arXiv:2512.20015v1 [eess.SY] 23 Dec 2025

HeylandCircle：用于海兰德圆图几何重建的计算框架

Anubhav Gupta[†]

科罗拉多大学博尔德分校，科罗拉多州 80303，美国 In Orbit Aerospace Inc.，托伦斯，加利福尼亚州 90501，美国

Abhinav Gupta[‡]

美国科罗拉多州博尔德市 80303，科罗拉多大学

摘要

海兰德圆图是一种经典图解工具，利用空载和堵转试验数据来表示感应电机的稳态行为。尽管它广泛见于交流电机教材中，但通常仅作为手工作图辅助工具介绍，且缺乏标准化的计算 formulation。本文介绍 HeylandCircle，这是一种计算框架，可直接根据标准试验参数重建经典海兰德圆图。该框架将传统几何构造形式化为一系列确定且可复现的几何运算，明确建立测量数据、固定几何对象与稳态工作点之间的映射关系。功率因数、转差率、输出功率、转矩和效率等量，均可通过构造所得图上的明确几何关系求得。通过一个具有代表性的教科书示例进行验证，结果表明其与经典结果高度吻合。该框架实现了传统海兰德图的计算化，适用于教学、分析和系统性扩展。

关键词： 感应电机；海兰德圆图；几何方法；计算几何；Python 框架

1 引言

海兰德圆图是表示感应电机稳态行为的一种经典几何方法 [1]。该图仅利用空载和堵转试验数据构造而成，以紧凑的形式编码了不同运行工况下输入电流、转差率、转矩和功率因数的变化 [2]。其主要吸引力在于教学价值：单一的几何构造揭示了在纯代数等效电路表述中不够直观的关系。

尽管具有教学价值，海兰德图仍主要是一种手工构造的工具。由于图解法固有的主观性和精度不足，它很少被纳入现代计算工作流。因此，目前尚不存在一种得到广泛采用的规范，用于在当代分析流程中以可复现的方式构造和使用该图。

本研究介绍 HeylandCircle，这是一个参考计算框架，可直接根据标准稳态试验参数重建经典海兰德圆图。该框架将传统几何构造形式化为确定且可复现的计算流程。此表述建立了测得的试验数据、定义该图的固定几何对象，以及

[†]电子邮箱：anubhav.gupta@colorado.edu

[‡]电子邮箱：abhinav.gupta@colorado.edu

从这些几何对象中通过明确的几何关系提取的稳态性能量之间的一致映射。尽管在特定地区语境下，圆图有时被归于 Ossanna 或 Behrend，但本框架采用海兰德命名法，因为它仍是全球感应电机试验文献中的标准称谓。

本研究旨在使经典教学法更加精确且易于拓展。图形保留其传统几何形式，同时以适合编写脚本、验证及整合到现代计算工作流中的方式表述其作图过程。关于该作图过程的形式化解析与几何论证——包括存在性、唯一性，以及它与稳态等效电路电流轨迹的等价性——将在其他部分单独展开 [3], ，使本文能够专注于计算规范，而非证明。

在此背景下，HeylandCircle 为经典圆图提供了稳定的计算参照，并为系统性推广奠定了基准。尤其是，非理想效应或参数依赖关系导致的偏离理想圆形现象，自然促使人们进一步拓展，例如研究椭圆轨迹；这些内容将在后续工作中讨论。

作者此前曾在一本教材 [4] 中探索过利用基于电子表格的计算和绘图工具数值重建圆图的方法。尽管这种实现方式在教学上效果良好，却未能以可复用的计算形式独立提取经典作图法的几何规则。本文在此基础上，提供了统一且以计算方式定义的海兰德图表述，可用作参考计算层。遵循经典电机理论惯例，电流的有功分量沿纵轴绘制，对应于复电流相量的实部。

