tfrac12)\Big(\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r}}+\frac{1}{u-\frac12+w_{i,r}}\Big)$$
$$-\frac{(2w_{i,r}+1)}{(w_{i,r}+\frac12)^2-w^2_{j,s}}\mathrm{Res}_{u=w_{i,r}+\frac12}\Omega_i(u+\tfrac12)\Big(\frac{1}{u-\frac12-w_{i,r}}+\frac{1}{u+\frac12+w_{i,r}}\Big)\Big)\chi^+_{j,s}.$$

如果 $s\geqslant 1$，则上述公式等于

$$\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\big(1-2w_{i,r}\big)\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}+\frac12}\Omega_{i;j,s}(u+\tfrac12)\Big(\frac{1}{u+\frac12-w_{i,r}}+\frac{1}{u-\frac12+w_{i,r}}\Big)$$
$$-\big(2w_{i,r}+1\big)\mathrm{Res}_{u=w_{i,r}+\frac12}\Omega_{i;j,s}(u+\tfrac12)\Big(\frac{1}{u-\frac12-w_{i,r}}+\frac{1}{u+\frac12+w_{i,r}}\Big)\Big)\chi^+_{j,s}.$$

现在考虑（3.24）的右端。于是

$$\begin{aligned}
&\Phi^\lambda_\mu\big(B_j(-u+\tfrac12)H_i(u)-B_j(u+\tfrac12)H_i(u)\big)\\
=&\sum_{s=0}^{\mathfrak{v}_j}\Big(\frac{\chi^+_{j,s}}{-u+1-w_{j,s}}+\frac{\chi^-_{j,s}}{-u+1+w_{j,s}}\\
&\qquad-\frac{1}{u+1-w_{j,s}}\chi^+_{j,s}-\frac{1}{u+1+w_{j,s}}\chi^-_{j,s}\Big)\Omega_i(u+\tfrac12)\\
=&-\frac{2u\Omega_i(u+\frac12)}{u^2-w^2_{j,0}}\chi^+_{j,0}\\
&+\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\Omega_{i;j,s}(u+\tfrac12)\Big(\Big(\frac{u^2-(w_{j,s}-1)^2}{-u+1-w_{j,s}}-\frac{u^2-(w_{j,s}-1)^2}{u+1-w_{j,s}}\Big)\chi^+_{j,s}\\
&\qquad\qquad+\Big(\frac{u^2-(w_{j,s}+1)^2}{-u+1+w_{j,s}}-\frac{u^2-(w_{j,s}+1)^2}{u+1+w_{j,s}}\Big)\chi^-_{j,s}\Big)\\
=&-\frac{2u\Omega_i(u+\frac12)}{u^2-w^2_{j,0}}\chi^+_{j,0}-\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}2u\Omega_{i;j,s}(u+\tfrac12)(\chi^+_{j,s}+\chi^-_{j,s}).
\end{aligned}$$

比较 $\chi^+_{j,0}$ 和 $\chi^+_{j,s}$ 在 $s\geqslant 1$下的系数可知，Serre 关系（3.24）可由上文得到的公式和引理 4.3推出（参见上一小节末尾，此处以类似方式应用了该引理）。同样，我们需要逐个情况进行研究。这里只指出以下几点。

- 项（4.19）仅在 $\theta_i = 1$ 时才有贡献，此时 $\chi_{j,0}^{+} = 0$ 根据奇偶性假设（3.5）。

- 如果 $\chi_{j,0}^{+} \neq 0$，那么 $\mathbf{W}_j(u)$ 是奇函数，并且由（3.3）可得 $\vartheta_i = 1$。容易看出，$2u\Omega_i(u+\frac{1}{2})$ 在 $u = 0$ 处正则，并在 $u = \pm w_{j,0}$ 处有简单零点。类似地，$2u\Omega_{i;j,s}(u+\frac{1}{2})$ 在 $u = 0$处正则。

这就完成了定理 3.4的证明。

4.4. 完成证明，但准分裂型 $\mathbf{A}_{2n}$。 下面仍需证明定理 3。6.

在本小节中，我们将除准分裂型 $\mathbf{A}_{2n}$。注意，$c_{i,\tau i}$ 不会出现，而 $\wp_i = 0$ 对于所有 $i \in \mathbb{I}$。根据引理2.4 和注记2.9，不难看出，所有关系的验证要么与普通平移杨扬氏的情形类似，要么与分裂型 A 的移位 iYangian 的情形类似。这里我们仅以 $c_{ij} = -1$ 的 Serre 关系为例进行讨论，因为 $c_{ij} = 0$ 的关系可化归为移位 Yangian 的情形。

设 $c_{ij} = -1$。注意到 $j \neq \tau i$，于是我们有几种情形。首先，需要验证类似于引理4.1中的恒等式成立。我们逐一讨论。

(1) 如果 i 和 j 都不被 τ固定，那么这就是普通平移杨扬氏的情形，已在 [BFN19, 附录 B] 中验证。(2) 如果 i 和 j 都被 τ固定，那么这就是分裂情形，已在 §4.3 中验证。(3) 如果 i 被 τ 固定而 j 不被固定，即 $i \in \mathbb{I}_0$ 和 $j \notin \mathbb{I}_0$，那么我们需要验证关系 (2.8)。具体论证与 §4.3 中的平行。同样，需要仔细处理含有 $\chi_{i,0}^{+}\chi_{i,0}^{+}$ 和 $\chi_{i,r}^{\pm}\chi_{i,r}^{\mp}$ 的项（它们是标量函数），而其他项则因引理 4.1 而相消。(4) 如果 j 被 τ 固定而 i 不被固定，即 $i \notin \mathbb{I}_0$ 和 $j \in \mathbb{I}_0$，那么我们需要验证关系 (2.7)。同样，我们按照 §4.3 中的论证进行。由于 i 不被 τ 和 $j \neq \tau i$固定，因此无法得到常数项（不含差分算子的标量有理函数）。所以，这种情形实质上对应于 §4.3 的开头。

4.5. 完成准分裂型 A 的证明$_{2n}$。 在本小节中，我们完成定理 3.6在准分裂型 A_{2n}情形下的证明。我们只验证最复杂的关系（2.5）和（2.9）在情形 $j = \tau i$ 和 $c_{i,\tau i} = -1$ 对于定理 3.6中的 iGKLO 同态成立。我们证明情形 $i \to j$（另一种情形 $i \leftarrow j$ 类似）。于是 $\wp_i = -1$和$\wp_j = 1$。

4.5.1. 关系 (2.5)。我们将相应的关系用生成级数表示为 ,

$$(u-v)[B_i(u), B_j(v)] = -\frac{1}{2}[B_i(u), B_j(v)]_+ + \big([B_i^{(1)}, B_j(v)] - [B_i(u), B_j^{(1)}]\big) - \Big(\frac{2u}{u+v}\big(H_i(u)\big)^\star + \frac{2v}{u+v}\big(H_j(v)\big)^\star\Big),$$

