球形腔体模态的零频极限：关于$\nu = -1$处的形式端点

Mustafa Bakr[1, a)] 和 Smain Amari

Clarendon Laboratory，物理系，牛津大学

球形腔的横磁（TM）模式满足一种色散关系，该关系通过球贝塞尔函数导数的零点将角向特征值 ν 与共振频率联系起来。将此色散关系解析延拓至 $\nu = -1$ ，可得到一个形式上的零频端点，在此处 $j_{-1}(x) = \cos x/x$ 存在根 $x = 0$。我们详细考察这一极限，表明尽管数学上定义良好，但该端点并不对应物理电磁模。角向斯图姆-刘维尔算子的正定性将物理特征值限制在 $\nu \geq 0$，因此 $\nu = -1$ 位于可容许谱之外。我们证明，在这一极限下所有电磁场分量均为零，尽管底层的德拜势 $\Pi = \cos(kr)/kr$ 仍然非平凡，并在原点呈现单极型奇点。势与场之间的这一区别反映了旋度-旋度算子在球对称构型中的核结构。本分析阐明了球面几何中传播电磁模与静态场构型之间的界限，并将形式端点与腔体量子化中关于模态计数的长期问题联系起来。

arXiv:2512.20123v1 [physics.optics] 23 Dec 2025

a)电子邮箱：mustafa.bakr@physics.ox.ac.uk

I. 引言

半径为 a 的理想导体球形腔中的电磁模式具有离散的共振频率，这些频率由腔壁处的边界条件决定。对于横磁（TM）模式，共振条件要求

$$\frac{d}{dx}\left[x j_\nu(x)\right]\Big|_{x=ka} = 0, \tag{1}$$

其中， $j_\nu(x)$是 ν阶球贝塞尔函数， $k = \omega/c$ 是波数， ν是通过对亥姆霍兹方程[1,2]进行分离变量得到的角向特征值。对于要求在两个极点处均满足正则性的完整球面， ν 只能取非负整数 $\ell = 0$、1、2、.....，从而得到熟悉的量子化谱。

近期研究表明，当球形区域因导电锥体或楔形体[3、5–7]而发生改变时，角向特征值 ν 可以连续延拓至整数值之外。这引出了一个自然的问题：连续谱的边界在哪里？当 $\nu = -1$时，TM色散关系（1）存在一个形式上的零频解，因为

$$j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x} \tag{2}$$

且导数 $[x j_{-1}(x)]' = -\sin x$ 在 $x = 0$处为零。这表明 $\nu = -1$代表TM色散曲线的一个零频端点。

本文旨在仔细考察这一形式端点。我们证明，尽管其数学结构定义良好，但极限 $\nu \to -1$ 并不对应于物理电磁模。角向斯图姆-刘维尔算子具有正性约束，因此区域 $-1 < \nu < 0$ 不属于物理谱；当趋近这一极限时，场分量恒等于零。本文的分析阐明了模式谱的数学边界及其与静电构型的联系。

本分析补充了参考文献[6],中对（ν, m） $= (0,0)$边界点的处理：其中相同的特征值 $\lambda = \nu(\nu+1) = 0$ 是从 $\nu = 0$ 而非 $\nu = -1$趋近的。这两种极限都使电磁场消失，但势并非平凡，这反映了二次特征值关系的两个根。

II. 角向特征值问题

A. 斯特姆-刘维尔结构

球坐标中电磁模式的角向依赖由缔合勒让德方程决定

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0, \tag{3}$$

其中， $\lambda=\nu(\nu+1)$ 是分离常数， m 是方位角指标。该方程在区间 $\theta\in(0,\ \pi)$ 上定义了一个奇异的斯特姆-刘维尔问题，区间两极点处均为正则奇点。

斯图姆-刘维尔算子

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta} \tag{4}$$

作用于加权希尔伯特空间 $L^2((0,\ \pi),\ \sin\theta\,d\theta)$。在适当的边界条件下，确保两极点处的正则性，该算子是自伴且半正定的[8]。其特征值满足

$$\lambda=\nu(\nu+1)\geq 0. \tag{5}$$

B. 禁区

正性约束 (5) 立即对 ν 的可取值产生了影响。方程 $\nu(\nu+1)=\lambda$ 的解为

$$\nu=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}. \tag{6}$$

对于 $\lambda\geq 0$，两个根为

$$\nu_+=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\geq 0,\qquad \nu_-=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\leq -1. \tag{7}$$

