arXiv:2512.20101v1 [math.OA] 23 Dec 2025

C-极端点的几何性质

NEHA HOTWANI[1] 和 T.S.S.R.K. RAO[2]

Abstract. 我们给出了冯·诺依曼代数闭单位球的 C^*-极端点的刻画，并证明C^*-极端性等价于线性极端性和强极端性。作为应用，我们根据某些冯·诺依曼代数的 C^*-极端点，对这些代数类进行了刻画。

1 引言

在算子代数的研究中，单位球的几何性质对于理解底层代数的结构起着核心作用。研究这种几何结构的一种方法是考察极端点——即无法表示为其他元素的非平凡凸组合的元素。参见 [Kad55、AS03、Phe01], 的经典著作，其中极端性思想被用于对 C^*-代数、函数空间等结构进行分类。

在巴拿赫空间理论中，对于给定的巴拿赫空间 X （我们通过典范嵌入 X^{**} 将其视为自身双对偶中的子空间），若闭单位球 X_1 的线性极端点在双对偶 X_1^{**} 中仍是线性极端点，则称其为弱 *-极端点。线性极端点的另一种著名且更强的概念是强极端点。回顾一下，若对于任意序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$（取自 X_1），$\frac{x_n+y_n}{2} \to x$ 蕴含 $x_n - y_n \to 0$，则称 $x \in X_1$ 为强极端点。更多细节参见 [DHS93]。注意，若 $x \in X_1$ 是强极端点，且 $x \in Y \subset X$ 是闭子空间，则 x 是 Y_1 的强极端点。众所周知，强极端点在双对偶中仍为强极端点。另有研究指出，弱 *-极端点在双对偶中未必仍是弱 *-极端点，参见 [DR03]。值得比较的是，在其非交换类比的背景下，也存在类似的极端行为，这种类比称为 C^*-极端点，适用于 C^*-代数框架。与经典凸性同样重要的是，近年来 C^*-凸性也受到广泛关注，例如参见 [HMP81、FM93、Mag01、Mag16、Mag19、Mag18]。回顾一下，对于带单位元 1 的含幺 C^*-代数 $\mathcal{A}$，若元素 $x \in \mathcal{A}_1$ 可表示为 C^* 个元素的 k -凸组合

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47L07（主要）；46L10（次要）。
Key words and phrases. 线性极端点、强极端点、沃尔德分解、弱*极端点、 C^*凸性、 C^*极端点。

x_1、……、 $x_k \in \mathcal{A}_1$，若存在 t_1、……、 $t_k \in \mathcal{A}$，使得 $\sum_{i=1}^{k} t_i^* t_i = \mathbf{1}$ 且 $x = \sum_{i=1}^{k} t_i^* x_i t_i$。这些 t_i 被称为该 C^*-凸组合的**系数**。若这些系数，也就是 t_i，均可逆，则这种 C^*- 凸组合称为**适当的** C^*- **凸组合**。若在 x 可写成 x_1、……、 $x_k \in \mathcal{A}_1$ 的适当 C^*-凸组合时，也就是说， $x \in \mathcal{A}_1$ 就称为 $\mathcal{A}_1$ 的 C^*-**极端点**，

$$x = \sum_{i=1}^{k} t_i^* x_i t_i,$$

其中 $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{A}$ 均可逆，且 $\sum_{i=1}^{k} t_i^* t_i = \mathbf{1}$，则每个 x_i 都与 x 酉等价，也就是说，存在酉算子 $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{A}$，使得 $x_i = u_i^* x u_i$ 对 $i = 1, \ldots, k$ 成立。

闭单位球 $\mathcal{A}_1$ 是 C^*-凸集，且包含于 $\mathcal{A}$ 中。为完整起见，我们给出这一众所周知事实的证明。

事实： $\mathcal{A}_1$ 是 C^*-凸的。设 $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{A}$ 满足 $\sum_{i=1}^{k} t_i^* t_i = \mathbf{1}$ 且 $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}_1$。我们需要证明 $x = \sum_{i=1}^{k} t_i^* x_i t_i \in \mathcal{A}_1$。由于我们知道任意 C^*-代数都可以嵌入到 $B(H)$ 中，即某个希尔伯特空间 H 上所有有界线性算子构成的空间，因此 $\mathcal{A}_1 \subset B(H)_1$。现在，由 LP81 的例 3]，中的 [，我们得出 $\|x\| \leq 1$。因此， $\mathcal{A}_1$ 在 $\mathcal{A}$ 中是 C^*-凸的。

当 $\mathcal{A}$ 是一个无限维 C^*-代数时，我们不知道 $\mathcal{A}_1$ 是否总是 $\mathcal{A}^{**}$中的 C^*-凸集。

在本文中，我们只考虑含单位元的 C^*-代数，并将这类 C^*-代数记为 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$，将冯·诺伊曼代数记为 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$、$\mathcal{R}$。记号 $\mathcal{A}^{**}$ 表示 C^*-代数 $\mathcal{A}$的双对偶。众所周知，$\mathcal{A}^{**}$ 是一个 C^*-代数（事实上是一个冯·诺依曼代数），而且典范嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^{**}$ 是一个 C^*-代数同态。与我们之前的讨论类似，现在我们关注的是 C^*-极值性是否会从 $\mathcal{A}_1$传递到$\mathcal{A}_1^{**}$。在这方面，我们已经证明，$\mathcal{A}_1$ 的一个线性极端点事实上是 $\mathcal{A}_1^{**}$的一个 C^*-极端点（推论 4）。

本文的组织结构如下。在第 2 节中，我们证明，在 C^*-代数中，线性极端点是弱*-极端点。我们还证明，经由闭双边理想取商映射时，极端性得以保留。第 3 节给出了冯·诺依曼代数情形下沃尔德分解型定理的证明，并以如下观察作为结尾：冯·诺依曼代数中的任意两个相似等距算子必然酉等价（定理 3.7）。

在第 4节中，我们使用定理3.7 和比较定理（[KR97b，定理 6.2。7]）来刻画 C^*-极端点 $\mathcal{M}_1$。本文沿着这一思路得到的主要结果之一如下。

定理 A。 设 $x \in \mathcal{M}_1$。那么 x 是 C^*-极端点 $\mathcal{M}_1$ 当且仅当存在中心投影 $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{M}$ 使得 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$，且满足以下条件：

(i) $p_1 = 0$ 或 $p_1 x$ 是 $p_1\mathcal{M}$ 中的酉算子；*(ii)* $p_2 = 0$ 或 $p_2 x$ 是 $p_2\mathcal{M}$ 中的非酉等距算子；*(iii)* $p_3 = 0$ 或 $p_3 x$ 是 $p_3\mathcal{M}$ 中的非酉余等距算子。

定理 A 的证明见第4节。作为定理A的推论，我们用以下对象的 C^*-极端点 $\mathcal{M}_1$ 刻画某些冯·诺依曼代数（定理4.9）。作为定理A的进一步推论，我们得出以下结果，这是本文的另一项主要定理。该定理指出，对于 $\mathcal{M}_1$，三种概念—— C^*-极端点、线性极端点和强极端点——彼此相同。因此，这些点在 $\mathcal{M}$的所有偶数阶对偶中仍是C^*-极端点。

下面定理的动机来自 [Rao25，定理 2。12],作者在不带对合的交换代数背景下证明了一个类似结果。

定理 B。 设 $x \in \mathcal{M}_1$。以下命题等价。

(i) x 是 $\mathcal{M}_1$ 的 C^*-极端点。*(ii)* x 是 $\mathcal{M}_1$ 的线性极端点。*(iii)* x 是 $\mathcal{M}_1$ 的强极端点。

特别地， C^*-代数闭单位球的任意线性极端点都是强极端点。

定理 B 的证明见第 4节。

本节还讨论了向量值连续函数空间。更确切地说，设 Ω 是一个紧豪斯多夫空间， X是一个巴拿赫空间。我们用 $C(\Omega, X)$ 表示所有 X值连续函数构成的空间，并赋予其上确界范数。文献 [DHS93]证明了， $f \in C(\Omega, X)_1$ 是强极端点，当且仅当对每个 $\omega \in \Omega$， $f(\omega)$ 是 X_1 中的强极端点。受这项工作的启发，我们研究空间 $C(\Omega, \mathcal{A})$，其中 Ω 是一个紧豪斯多夫空间， $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。众所周知， $C(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个含幺 C^*-代数。此外，如果 Ω 是无限集，且 $\mathcal{A}$ 是一个无限维冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$，那么 $C(\Omega, \mathcal{A})$ 不可能是冯·诺依曼代数。我们关注这样一个问题： $f \in C(\Omega, \mathcal{A})_1$ 是一个 C^*-极端点，是否意味着对每个 $\omega \in \Omega$， $f(\omega)$ 都是 $\mathcal{A}_1$ 的 C^*-极端点？当孤立点集在 Ω 中稠密且 $\mathcal{A}$ 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 时，我们能够回答这个问题。

