arXiv:2512.20167v1 [math.AT] 23 Dec 2025

Kontsevich 瑞士奶酪猜想的组合方法

FLORIAN DE LEGER

摘要。由一个带色歌剧 $\mathcal{P}$ 和一个 $\mathcal{P}$-代数 A，我们构造了一个新的幺半群 SC($\mathcal{P}$) 和一个 Hochschild 对象 Hoch(A)，并在这一对 (Hoch(A),A) 上给出一个 SC($\mathcal{P}$)-作用。我们证明，若 $\mathcal{P}$ 是小n-圆盘幺半群，则 SC($\mathcal{P}$) 等价于瑞士奶酪歌剧 $\mathcal{SC}_n$。这为 Kontsevich 瑞士奶酪猜想提供了一个弱版本（不包含泛性质）。我们将这一结果用于证明，交换代数的第 n 阶 Hochschild-Pirashvili 上链上存在一个 E_{n+1}-作用。

目录

引言 2
致谢 3
1. 预备知识 3
1.1. 带色歌剧及其代数 3
1.2. 瑞士奶酪型歌剧 4
1.3. Voronov 瑞士奶酪歌剧 4
1.4. 相对完全图算子 5
1.5. 范畴论的 Baez-Dolan 加号构造 6
1.6. 带色函子歌剧 6
1.7. 有色运算子的实现 7
1.8. 带色歌剧的凝聚 7
2. 带色歌剧的瑞士奶酪构造 7
2.1. 宽松带基点范畴代数的歌剧 7
2.2. 瑞士奶酪加号构造 8
2.3. 带色歌剧上的代数的 Hochschild 对象 9
2.4. 瑞士奶酪作用 10
3. Kontsevich 瑞士奶酪猜想的弱版本 10
3.1. 复杂度映射 10
3.2. 余端的一个公式 11
3.3. 由复杂度映射诱导的弱等价 12
3.4. 主定理的证明 15
4. 对 Hochschild-Pirashvili 上链的作用 16
4.1. 单纯球面 16
4.2. Hochschild-Pirashvili 上链 16
4.3. 构造同伦左共终函子 16
4.4. 两种 Hochschild 上链定义之间的等价性 17
参考文献 19

引言

Kontsevich 提出了瑞士奶酪猜想 [12, Claim 1]。该猜想指出，对于任意n-代数A（即小n-圆盘歌剧上的代数），存在一个通用 $n+1$-代数 Hoch(A)，它作用于A。这里，若存在瑞士奶酪歌剧 $\mathcal{SC}_n$ [19] 在一对（B,A）上的作用，且该作用扩展了A 和B已有的代数结构，我们就称$n+1$-代数B 作用于n-代数A 。Hoch(A)的通用性体现在：它是同伦范畴中所有配备了在A上作用的$n+1$-代数的终对象。若$n=1$ 且A 是结合代数，那么 Hoch(A) 就是经典的 A 的 Hochschild 上链，由此可得到 Deligne 猜想。

尽管名称如此，Kontsevich 猜想已有若干种证明 [5, 9, 11, 18]。在 [9], 中，作者定义了算子 $\emptyset$，其代数是 $\mathcal{X}$配备了 $\mathcal{X}$上的代数结构的乘法非对称歌剧。他们随后证明了 [9, 定理 2。1] ，按照 [3, 第 1], 节中的定义，$\emptyset$ 的凝聚给出了 Voronov 瑞士奶酪歌剧。这意味着 Kontsevich 猜想对$n=1$成立。

我们的目标是将他们的方法推广到任意 $n \geq 1$。为此，我们将利用 Baez-Dolan 加号构造 [1]，扩展算子 $\emptyset$ 的构造。更准确地说，对于一个带色范畴算子 $\mathcal{P}$，我们将定义范畴算子 $\mathcal{P}^+_{sc}$，其代数是 $\mathcal{P}^+$-代数 $\mathcal{X}$，其中 $\mathcal{P}^+$ 是 Baez-Dolan 加号构造，并且配备了一个内 $\mathcal{P}^+$-代数 [2, 定义 7.2] 以及一个 $\mathcal{X}$上的代数结构。当 $\mathcal{P}=\mathcal{A}ss$ 是结合代数的歌剧时，$\mathcal{P}^+_{sc}$ 就是算子 $\emptyset$ 的松版本。

本文的主要结果是定理 3.9。该定理指出，当 $\mathcal{P}$ 是小n圆盘幺半群时，$\mathcal{P}^+_{sc}$ 的凝聚记作 SC($\mathcal{P}$)，它等价于$n+1$ 维瑞士奶酪幺半群。我们得出这一结果的方法与 [3] 中所用的方法极为相似。我们将采用 [16, 第 3 节2] 中定义的相对完全图算子 。它是 Voronov 拓扑瑞士奶酪幺半群的范畴版本，因为逐点对其应用分类空间函子便得到瑞士奶酪歌剧。定理 3.9 证明中的主要内容，是构造一个涉及相对完全图算子的范畴化歌剧之间的松弛态射。类比于 [3, 命题 3.4] 中定义的态射，这个松弛态射称为复杂度映射 。随后我们证明，这个复杂度映射在歌剧之间诱导出所需的弱等价。这个弱等价背后的直观思想是，涉及树的 Baez-Dolan 加号构造会产生一个额外维度。应用定理 3.9，我们将证明交换代数的第n阶 Hochschild-Pirashvili 上链上存在一个E_{n+1}-作用。这回答了 [3,备注 2.19] 中提出的问题。