参见 [LZ25, (3.21)]。它也可以等价地写成

$$\begin{aligned}&(u-v+\tfrac{1}{2})B_i(u)B_j(v)+B_i(u)B_j^{(1)}-B_i^{(1)}B_j(v)\\&=(u-v-\tfrac{1}{2})B_j(v)B_i(u)+B_j^{(1)}B_i(u)-B_j(v)B_i^{(1)}\\&\qquad-\Big(\frac{2u}{u+v}\big(H_i(u)\big)^{\star}+\frac{2v}{u+v}\big(H_j(v)\big)^{\star}\Big),\end{aligned}\tag{4.20}$$

参见（4.4）。我们按照 §4.1中的做法，引入 $\chi_{i,\,r}$ 和$\chi_{j,\,s}$，用于 $1\leqslant r\leqslant \mathfrak{v}_i$ 和 $1\leqslant s\leqslant \mathfrak{v}_j$，使得

$$\Phi_\mu^\lambda(B_i(u))=\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\chi_{i,r},\qquad \Phi_\mu^\lambda(B_j(u))=\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_j}\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s}}\chi_{j,s}.\tag{4.21}$$

注意，我们用到了（3.9）。方便起见，将 $r':=\mathfrak{v}_i+1-r$ 记作 $1\leqslant r\leqslant \mathfrak{v}_i$。

引理 4.4. 若 $r\neq s$，则有

$$\begin{aligned}(w_{i,r}-w_{i,s}-1)\chi_{i,r}\chi_{i,s}&=(w_{i,r}-w_{i,s}+1)\chi_{i,s}\chi_{i,r},\\(w_{i,r}-w_{j,s'}+\tfrac{1}{2})\chi_{i,r}\chi_{j,s'}&=(w_{i,r}-w_{j,s'}-\tfrac{1}{2})\chi_{j,s'}\chi_{i,r}.\end{aligned}$$

证明. 直接计算即可得出。 □

因此，与 §4.1 中的计算相同可知，(4.20) 左右两边中，所有满足 $r\neq s$ 的 $\chi_{i,\,r}\chi_{j,\,s'}$（或 $\chi_{j,\,s'}\chi_{i,\,r}$）项均相消。因此，剩下的项涉及对 r 求和的 $\chi_{i,\,r}\chi_{j,\,r'}$ 和 $\chi_{j,\,r'}\chi_{i,\,r}$，以及来自 $H_i(u)$ 和 $H_j(v)$ 的标量级数。注意，由（3.9），有$w_{i,\,r}=-w_{j,\,r'}$和 $\eth_{i,\,r}=\eth_{j\,r'\,}^{-1}$，其中 $1\leqslant r\leqslant \mathfrak{v}_i$。因此，这些项不涉及差分算子。

(4.20) 左侧的常数项为

$$\frac{1}{u+v}\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\frac{2w_{i,r}-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}-\frac{2w_{j,r'}+\frac{1}{2}}{v-\frac{1}{2}-w_{j,r'}}\Big)\chi_{i,r}\chi_{j,r'},$$

而 $(u-v-\frac{1}{2})B_j(v)B_i(u)+B_j^{(1)}B_i(u)-B_j(v)B_i^{(1)}$ 的常数项为

$$\frac{1}{u+v}\sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Big(\frac{2w_{i,r}+\frac{1}{2}}{u-\frac{1}{2}-w_{i,r}}-\frac{2w_{j,r'}-\frac{1}{2}}{v+\frac{1}{2}-w_{j,r'}}\Big)\chi_{j,r'}\chi_{i,r}.$$

注意，$i\to j$。将 $\chi_{i,r}\chi_{j,r'}$ 和 $\chi_{j,r'}\chi_{i,r}$ 显式写出后，我们得到

$$\begin{aligned}\chi_{i,r}\chi_{j,r'}&=\frac{(2w_{i,r}-\frac{3}{2})\mathbf{Z}_i(w_{i,r}-\frac{1}{2})}{(2w_{i,r}-\frac{1}{2})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r}-1)}\prod_{k\leftrightarrow i}\mathbf{W}_k(w_{i,r}-\tfrac{1}{2}),\\&=\frac{(2w_{j,r'}+\frac{3}{2})\mathbf{Z}_j(w_{j,r'}+\frac{1}{2})}{(2w_{j,r'}+\frac{1}{2})\mathbf{W}_{j,r'}(w_{j,r'})\mathbf{W}_{j,r'}(w_{j,r'}+1)}\prod_{k\leftrightarrow j}\mathbf{W}_k(w_{j,r'}+\tfrac{1}{2}).\end{aligned}\tag{4.22}$$

公式 对于 $\chi_{j,r'}\chi_{i,r}$，它们类似，只是不含额外的比率（这是由于 $i \to j$ 的选择所致）：

$$\begin{aligned}\chi_{j,r'}\chi_{i,r} &= \frac{\mathbf{Z}_j(w_{j,r'}-\frac{1}{2})}{\mathbf{W}_{j,r'}(w_{j,r'})\mathbf{W}_{j,r'}(w_{j,r'}-1)}\prod_{k\leftrightarrow j}\mathbf{W}_k(w_{j,r'}-\tfrac{1}{2}),\\ &= \frac{\mathbf{Z}_i(w_{i,r}+\frac{1}{2})}{\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r})\mathbf{W}_{i,r}(w_{i,r}+1)}\prod_{k\leftrightarrow i}\mathbf{W}_k(w_{i,r}+\tfrac{1}{2}).\end{aligned} \tag{4.23}$$

其余部分可沿用§4.2末尾的同类论证，此处借助引理 4.3。我们注意到，额外因子 $1 \pm \frac{1}{4u}$ 对应于这些因子

$$2u\big(1\pm\tfrac{1}{4u}\big)\Big|_{u=w_{i,r}\pm\frac{1}{2}} = 2w_{i,r}\pm\tfrac{3}{2}, \qquad 2u\big(1\pm\tfrac{1}{4u}\big)\Big|_{u=w_{i,r}\mp\frac{1}{2}} = 2w_{i,r}\mp\tfrac{1}{2},$$

以及$w_{j,\ r'}$的类似因子。

4.5.2. 关系 (2.9)。 根据引理 2.5，只需验证关系 (2.9) 在 Φ_μ^λ作用下对情形 $s_1 = s_2 = s = 1$仍然成立。正如 [SSX25], 最先指出的那样，以生成函数形式证明下面这个更一般的关系实际上更容易

$$\big[B_i^{(1)},[B_i^{(1)},B_j(u)]\big] = \big(4u[B_i(3u),H_j(u)]\big)^\star, \tag{4.24}$$

由此可知，关系（2.9）在 Φ_μ^λ 作用下对 $s_1 = s_2 = 1$及任意 $s > 0$仍然成立。回顾（4.21）中 $B_i(u)$的像，并注意到 $w_{j,\ r'} = -w_{i,\ r}$。由恒等式可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3u+\frac{1}{2}-w_{i,r}}\Big(\frac{u-w_{i,r}+1}{(u-\frac{1}{2}+w_{i,r})(u-\frac{3}{2}+w_{i,r})}-\frac{u-w_{i,r}}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(u-\frac{1}{2}+w_{i,r})}\Big)\\ &\qquad = \frac{1}{(u+\frac{1}{2}+w_{i,r})(u-\frac{1}{2}+w_{i,r})(u-\frac{3}{2}+w_{i,r})}\end{aligned}$$

that

$$\Phi_\mu^\lambda\Big(4u[B_i(3u),H_j(u)]\Big) = \sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i}\Xi_{i,r}(u)\chi_{i,r}, \tag{4.25}$$