通常选择 $\nu=\nu_+\geq 0$，以确保球贝塞尔函数 $j_\nu(kr)$ 在原点处保持正则。

区域 $-1<\nu<0$ 对应于 $\lambda<0$，这违反了斯特姆-刘维尔算子的正定性。任何物理本征模的角向特征值都不可能落在这个禁区间内。边界点 $\nu=0$ 和 $\nu=-1$ 都对应于 $\lambda=0$，代表物理谱的边界。

命题 II.1（禁区）。 对于在两个极点处均满足正则性的角向斯图姆–刘维尔问题 （3），没有特征值 ν 满足 $-1 < \nu < 0$。物理谱被限制在 $\nu \geq 0$ 内。

III. 极限 $\nu \to -1$

A. 径向函数

球贝塞尔函数 $j_\nu(x)$ 可通过以下关系解析延拓至非整数阶和负阶

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+1/2}(x), \tag{8}$$

其中 $J_{\nu+1/2}$ 是普通贝塞尔函数。对于 $\nu = -1$，可得

$$j_{-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \frac{\cos x}{x}. \tag{9}$$

函数 $j_{-1}(x)$ 在 $x \to 0$ 时发散，这与 $\nu > -1$ 时的 $j_\nu(x)$ 相反，后者在原点处趋于零，且其渐近形式为 x^ν。

横磁边界条件涉及

$$\frac{d}{dx}\left[x j_{-1}(x)\right] = \frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x, \tag{10}$$

它在 $x = 0$、π、2π.....处为零。根 $x = ka = 0$ 形式上对应于零频率， $\omega = 0$。

B. 角向函数

当 $\nu = -1$ 时，勒让德函数 $P_\nu(\cos\theta)$ 的形式特别简单。利用积分表示或超几何级数，可得[9]

$$P_{-1}(\cos\theta) = 1 \tag{11}$$

对所有 $\theta \in [0, \pi]$均成立。将其直接代入勒让德方程即可验证，其中$\lambda = \nu(\nu+1) = (-1)(0) = 0$ 且 $m = 0$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d(1)}{d\theta}\right) + 0 \cdot 1 = 0. \tag{12}$$

当 $\lambda = 0$ 时， $\Theta = 1$ 确实是一个解。

C. 场分量

为了确定 $\nu = -1$ 处的形式解是否对应一个物理电磁模式，我们考察由德拜势形式推导出的场分量。对于 TM 模式，场为[1]

$$E_r = \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} j_\nu(kr) P_\nu(\cos\theta), \tag{13}$$

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r j_\nu(kr)]\frac{dP_\nu}{d\theta}, \tag{14}$$

$$H_\phi = -i\omega\varepsilon\, j_\nu(kr)\frac{dP_\nu}{d\theta}. \tag{15}$$

现在我们计算 $\nu \to -1$ 极限下的各个分量：

a. 径向电场。由方程（13）可得，

$$E_r = \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} j_\nu(kr) P_\nu(\cos\theta) \xrightarrow{\nu\to-1} \frac{(-1)(0)}{r^2} j_{-1}(kr)\cdot 1 = 0. \tag{16}$$

因子 $\nu(\nu+1) \to 0$ 会湮灭 E_r，无论径向函数的行为如何。

b. 极向电场。由方程（14）可得，

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r j_\nu(kr)]\frac{dP_\nu}{d\theta} \xrightarrow{\nu\to-1} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}[r j_{-1}(kr)]\cdot\frac{d(1)}{d\theta} = 0. \tag{17}$$

角导数 $dP_{-1}/d\theta = 0$ 会湮灭 E_θ。

c. 方位角磁场。由式 (15)，

$$H_\phi = -i\omega\varepsilon\, j_\nu(kr)\frac{dP_\nu}{d\theta} \xrightarrow{\nu\to-1} -i\omega\varepsilon\, j_{-1}(kr)\cdot 0 = 0. \tag{18}$$

同样，角导数为零使该场分量消失。

由对称性，剩余分量（E_ϕ、H_r、H_θ）在 $m = 0$ 的 TM 模式中消失。因此，当 $\nu \to -1$ 时，所有电磁场分量均恒等于零。

定理 III.1 (在 $\nu = -1$ 处场消失)。由角向依赖为 $P_\nu(\cos\theta)$ 的德拜势导出的 *TM* 电磁场分量满足

$$\lim_{\nu\to-1}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \lim_{\nu\to-1}\mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{19}$$