2 线性极端点

本节讨论 C^* 代数闭单位球的线性极端点的一些结果。在 C^* 代数中，以下定理是

对闭单位球的线性极端点的一个著名刻画。

定理 2.1. [Tak02，定理 10。2] 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，且 $\mathcal{A}_1$ 表示 $\mathcal{A}$的闭单位球。那么 x 是 $\mathcal{A}_1$ 的线性极端点，当且仅当 x 是偏等距算子，并且满足

$$(\mathbf{1} - x^*x)\mathcal{A}(\mathbf{1} - xx^*) = \{0\}. \tag{2.1}$$

注 2.2. 由定理 *2.1*，很容易看出， $\mathcal{A}_1$ 的线性极端点集是范数闭的。

在下面的定理中，我们证明闭单位球的线性极端点在其双对偶中仍是线性极端点。稍后在第 4节中，作为定理 B的推论，我们证明 $\mathcal{A}_1$ 的任一线性极端点都是 $\mathcal{A}_1$的强极端点。

定理 2.3. 设 x 是 $\mathcal{A}_1$的线性极端点。那么 x 也是 $\mathcal{A}_1^{**}$的线性极端点。特别地，每个线性极端点都是弱*-极端点，并且在所有双对偶中仍然如此。

证明。 由于 x 是 $\mathcal{A}_1$的线性极端点，因此由定理 2.1可知 x 是偏等距算子，并且满足方程 2.1。因此，要证明 x 是 $\mathcal{A}_1^{**}$的线性极端点，还需证明

$$(\mathbf{1} - x^*x)\mathcal{A}^{**}(\mathbf{1} - xx^*) = \{0\}.$$

令 $y \in \mathcal{A}^{**}$ 为任意元素。若 $y = 0$，则结论成立。现在考虑 $y \neq 0$的情形。利用 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{A}^{**}$中弱*-稠密这一事实，存在一个网 $\{x_\alpha\} \subset \mathcal{A}$ ，使得 x_α 在弱*-拓扑下收敛到 y 。固定 b、 $c \in \mathcal{A}$，我们知道映射 $z \mapsto bzc$ 在 $\mathcal{A}^{**}$上是弱*-连续的。因此，$(\mathbf{1} - x^*x)x_\alpha(\mathbf{1} - xx^*) \to (\mathbf{1} - x^*x)y(\mathbf{1} - xx^*)$在弱*-拓扑下成立。利用方程 2.1，我们有$(\mathbf{1} - x^*x)x_\alpha(\mathbf{1} - xx^*) = 0$ 对所有 α均成立。因此，$(\mathbf{1} - x^*x)y(\mathbf{1} - xx^*) = 0$. 证明完毕。□

下一个定理证明商映射保在线性极端点。

定理 2.4. 设 $\mathcal{A}$是一个含幺 C^*-代数。设 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$中的非平凡真闭双边理想。若 x 是 $\mathcal{A}_1$的线性极端点，则$\operatorname{dist}(x, \mathcal{I}) = 1$。此外， $x + \mathcal{I}$是$(\mathcal{A}/\mathcal{I})_1$的线性极端点。

证明。 我们首先证明 $x \notin \mathcal{I}$。反设 $x \in \mathcal{I}$。令$y \in \mathcal{A}$ 为任意元素。由于 x 是 $\mathcal{A}_1$的线性极端点，根据等式 2.1可得

$$y = yxx^* + x^*xy - x^*xyxx^*.$$

因此， $y \in \mathcal{I}$。于是 $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$，这与 $\mathcal{I}$ 是真理想相矛盾。因此，$\operatorname{dist}(x, \mathcal{I}) > 0$。

接下来，我们证明 $x+\mathcal{I}$是（$\mathcal{A}/\mathcal{I}$）$_1$的线性极端点。设 π： $\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{I}$是典范商映射，定义为 π（a） $=a+\mathcal{I}$。根据定理2.1，x 是偏等距算子，并满足公式2.1。因此， π（x）是 $\mathcal{A}/\mathcal{I}$中的偏等距算子。

接下来只需证明 $\pi(x)$ 满足方程2.1。注意，对于任意$y\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}&(\pi(\mathbf{1})-\pi(x)^*\pi(x))\pi(y)(\pi(\mathbf{1})-\pi(x)\pi(x)^*)\\=&\pi((\mathbf{1}-x^*x)y(\mathbf{1}-xx^*))\\=&\pi(0)=0.\end{aligned}$$

因此， $\pi(x)$ 是 $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_1$ 的线性极端点。由于每个线性极端点的范数都为一，可得 $\|\pi(x)\|=1$。特别地，dist$(x,\ \mathcal{I})\ =1$。证明至此完成。□

3 C-极端点的刻画

本节介绍冯·诺依曼代数中 C-极端点的一些预备结果，这些结果将在下一节用于证明我们的主要结论。

回想一下，要证明一个点是线性极端点，只需将该点视为两个点的凸组合。下面的引理是 [LP81 引理 17], 的类比，它指出这一结论在 C^*-极端情形下同样成立。证明思路与 [RBDMS23命题 32]类似。

引理 3.1. 设 $\mathcal{A}_1$ 为 $\mathcal{A}$的闭单位球。以下陈述等价。

(i) $a\in\mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}_1$的一个 C^*-极端点。*(ii)* 若$a=\sum_{i=1}^2 t_i^*a_it_i$，其中 $a_i\in\mathcal{A}_1$ 和 t_i在 $\mathcal{A}$ 中均可逆，且满足$\sum_{i=1}^2 t_i^*t_i=\mathbf{1}$，则存在酉算子 $u_i\in\mathcal{A}$，使得对于 $i=1$，有 $a_i=u_i^*au_i$2。

证明。 (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) 显然成立。现在证明(*ii*) $\Longrightarrow$ (*i*)。为此，我们需要证明：每当$a=\sum_{i=1}^n t_i^*a_it_i$ 是 $a_i\in\mathcal{A}_1$的一个真 C^*-凸组合时，每个 a_i 都与 a酉等价。我们对 n使用归纳法。根据假设， $n=2$ 时结论成立。假设结论对 $n=k$ 成立。现在考虑

$$a=\sum_{i=1}^{k+1}t_i^*a_it_i=\sum_{i=1}^{k}t_i^*a_it_i+t_{k+1}^*a_{k+1}t_{k+1},$$

其中 $t_i\in\mathcal{A}$ 可逆，且 $\sum_{i=1}^{k+1}t_i^*t_i=\mathbf{1}$ 和 $a_i\in\mathcal{A}_1$。令 t 为 $\sum_{i=1}^{k}t_i^*t_i$ 的正平方根。则 t 可逆，并且

$$t^*t+t_{k+1}^*t_{k+1}=\mathbf{1}.$$

定义

$$x = \sum_{i=1}^{k} (t_i t^{-1})^* \, a_i \, (t_i t^{-1}).$$

那么 $x \in \mathcal{A}_1$ 和

$$a = t^* x t + t_{k+1}^* a_{k+1} t_{k+1}.$$

根据假设 (ii)，二者 x 和 a_{k+1} 都与 a酉等价。由于 x是 C^*-凸组合，且该组合是 $a_1, \ldots, a_k$的真凸组合，归纳假设推出 a_i 与 x 酉等价，其中 $i = 1,\ldots, k$。因此，每个 a_i 都与 a 酉等价，其中 $i = 1,\ldots, k$。证明至此完成。□

下面的定理指出，在 C^*-代数的闭单位球中，酉算子总是 C^*-极端点。

定理 3.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。那么酉算子是 $\mathcal{A}_1$的 C^*-极端点。

证明。众所周知，$\mathcal{A}$ 可以嵌入 $B(H$，即希尔伯特空间 H上所有有界线性算子构成的代数。C^*因此，可以用与 $\mathcal{A}_1$ 中 $B(H)$ 的情形相同的论证，证明酉算子是 [LP81 命题 24]中的 -极端点。□

下面的定理是 $B(H)$ 中的经典沃尔德分解—— H 上所有有界线性算子构成的代数。为完整起见，我们在此给出证明，因为后文将用到 H 分解的具体形式。

定理 3.3。设 a 是 $B(H)$ 中的一个等距算子。设 $K = \cap_{n=0}^{\infty} a^n H$ 和 R =值域$(a)^{\perp}$。则以下结论成立。

(i) 闭子空间 K 是 a-不变的，且 $a|_K$ 是 $B(K)$ 中的酉算子。*(ii)* 闭子空间 $K^{\perp}$ 是 a-不变的。*(iii)* 对所有满足 $n \neq m$、$a^n R \perp a^m R$ 和 $K^{\perp} = \oplus_{n=0}^{\infty} a^n R$ 的 n、$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，

证明。(i) 利用 K 的构造，很容易看出 K 是 a-不变的。由于 a 是等距算子，可知 $a|_K$ 是单射。现在证明 $a|_K$ 是满射。任取 $\eta \in K$。于是 $\eta \in aH$。因此，存在唯一的（因为 a 是等距算子）$\xi \in H$，使得 $a(\xi) = \eta$。我们要证明的是 $\xi \in K$。由于 $\eta \in K = \cap_{n=0}^{\infty} a^n H$，可知存在 $\xi_0 \in H$，使得 $a^{n+1}(\xi_0) = \eta$。特别地，$a(a^n(\xi_0)) = \eta$。但是，$\xi \in H$ 是满足 $a(\xi) = \eta$ 的唯一向量。于是 $a^n(\xi_0) = \xi$。因此，$\xi \in a^n H$。由于 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的，可知 $\xi \in K$。因此，$a|_K$ 是满射。换言之，$a|_K$ 是 $B(K)$ 中的酉算子。

(ii) 令 $\xi \in K^{\perp}$ 和 $\eta \in K$ 为固定值。我们需要证明 $\langle a\xi, \eta \rangle = 0$。但是 $a|_K$ 是酉算子，因此只需证明 $\langle a\xi, a\eta \rangle = 0$；这是真的，因为 a 是等距算子，$\xi \in K^{\perp}$，且 $\eta \in K$。