其中

$$\Xi_{i,r}(u) := \frac{(4u+1)\mathbf{Z}_j(u)\mathbf{W}_{i,r}(u)}{(u-\frac{3}{2}+w_{i,r})\mathbf{W}_j(u+\frac{1}{2})\mathbf{W}_j(u-\frac{1}{2})}\prod_{\substack{k\leftrightarrow j\\ k\neq i}}\mathbf{W}_k(u). \tag{4.26}$$

另一方面，在映射 Φ_μ^λ 下，$\big[B_i^{(1)},[B_i^{(1)},B_j(u)]\big]$ 的像为

$$\Big[\sum_{r_1=1}^{\mathfrak{v}_i}\chi_{i,r_1},\Big[\sum_{r_2=1}^{\mathfrak{v}_i}\chi_{i,r_2},\sum_{s=1}^{\mathfrak{v}_i}\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\Big]\Big]. \tag{4.27}$$

如果 $r_1 \neq s$ 且 $r_2 \neq s$，那么按照 §4.3 中的类似计算，利用引理 4.4 可得 t hat

$$\mathrm{Sym}_{r_1,r_2}\Big[\chi_{i,r_1},\Big[\chi_{i,r_2},\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\Big]\Big] = 0.$$

因此，在 $(r_1 = s$ 或 $r_2 = s$ 中的项4.27才会保留下来，并对 $\Phi_\mu^\lambda\big([B_i^{(1)}, [B_i^{(1)}, B_j(u)]]\big)$产生非平凡贡献。记 X_r 为来自 $(\chi_{i,\,r}$，其中包含 4.27的所有保留项之和，$1 \leqslant r \leqslant \mathfrak{v}_i$。根据上述讨论，我们有

$$\Phi_\mu^\lambda\Big([B_i^{(1)}, [B_i^{(1)}, B_j(u)]]\Big) = \sum_{r=1}^{\mathfrak{v}_i} X_r, \tag{4.28}$$

其中

$$X_r = X_r^\circ + \sum_{s=1, s\neq r}^{\mathfrak{v}_i} (X_s' + X_s''), \tag{4.29}$$

with

$$X_r^\circ = \left[\chi_{i,r}, \left[\chi_{i,r}, \frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,r'}}\chi_{j,r'}\right]\right], \qquad X_s' = \left[\chi_{i,r}, \left[\chi_{i,s}, \frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\right]\right],$$
$$X_s'' = \left[\chi_{i,s}, \left[\chi_{i,r}, \frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\right]\right].$$

被加项 X_r° 等于

$$X_r^\circ = \frac{1}{u-\frac{3}{2}+w_{i,r}}\chi_{i,r}\chi_{i,r}\chi_{j,r'} - \frac{2}{u-\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi_{i,r}\chi_{j,r'}\chi_{i,r} + \frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\chi_{j,r'}\chi_{i,r}\chi_{i,r}.$$

由（ 4.22）–（4.23）（并回顾 $w_{j,\,r'} = -w_{i,\,r}$ 以及这里的（4.26））可知，它可以改写为 as

$$\begin{aligned} X_r^\circ = \Big(&\frac{1}{u-\frac{3}{2}+w_{i,r}}\mathrm{Res}_{u=-w_{i,r}+\frac{3}{2}} + \frac{1}{u-\frac{1}{2}+w_{i,r}}\mathrm{Res}_{u=w_{j,r'}+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{u+\frac{1}{2}+w_{i,r}}\mathrm{Res}_{u=w_{j,r'}-\frac{1}{2}}\Big)\,\Xi_{i,r}(u)\chi_{i,r}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

现在令 $1 \leqslant s \leqslant \mathfrak{v}_i$，其中 $s \neq r$。我们有

$$\begin{aligned} X_s' &= \left[\chi_{i,r}, \left[\chi_{i,s}, \frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\right]\right] \\ &= \frac{\chi_{i,r}\chi_{i,s}\chi_{j,s'} - \chi_{i,s}\chi_{j,s'}\chi_{i,r}}{u-\frac{1}{2}-w_{j,s'}} + \frac{\chi_{j,s'}\chi_{i,s}\chi_{i,r} - \chi_{i,r}\chi_{j,s'}\chi_{i,s}}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}. \end{aligned}$$

另一方面，由引理 4.4可得

$$\begin{aligned} X_s'' &= \left[\chi_{i,s}, \left[\chi_{i,r}, \frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\chi_{j,s'}\right]\right] \\ &= \left[\chi_{i,s}, \frac{-1}{(u+\frac{1}{2}-w_{j,s'})(w_{i,r}-w_{j,s'}+\frac{1}{2})}\chi_{j,s'}\chi_{i,r}\right] \\ &= \frac{-\chi_{i,s}\chi_{j,s'}\chi_{i,r}}{(u-\frac{1}{2}-w_{j,s'})(w_{i,r}-w_{j,s'}-\frac{1}{2})} + \frac{\chi_{i,r}\chi_{j,s'}\chi_{i,s}}{(u+\frac{1}{2}-w_{j,s'})(w_{i,r}-w_{j,s'}-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

将上述两个表达式相加，得到

$$X_s'+X_s''=\frac{1}{u-\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\Big(\chi_{i,r}\chi_{i,s}\chi_{j,s'}-\frac{w_{i,r}-w_{j,s'}+\frac{1}{2}}{w_{i,r}-w_{j,s'}-\frac{1}{2}}\chi_{i,s}\chi_{j,s'}\chi_{i,r}\Big)$$
$$+\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\Big(\chi_{j,s'}\chi_{i,s}\chi_{i,r}-\frac{w_{i,r}-w_{j,s'}-\frac{3}{2}}{w_{i,r}-w_{j,s'}-\frac{1}{2}}\chi_{i,r}\chi_{j,s'}\chi_{i,s}\Big).$$

使用（4.22）–（4.23）以及以下恒等式

$$\frac{(w_{j,s'}+w_{i,r}+1)(w_{j,s'}+\frac{3}{2}-w_{i,r})}{w_{j,s'}+w_{i,r}-1}+(w_{i,r}-w_{j,s'}+\tfrac{1}{2})=\frac{4w_{j,s'}+1}{w_{j,s'}-1+w_{i,r}},$$
$$\frac{w_{j,s'}-\frac{1}{2}-w_{i,r}}{(w_{j,s'}+w_{i,r})(w_{j,s'}-1+w_{i,r})}+\frac{w_{i,r}-\frac{3}{2}-w_{j,s'}}{(w_{j,s'}-1+w_{i,r})(w_{j,s'}-2+w_{i,r})}$$
$$=\frac{4w_{j,s'}-1}{(w_{j,s'}+w_{i,r})(w_{j,s'}-1+w_{i,r})(w_{j,s'}-2+w_{i,r})},$$

我们可以将前一个方程改写为

$$X_s'+X_s''=\Big(\frac{1}{u-\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\mathrm{Res}_{u=w_{j,s'}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{u+\frac{1}{2}-w_{j,s'}}\mathrm{Res}_{u=w_{j,s'}-\frac{1}{2}}\Big)\,\Xi_{i,r}(u)\chi_{i,r}.\tag{4.31}$$