$\nu = -1$ 处的形式解不会产生电磁场。

注释 III.1（在 $\nu = -1$ 处的非平凡势）。 尽管所有电磁场分量在 $\nu \to -1$ 时都消失，德拜势

$$\Pi = j_{-1}(kr)P_{-1}(\cos\theta) = \frac{\cos(kr)}{kr} \tag{20}$$

仍然是非平凡的。此外，该势在原点处奇异：

$$\Pi \sim \frac{1}{kr} \quad (r \to 0). \tag{21}$$

这种奇异性在局部具有与点磁单极子的格林函数势相同的结构，并在形式上与第?? 节讨论的静电构型相联系，尽管腔体问题中并不存在物理源。尽管势存在奇异性，电磁场仍然为零，这反映了旋度-旋度算子的结构；该算子从德拜势中提取场：对于球对称构型，该算子具有非平凡的核。

这与 $\nu = 0$ 处的情况形成对比：在那里，势 $\Pi = j_0(kr) = \sin(kr)/kr$在原点处是正则的（$\Pi(0) = 1$），但仍无法产生电磁场。特征值方程 $\nu(\nu+1) = 0$ 的两个根都会产生零场，但对应的势结构在性质上截然不同： $\nu = 0$处为正则（无源）， $\nu = -1$处为奇异（磁单极子型）。

这种区别阐明了端点解在模态计数中的作用，并进一步说明，排除 $\nu = -1$ 是基于物理可容许性，而非代数上的不一致。

IV. 物理解释

A. 静电极限

所有场分量在 $\nu \to -1$ 时消失，并非数学上的偶然，而是反映了一项深刻的物理约束。分离常数 $\lambda = \nu(\nu+1)$ 在角方程中作为角拉普拉斯算子的特征值出现。当 $\lambda = 0$ 时，角方程化为

$$\nabla^2_\Omega \Theta = 0, \tag{22}$$

其在完整球面上的唯一正则解是常数 $\Theta = 1$。角向依赖为常数意味着场不存在角向变化——但有界腔体内不可能存在既无角向变化又具有有限能量的时谐电磁场。

静电学的情况则有所不同。原点处的点电荷会产生纯径向电场 $\mathbf{E} = (Q/4\pi\varepsilon_0 r^2)\hat{r}$，其角向依赖为常数。有限场能这一要求将这种构型排除在腔体模谱之外——点电荷的静电场在任何包含该电荷的体积内都具有无限能量。因此，形式上的极限 $\nu \to -1$ 代表了传播电磁模与奇异静电构型之间的分界。

B. 与单极子的联系

角函数 $P_{-1}(\cos\theta) = 1$ 对应球对称性——完全不依赖 θ。在麦克斯韦方程组中，球对称电场 $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{r}$ 只有在 $\nabla \cdot$ 时才满足 $\mathbf{E} = 0$，这就是点电荷产生的库仑场。腔体问题中不存在这样的源；奇异的势结构代表的是模式谱的形式极限，而非物理源构型。相应的磁场构型——球对称的 $\mathbf{H} = H_r(r)\hat{r}$——则需要磁单极子，而经典电动力学中并不存在磁单极子。

$\nu = -1$ 处的形式结构由此触及麦克斯韦理论中电源与磁源之间的不对称性。电单极子（点电荷）确实存在，但会产生被排除在腔体模式谱之外的静态场。磁单极子并不存在，因此也不会产生相应的磁场构型。端点 $\nu = -1$ 标志着腔体模形式体系遭遇这些基本限制的边界。

C. 色散曲线边界

图1展示了TM色散关系。物理模式 $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ 位于连续曲线上的离散采样点。随着频率趋近于零，该曲线平滑延伸至 $\nu = -1$，但正性约束 $\nu(\nu+1) \geq 0$ 将区域 $-1 < \nu < 0$ 排除在物理谱之外。点 $\nu = -1$ 表示物理谱趋近但无法越过的渐近边界。对于可取 ν 连续值的圆锥截断腔体，色散曲线 $\nu(\theta_c)$ 的下界仍然有限。随着圆锥角 θ_c 增大，ν 趋近于零，但不会变为负值。