(iii) 令 $\xi,\eta\in R$为任意元素，并令 $n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$满足 $n\neq m$。不失一般性，假设 $n>m$。考虑 $\langle a^n\xi,a^m\eta\rangle$。由于 a 是等距算子，因此可得 $\langle a^n\xi,a^m\eta\rangle=\langle a^{n-m}\xi,\eta\rangle=0$ （因为 $a^{n-m}\xi\in$是 Range(a)，且 $\eta\in R=$是 Range(a)$^\perp$）。

现在我们证明 $K^\perp=\oplus_{n=0}^\infty a^nR$，这等价于证明 $K=(\oplus_{n=0}^\infty a^nR)^\perp$。为此，设 $\xi\in(\oplus_{n=0}^\infty a^nR)^\perp$。我们需要证明对所有 $n\geq 0$ 都有 $\xi\in a^nH$。否则，设 $N\in\mathbb{N}$ 是满足 $\xi\notin a^NH$ 的最小数。由于 $\xi\in a^{N-1}H$，我们有 $\xi=a^{N-1}\xi_0$。注意到 $\xi_0\notin$ 值域(a)。换言之，$\xi\notin R^\perp$。因此存在 $\theta\in R$ 使得 $\langle\xi_0,\ \theta\rangle\neq 0$，这反过来给出 $\langle a^{N-1}(\xi_0)\ a^{N-1}(\theta)\rangle\neq 0$。也就是说，$\langle\xi,a^{N-1}(\theta)\rangle\neq 0$，这与矛盾相悖。因此，$\xi\in K$。

反过来，设 $\xi\in K$。我们需要证明，对于所有$\theta\in R=$ Range(a)$^\perp$ 和 $n\geq 0$，都有 $\langle\xi,a^n(\theta)\rangle=0$。由于 $\xi\in K$，可知存在$\eta\in H$ 使得 $\xi=a^{n+1}(\eta)$。因此 $\langle\xi,a^n(\theta)\rangle=\langle a^n(a(\eta))\ a^n(\theta)\rangle=\langle a(\eta)\ \theta\rangle$，而这等于零，因为 $a(\eta)\in$ Range(a) 且 $\theta\in R=$ Range(a)$^\perp$。证明完毕。

□

下面的注释说明了 $B(H)$ 中等距算子的矩阵分解。

注 3.4. 设 a 是 $B(H)$中的等距算子。设 $R=$值域(a)$^\perp$。由定理 *3.3*，H 可分解为 $H=K\oplus K^\perp$，其中 $K=\cap_{n=0}^\infty a^nH$且 $K^\perp=\oplus_{n=0}^\infty a^nR$，而 $a:K\oplus K^\perp\to K\oplus K^\perp$的矩阵分解为

$$\begin{bmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{bmatrix},$$

其中，$a_1=a|_K$ 是 B（K）中的酉算子，而 $a_2=a|_{K^\perp}$ 是 B（$K^\perp$）中的移位算子。同样，若 b是 B（H）中的另一个等距算子。我们记$R'=$ 值域（b）$^\perp$、$L=\cap_{n=0}^\infty b^nH$ 和 $L^\perp=\oplus_{n=0}^\infty b^nR'$。那么，$b:\ L\oplus L^\perp\to L\oplus L^\perp$ 的矩阵分解为

$$\begin{bmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{bmatrix},$$

其中，$b_1=b|_L$ 是 B（L）中的酉算子，而 $b_2=b|_{L^\perp}$ 是 B（$L^\perp$）中的移位算子。

以下引理表明，最初针对 $B(H)$ 证明的沃尔德分解，在冯·诺依曼代数的情形下同样成立。这或许是已知的，但为求完整起见，我们给出详细证明。利用以下引理，我们将在定理 3.7 中证明：若冯·诺依曼代数中的两个等距算子相似，那么它们事实上酉等价。在下面的引理中，对于希尔伯特空间 H的闭子空间 K，我们用记号 $\mathbf{1}_K$ 表示空间 $B(K)$ 的单位元。

约定： 本文中，我们始终假设冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 嵌入在 $B(H)$ 中，其中 H 是某个希尔伯特空间 H。

引理 *3.5.* 设 $\mathcal{M} \subset B(H)$ 是一个冯·诺依曼代数。设 a 和 b 是 $\mathcal{M}$ 中的等距算子，且 a 和 b 相似，也就是说，存在一个可逆元 $t \in \mathcal{M}$，使得 $b = tat^{-1}$。令 K、L、a_1 和 b_1 按照注 *3.4* 中针对 a 和 b 的定义给出。则存在一个偏等距算子 $w \in \mathcal{M}$，使得 $w|_K : K \to L$ 是酉算子，且 $b_1 = wa_1w^*$。

证明. 由于 a 和 b 是 $\mathcal{M}$ 中的等距算子，因此 a_1 和 b_1 是单射。此外，根据 K 和 L 的构造，可以很容易证明 a_1 是从 K 到 K 的满射。同理，b_1 是从 L 到 L 的满射。因此，$a_1 \in B(K)$ 和 $b_1 \in B(L)$ 是酉算子。我们还有，对所有 $n \geq 0$，$b^n = ta^nt^{-1}$。换言之，对所有 $n \geq 0$，$b^nt = ta^n$。现在，我们证明 t 将 K 映射到 L。为此，设 $\xi \in K = \cap_{n=0}^{\infty} a^n(H)$，则存在 $\eta \in H$（取决于 n），使得 $\xi = a^n\eta$。于是 $t(\xi) = ta^n(\eta) = b^nt(\eta) \in$ 值域(b^n)。由于 n 是任意的，因此对所有 $n \geq 0$，有 $t(\xi) \in$ 值域(b^n)。故 $t(\xi) \in L$。同理可证，t^{-1} 将 L 映射到 K。特别地，t 在 K 上的限制是可逆的。因此，t 的矩阵分解：$K \oplus K^{\perp} \to L \oplus L^{\perp}$ 为

$$\begin{bmatrix} t_0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

其中 $t_0 : K \to L$ 是 $t|_K$，因此可逆。通过将 t_0 定义为 $K^{\perp}$ 上的零映射，将 t_0 从 K 扩展到 H。因此，我们可以考虑 $t_0 \in B(H)$。设 $e \in \mathcal{M}$ 为到 K 上的投影，$f \in \mathcal{M}$ 为到 L上的投影。显然，$t_0 = fte \in \mathcal{M}$。现在，利用 $bt = ta$ 这一事实以及 a、b 和 t的矩阵分解，我们得到 $b_1t_0 = t_0a_1$。对 $t_0 = w|t_0|$作极分解，其中 w 是偏等距算子，且 $w|_K : K \to L$ 是酉算子。根据 [KR97b，命题 6.1.3]，，我们得到 $w \in \mathcal{M}$。在等式 $b_1t_0 = t_0a_1$中对 t_0 应用极分解，可得 $b_1w|t_0| = w|t_0|a_1$。由此得到

$$w^*b_1w|t_0| = |t_0|a_1.$$

在上述等式右侧乘以 a_1^*，得到

$$w^*b_1w|t_0|a_1^* = |t_0|.$$

为简化记号，记 $w^*b_1w = b_1'$。于是上述等式变为$b_1'|t_0|a_1^* = |t_0|$。这也可以写成 $b_1'a_1^*a_1|t_0|a_1^* = |t_0|$。注意，$b_1'a_1^*$ 是酉算子，而 $a_1|t_0|a_1^*$ 是正元，且 $(b_1'a_1^*)(a_1|t_0|a_1^*) = |t_0|$。因此，这是 $|t_0|$的极分解。故 $b_1'a_1^* = \mathbf{1}_K$ 且 $a_1|t_0|a_1^* = |t_0|$，进而得到 $w^*b_1wa_1^* = \mathbf{1}_K$。特别地，$w^*b_1w = a_1$。证明至此完成。□

引理 3.6。设 $\mathcal{M} \subset B(H)$是一个冯·诺依曼代数。设 a 和 b是 $\mathcal{M}$ 中的等距算子，且 $t \in \mathcal{M}$ 是可逆的，并满足 $b = tat^{-1}$。设

R， R'， $K^{\perp}$， $L^{\perp}$， a_2，以及 b_2 按注*3.4* 中的定义 a 和 b。则有以下结论：

(i) 存在一个偏等距算子 $v \in \mathcal{M}$ ，使得 v^*v 是到$\mathrm{Range}(a)^{\perp}$ 上的投影，而 vv^* 是到$\mathrm{Range}(b)^{\perp}$上的投影。*(ii)* 存在一个偏等距算子 $s \in \mathcal{M}$ ，使得 s^*s 是到 $K^{\perp}$ 上的投影，而 ss^* 是到 $L^{\perp}$ 上的投影。