将（4.30）–（4.31）代入（4.29），并应用引理 4.3，我们得到 $X_r=\big(\Xi_{i,\,r}(u)\big)^{\star}\chi_{i,\,r}$。现在比较（4.25）与（4.28），即可完成关系（2.9）在 Φ_μ^λ下保持不变的证明。这就完成了定理 3.6的证明。

5. TSTY 的两种定义的辨识

本节将明确这里的分裂型 A（AI 型）TSTY 与 [LPT+25第 11]节中以完全不同方式定义的一族特殊 TSTY 之间的联系；该版本的 TSTY 源于其与经典型有限 W-代数的联系。

5.1. 来自 [LPT+25]的移位扭曲 Yangian 与 TSTY。

设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ 和 $\tau=\mathrm{id}$。我们考虑特殊情形 $\lambda=N\varpi_1^\vee$ 其中 $\varpi_1^\vee$ 是第一个基本余权。设 μ 为满足 $N\varpi_1^\vee\geqslant\mu$ 的支配偶余权。回顾 $\mathbf{v}_i\in\mathbb{N}$，见（3.1），以及 θ_i，见（3.2）。定义 $p_i\in\mathbb{N}$ 如下

$$p_1=\mathbf{v}_{n-1},\quad p_i=\mathbf{v}_{n-i}-\mathbf{v}_{n-i+1},\quad p_n=N-\mathbf{v}_1,\quad (1<i<n).\tag{5.1}$$

于是，$(p_n,\ p_{n-1},\ \ldots\ldots,\ p_1)$ 构成 N 的一个分拆，使得 $p_{i+1}-p_i=\langle\mu,\ \alpha_{n-i}\rangle$。由此可知，所有 p_i 都具有相同的奇偶性。于是，[LPT+25 中定义的奇偶性假设 (11.1)] 等价于 μ 的偶性条件。该分拆确定一对 $(\sigma,\ \ell)$，其中 $\ell=p_n$ 且 $\sigma=(\mathfrak{s}_{i,\,j})_{1\leqslant i,\,j\leqslant n}$ 是满足 $\mathfrak{s}_{i,\,i+1}=\frac{1}{2}(p_{i+1}-p_i)$ 和 $\mathfrak{s}_{i,\,j}+\mathfrak{s}_{j,\,m}=\mathfrak{s}_{i,\,m}$（假设 $|i-j|+|j-m|=|i-m|$）的对称矩阵。我们称 σ 为移位矩阵。

AI 型移位扭扬扬子代数，记作 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$，可以在 [LPT+25，§8.1] 中，以一个适用于移位矩阵 n 的合成 σ，用抛物型表示定义；或者，也可以在 [LPT+25，§8.3] 中，用 Drinfeld 表示定义。已在 [LPT+25，命题 8.9] 中证明，这两个移位扭扬扬子代数是同构的。这里我们只回顾 Drinfeld 表示。

令 $C=(c_{ij})_{1\leqslant i,\,j<n}$ 为 A_{n-1} 型的 Cartan 矩阵，并设 $c_{0j}=-\delta_{j,\,1}$。

定义 5.1 ([LWZ25b，定理 5.3])。 AI 型的扭 Yangian 是由以下元素生成的代数 $\mathcal{Y}_n^+$ 在 $\mathbb{C}$ 上 $\{\mathcal{H}_i^{(r)}\}_{r>0}$，$\{\mathcal{B}_j^{(r)}\}_{r>0}$，其中 $0 \leqslant i < n$ 以及 $1 \leqslant j < n$，并满足以下关系，其中 r_1， r_2， r， $s \in \mathbb{Z}_{>0}$:

$$[\mathcal{H}_i^{(r)}, \mathcal{H}_j^{(s)}] = 0, \qquad \mathcal{H}_i^{(2r-1)} = 0, \tag{5.2}$$

$$[\mathcal{H}_i^{(r+1)}, \mathcal{B}_j^{(s)}] - [\mathcal{H}_i^{(r-1)}, \mathcal{B}_j^{(s+2)}] = c_{ij}[\mathcal{H}_i^{(r)}, \mathcal{B}_j^{(s+1)}]_+ + \frac{1}{4}c_{ij}^2[\mathcal{H}_i^{(r-1)}, \mathcal{B}_j^{(s)}], \tag{5.3}$$

$$[\mathcal{B}_i^{(r+1)}, \mathcal{B}_j^{(s)}] - [\mathcal{B}_i^{(r)}, \mathcal{B}_j^{(s+1)}] = \frac{c_{ij}}{2}[\mathcal{B}_i^{(r)}, \mathcal{B}_j^{(s)}]_+ - 2\delta_{ij}(-1)^r\mathcal{H}_i^{(r+s)}, \tag{5.4}$$

$$[\mathcal{B}_i^{(r)}, \mathcal{B}_j^{(s)}] = 0, \qquad \text{for } |i-j| > 1, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sym}_{r_1,r_2}\big[\mathcal{B}_i^{(r_1)}, [\mathcal{B}_i^{(r_2)}, \mathcal{B}_j^{(r)}]\big] = \\ &(-1)^{r_1}\sum_{p\geqslant 0} 2^{-2p}\big([\mathcal{H}_i^{(r_1+r_2-2p-1)}, \mathcal{B}_j^{(r+1)}] - [\mathcal{H}_i^{(r_1+r_2-2p-1)}, \mathcal{B}_j^{(r)}]_+\big), \quad \text{if } c_{i,j} = -1,\end{aligned} \tag{5.6}$$

对于所有可容许指标 i， j， r， s。这里按照约定， $\mathcal{H}_i^{(0)} = 1$。

定义 5.2（[LPT+25，定义 8.7]）。与移位矩阵 σ 相关联的（支配）移位德林费尔德扭杨扬子是由 $\{\mathcal{H}_i^{(r)}\}_{r>0}$、 $\{\mathcal{B}_j^{(r)}\}_{r>\mathfrak{s}_{j+1}}$、$_j$生成的 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 上的代数，其中 $\mathbb{C}$，对于 $0 \leqslant i < n$ 和 $1 \leqslant j < n$，满足关系 (5.2)–(5.6)，对所有可容许指标r_1、 r_2、 r、 $s \in \mathbb{Z}_{>0}$均成立。

移位扭杨扬子 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 可通过将符号相同的元素对应起来，自然地识别为 $\mathcal{Y}_n^+$ 的一个子代数。

扭 Yangian $\mathcal{Y}_n^+$ 还包含两两交换元素 $\mathcal{D}_i^{(r)}$，其中 $1 \leqslant i \leqslant n$ 和 $r > 0$ 定义如下

$$\mathcal{H}_0(u) = \mathcal{D}_1(u), \qquad \mathcal{H}_i(u) = \big(\mathcal{D}_i(u - \tfrac{i}{2})\big)^{-1}\mathcal{D}_{i+1}(u - \tfrac{i}{2}), \qquad 1 \leqslant i < n,$$

其中

$$\mathcal{H}_i(u) := 1 + \sum_{r>0}\mathcal{H}_i^{(r)}u^{-r}, \qquad \mathcal{D}_j(u) := 1 + \sum_{r>0}\mathcal{D}_j^{(r)}u^{-r}, \quad 0 \leqslant i < n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