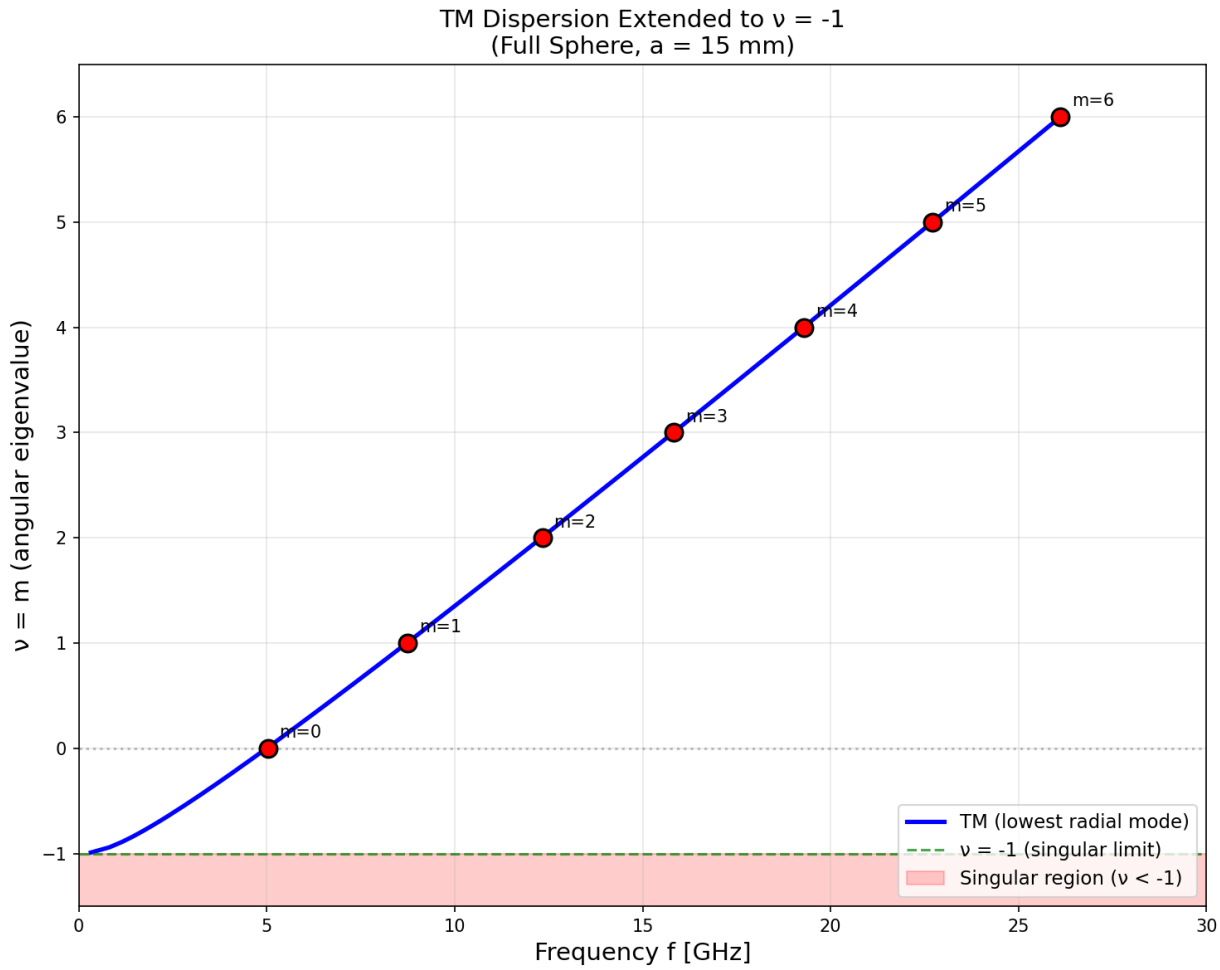

图 1. 球形腔的 TM 色散关系，显示第一个贝塞尔函数导数的根$x'_{\nu,\,1}$ 随角向特征值 ν 的变化。物理谱（实线，$\nu \geq 0$）通过一条连续的色散曲线连接整数模态（实心圆）；通过锥形边界改造可以得到这条曲线。向 $\nu = -1$ 的形式延拓（虚线）在 $\nu \to -1^{-}$ 时趋近于 $x = 0$，对应于零频率。阴影区域 $-1 < \nu < 0$ 因角向斯图姆-刘维尔算子的正性约束 $\nu(\nu+1) \geq 0$ 而被禁止。端点 $\nu = -1$ 表示一个数学边界，在此处所有电磁场分量均为零，从而将腔体模谱与静电构型联系起来。