证明。 (i) 令 $p_0 \in \mathcal{M}$ 为到 Range(a)$^{\perp}$ 上的投影。利用事实 $b = tat^{-1}$，我们看到 $(t^{-1})^*$ 将 ker(a^*) 映到 ker(b^*) 上。考虑算子 $(t^{-1})^*p_0 \in \mathcal{M}$。由于 p_0 是到 Range(a)$^{\perp}$ 上的投影，并且 $(t^{-1})^*$ 将 ker(a^*) 映到 ker(b^*) 上，因此 ker($(t^{-1})^*p_0$)$^{\perp}$ =Range(a)$^{\perp}$ ，且 Range($(t^{-1})^*p_0$) = Range(b)$^{\perp}$。取极分解 $(t^{-1})^*p_0 = v|(t^{-1})^*p_0|$。注意， $v \in \mathcal{M}$ 是一个偏等距算子，其初始空间为 ker($(t^{-1})^*p_0$)$^{\perp}$ = Range(a)$^{\perp}$ ，终空间为 Range($(t^{-1})^*p_0$) = Range(b)$^{\perp}$。这个 $v \in \mathcal{M}$ 就是所需的偏等距算子，使得 v^*v 是到 Range(a)$^{\perp}$ 上的投影，而 vv^* 是到 Range(b)$^{\perp}$ 上的投影。

(ii) 回忆一下， R = Range(a)$^{\perp}$ and R' = Range(b)$^{\perp}$。注意，闭子空间 R 和 a^n(R)可通过映射 $a^n|_R : R \to a^n(R)$ 同构，其中 $n \geq 0$均成立。类似地，对于所有 $n \geq 0$，闭子空间 R' 和 b^n(R') 同构。注意，对于所有 $n \geq 0$，算子$b^nva^{*n} \in \mathcal{M}$ 是一个偏等距算子，其初始空间为 a^n(R)，终空间为 b^n(R')，其中 v 的定义同条目 (i)。此外，利用[KR97b]„ 级数

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} b^n v a^{*n}$$

在 $\mathcal{M}$ 中按强算子拓扑（SOT）收敛，而 s 是满足以下条件的偏等距算子：s^*s 是到 $K^{\perp}$ 上的投影，且 ss^* 是到 $L^{\perp}$上的投影。至此，证明完成。

□

现在我们证明本节的主要结果。

定理 3.7。 设 a、$b \in \mathcal{M} \subset B(H)$ 是等距算子。设 $t \in \mathcal{M}$ 可逆，且满足 $b = tat^{-1}$。则存在酉算子 $u \in \mathcal{M}$ ，使得 $b = uau^*$。

证明。 利用备注 3.4，我们得到 a 的矩阵分解： $K \oplus K^{\perp} \to K \oplus K^{\perp}$ 为 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$，以及 b 的矩阵分解： $L \oplus L^{\perp} \to L \oplus L^{\perp}$ 为 $\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$。定义 u：$K \oplus K^{\perp} \to L \oplus L^{\perp}$ 为

$$\begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

其中 $w \in \mathcal{M}$ 的定义同引理 3.5，而 $s \in \mathcal{M}$ 的定义同引理3.6。由于 w：$K \to L$ 是酉算子，且 s: $K^{\perp} \to L^{\perp}$ 是酉算子，因此可得$u \in B(H)$ 是酉算子。此外，$u \in \mathcal{M}$。再次利用引理 3.5 和 3.6，可得 $b = uau^*$。□

4 C^*-极端点的几何方面

本节包含定理 A 和B 的证明。众所周知，$B(H)_1$ 的线性极端点恰好是等距算子和余等距算子。在 [HMP81，定理 1 中，1], Hopenwasser 等人刻画了闭单位球 C^*-极端点 $B(H)_1$。特别地，他们证明了C^* $B(H)_1$ 的极端点与其线性极端点重合。本节旨在刻画一般冯·诺伊曼代数中闭单位球的 C^*-极端点。此外，我们还将证明，在冯·诺伊曼代数的情形下，线性极端、强极端以及 C^*-极端点这几个概念完全一致。

下面定理的思想是在冯·诺伊曼代数的框架下应用一种沃尔德分解型定理，其思路与 [HMP81，定理 1 中1] 针对 $B(H)$ 情形所采用的相同。

定理 4.1。设 $\mathcal{M} \subset B(H)$ 是一个冯·诺依曼代数。等距算子和余等距算子是 $\mathcal{M}_1$ 的 C^*- 极端点。

证明。设 $v \in \mathcal{M}_1$ 是一个等距算子。利用引理 C^* 中给出的 3.1-极端点的另一种刻画，假设

$$v = t_1^* a_1 t_1 + t_2^* a_2 t_2,$$

其中 a_1，$a_2 \in \mathcal{M}_1$ 和 t_1，t_2 是 $\mathcal{M}$ 中的可逆元，且 $\sum_{i=1}^{2} t_i^* t_i = \mathbf{1}$。定义 t：$H \to H \oplus H$，使得对每个 $\xi \in H$，都有 $t\xi = (t_1\xi,\ t_2\xi)$。于是 $t^*t = t_1^*t_1 + t_2^*t_2 = \mathbf{1}$。因此，$t$ 是一个等距算子。设 $p = tt^*$ 是到 Range(t) 上的投影。设 $a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$。则 $t^*at = t_1^*a_1t_1 + t_2^*a_2t_2 = v$。现在 $v^*v = (t^*at)^*(t^*at) = t^*a^*tt^*at = t^*a^*pat$。由于 $0 \le p \le \mathbf{1}$，我们有$a^*pa \le a^*a$。因此，

$$v^*v = t^*a^*pat \le t^*a^*at. \tag{4.1}$$

注意到

$$t^*a^*at = t_1^*a_1^*a_1t_1 + t_2^*a_2^*a_2t_2. \tag{4.2}$$

由于 $\|a_i\| \le 1$，我们得到 $0 \le a_i^*a_i \le \mathbf{1}$。因此，

$$t_1^*a_1^*a_1t_1 + t_2^*a_2^*a_2t_2 \le t_1^*t_1 + t_2^*t_2 = \mathbf{1}. \tag{4.3}$$

将方程（4.1）、（4.2）和（4.3合并，可得

$$\mathbf{1} = v^*v \le t_1^*a_1^*a_1t_1 + t_2^*a_2^*a_2t_2 \le \mathbf{1}.$$

因此，等号处处成立，特别是 $t_1^*a_1^*a_1t_1+t_2^*a_2^*a_2t_2=\mathbf{1}=t_1^*t_1+t_2^*t_2$。由此可得

$$t_1^*(\mathbf{1}-a_1^*a_1)t_1+t_2^*(\mathbf{1}-a_2^*a_2)t_2=0 \tag{4.4}$$

注意到，上述等式（4.4）中的每一项都是正的。因此，每一项都必须为零，即 $t_i^*(\mathbf{1}-a_i^*a_i)t_i=0$ 对于 $i=1$，2。由于t_i均可逆，因此可得 $\mathbf{1}-a_i^*a_i=0$，即 $a_i^*a_i=\mathbf{1}$ 对于 $i=1$，2。因此， a_1 和 a_2 是 $\mathcal{M}$中的等距算子。

现在证明 a_1 和 a_2 与 v相似。再次利用等式（4.1）、（4.2）和（4.3），可得 $t^*a^*pat=t^*a^*at$，即 $t^*a^*(\mathbf{1}-p)at=0$。注意到 $a^*(\mathbf{1}-p)a\geq 0$ 且

$$0=t^*a^*(\mathbf{1}-p)at=((\mathbf{1}-p)^{1/2}at)^*((\mathbf{1}-p)^{1/2}at).$$

因此，$((\mathbf{1}-p)^{1/2}at)=0$。这给出 $(\mathbf{1}-p)at=0$，也就是说， $at=pat=tt^*at$。因此，值域$(at)\subset$值域(t)。现在，由 [Dou66定理 1], 可知，存在一个算子 $b\in B(H)$，使得 $at=tb$。因此，

$$t^*at=t^*tb=b.$$

但是 $t^*at=v$，因此 $v=b$。所以，我们有 $at=tv$，也就是说，$(a_1t_1,\ a_2t_2)=(t_1v,\ t_2v)$。特别地， $a_1t_1=t_1v$ 和 $a_2t_2=t_2v$。等价地，

$$a_1=t_1vt_1^{-1}\text{ and }a_2=t_2vt_2^{-1}.$$

因此， a_1 和 a_2 相似于 v。现在利用定理3.7，存在酉算子u_1 和 u_2 属于 $\mathcal{M}$，使得 $a_1=u_1vu_1^*$ 且 $a_2=u_2vu_2^*$。因此， v 是 C^*- 极端点 $\mathcal{M}_1$。类似地，可以证明每个余等距算子都是C^*-极端点 $\mathcal{M}_1$。证明完毕。□

回忆一下，巴拿赫空间 X 是**一致凸的**，如果对于给定的 $\epsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得只要 $\|x\|=1=\|y\|$ 且 $\|x-y\|\geq\epsilon$，就有 $\|x+y\|\leq 2(1-\delta)$。此外，任何一致凸空间都是自反空间。参见[Die84]。对于 $1<p<\infty$， $L_p(\mu)$ 空间是众所周知的一致凸空间实例。现在，我们证明定理 4.1在一致凸空间 X中强极端点背景下的一个几何类比。回忆一下， $T\in B(X)$ 是余等距算子，当且仅当 $T^*\in B(X^*)$ 是等距算子。

定理 4.2。设 X 是一致凸空间。设 $T\in B(X)_1$ 是等距算子。那么， T 是 $B(X)_1$ 的强极端点。类似地，若 X^* 是一致凸的，那么 $B(X)$ 中的每个余等距算子也是 $B(X)_1$ 的强极端点。