参见 [LPT+25，§3.2] 或 [LWZ25b，§3]。

通过以下规则定义 $\mathcal{Q}_i(u)$： $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\mathcal{Q}_i(u) := \mathcal{D}_1(u + \tfrac{i-1}{2})\mathcal{D}_2(u + \tfrac{i-3}{2})\cdots\mathcal{D}_{i-1}(u - \tfrac{i-3}{2})\mathcal{D}_i(u - \tfrac{i-1}{2}).$$

Then

$$\mathcal{H}_0(u) = \mathcal{D}_1(u) = \mathcal{Q}_1(u), \qquad \mathcal{H}_i(u) = \frac{\mathcal{Q}_{i-1}(u)\mathcal{Q}_{i+1}(u)}{\mathcal{Q}_i(u - \frac{1}{2})\mathcal{Q}_i(u + \frac{1}{2})}, \qquad 1 \leqslant i < n. \tag{5.7}$$

此外，级数 $\mathcal{Q}_n(u)$ 对应于斯克利亚宁行列式 $\mathrm{sdet}\, S(u + \frac{n-1}{2})$ 它是偶级数，参见 [Mol07，定理 2.5.3、2.12。1]。

令 $\mathcal{SY}_n^+$ 为由以下元素生成的 $\mathcal{Y}_n^+$ 子代数： $\{\mathcal{H}_i^{(r)}, \mathcal{B}_i^{(r)}\}_{r>0}$，其中 $0 < i < n$。记 $\mathcal{ZY}_n^+$ 为 $\mathcal{Y}_n^+$的中心。已知 [LWZ25b，定理 51] 表明 $\mathcal{SY}_n^+$ 同构于代数

由以下元素生成： $\{\mathcal{H}_i^{(r)}, \mathcal{B}_i^{(r)}\}_{r>0}$ 对于 $0 < i < n$ 满足关系式（5.2）–（5.6）。定义 $\mathcal{Z}^{(r)}$ 对于$r > 0$为

$$\mathcal{Q}_n(u) = 1 + \sum_{r>0} \mathcal{Z}^{(r)} u^{-2r}. \tag{5.8}$$

众所周知， [Mol07，定理 2.82] 的中心 $\mathcal{Y}_n^+$ 由以下元素自由生成$\mathcal{Z}^{(r)}$ 对于 $r > 0$。因此，由 [Mol07，定理 2.92] 可知

$$\mathcal{Y}_n^+ = \mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+ \otimes \mathcal{Z}\mathcal{Y}_n^+ = \mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+ \otimes \mathbb{C}[\mathcal{Z}^{(r)} \mid r > 0]. \tag{5.9}$$

类似地，令 $\mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 为由以下元素生成的 $\mathcal{Y}_n^+$子代数： $\{\mathcal{H}_i^{(r)}\}_{r>0}$， $\{\mathcal{B}_i^{(r)}\}_{r>\mathfrak{s}_{i,\ i+1}}$，其中 $0 < i <n$。记 $\mathcal{Z}\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 为 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$的中心。取关联分次（环路滤过）后，可得 $\mathcal{Z}\mathcal{Y}_n^+(\sigma) = \mathcal{Z}\mathcal{Y}_n^+$（例如参见 [LPT+25，注记 814]），且

$$\mathcal{Y}_n^+(\sigma) = \mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+(\sigma) \otimes \mathcal{Z}\mathcal{Y}_n^+ = \mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+(\sigma) \otimes \mathbb{C}[\mathcal{Z}^{(r)} \mid r > 0]. \tag{5.10}$$

引理 5.3。 由规则定义的映射 $\kappa : {}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu \to \mathcal{S}\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$

$$H_{n-i}^{(r)} \mapsto \mathcal{H}_i^{(r+2\mathfrak{s}_{i,i+1})}, \quad B_{n-i}^{(s)} \mapsto \sqrt{(-1)^{\mathfrak{s}_{i,i+1}}}\mathcal{B}_i^{(s+\mathfrak{s}_{i,i+1})},$$

对于 $0 < i < n$, $r > -2\mathfrak{s}_{i,i+1}$, $s > 0$，唯一地诱导出一个代数同构。

证明。 显然，该映射诱导出一个满同态。比较定理 2.16 与 [LWZ25b，命题 3。14] 即可得出它确为一个同构。□

接下来，我们回顾 [LPT+25 §11.2]中的截断。得益于 [LPT+25 命题 11.5]，这里我们用 Drinfeld 表示而非抛物型表示来表述。在此情形下，合成ν就是 $(1, \dots, 1)$，其中的元素 $H_1^{(r)}{}_{;\ 1,1}$ 对应于 $\mathcal{H}_0^{(r)}$ （当 $r > 0$ 时），而 $B_1^{(s)}{}_{;1,1}$ 对应于 $\mathcal{B}_1^{(s)}$ （当 $s > \mathfrak{s}_{1,2}$ 时）。根据规则，引入元素 $\widetilde{\mathcal{B}}^{(r+\mathfrak{s}_{1,2})}{}_i$ （当 $r > 0$ 时）

$$\mathcal{B}_1(u) = \sum_{r>0} \mathcal{B}_1^{(r+\mathfrak{s}_{1,2})} u^{-r}, \qquad \widetilde{\mathcal{B}}_1(u) := \mathcal{B}_1(u + \tfrac{1}{2})\mathcal{H}_0(u) = \sum_{r>0} \widetilde{\mathcal{B}}_i^{(r+\mathfrak{s}_{1,2})} u^{-r}. \tag{5.11}$$

因此，元素 $\widetilde{B}^{(\mathfrak{s}_{1,2};p_1+1)\ 1;1,1}$ 对应于 $\widetilde{\mathcal{B}}^{(\mathfrak{s}_{1,2}+p_1+1}{}_{)\ 1}$。于是，截断移位扭杨扬子代数（TSTY） $\mathcal{Y}_{n\ ,\ell}^+(\sigma)$ 在 [LPT+25] 中定义为商代数

$$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma) := \mathcal{Y}_n^+(\sigma)/\mathcal{I}_\ell, \tag{5.12}$$

其中 $\mathcal{I}_\ell$ 是由以下元素生成的 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 的双边理想

$$\{\mathcal{H}_0^{(r)} \mid r > p_1\} \cup \{\delta_{\bar{p}_1,\bar{0}} \widetilde{\mathcal{B}}_1^{(\mathfrak{s}_{1,2}+p_1+1)}\}. \tag{5.13}$$

已证明，在 [LPT+25 中，根据定理 F]， $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 同构于经典型的有限 W 代数。令 $k = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$。具体类型确定如下： −

$$\begin{cases} \mathrm{C}_k, & \text{if all } p_i \text{ are even,} \\ \mathrm{B}_k, & \text{if all } p_i \text{ and } n \text{ are odd,} \\ \mathrm{D}_k, & \text{if all } p_i \text{ are odd and } n \text{ are even.} \end{cases} \tag{5.14}$$

我们将对 iGKLO 表示稍作修改，并建立 TSTY ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$与 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 之间的联系。