本文其余部分安排如下。第 2节确定经典图的几何对象。第 3 节介绍计算 formulation 和构造流程。第4节阐述稳态性能量的几何解释。第5节通过一个标准教科书示例验证该框架；第 6 节讨论如何将其集成到更广泛的计算工作流中。第 7 节总结该框架的适用范围和作用。

2 经典海兰德图

2.1 经典图的作用

该图最初作为一种由试验结果推导而来的几何构造提出，将测量数据、等效电路解释和性能估算整合在同一个图形对象中。尽管现代分析通常侧重于数值等效电路求解器或时域仿真，海兰德图依然独具特色，因为它通过一个固定的几何轨迹编码了完整的稳态运行范围。

在本研究中，经典图被视为一个需要明确规定并通过计算重建的几何对象。因此，本节将确定定义该图的输入、几何基元及其关系，而不依赖作图惯例。

2.2 试验数据与几何锚点

经典海兰德图由两项标准稳态试验定义 [4, 5]:

- 空载试验，提供空载电流的幅值和相角（I_0， ϕ_0），以及

- 堵转试验，提供在降低的电压下测得并折算至额定工况的堵转电流幅值和相角（I_{sc}， ϕ_{sc}）。

这些测量值以复电流相量表示，并在复电流平面上确定两个固定点。图中的所有后续几何元素，均由这些锚点以及穿过空载点的参考水平线构造而成。

连接空载相量与堵转相量的直线定义了输出线。海兰德圆的圆心是参考水平线上同时位于该直线垂直平分线上的唯一点，圆半径则定义为圆心到任一测试点的距离。辅助几何对象——包括转矩弦、转差率线和效率线——均由这些基本元素确定性地构造。

此规范使图形的定义不受比例、作图惯例或手动构造选择的影响，并为计算实现提供一致的基础。

2.3 分析背景

在平衡正弦稳态运行的标准假设下，每相等效电路预测，感应电机的定子电流会随转差率变化而在复平面上描绘出圆轨迹。该结果的形式化分析与几何论证见 [3]。本研究以这些结果为理论基础，重点在于基于由此得出的几何定义，明确经典图形的可复现计算构造方法。

3 HeylandCircle计算框架

本节介绍一种计算 formulation，用于根据标准稳态试验数据重构经典海兰德圆图。该 formulation 称为 HeylandCircle，可在实验获得的电流相量与定义经典圆图的几何对象之间建立确定性映射。

该框架采用第 2 节确立的几何定义，并将经典作图法表示为一系列明确的计算操作。所有圆图元素均直接源自既定几何结构；不涉及解析上的重新推导、数值优化或曲线拟合。其目标是使经典作图法具备可重复性，并便于通过计算实现。

3.1 设计考量

该 formulation 遵循三项原则：

- **几何对应关系**：每个计算得到的对象都直接对应于经典圆图中的一个具名元素；
- **确定性**：相同的试验数据会产生相同的构造结果和性能量；
- **结构清晰性**：该构造被分解为适合复用或扩展的基本几何操作。

这些原则共同确保该框架发挥参考规范的作用，而非特定于某种实现的可视化程序。

3.2 输入数据表示

该框架接受标准稳态测量值：

$$(I_0, \phi_0), \quad (I_{sc}, \phi_{sc}), \quad V_{\text{rated}}, \quad V_{sc}.$$

这些量定义了折算至额定电压的空载电流相量和堵转电流相量，并用于填充最小数据结构。无需其他电机参数。可选的缩放因子可用于可视化或单位换算，但不会影响底层几何结构。

3.3 经典作图法的计算抽象

给定输入相量后，通过计算一组固定的几何基元（直线、垂线和交点）来重构海兰德图，这些几何基元均以空载电流点和堵转电流点为基准。该计算框架直接处理这些几何基元，而非复现手工作图步骤。为完整起见，传统的手工作图流程另见附录 A。