证明。设 R_n和 S_n是 $B(X)$中的两个序列，使得 $\frac{1}{2}(R_n+S_n)\to T$。令 $\xi\in X$ 满足 $\|\xi\|=1$。由于 T 是等距算子，且 $\|\xi\|=1$，因此可得 $\|T\xi\|=1$。于是 $T\xi$ 是 X_1的线性极端点。现在$T(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(R_n(\xi)+S_n(\xi))$. 由于 X一致凸，容易看出 $\|R_n(\xi)-S_n(\xi)\|\to 0$ 在所有满足 $\|\xi\|=1$的 $\xi\in X$ 上一致成立。因此

$\|R_n - S_n\| \to 0$。因此， T 是 $B(X)_1$的强极端点。在 X^* 一致凸的情况下，利用映射 $S \mapsto S^*$ 是从 $B(X)$到$B(X^*)$的满射等距映射这一事实，容易得出余等距算子的类似结果。证明完毕。 □

注 4.3. 请注意，强极端性仅取决于 X 的一致凸性，而不取决于我们所使用的具体算子 T 。

下一组结果由定理B 大幅加强，这里列出它们仅是为了说明本文所发展的技巧。

推论 1. 设 $\mathcal{M} \subset B(H)$ 是一个冯·诺依曼代数。等距算子和余等距算子是 $\mathcal{M}_1$ 的强极端点。

证明. 由定理 4.2立即可得。 □

命题 4.4. 设 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ 是一族希尔伯特空间。考虑 $\oplus_\alpha B(H_\alpha)$ (ℓ_∞-和)。设 T 是$(\oplus B(H_\alpha))_1$， 的线性极端点，则 T 是$(\oplus B(H_\alpha))_1$ 的强极端点。此外，若 $\mathcal{M}$ 是一个预对偶具有拉东-尼科迪姆性质（*RNP*）的冯·诺依曼代数，则 $\mathcal{M}_1$ 的每个线性极端点都是 $\mathcal{M}_1$ 的强极端点。

证明。若 T 是 $(\oplus B(H_\alpha))_1$, 的线性极端点，则容易看出，每个 $T(\alpha)$ 都是 $B(H_\alpha)_1$的线性极端点。更确切地说，每个 $T(\alpha)$ 都是 $B(H_\alpha)$中的等距算子或余等距算子。由定理 4.2 和备注 4.3 可立即得到， T 是 $(\oplus B(H_\alpha))_1$的强极端点。对于 $\mathcal{M}$是其预对偶具有拉东-尼科迪姆性质的冯·诺依曼代数的情形，由 [Chu91, 定理], 可知 $\mathcal{M} = \oplus_\alpha B(H_\alpha)$ (ℓ_∞-和)。应用上述相同的论证，我们得出 $\mathcal{M}_1$ 的每个线性极端点也是 $\mathcal{M}_1$的强极端点。□

下面，我们将命题 4.4推广到 C^*-极端情形。具体而言，我们证明，两个 ℓ_∞-代数的直和中的元素是 C^*-极端点，当且仅当它在每个坐标上都是 C^*-极端点。由于下一定理将涉及多个C^*-代数，我们用相应C^*-代数的单位元作为下标。

定理 4.5. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 为 C^* 代数，且满足 $\mathcal{C} = \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ （ℓ_∞ 和）。那么 $x = (a, b)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的一个 C^*-极端点，当且仅当 a 是 $\mathcal{A}_1$ 的一个 C^*-极端点，且 b 是 $\mathcal{B}_1$ 的一个 C^*- 极端点。

证明。 设 $x = (a, b)$ 是 $\mathcal{C}_1$ 的一个 C^*-极端点。设 $a = t_1^* a_1 t_1 + t_2^* a_2 t_2$, 其中 a_1, $a_2 \in \mathcal{A}_1$ 和 $t_1, t_2 \in \mathcal{A}$ 均可逆，且满足 $t_1^* t_1 + t_2^* t_2 = \mathbf{1}_\mathcal{A}$。现在， $x = (a, b)$ 可写为

$$(a,b) = \left(t_1^*, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_\mathcal{B}\right)(a_1,b)\left(t_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_\mathcal{B}\right) + \left(t_2^*, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_\mathcal{B}\right)(a_2,b)\left(t_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_\mathcal{B}\right). \tag{4.5}$$

注意，方程 4.5 将 x 表示为一个真 C^*-凸组合，其各项为 (a_1, b)、$(a_2, b) \in \mathcal{C}_1$。由于 (a, b) 是 $\mathcal{C}_1$ 的一个 C^*-极端点，因此存在酉算子 $u = (u_1, u_2)$ $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{C}$ 使得

$$(a_1, b) = (u_1^*, u_2^*)(a, b)(u_1, u_2), \text{ and } (a_2, b) = (v_1^*, v_2^*)(a, b)(v_1, v_2).$$

显然， u_1 和 u_2 是 $\mathcal{A}$ 中的酉算子，而 v_1 和 v_2 是 $\mathcal{B}$中的酉算子。因此$a_1 = u_1^* a u_1$ 和 $a_2 = v_1^* a v_1$。于是， a 是 $\mathcal{A}_1$的一个 C^*-极端点。类似地，可以证明 b 是 $\mathcal{B}_1$的一个 C^*-极端点。

反过来，设 a 和 b 分别是 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{B}_1$ 的 C^*-极端点。令

$$(a, b) = (s_1^*, s_2^*)(a_1, b_1)(s_1, s_2) + (t_1^*, t_2^*)(a_2, b_2)(t_1, t_2),$$

其中 (a_1, b_1),(a_2, b_2) $\in \mathcal{C}_1$ 且 $(s_1, s_2), (t_1, t_2)$ 是 $\mathcal{C}$中可逆的，使得 $(s_1, s_2)^*(s_1, s_2)$ + $(t_1, t_2)^*(t_1, t_2)$ $= \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$。因此

$$a = s_1^* a_1 s_1 + t_1^* a_2 t_1 \text{ and } b = s_2^* b_1 s_2 + t_2^* b_2 t_2,$$

其中 $s_1, t_1 \in \mathcal{A}$ 和 $s_2, t_2 \in \mathcal{B}$ 是满足 $s_1^* s_1 + t_1^* t_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$和 $s_2^* s_2 + t_2^* t_2 = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$的可逆元素，且 $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_1$ 和 $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_1$。由于 a 和 b分别是 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{B}_1$的 C^*-极端点，因此存在酉算子 $u_1, u_2 \in \mathcal{A}$和 $v_1, v_2 \in \mathcal{B}$，使得 $a_i = u_i^* a u_i$和 $b_i = v_i^* b v_i$对 $i = 1, 2$成立。定义 $w_1 = (u_1, v_1)$ $w_2 = (u_2, v_2)$ $\in \mathcal{C}$。显然， $w_1, w_2 \in \mathcal{C}$是酉算子，并且 (a_i, b_i) $= w_i^*(a, b)w_i$对 $i = 1, 2$成立。因此 (a, b) 是 $\mathcal{C}_1$的一个 C^*-极端点。证明完毕。□

下面的推论是定理 4.5 的连续版本。回顾一下，$C(\Omega\ \mathcal{A})$ 表示含幺 C^*-代数，其中 Ω 是紧豪斯多夫空间，而 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。

推论 2. 设 f 是 $C(\Omega\ \mathcal{A})_1$ 的 C^*-极端点。设 $\omega_0 \in \Omega$ 是一个孤立点。那么， $f(\omega_0)$ 是 $\mathcal{A}_1$ 的 C^*-极端点。

证明。首先注意到 $C(\Omega\ \mathcal{A})$ 与 $C(\Omega 0, \mathcal{A}) \oplus \mathcal{A}$ (ℓ_∞-直和) $*$-同构，其中 $\Omega_0 = \Omega \setminus \{\omega_0\}$，同构映射为 $f \mapsto (f|_{\Omega_0}, f(\omega_0))$。设$f \in C(\Omega\ \mathcal{A})_1$ 是 C^*-极端点，则由上述 $*$-同构可知，对应元素 $(f|_{\Omega_0}, f(\omega_0)) \in (C(\Omega 0, \mathcal{A}) \oplus_{\mathcal{A}})_1$是 C^*-极端点。现在利用定理 4.5，得到 $f|_{\Omega_0}$和 $f(\omega_0)$ 分别是 $C(\Omega 0, \mathcal{A})_1$ 和 $\mathcal{A}_1$ 的 C^*-极端点。证毕。□

稍后，在命题 4.11中，我们将证明：若孤立点集在 Ω 中稠密，且 $\mathcal{A}$ 是冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$，那么任意 C^*- 极端点 f 属于 $C(\Omega\ \mathcal{M})_1$ 均满足 $f(\omega)$ 是一个 C^*- 极端点，属于 $\mathcal{M}_1$，对每个 $\omega \in \Omega$ 都成立。

为了证明定理 A，我们需要下面这个或许众所周知的引理。

引理 4.6. 设 $x \in \mathcal{M}_1$。存在偏等距算子 $v_1, v_2 \in \mathcal{M}_1$ ，使得

$$x = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

证明。设 $x = v|x|$ 是 x的极分解，其中 $v \in \mathcal{M}$ 是一个偏等距算子，其初始空间为 ker(x)$^{\perp}$，终空间为 Range(x)。设 $u_1 = |x| + i\sqrt{\mathbf{1} - |x|^2}$ 和 $u_2 = |x| - i\sqrt{\mathbf{1} - |x|^2}$。由于 $|x|$ 是一个压缩算子，因此 u_1 和 u_2 是 $\mathcal{M}$中定义良好的酉算子，且$|x| = \frac{u_1+u_2}{2}$。于是，$x = \frac{vu_1+vu_2}{2}$。定义 $v_1 = vu_1$ 和 $v_2 = vu_2$。于是，$x = \frac{v_1+v_2}{2}$。显然，对于每个 $v_i \in \mathcal{M}$，它都是一个偏等距算子，其初始空间为 ker(x)$^{\perp}$，终空间为 Range(x)。□