根据数据的选取，我们有 $\lambda = N\varpi_1^\vee$，因此 $\mathbf{w}_1 = N$ 和 $\mathbf{w}_i = 0$ 对于 $i > 1$ 成立。因此，根据 §3.1–§3.2 中的约定，仅当 $i = 1$ 时，参数 $\mathfrak{w}_{i,\varsigma_i}$ 和多项式 $\mathbf{Z}_i(u)$ 是非平凡的。为此，我们将省略指标 $i = 1$。令 $\varsigma = N - 2k$。我们有

$$\mathbf{Z}(u) := \mathbf{Z}_1(u) = u^\varsigma \prod_{s=1}^{k} (u - z_s^2), \qquad \mathbf{Z}_i(u) = 1, \tag{5.15}$$

对于 $i > 1$。

回顾一下，所有 p_i 具有相同的奇偶性，我们记作 θ。由（3.2）–（3.3）容易看出，$\vartheta_i = \theta$ 对所有 $i \in \mathbb{I}$均成立。因此， $H_i\,(u)$ 在 iGKLO表示 $\Phi_\mu^{N\varpi_1^\vee}$中的作用如下

$$H_i(u) \mapsto \frac{\boldsymbol{\varkappa}(u)^\theta \mathbf{Z}_i(u)}{\mathbf{W}_i(u - \frac{1}{2})\mathbf{W}_i(u + \frac{1}{2})} \prod_{j \leftrightarrow i} \mathbf{W}_j(u), \qquad 1 \leqslant i < n.$$

我们引入代数 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}]$ 的一种变体：

$${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k} := {}^\imath\mathcal{Y}_\mu \otimes \mathbb{C}[z_1^2, \ldots, z_k^2]^{S_k}, \qquad {}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee} := \Phi_\mu^{N\varpi_1^\vee}\big({}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}\big),$$

其中， $\mathbb{C}[z_1^2, \ldots, z_k^2]^{S_k}$ 是关于 z_1^2、.....、 z_k^2的对称多项式代数。

引入形式变量 $\mathsf{Z}^{(r)}$，对应于 $r > 0$，并考虑代数的张量积

$${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}] := {}^\imath\mathcal{Y}_\mu \otimes \mathbb{C}[\mathsf{Z}^{(r)} \mid r > 0]. \tag{5.16}$$

Set

$$\mathbf{Z}(u) = 1 + \sum_{r>0} \mathsf{Z}^{(r)} u^{-2r}. \tag{5.17}$$

现在我们得到了四个代数 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$、 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}]$、 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$、 ${}^\imath\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1}$。由于 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}]$ 和 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$ 都是通过与一个多项式代数作张量积而得到的 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu$ 的扩张，因此很容易看出，我们有一个满同态 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}] \twoheadrightarrow {}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$： 通过将 $\mathsf{Z}(u)$ 特化为 $u^{-N}\mathsf{Z}(u)$。其中 $\mathsf{Z}(u)$ 由 (5.15) 给出。

引入元素 $\mathsf{A}_i^{(r)}$ 和 $\mathsf{B}_i^{(r)}$ 在 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$ 中，分别对应于 $r > 0$，由 (3.28) 和 (3.30) 给出。此外，引入 $\mathsf{A}_i^{(r)}$ (我们使用相同的记号，因为它们在商映射 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}] \twoheadrightarrow {}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$ 下典范同构 ${}^\imath\mathcal{Y}_\mu[\mathbf{Z}]$ 中，对于 $r > 0$ 由

$$H_i(u) = \frac{\boldsymbol{\varkappa}(u)^\theta (u^N \mathbf{Z}(u))^{\delta_{1,i}} \prod_{j \leftrightarrow i} u^{\mathbf{v}_j}}{(u^2 - \frac{1}{4})^{\mathbf{v}_i}} \frac{\prod_{j \leftrightarrow i} \mathsf{A}_j(u)}{\mathsf{A}_i(u - \frac{1}{2})\mathsf{A}_i(u + \frac{1}{2})}, \tag{5.18}$$

其中 $\mathsf{A}_i^{(r)}$ 是 $\mathsf{A}_i(u)$ 中的系数，定义见（3.29）。回忆一下（$\mathbf{v}_i$，定义见（3.1）。对 q_i，定义一族新的数 $0 \leqslant i < n$如下：

$$q_i := (\mathbf{v}_i - \theta) + 2 \sum_{j=1}^{n-i-1} (-1)^j (\mathbf{v}_{i+j} - \theta), \tag{5.19}$$

其中按约定 $\mathbf{v}_0 = N$。若 $\theta = 0$，则所有 $\theta_i = 0$。若 $\theta = 1$，则 θ_i 等于$n - i$的奇偶性。

引理 5.4. 存在唯一的同构 $\tilde{\kappa}\colon {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\mathbf{Z}] \to \mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 它将 κ 从引理5.3 扩展为

$$\mathbf{Z}(u) \mapsto \mathcal{Q}_n(u) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - (\tfrac{i}{2u})^2\right)^{q_i}.$$

此外，在同构 $\tilde{\kappa}$ 下，我们有

$$\mathsf{A}_{n-i}(u) \mapsto \mathcal{Q}_i(u) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - (\tfrac{i-j}{2u})^2\right)^{q_{n-j}}, \qquad 1 \leqslant i < n.$$

证明。 第一个结论由引理 5.3,(5.8), (5.10), and (5.16)–(5.17) 得出。现在我们证明第二个结论。记

$$\mathfrak{P}_i(u) := \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - (\tfrac{i-j}{2u})^2\right)^{q_{n-j}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.20}$$

回忆一下 $\mathsf{A}_i(u)$ 由 (5.18) 定义，以及关系

$$\kappa(H_i(u)) = u^{\langle \mu, \alpha_i \rangle} \mathcal{H}_{n-i}(u) = u^{\langle \mu, \alpha_i \rangle} \frac{\mathcal{Q}_{n-i-1}(u)\mathcal{Q}_{n-i+1}(u)}{\mathcal{Q}_{n-i}(u-\frac{1}{2})\mathcal{Q}_{n-i}(u+\frac{1}{2})}$$

由 (5.7) 得出。因此，只需验证

$$\left(1 - (\tfrac{1}{2u})^2\right)^{\theta - \mathbf{v}_i} \frac{\mathfrak{P}_{n-i-1}(u)\mathfrak{P}_{n-i+1}(u)}{\mathfrak{P}_{n-i}(u-\frac{1}{2})\mathfrak{P}_{n-i}(u+\frac{1}{2})} = 1,$$

这可通过利用 (5.19) 和 (5.20) 进行直接计算得出。 □

注记 5.5。 若所有 p_i 均为偶数，则 $\theta_i = 0$与多项式

$$\mathcal{P}_n(u) := u^{q_0} \prod_{j=1}^{n-1} \left(u^2 - (\tfrac{i}{2})^2\right)^{q_i} \tag{5.21}$$

与 [LPT+25，命题 12 中的多项式一致。5]对于 ℓ偶数（对应于由分拆 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$确定的对称金字塔）。

类似地，若所有 p_i 均为奇函数，则多项式 $(u+\frac{1}{2})\mathcal{P}_n(u)$ 与 [LPT+25，命题 12 中的多项式一致。5] 对于 ℓ 奇函数。注意，不难证明其中的额外因子$u + \rho_0 = u + \frac{1}{2}$（对于 ℓ 奇函数）可以消去，从而 [LPT+25，命题 12 的右端5]仍为 u的多项式。