3.4 渲染与使用示例

为便于可视化和实际使用，可将计算得到的几何对象渲染为带注释的圆图。渲染元素包括电流轨迹、输出线、转矩弦和标注的几何点。渲染不会改变底层几何构造。

```
from heylandcircle import CircleDiagram, MachineTestData
数据 =MachineTestData(                I0=6 # 空载电流（A）,
ph
ph
压
额
Tr
```

可选配置标志用于控制图表缩放、坐标轴归一化以及是否包含发电区域；这些参数仅影响可视化效果，不会改变底层几何构造。图 1 展示了通过计算构造得到的完整电流轨迹，说明了电动运行和发电运行区域。

4 稳态性能量的几何解释

海兰德圆图的几何构造一旦确定，图表完成校准后，便可将稳态性能量视为对所得几何对象的查询。该图被视为一条电流轨迹，以及一组参考线和投影规则，据此

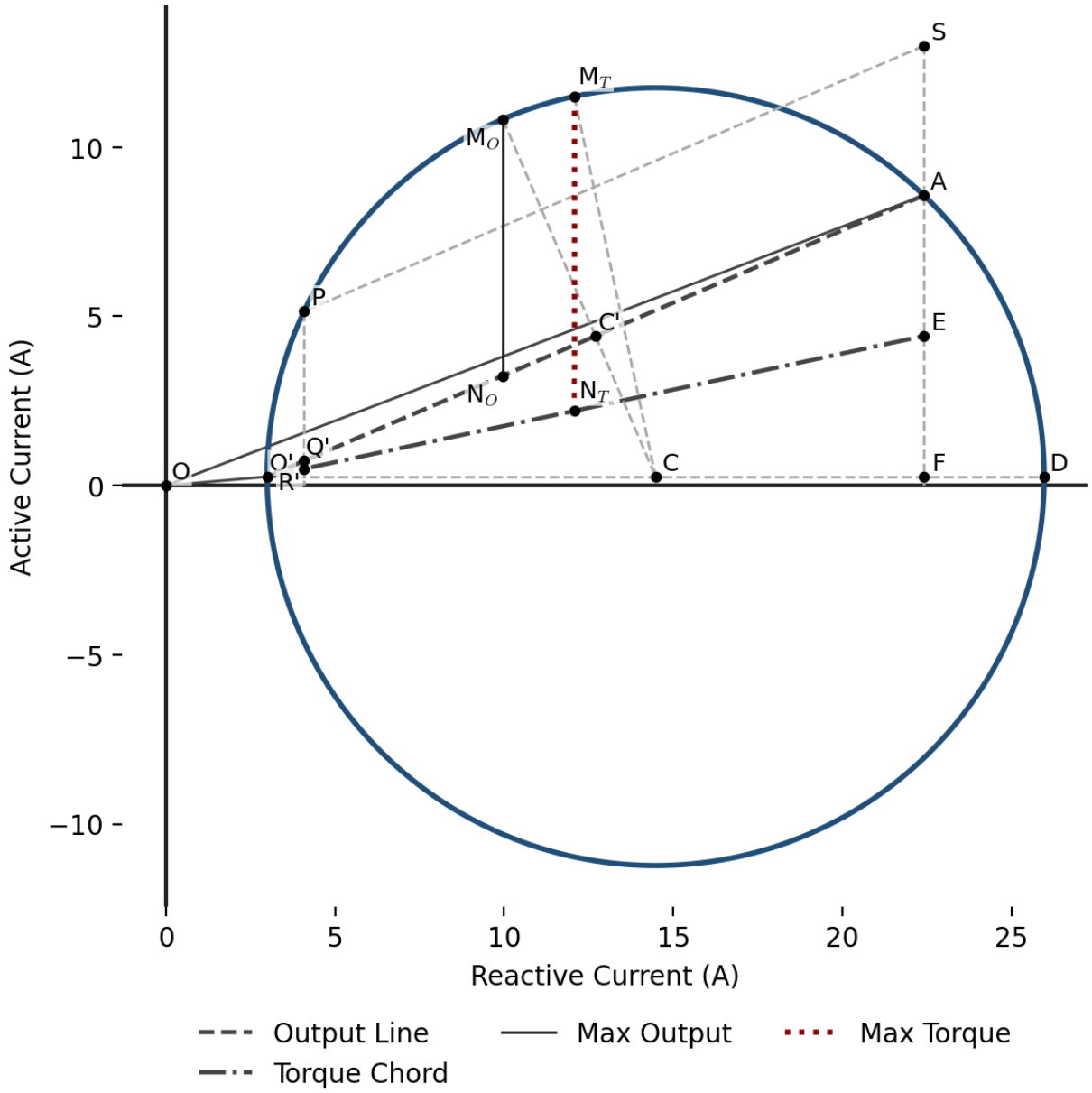

图 1. 标注了转差率和性能参考构造的海兰德圆图。

可通过几何关系直接获得运行量。在此阶段，无需对等效电路表达式进行解析计算。

4.1 电流相量和功率因数

每种运行工况都由电流轨迹上的一个点表示，该点对应于定子电流相量。电流的同相（有功）分量沿图中的纵轴测量，而正交分量则沿横轴分布。因此，输入电流幅值和功率因数通过工作点相对于这些参考轴的位置与方向以几何方式体现。

4.2 转差率与转矩映射

转差率并未作为图中的显式坐标处理，而是通过经过校准的几何构造与每个工作点相关联。在经典的 Heyland公式中，可以通过测量工作点与指定参考线之间的纵向截距之比来获得转差率。或者，也可以从沿转差率参考线构造的经校准转差率刻度上读取转差率。这两种构造完全基于几何方法，在图解法预期的容差范围内所得数值一致，因此在本文中将其视为等效方法。

电磁转矩通过投影到转矩弦上进行几何解释。最大转矩工作点被确定为转矩弦与电流轨迹相切之处，这提供了一种纯几何判据，无需评估电路参数。