现在我们回顾 [KR97b]中的比较定理。关于冯·诺依曼代数的标准术语、记号和基本定义，请参阅 [KR97a、KR97b] 。

定理 4.7。 *(*[KR97b，定理 6.2。7]*)* 设 $\mathcal{M}$ 为一个冯·诺依曼代数。设 e和 f 是 $\mathcal{M}$中的投影。存在中心投影 p、q、$r \in \mathcal{M}$，使得 $p + q + r = \mathbf{1}$ 具有如下性质：若 $pe \sim pf$，且若 $q \neq 0$，则$qe \prec qf$。若 $r \neq 0$，则 $rf \prec re$。

利用上述比较定理，我们对冯·诺依曼代数中的压缩算子有如下重要观察。

定理 4.8。 设 $x \in \mathcal{M}_1$。存在偏等距算子 $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ 和中心投影 p_1, p_2, $p_3 \in \mathcal{M}$，使得 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$，并且满足以下条件：

(i) 要么 $p_1 = 0$，要么 p_1x_1 和 p_1x_2 是 $p_1\mathcal{M}$ 中的酉算子；*(ii)* 要么 $p_2 = 0$，要么 p_2x_1 和 p_2x_2 是 $p_2\mathcal{M}$ 中的非酉等距算子；*(iii)* 要么 $p_3 = 0$，要么 p_3x_1 和 p_3x_2 是 $p_3\mathcal{M}$ 中的非酉余等距算子。

证明。 令 $e \in \mathcal{M}$ 为 ker(x) 上的投影，令 $f \in \mathcal{M}$ 为到 Range(x) 上的投影$^{\perp}$。将定理 4.7 应用于投影 e 和 f，可得中心投影 p_1、p_2、p_3，使得 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$，并且存在 $w_1 \in p_1\mathcal{M}$、$w_2 \in p_2\mathcal{M}$、$w_3 \in p_3\mathcal{M}$，具有如下性质：

(i) 要么 $p_1 = 0$，要么 $w_1^*w_1 = p_1e$ 和 $w_1w_1^* = p_1f$；(ii) 要么 $p_2 = 0$，要么 $w_2^*w_2 = p_2e$ 和 $w_2w_2^* < p_2f$；(iii) 要么 $p_3 = 0$，要么 $w_3^*w_3 < p_3e$ 和 $w_3w_3^* = p_3f$。

对于 $i = 1, 2, 3$；若 $p_i = 0$，我们取 $w_i = 0$。由于 $x \in \mathcal{M}_1$，根据引理 4.6，存在偏等距算子 $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$，其初始空间为 ker(x)$^{\perp}$，终空间为 Range(x)，且满足 $x = \frac{v_1+v_2}{2}$。注意，v_1, v_2 的矩阵分解：ker(x) $\oplus$ ker(x)$^{\perp} \to$ Range(x)$^{\perp} \oplus$ Range(x) 可表示为

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \text{ and } v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}.$$

令 $w = w_1 + w_2 + w_3$。注意，$w \in \mathcal{M}$ 是一个偏等距算子，满足 $w^*w \leq e$和 $ww^* \leq f$。定义 x_1，x_2: ker(x) $\oplus$ ker(x)$^{\perp} \to$ 值域(x)$^{\perp} \oplus$

值域(x)为

$$x_1 = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix} \text{ and } x_2 = \begin{bmatrix} -w & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

显然，$x = \frac{x_1+x_2}{2}$。回忆一下，$w_1 \in p_1\mathcal{M}$，$w_2 \in p_2\mathcal{M}$，且 $w_3 \in p_3\mathcal{M}$。因此，p_1x_1 和 p_1x_2 的矩阵表示为

$$p_1x_1 = \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & p_1v_1 \end{bmatrix} \text{ and } p_1x_2 = \begin{bmatrix} -w_1 & 0 \\ 0 & p_1v_2 \end{bmatrix}.$$

由于 p_1 是中心投影，w_1 是从 ker(x) 到 Range$(x)^\perp$ 的酉算子，而 v_1，v_2 是从 ker$(x)^\perp$ 到 Range(x) 的酉算子，因此，若 $p_1 \neq 0$，则 p_1x_1 和 p_1x_2 是 $p_1\mathcal{M}$ 中的酉算子。类似地，若 $p_2 \neq 0$，则 p_2x_1 和p_2x_2 是 $p_2\mathcal{M}$ 中的非酉等距算子；若 $p_3 \neq 0$，则 p_3x_1 和 p_3x_2 是 $p_3\mathcal{M}$中的非酉余等距算子。证明完毕。□

现在我们证明定理 A。

证明。设 $x \in \mathcal{M}_1$ 是 C^*-极点。 $\mathcal{M}_1$。由定理 4.8，存在偏等距算子 x_1 和 x_2，其定义与定理4.8 的证明中相同，且满足 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$。由于 x 是 C^*-极点，因此 x与 x_1 酉等价，且 x_2。也就是说，存在酉算子 u_1，$u_2 \in \mathcal{M}$ 使得

$$x = u_1^*x_1u_1, \text{ and } x = u_2^*x_2u_2.$$

再次利用定理 4.8，可得存在中心投影 $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{M}$，使其满足 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$，且条件 (i)、(ii) 和 (iii) 均成立。现在，$p_1x = p_1u_1^*x_1u_1 = p_1u_1^*p_1x_1p_1u_1$。由条件 (i)（定理 4.8）可知，或者 $p_1 = 0$，或者 p_1x_1 是 $p_1\mathcal{M}$中的酉算子。此外，若 $p_1 \neq 0$，则 p_1u_1 是 $p_1\mathcal{M}$中的酉算子。因此，或者 $p_1 = 0$，或者 p_1x 是 $p_1\mathcal{M}$中的酉算子。类似地，可以证明，或者 $p_2 = 0$，或者 p_2x 是 $p_2\mathcal{M}$中的非酉等距算子；并且或者 $p_3 = 0$，或者 p_3x 是 $p_3\mathcal{M}$中的非酉余等距算子。因此，我们得到了满足条件 (i)、(ii) 和 (iii) 的所需中心投影。

反过来，若存在中心投影 p_1，p_2，$p_3 \in \mathcal{M}$ 使得 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$ 且条件（i）、（ii）和（iii）成立，那么根据定理 4.1，每个 p_ix都是（$p_i\mathcal{M}$）的闭单位球中的一个 C^*-极端点$_1$，其中$i = 1, 2, 3$。应用定理 4.5，可得 $x = p_1x + p_2x + p_3x$ 是C^*的一个 -极端点 $\mathcal{M}_1$。证明完毕。□

与 $B(H)$ 中的情形类似，其中每个压缩算子都是一个等距算子和一个余等距算子的平均值。作为定理 A的一个应用，我们得到冯·诺伊曼代数的一个类似结果。

推论 3. 设 $x \in \mathcal{M}_1$。存在 $\mathcal{M}_1$ 的 C^*-极端点 x_1 和 x_2，使得 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$。

证明. 若 $x = 0$，则取 $x_1 = \mathbf{1}$ 和 $x_2 = -\mathbf{1}$。因此，我们有 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$。现在假设 $x \neq 0$。按照方程 4.6 定义 x_1 和 x_2。根据定理 4.8，x_1 和 x_2 均满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)，并且还有 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$。由定理 A 可知，x_1 和 x_2 是 $\mathcal{M}_1$ 的 C^*-极端点。证明完毕。□

作为定理 A 的另一个应用，我们得到以下定理，该定理刻画了某些冯·诺伊曼代数的 C^*-极端点。

定理 4.9。设 $\mathcal{M} \subset B(H)$ 是一个冯·诺伊曼代数。那么，$\mathcal{M}_1$ 的唯一C^*-极端点是等距算子和余等距算子，当且仅当 $\mathcal{M}$是以下情形之一：

(i) 有限冯·诺伊曼代数；*(ii)* 适当无限因子；或 *(iii)* 有限冯·诺伊曼代数与适当无限因子的直和。

证明。首先，假设 $\mathcal{M}_1$ 的唯一 C^*-极端点是等距算子和余等距算子。如果 $\mathcal{M}$是有限冯·诺伊曼代数或适当无限因子，则无需证明。现在，我们考虑 $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{R}$ (ℓ_∞-和) 的情形，其中 $\mathcal{N}$ 是有限冯·诺伊曼代数，而 $\mathcal{R}$ 是适当无限冯·诺伊曼代数。如果 $\mathcal{R}$ 是适当无限因子，则结论成立。因此，如果可能，假设 $\mathcal{R}$ 不是因子。那么，存在一个中心投影$p \in \mathcal{R}$，使得 $p \neq 0$、$\mathbf{1}_\mathcal{R}$，其中 $\mathbf{1}_\mathcal{R}$ 表示冯·诺伊曼代数 $\mathcal{R}$的单位元。因此 $\mathbf{1}_\mathcal{R} - p \neq 0$。注意到 $\mathcal{R} = p\mathcal{R} \oplus (\mathbf{1}_\mathcal{R} - p)\mathcal{R}$ (ℓ_∞-和)。在这种情况下，我们可以选取一个等距算子 $v \in p\mathcal{R}$ 和一个余等距算子 $w \in (\mathbf{1}_\mathcal{R} - p)\mathcal{R}$，使得 v 和 w 都不是酉算子；于是利用定理 4.1 和定理 4.5，有 $u = (v, w)$ 是 C^*-极端点，属于 $\mathcal{R}_1$，从而 $(\mathbf{1}_\mathcal{N}, u)$ 是 C^*-极端点，属于 $\mathcal{M}_1$，其中 $\mathbf{1}_\mathcal{N}$ 表示冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}$的单位元。但请注意，$(\mathbf{1}_\mathcal{N}, u)$ 在$\mathcal{M}$中既不是等距算子，也不是余等距算子，这就产生了矛盾。