最小物理值 $\nu = 0$ 对应地带模 $P_0(\cos\theta) = 1$；对于 TM 极化，它给出最低腔体共振频率 $ka = \pi/2$。

V. 与 TE 模式的关系

为求完整，我们考察横向电（TE）模式对应的极限。TE 边界条件要求 $j_\nu(ka) = 0$，其在 $\nu = 0$ 下的第一个根为 $x_{0,\,1} = \pi$，对应有限频率。当 $\nu \to -1$时，函数 $j_{-1}(x) = \cos x/x$ 在$x = \pi/2,\ 3\pi/2,\ \ldots$处为零，这些零点仍为有限且非零的值。

沿 $\nu \to -1$ 路径，TE 模式不存在零频极限。在这方面，TM 模式与 TE 模式的不对称性反映了它们不同的物理特性：TM 模式具有径向电场分量，原则上可以与静电构型相联系；而 TE 模式没有径向电场，无法趋近静电极限。

VI. 结论

球形腔体 TM 色散关系的形式端点 $\nu = -1$ 代表的是一个数学边界，而非物理模式。三项彼此独立的约束将此点排除在物理谱之外：

1. 正定性。 角向斯图姆-刘维尔算子要求 $\nu(\nu+1) \geq 0$，这仅在 $\nu \geq 0$ 或 $\nu \leq -1$时满足。内部区域 $-1 < \nu < 0$ 被禁止。 2. 场的消失。 所有电磁场分量在 $\nu = -1$处恒等消失。因子 $\nu(\nu+1) \to 0$ 消去了径向分量，而常数角函数 $P_{-1}(\cos\theta) = 1$ 的导数为零，从而消去了切向分量。 3. 单极子型奇点。 该 $\nu = -1$构型在形式上与静电单极子结构相连，但基于能量考量，这类结构被排除在腔体模谱之外。

然而，尽管电磁场在 $\nu = -1$ 处消失，德拜势$\Pi = \cos(kr)/kr$ 仍然是标量亥姆霍兹方程一个定义良好、非平凡的解，在原点处具有 $1/r$ 奇点。场的消失反映的是球对称构型下旋度-旋度算子的核结构，而非势本身是平凡的。势与场之间的这种区别关联到规范理论和腔体量子化中更广泛的问题，这些问题仍在积极讨论之中。

该分析划定了球面几何中传播电磁模与静态场构型之间的界限。对于通过圆锥边界获得的连续-ν 模式相关实际应用，物理谱仍受 $\nu \geq 0$ 限定，其下界为 $\nu = m = 0$。然而，$\nu = 0$ 本身不产生电磁场；完整球面上的第一个物理地带模出现在 $\nu = 1$。

参考文献

[1]J. A. Stratton, 《电磁理论》（McGraw-Hill，纽约，1941）。[2]J. D. Jackson, 《经典电动力学》，第3版（Wiley，纽约，1999）。[3]M. Bakr，“具有连续角指标的全矢量麦克斯韦方程”，arXiv:2508.02675（2025）。[4]M. Bakr、T. Zhang 和 S. Amari，“球形腔中的电磁模：角谱、色散关系和自伴扩张的完整理论”，arXiv:2509.08650 [math-ph]（2025）。[5]M. Bakr 和 S. Amari，“奇异方位传播电磁场”，*arXiv:2305.08869*（2023）。[6]M. Bakr 和 S. Amari，“圆柱腔中方位传播电磁波理论”，*arXiv:2505.04756*（2025）。[7]M. Bakr 和 S. Amari，“球形楔中的量子力学：完整解及其对角动量理论的启示”，arXiv:2512.17558（2025）。[8]A. Zettl, 《Sturm-Liouville 理论》，数学调查与专著第121卷（美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2005）。[9] NIST 数学函数数字图书馆，F. W. J. Olver 等编，`https://dlmf.nist.gov/`，第1.1.10版（2023）。[10]P. M. Morse 和 H. Feshbach, 《理论物理学方法》（McGraw-Hill，纽约，1953）。[11]E. W. Hobson, 《球谐与椭球谐理论》（剑桥大学出版社，剑桥，1931）。[12]E. T. Whittaker 和 G. N. Watson, 《现代分析教程》，第4版（剑桥大学出版社，剑桥，1927）。

[13]E. A. Coddington 和 N. Levinson，常微分方程理论（McGraw-Hill，纽约，1955）。
[14]M. Reed 和 B. Simon，现代数学物理方法，第二卷：傅里叶分析、自伴性（Academic Press，纽约，1975）。