5.2. **辨认两个 TSTY代数。** 我们通过限制来自 $\mathbb{C}[z]$ 的允许元素，引入了 TSTY ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}$ 的一个变体：

$${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} := \Phi_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}\left({}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[z^2]^{S_k}\right). \tag{5.22}$$

命题 5.6。 存在一个满同态 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma) \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}$。

证明。 根据上述讨论，以下合成是

$$\mathcal{Y}_n^+(\sigma) \xrightarrow{\sim} {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\mathbf{Z}] \twoheadrightarrow {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[z^2]^{S_k} \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee},$$

一个满同态，其中第一个同构来自引理 5.4，第二个满同态通过将 $\mathbf{Z}(u)$ 特化为 $u^{-N}\mathbf{Z}(u)$得到，最后一个则由定义得到。

注意，由 $\mathrm{A}_i^{(r)}$, $\delta_{\bar{\mathbf{v}}_i,\bar{0}}\mathrm{B}_i^{(r)}$ 为 $i \in \mathbb{I}, r > \mathbf{v}_i$ 生成的双边理想包含在商 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k} \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$ 的核中。由引理 5.4 可知， $\mathcal{H}_0(u) = \mathcal{Q}_1(u)$ 在 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 中被映射为 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$ 中的 $\mathrm{A}_{n-1}(u)$。若 $\mathbf{v}_{n-1}$ 为偶数，则由引理 5.3、(3.30) 和 (5.11) 可知， $\widetilde{\mathcal{B}}^{(\mathfrak{s}_{1,2}+p_1+1)}1$ 在 $\mathcal{Y}_n^+(\sigma)$ 中被映射为 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_\mu[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$ 中的 $\mathrm{B}^{(p_1+1)}{}_{n-1} = \mathrm{B}^{(\mathbf{v}_{n-1}+1)}{}_{n-1}$。因此，由 (5.12)-(5.13) 可知，理想 $\mathcal{I}_\ell$ 被映射为零。于是我们得到一个满同态 $\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma) \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$。□

回顾 [LPT+25，推论 11。11], 可知$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$ 将经典李代数 $\mathcal{S}_\pi^\epsilon$ 的 Slodowy 切片 $\mathfrak{sl}_N^\epsilon$ 量子化于 [LWW25，§6。1], 其中 π 是分拆 $(p_n, \ldots, p_1)$ 的 N；参见（5.1）。

引理5.7。 $\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$ 的 *PBW*生成元数量等于 $\dim \mathcal{S}_\pi^\epsilon$，其值为$2\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{v}_i + k$.

证明。 第一个等式由 [LPT+25，推论 11。11]得出。由 [LPT+25，推论 11。9]（并取其中的可容许形状为 $(1, 1, \ldots, 1)$），PBW生成元的数量为

$$\sum_{a=1}^{n-1}(n-a)p_a + \sum_{a=1}^{n}\lfloor\tfrac{p_a}{2}\rfloor. \tag{5.23}$$

由（5.1），可得

$$\sum_{a=1}^{b} p_a = \mathbf{v}_{n-b}, \quad \text{for } 1 \leqslant b \leqslant n-1, \tag{5.24}$$

因此由（3.2）可得

$$\sum_{a=1}^{n-1}(n-a)p_a = \sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{v}_i = 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathfrak{v}_i + \sum_{i=1}^{n-1}\theta_i. \tag{5.25}$$

回忆一下，所有 p_a具有相同的奇偶性， $\sum_{a=1}^{n} p_a = N$，并且$k = \lfloor\frac{N}{2}\rfloor$。逐一讨论情形，利用（ θ_i（3.2）中的5.24）计算可得

$$\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i + \sum_{a=1}^{n}\lfloor\tfrac{p_a}{2}\rfloor = \begin{cases} 0 + N/2 = k, & \text{if all } p_i \text{ are even,} \\ (n-1)/2 + (N-n)/2 = k, & \text{if all } p_i \text{ and } n \text{ are odd,} \\ n/2 + (N-n)/2 = k, & \text{if all } p_i \text{ are odd and } n \text{ are even.} \end{cases}$$

将这个最后的公式和（5.25）代入（5.23）即可得到该引理。 □

定理 5.8。 两个 *TSTY*代数 $\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$ 和 ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$同构。

证明。 在证明中，我们将大量使用代数*Gelfand-Kirillov* 维数 $\mathrm{GKdim}\, A$ 的概念 A。有关详细概述，请参阅 [KL00]。

我们将证明，命题$\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma) \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_\mu^{N\varpi_1^\vee}$中的满同态5.6 是一个同构。

根据 [LPT+25，推论 11.11], 可得一个同构 $\mathrm{gr}'\,\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}_\pi^\epsilon]$，其中 $\mathcal{S}_\pi^\epsilon$ 是一个 Slodowy 切片。由于 $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\pi^\epsilon]$ 是一个多项式环，因此 $\mathcal{Y}_{n,\ell}^+(\sigma)$ 是一个整环。代数

$\mathcal{Y}^+_{n,\ell}(\sigma)$ 在 [LPT+25，推论 11.9], 有一个 PBW 基，因此可以通过计算 PBW 生成元的数量来求其 Gelfand-Kirillov 维数。根据引理 5.7 ，该维数等于

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{Y}^+_{n,\ell}(\sigma) = \dim \mathcal{S}^{\epsilon}_{\pi} = 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{v}_i + k.$$

断言。 我们有 GKdim ${}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} \geqslant 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{v}_i + k$。

暂且假设此断言成立，我们可推出

$$\operatorname{GKdim} \mathcal{Y}^+_{n,\ell}(\sigma) \leqslant \operatorname{GKdim} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}. \tag{5.26}$$

由于 $\mathcal{Y}^+_{n,\ell}(\sigma)$ 是一个整环，根据 [KL00，命题 3.15]，它的任何真商代数的 Gelfand-Kirillov 维数都严格更小。由不等式（5.26），我们得出满同态 $\mathcal{Y}^+_{n,\ell}(\sigma) \twoheadrightarrow {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}$ 必为同构。

尚需证明该断言。考虑商滤链 $F^{\bullet}_{\mu_1}{}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}$，它继承自 ${}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}^2]^{S_k}$，如 [LWW25， §2。5]。由于取关联分次代数时 Gelfand-Kirillov 维数只会减小 [KL00，引理 6.5],给出

$$\operatorname{GKdim} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} \geqslant \operatorname{GKdim} \operatorname{gr} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}.$$

此外，一个普遍事实是：如果 $f\colon\ A \to B$ 是滤化代数之间的滤化映射，其关联分次为 $\operatorname{gr} f\colon \operatorname{gr} A \to \operatorname{gr} B$，那么 $\operatorname{Im}(f)$ 从 A 继承商滤链，并且存在一个分次代数满射 $\operatorname{gr}\operatorname{Im}(f) \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(\operatorname{gr} f)$。将其应用于映射 $\Phi_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}\colon\ {}^{\imath}\mathcal{Y}_{\mu}[\boldsymbol{z}^2]^{S_k} \to \mathcal{A}$，我们得到

$$\operatorname{gr} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} = \operatorname{gr}\operatorname{Im}(\Phi_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}) \twoheadrightarrow \operatorname{Im}(\operatorname{gr}\Phi_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}).$$