反之，设 $r \in \mathcal{M}$ 是一个中心投影，使得 $r = 0$ 或$r\mathcal{M}$ 是有限冯·诺依曼代数，而 $\mathbf{1} - r = 0$ 或（$\mathbf{1} - r$）$\mathcal{M}$ 是适当无限因子。注意，$\mathcal{M} = r\mathcal{M} \oplus$ （$\mathbf{1} - r$）$\mathcal{M}$ （ℓ_∞-和）。设 $x \in \mathcal{M}_1$ 是C^*-极值点。根据定理 A，存在中心投影 p_1、p_2、$p_3 \in \mathcal{M}$，使得 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$，并且条件 (i)、(ii) 和 (iii) 成立。若 $\mathbf{1} - r = 0$，则 $\mathcal{M}$ 是有限冯·诺依曼代数。在这种情况下，根据条件 (i)、(ii) 和 (iii)，我们有 x 是 $\mathcal{M}$ 中的酉算子。若 $r = 0$，则 $\mathcal{M}$ 是适当无限因子。因此，p_i 中至少有一个等于 $\mathbf{1}$。于是，再由条件 (i)、(ii) 和 (iii)，可得 x 要么是等距算子，要么是余等距算子。

最后，我们考虑 $r \neq 0$ 且 $\mathbf{1} - r \neq 0$ 的情形。更确切地说，$\mathcal{M}$是一个有限冯·诺依曼代数 $r\mathcal{M}$ 与一个适当无限因子（$\mathbf{1}-r$）$\mathcal{M}$的直和。由条件（ii），我们有 $p_2 = 0$ 或 $p_2 x$ 是等距算子

在 $p_2\mathcal{M}$ 中。由于 r 是一个中心投影，可知 p_2rx 是$p_2r\mathcal{M}$中的等距算子。注意，$p_2r\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺依曼代数，因为 $r\mathcal{M}$ 也是如此。因此，$p_2 = 0$ 或 p_2rx 是 $p_2r\mathcal{M}$中的酉算子。类似地，由条件 (iii)，$p_3 = 0$ 或 p_3rx 是 $p_3r\mathcal{M}$中的酉算子。定义 $q = p_1 + p_2r + p_3r$。于是$p_1x + p_2rx + p_3rx$ 是 $q\mathcal{M}$中的酉算子。现在注意，$p_2(\mathbf{1} - r)$ 和 $p_3(\mathbf{1} - r)$ 是 $(\mathbf{1} - r)\mathcal{M}$ 中的相互正交中心投影，并且 $(\mathbf{1} - r)\mathcal{M}$ 是一个适当无限因子。因此，$p_2(\mathbf{1} - r) = 0$ 或 $p_3(\mathbf{1} - r) = 0$。若$p_2(\mathbf{1} - r) = 0$，则 $q + p_3(\mathbf{1} - r) = \mathbf{1}$。现在，若 $p_3 \neq 0$，则由条件 (iii)，$p_3(\mathbf{1} - r)x$ 是 $p_3(\mathbf{1} - r)\mathcal{M}$中的余等距算子。由于 qx 是 $q\mathcal{M}$ 中的酉算子，且$p_3(\mathbf{1} - r)x$ 是 $p_3(\mathbf{1} - r)\mathcal{M}$中的余等距算子，因此 $x = qx + p_3(\mathbf{1} - r)x$ 是 $\mathcal{M}$中的余等距算子。类似地，当 $p_3(\mathbf{1} - r) = 0$时，有 $x = qx + p_2(\mathbf{1} - r)x$是 $\mathcal{M}$中的等距算子。证明完毕。□

现在证明定理 B。

证明。$(i) \implies (ii)$：设 x是 C^*-极值点。由定理 $\mathcal{M}_1$，可得 A，x 是一个偏等距算子。利用定理 2.1，还需验证x 满足方程 2.1。为此，设 $e = x^*x$ 和 $f = xx^*$。于是，利用定理 A 中的条件（ i ）、（ ii ）和（ iii ），我们得到

$$\begin{aligned}
&\text{if } p_1 \neq 0, \text{ then } p_1e = p_1 \text{ and } p_1f = p_1,\\
&\text{if } p_2 \neq 0, \text{ then } p_2e = p_2 \text{ and } p_2f \neq p_2,\\
&\text{if } p_3 \neq 0, \text{ then } p_3e \neq p_3 \text{ and } p_3f = p_3.
\end{aligned}$$

因此，

$$(\mathbf{1} - e) = (\mathbf{1} - e)p_1 + (\mathbf{1} - e)p_2 + (\mathbf{1} - e)p_3 = (\mathbf{1} - e)p_3.$$

类似地，

$$(\mathbf{1} - f) = (\mathbf{1} - f)p_1 + (\mathbf{1} - f)p_2 + (\mathbf{1} - f)p_3 = (\mathbf{1} - f)p_2.$$

固定 $y \in \mathcal{M}$。利用中心投影 p_i'彼此相互正交这一事实，我们得到

$$(\mathbf{1} - e)y(\mathbf{1} - f) = (\mathbf{1} - e)p_3y(\mathbf{1} - f)p_2 = 0.$$

因此，x 是 $\mathcal{M}_1$的线性极端点。

$(ii) \implies (i)$：由于 x是 $\mathcal{M}_1$的线性极端点。根据定理 2.1，x是偏等距算子，并满足公式 2.1。令 $e = x^*x$ 且 $f = xx^*$。令 p_3表示（$\mathbf{1} - e$）的中心支撑，并令 p_2表示（$\mathbf{1} - f$）的中心支撑。

断言： $p_2p_3 = 0$。

反设 $p := p_2p_3 \neq 0$。那么 p 是一个非零中心投影。由于 $p \leq p_3$ 和 $p \neq 0$，我们有 $p(\mathbf{1} - e) \neq 0$。同理，由于$p \leq p_2$ 和 $p \neq 0$，可得 $p(\mathbf{1} - f) \neq 0$。众所周知，在冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}$中，若 r，$s \in \mathcal{N}$是非零投影，则 $r\mathcal{N}s \neq \{0\}$。

将此结论应用于冯·诺依曼代数 $\mathcal{N} = p\mathcal{M}p$，其中 $r = p(\mathbf{1} - e)$ 且$s = p(\mathbf{1} - f)$，得到

$$(p(\mathbf{1} - e))(p\mathcal{M}p)(p(\mathbf{1} - f)) \neq \{0\}.$$

由于 p 是中心投影，因此 $(p(\mathbf{1} - e))(p\mathcal{M}p)(p(\mathbf{1} - f)) = p(\mathbf{1} - e)\mathcal{M}(\mathbf{1} - f)p$。所以，$p(\mathbf{1} - e)\mathcal{M}(\mathbf{1} - f)p \neq \{0\}$。于是 $(\mathbf{1} - e)\mathcal{M}(\mathbf{1} - f) \neq \{0\}$，这与方程 2.1 矛盾。因此，$p_2p_3 = 0$。

定义 $p_1 = \mathbf{1} - p_2 - p_3$。那么，$p_1$、$p_2$、$p_3 \in \mathcal{M}$ 是满足 $p_1 + p_2 + p_3 = \mathbf{1}$ 的中心投影。现在，我们证明 p_1、p_2、p_3 满足条件 (i)、(ii) 和 (iii)。由于 $\mathbf{1} - e \leq p_3$，我们有 $p_2(\mathbf{1} - e) \leq p_2p_3 = 0$。因此$p_2(\mathbf{1} - e) = 0$，也就是说，$p_2e = p_2$。于是 $(p_2x)^*(p_2x) = p_2x^*x = p_2e = p_2$。因此，$p_2x$ 是 $p_2\mathcal{M}$ 中的等距算子，除非 $p_2 = 0$。当$p_2 \neq 0$时，它是非酉的；因为 $p_2(\mathbf{1} - f) \neq 0$ 意味着 $p_2f \neq f$。但是 $(p_2x)(p_2x)^* = p_2xx^* = p_2f \neq f$。因此，它不可能是 $p_2\mathcal{M}$ 中的酉算子。类似地，可以证明，若 $p_3 \neq 0$，则 p_3x 是 $p_3\mathcal{M}$ 中的非酉余等距算子。现在，我们证明 p_1x 是 $p_1\mathcal{M}$中的酉算子，除非 $p_1 \neq 0$。由于 p_1 和 p_3 是互相正交投影，且 $(\mathbf{1} - e) \leq p_3$ 意味着 $p_1(\mathbf{1} - e) \leq p_1p_3 = 0$。因此 $p_1(\mathbf{1} - e) = 0$，也就是说，$p_1e = p_1$。同样，由于 p_1 和 p_2 是互相正交投影，且 $(\mathbf{1} - f) \leq p_2$，我们得到 $p_1f = p_1$。因此，$(p_1x)^*(p_1x) = p_1e = p_1$ 且 $(p_1x)(p_1x)^* = p_1f = p_1$。于是，若 $p_1 \neq 0$，则p_1x 是 $p_1\mathcal{M}$ 中的酉算子。因此，x 是 $\mathcal{M}_1$的一个 C^*-极端点。