4.3 运行状态与效率解释

海兰德图还可通过辅助参考构造，以图形方式解释运行状态和效率。按照传统方法，图中的相对截距和投影可直观呈现不同运行工况下效率的变化。位于零转差率参考线之外的工作点对应负转差率，表明处于发电运行状态；无需额外的分析条件，仅凭所构造轨迹的几何形状即可直接识别。

5 验证

验证采用 Theraja and Theraja 中给出的海兰德圆图标准算例 [6], 第35章例35.7，参数直接取自该参考文献公布的试验数据。验证的目的是忠实复现经典的海兰德图结果，而非评估物理模型的保真度。

表1. 教科书数值与Heyland圆图输出的比较。

量	教科书	计算值	误差（%）
最大输出功率（kW）	10.80	10.62	–1.66
最大转矩（同步千瓦）	14.07	13.01	–7.53
功率因数	0.80	0.78	–2.50
效率（%）	88.04	85.86	–2.47
转差率 (%)	4.7	5.01	6.59

参考示例中未明确列出教科书效率值，但可根据已发表的海兰德圆图，采用标准图解效率构造法推算得出。百分误差表示计算值与相应教科书效率值之间的相对差值，并以教科书效率值为基准进行归一化。

观测到的偏差与经典图解构造法的容差相符，主要反映了精确几何交点与手工作图中通常采用的近似直线读数之间的差异。转差率数值对作图惯例和参考截距位置尤为敏感，因此预计其变化幅度会大于电流、转矩或效率估计值。

其他测试案例也产生了相一致的结果，因篇幅所限，此处不再列出，因为本工作的目标是验证构造保真度，而非进行统计评估。

6 应用与扩展

本文提出的计算 formulation 支持分析、教学和方法开发等应用。作为经典海兰德图的一种计算实现，该框架为经典教学和分析中使用的传统手绘作图法提供了现代化的配套工具。漏抗、励磁电抗或转子电阻等影响电流轨迹形状和位置的参数变化，可通过其对图形的几何影响直接进行探索，从而快速、直观地考察稳态行为，同时保持与经典教材阐释的一致性 [7]。