由 [LWW25，定理 5。12] 可知，$\operatorname{Im}(\operatorname{gr}\ \Phi_{\mu}^{\lambda})$的 Gelfand-Kirillov 维数恰好为 $2\sum_i \mathfrak{v}_i + k$。（请记住，对于交换代数，Gelfand-Kirillov 维数等于 Krull维数 [KL00，命题 7。9]。）综上，我们有

$$\operatorname{GKdim} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} \geqslant \operatorname{GKdim} \operatorname{gr} {}^{\imath}\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mu}^{N\varpi_1^\vee} \geqslant \operatorname{GKdim} \operatorname{Im}(\operatorname{gr}\Phi_{\mu}^{N\varpi_1^\vee}) = 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{v}_i + k,$$

从而证明了该断言。定理得证。 □

参考文献

[BFN19] Alexander Braverman、Michael Finkelberg 和 Hiraku Nakajima，箭图规范理论的库仑分支 $3d\ \mathcal{N}=4$与仿射格拉斯曼流形中的切片，《Adv. Theor. Math. Phys.》**23** （2019），第 1 期，75–166 页。另附 Braverman、Finkelberg、Joel Kamnitzer、Ryosuke Kodera、Nakajima、Ben Webster 和 Alex Weekes 撰写的两个附录。[BK06] Jonathan Brundan 和 Alexander Kleshchev，移位 *Yangian* 与有限 W-代数，《Adv. Math.》**200**（2006），第 1 期，136–195 页。[FKP+18] Michael Finkelberg、Joel Kamnitzer、Khoa Pham、Leonid Rybnikov 和 Alex Weekes，移位 *Yangian* 与量子开放 *Toda* 格的余乘法，《Adv. Math.》**327** （2018），349–389 页。[FO10] Vyacheslav Futorny 和 Serge Ovsienko，斜幺半群环中的伽罗瓦序，《 J. Algebra 》 **324** （ 2010 ），第 4 期，598–630 页。[FPT22] Rouven Frassek、Vasily Pestun 和 Alexander Tsymbaliuk，来自反支配移位 *Yangian* 与量子仿射代数的 *Lax* 矩阵：A 型，《Advances in Mathematics》**401** （2022），108283。

[FT19] Michael Finkelberg 和 Alexander Tsymbaliuk，《乘法切片、相对论 Toda 与移位量子仿射代数》，《李代数系统的表示与幂零轨道》，2019 年，第 133–304 页。[GKLO05] A. Gerasimov、S. Kharchev、D. Lebedev 和 S. Oblezin，《关于 Yangian 的一类表示与单极子的模空间》，《Comm. Math. Phys.》260（2005），第 3 期，511–525 页。[GR16] Nicolas Guay 和 Vidas Regelskis，《B、C、D 型对称对的扭 Yangian》，《Math. Z.》284（2016），第 1–2 期，131–166 页。[KL00] G¨unter R. Krause 和 Thomas H. Lenagan，《代数的增长与 Gelfand-Kirillov 维数》，修订版，《数学研究生丛书》第 22 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000 年。[KWWY14] Joel Kamnitzer、Ben Webster、Alex Weekes 和 Oded Yacobi，《Yangian 与仿射格拉斯曼流形中切片的量子化》，《Algebra Number Theory》8（2014），第 4 期，857–893 页。[Lev93] Serge Levendorskiĭ，《关于 Yangian 的 PBW 基》，《Lett. Math. Phys.》27（1993），第 1 期，37–42 页。[LPT+25] K. Lu、Y.-N. Peng、L. Tappeiner、L. Topley 和 W. Wang，《经典型移位扭曲杨扬子代数与有限 W-代数》，arXiv 预印本 arXiv:2505.03316（2025）。[Lu24] Kang Lu，《扭 q-Yangian 与仿射 $\imath$量子群之间的同构：AI 型》，《Int. Math. Res. Not. IMRN》2024（2024），第 24 期，14519–14542 页。[LW21] Ming Lu 和 Weiqiang Wang，《仿射 $\imath$量子群的 Drinfeld 型表示 I：分裂 ADE 型》，《Adv. Math.》393（2021），论文编号 108111，共 46 页。[LWW25] Kang Lu、Weiqiang Wang 和 Alex Weekes，《移位扭曲杨扬子代数与仿射格拉斯曼流形的 i 切片》，arXiv 预印本 arXiv:2510.10652v2（2025）。[LWZ24] Ming Lu、Weiqiang Wang 和 Weinan Zhang，《辫群作用与准分裂仿射 $\imath$量子群 II：高秩》，《Comm. Math. Phys.》405（2024），第 6 期，论文编号 142，共 33 页。[LWZ25a] Kang Lu、Weiqiang Wang 和 Weinan Zhang，《Drinfeld 表示中的仿射 $\imath$量子群与扭 Yangian》，《Comm. Math. Phys.》406（2025），第 5 期，论文编号 98，共 36 页。[LWZ25b] Kang Lu、Weiqiang Wang 和 Weinan Zhang，《扭 Yangian 的 Drinfeld 型表示》，《Represent. Theory》29（2025），838–870 页。[LZ25] Kang Lu 和 Weinan Zhang，《准分裂型扭 Yangian 的 Drinfeld 型表示》，《Commun. Contemp. Math.》（2025）。arXiv:2408.06981。[Mol07] Alexander Molev，《Yangian 与经典李代数》，《数学调查与专著》第 143 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007 年。[MR02] A. Molev 和 E. Ragoucy，《反射代数的表示》，《Rev. Math. Phys.》14（2002），第 3 期，317–342 页。[MV22] Ivan Mirkovi´c 和 Maxim Vybornov，《A 型中箭图簇、环格拉斯曼簇与幂零锥的比较》，《Adv. Math.》407（2022），论文编号 108397，共 54 页。附录由 Vasily Krylov 撰写。[Ols92]G. Olshanskiĭ，《扭 Yangian 与无限维经典李代数》，《量子群》（列宁格勒，1990），1992 年，第 104–119 页。[SSX25] Yaolong Shen、Changjian Su 和 Rui Xiong，《通过库仑分支研究带对合的箭图与移位扭曲杨扬子代数》，arXiv 预印本 arXiv:2510.12118（2025）。[Wan23] Weiqiang Wang，《量子对称对》，《ICM——国际数学家大会》第 4 卷，第 5–8 节，2023 年，第 3080–3102 页。[Web24] Ben Webster，《库仑背景中的 Gelfand-Tsetlin 模》，《Ann. Represent. Theory》1（2024），第 3 期，393–437 页。[Wee19] Alex Weekes，《箭图规范理论库仑分支的生成元》，2019 年。arXiv:1903.07734。[WWY20] Ben Webster、Alex Weekes 和 Oded Yacobi，《量子 Mirkovi´c-Vybornov 同构》，《Represent. Theory》24（2020），38–84 页。

数学系，弗吉尼亚大学，夏洛茨维尔，弗吉尼亚州 22903，USA
电子邮件地址：kang.lu.math@gmail.com, ww9c@virginia.edu

舍布鲁克大学数学系，舍布鲁克，魁北克省，加拿大电子邮件地址：
alex.weekes@usherbrooke.ca