$(i) \implies (iii)$：由于 x是 C^*-极端点 $\mathcal{M}_1$，根据定理A，存在中心投影 $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{M}$ 使得条件 (i)、(ii) 和 (iii) 成立。现在应用推论 1 和命题 4.4，可得 x 是 $\mathcal{M}_1$ 的强极端点。

$(iii) \implies (ii)$：由每个强极端点都是线性极端点这一事实可立即得出。证明完毕。□

注 4.10。请注意，定理 4.9 的分类方案现在可以确定哪些冯·诺依曼代数的闭单位球的线性极端点恰好是等距算子和余等距算子。

作为定理 B的推论，我们得到以下结果。

推论 4。设 $x \in \mathcal{A}_1$ 是 $\mathcal{A}_1$ 的线性极端点。那么 x 是 $\mathcal{A}_1^{**}$ 的 C^*-极端点。

证明。由定理 2.3，我们知道 x 是 $\mathcal{A}_1^{**}$的线性极端点。利用 $\mathcal{A}^{**}$ 是冯·诺依曼代数这一事实，并应用定理 B，我们得出 x 是 C^*-极端点 $\mathcal{A}_1^{**}$。证明完毕。□

命题 4.11. 设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺依曼代数。设孤立点集 $S \subset \Omega$ 在 Ω 中稠密，且 f 是 $C(\Omega, \mathcal{M})_1$的一个 C^*-极端点。那么，对所有 $\omega \in \Omega$，$f(\omega)$ 都是 $\mathcal{M}_1$ 的一个 C^*-极端点。

证明. 设 $C(\Omega\ \mathcal{M})_1$的一个 C^*-极端点为 f。那么，根据推论 2，对于所有 $\omega \in S$，我们有 $f(\omega)$ 是 $\mathcal{M}_1$ 的一个 C^*-极端点。现在，取 $\omega \in \Omega \setminus S$。根据假设，存在一个由孤立点组成的网 $\{\omega_\alpha\} \subset S$，使得 $\omega_\alpha \to \omega$。由于 f 连续，因此 $f(\omega_\alpha) \to f(\omega)$。应用定理 B 和注 2.2，可知 $\mathcal{M}_1$ 的 C^*-极端点集是闭集。由于对于所有 α， $f(\omega_\alpha)$ 都是 $\mathcal{M}_1$的一个 C^*-极端点，我们得出 $f(\omega)$ 是 $\mathcal{M}_1$的一个 C^*-极端点。证明完毕。□

BJR04 [BJR04，例 44] 指出，即使对于有限维巴拿赫空间 E，函数 $f \in C(\Omega\ E)$ 的逐点几何行为也未必能反映在向量值情形中。相比之下，对于$C(\Omega\ \mathcal{M})$的情形，其中 $\mathcal{M}$ 是一个冯 · 诺依曼代数，我们有以下结果。

命题 4.12。设 $f \in C(\Omega\ \mathcal{M})_1$ 满足：对所有 $\omega \in \Omega$， $f(\omega)$ 都是 C^* 的一个极端点。那么， f 是 $C(\Omega\ \mathcal{M})_1$的一个强极端点。

证明。由于对所有 $\omega \in \Omega$， $f(\omega)$ 都是 C^* 的一个极端点，根据定理 B，可知 $f(\omega)$ 是 $\mathcal{M}_1$ 的一个强极端点。因此， f 是 $C(\Omega\ \mathcal{M})_1$ 的一个线性极端点。现在利用 $C(\Omega\ \mathcal{M})$ □ 是一个 C^*-代数这一事实，并结合定理 B，可得 f 是 $C(\Omega\ \mathcal{M})_1$ 的一个强极端点。

开放问题：

问题 1： 我们不知道定理2.4 是否在 C^*-极端情形下成立。

问题 2： 对于给定的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 和 $f \in C(\Omega\ \mathcal{A})_1$, , f 是C^*-极端的，是否意味着对于所有 $\omega \in \Omega$， $f(\omega)$都是 C^*-极端的?

问题 3： 我们不知道如果 x 是 $\mathcal{A}_1$ 的一个 C^*-极端点，是否意味着 x 也是 $\mathcal{A}_1^{**}$的一个 C^*-极端点。

致谢： 本工作是项目“利用可微性对巴拿赫空间进行分类”的一部分。该项目由印度国家研究基金会（ANRF）核心研究资助项目资助，项目编号为 CRG2023-000595。第一作者是该项目的博士后研究员。作者感谢 Chinmay Ajay Tamhankar 先生（IITM）对定理 4.8 提出的意见和建议。

参考文献

[AS03] Erik M. Alfsen 和 Frederic W. Shultz，《算子代数状态空间的几何》，数学：理论与应用，Birkh¨auser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2003年。1[BJR04] Pradipta Bandyopadhyay、Krzysztof Jarosz 和 T. S. S. R. K. Rao，《巴拿赫空间中的酉元》，《伊利诺伊数学杂志》 **48** 2004 1, 339 351 19 ( )，第 – 期。Cho-Ho [91] Chu，《作为二重对偶空间的冯·诺伊曼代数》，《美国数学会会刊》**112** (1991年)，第4期，999–1000页。12

[DHS93] Patrick N. Dowling、Zhibao Hu 和 Mark A. Smith， $C(K,X)$ 的单位球的极端结构，《巴拿赫空间》（M´erida，1992年），《当代数学》，第144卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年，第81–85页。1, 3[Die84] Joseph Diestel，《巴拿赫空间中的序列与级数》，《数学研究生教材》，第92卷，施普林格出版社，纽约，1984年。11[Dou66] R. G. Douglas，关于希尔伯特空间上算子的主化、因子分解和值域包含，《美国数学会会刊》 **17** 1966 413 415 11 ( ), –。DR S. [03] Dutta 和 T. S. S. R. K. Rao，关于巴拿赫空间中的弱 -极端点，《J. Convex Anal.》 **10** 2003 2, 531 539 1 ( )，第 – 期。FM D. R. Farenick 和 [93] Phillip B. Morenz，某些紧致C^*-凸集的 -极端点，《美国数学会会刊》118（1993年），第3期，765–775页。MR 1139466 1[HMP81] Alan Hopenwasser、Robert L. Moore 和 V. I. Paulsen， C^*-极端点，《Trans. Amer. Math. Soc.》 **266** 1981 1, 291 307 613797 1, 10 ( )，第 – 期。[55] MR Kad Richard V. Kadison，算子代数的等距算子，《数学年刊》 **62** 1955 3, 505 538 1 ( )，第 – 期。KR a Richard V. Kadison 和 John R. [97] Ringrose，《算子代数理论基础》第I卷，《数学研究生学习丛书》，第15卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年，初等理论，1983年原版的重印本。14[KR97b] ，《算子代数理论基础》第II卷，《数学研究生学习丛书》，第16卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997， 1986 2, 8, 9, 14 进阶 [81] 理论，原版的勘误重印本。LP Richard I. Loebl 和 Vern I. Paulsen，关于 C^* -凸性的一些评论，《线性代数及其应用》 **35** 1981 63 78 1, 2, 5, 6 ( )，–。Mag Bojan [01] Magajna，关于 C^* -极端点，《美国数学会会刊》129（2001年），第3期，771–780页。1[Mag16] ， C^*-凸集与完全正映射，《Integral Equations Operator Theory》85（2016年），第1期，37–62页。1[Mag18] ，具有唯一延拓性质的映射与 C*-极端点，《复分析与算子理论》 **12** 2018 8, 1903 1927 1 ( )，第 – 期。Mag 算 [19] 子系统与 C -极端点，《数学研究》247（2019年），第1期，45–62页。1[Phe01] Robert R. Phelps，《肖凯定理讲义》，第二版，《数学讲义》，第 1757， 2001 1 卷，施普林格出版社， [25] 柏林，。Rao T. S. S. R. K. Rao，函数空间与算子空间中的弗雷歇可微性和拟多面体性，《纯粹与应用泛函分析》10 4, 1023 2025 1037 ( )，第 – 期（英文）。[23]

RBDMS B. V. Rajarama Bhat、Repana Devendra、Nirupama Mallick 和 K. Sumesh，纠缠破坏映射的C^*-极端点，《数学物理评论》35（ 2023 3， 2350005, 17 5 ），论文编号：。Tak M. Takesaki，《算子代数理论》I，《数学科学百科全书》，第124卷，施普林格出版社，柏林，2002年，1979年初版重印本，《算子代数与非交换几何》第5卷。4 [02]

Department of Mathematics, Shiv Nadar Institution of Eminence. Gautam Buddha Nagar-201314, India*Email address*: nehahotwani19@gmail.com

Department of Mathematics, Shiv Nadar Institution of Eminence. Gautam Buddha Nagar-201314, India*Email address*: srin@fulbrightmail.org