从分析角度来看，该框架可作为等效电路所预测稳态性能的简明参考。由于海兰德图编码了完整的稳态运行范围，因此可将计算重构结果用作基准，与时域仿真或有限元分析的结果进行比较。圆轨迹的偏离体现了非理想效应的影响，包括磁饱和、深槽转子效应以及参数随频率变化等，这些因素均超出了经典作图法的假设范围。

这种明确的计算规范也为系统性扩展经典圆图奠定了基础。当放宽导致圆形轨迹的假设时——尤其是阻抗随转差率或频率变化的情况——电流轨迹将偏离圆形。此类偏离促使人们构建广义几何构造，包括椭圆轨迹；相关内容将在后续工作中单独讨论。通过将经典作图法确定为参照情形，本文框架能够以一致的方式对这些扩展进行表述和比较。

由于所有几何对象和性能量均经过显式计算，该 formulation 可自然融入基于 Python 的分析工作流。它可用作验证工具、参数研究的前端，或作为高保真数值模型的一种可解释的稳态补充。

7 结论

本文提出了一种基于标准感应电机试验数据推导的经典 Heyland 圆图参考计算 formulation。通过将传统几何构造表示为一系列确定性计算操作，该框架以可复现且不依赖具体实现的方式，明确了圆图的几何对象及其性能解释。

本工作的贡献在于将经典图解形式化为一种适用于验证和系统扩展的计算对象。通过将几何构造与作图惯例分离，该框架为稳态分析和未来的推广建立了稳定的参考基准。我们还开发了一个交互式参数扫描界面，用于探索测试参数的敏感性；这项功能超出了本文的讨论范围。

附录 A：经典几何构造过程

本附录概述了经典教科书中所述的 HeylandCircle 圆图传统手绘构造方法。此算法仅供参考和比较；

正文提出的计算框架采用固定的几何定义，而不显式复现这些绘图步骤。

算法 1 经典海兰德圆构造 1：建立参考轴 Oa （横轴）和 Ob （纵轴）。2：绘制空载电流矢量 I_0；将其端点标记为 O'。3：绘制一条穿过 O' 且平行于横轴的直线。4：绘制堵转电流矢量 I_{sc}；将其端点标记为 A。5：连接 O' 和 A 以形成输出线。6：构造 $O'A$ 的垂直平分线，并延伸该线，使其与经过 O' 的水平线相交于点C。7：以 C 为圆心、 $O'C$为半径绘制海兰德圆。8：从点 A绘制垂线，以建立转矩和转差率参考构造。9：根据需要构造转矩线、转差率线及辅助参考投影。

参考文献

[1] A. Heyland，感应电动机的图解处理。纽约，纽约州：McGraw Publishing Company，1906 年。[2] A. S. Langsdorf，交流电机理论。纽约：纽约州：McGraw-Hill Book Company，1937 年。[3] A. Gupta，“莫比乌斯变换与感应电机圆图的解析—几何重构”，2025 年。arXiv:2512。08302 [math.DS]。[4] A. Gupta 和 A. Gupta，变压器与感应电机试验。南卡罗来纳州查尔斯顿：CreateSpace，第 1 版，2012 年。[5] A. Fitzgerald、C. Kingsley Jr. 和 S. U mans，电机。McGraw-Hill，第 6 版，2002 年。[6] B. L. Theraja 和 A. K. Theraja，电气技术教科书。印度新德里：S. Chand Publishing，2014 年。[7] E. Carpaneto 和 S. Savio，“使用数值仿真的海兰德圆图教学工具”，*IEEE*教育汇刊，第 45 卷，第 3 期，第 263–270 页，2002 年。