本文的组织结构如下。

在第 1 节中，我们回顾带色歌剧及其代数的概念。我们还回顾瑞士奶酪型歌剧的概念，它是带色歌剧的一种特殊情形。我们给出瑞士奶酪型歌剧的两个重要例子：Voronov 瑞士奶酪歌剧和 Quesney 的相对完全图歌剧。最后，我们回顾带色歌剧的两种构造：Baez-Dolan 加号构造和 Batanin-Berger 的凝聚。这两种构造都是定义我们的瑞士奶酪构造所必需的。需要注意的是，我们对每种构造都做了些许推广。具体而言，我们考虑 Baez-Dolan 加号构造的范畴版本。至于带色歌剧的凝聚，我们纳入了凝聚后的歌剧可以是多色的情形。更准确地说，对于一个C-带色歌剧 $\mathcal{P}$ 和一个函数$f: C \to D$，我们定义一个D-带色歌剧，称为 $\mathcal{P}$ 沿 f 凝聚。当D 是单元素集且f 是唯一映射时，我们便得到经典定义。

在第 2 节中，我们为带色歌剧$\mathcal{P}$引入瑞士奶酪构造 SC($\mathcal{P}$)。我们还为一个 $\mathcal{P}$-代数A定义 Hochschild 对象 Hoch(A)。我们证明， $\mathcal{P}$-在A 上的作用可以扩展为 SC($\mathcal{P}$)-在有序对 (Hoch(A),A) 上的作用。我们猜想 Hoch(A) 满足一个泛性质。

第 3 节专门用于证明定理 3.9。

最后，第 4 节讨论 Hochschild-Pirashvili 上链。我们证明，当A 是交换代数时，我们对 Hoch(A) 的定义与这一经典概念一致。根据定理 3.9，这意味着存在一个E_{n+1}-作用于阶数n的 Hochschild-Pirashvili 上链。

致谢。 感谢 Vasileios Aravantinos-Sotiropoulos、Hyeon Tai Jung 和 Christina Vasilakopoulou 与我就这一主题进行了有趣的讨论。我谨此说明，本研究是在 H.F.R.I. “H.F.R.I. 第三轮支持教职人员与研究人员科研项目征集”项目框架下开展的（H.F.R.I. 项目编号：23249）。

1. 预备知识

1.1. **带色歌剧及其代数**。

定义 1.1. 对称幺半范畴 $(\mathcal{E},\otimes,e)$ 中的一个带色歌剧 $\mathcal{P}$ 由以下数据给出：

- 一个颜色集合 C，
- 对于$k \geq 0$和 $(c_1,\ldots,c_k,c) \in C_{k+1}$，一个对象
$$\mathcal{P}(c_1,\ldots,c_k;c) \in \mathcal{E},$$
- 对于$c \in C$，一个称为单位的映射
$$e \to \mathcal{P}(c;c)$$
- 对于 $1 \leq i \leq k$、$j \geq 0$，$(c_1,\ldots,c_k,c) \in C_{k+1}$和 $(c'_1,\ldots,c'_j) \in C_j$，一个映射

(1) $\circ_i$：$\mathcal{P}(c_1,\ldots,c_k;c) \otimes \mathcal{P}(c'_1,\ldots,c'_j;c_i) \to \mathcal{P}(c_1,\ldots,c_{i-1},c'_1,\ldots,c'_j,c_{i+1},\ldots,c_k;c)$，称为乘法，

- 对于$k \geq 0$和 $(c_1,\ldots,c_k,c) \in C_{k+1}$，对称群的一个作用
$$\sigma \in \Sigma_k \mapsto \left[\mathcal{P}(c_1,\ldots,c_k;c) \to \mathcal{P}(c_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,c_{\sigma^{-1}(k)};c)\right],$$

满足结合律、幺元性和等变公理。

定义 1.2. 一个拓扑 （分别为范畴）幺半群是指在拓扑空间（分别为小范畴）范畴中的带色歌剧。

例1.3 （自同态歌剧）。 设C 为一个集合， $\mathcal{M}$ 一个对称幺半群 $\mathcal{E}$-范畴，以及$A := (A_c)_{c\in C}$ 为 $\mathcal{M}$中的一个C-指标对象族。令 End_A 为 $\mathcal{E}$中的C-带色歌剧，对于（$c_1,\ldots,c_k;c$）$\in C^{k+1}$，其定义为
$$\mathrm{End}_A(c_1,\ldots,c_k;c) := \mathcal{M}(A_{c_1}\otimes\ldots\otimes A_{c_k},A_c).$$
单位由恒等态射给出，乘法由复合给出。

注意，带色歌剧态射的概念显然是存在的，因此带色歌剧构成一个范畴。

定义 1.4. $\mathcal{M}$ 上的代数 A，其中 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{E}$ 中的 C-色歌剧 $\mathcal{P}$，由一个以 C 为指标的对象族 $A := (A_c)_{c\in C}$（对象属于 $\mathcal{M}$）以及一个歌剧态射给出

$$\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A.$$

1.2. **瑞士奶酪型歌剧**。

定义 1.5. [16, 定义 2.11] 一个瑞士奶酪型歌剧 是一个带色歌剧 $\mathcal{P}$，其颜色集为$C = C_{\mathsf{f}} \sqcup C_{\mathsf{h}}$，满足：当$c_1, \ldots, c_k; c)$中$c \in C_{\mathsf{f}}$且对某个$i \in \{1, \ldots, k\}$有$c_i \in C_{\mathsf{h}}$时，$\mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c)$为空。

定义 1.6. [12, 定义 8] 设 $\mathcal{P}$ 为一个颜色集为$C = C_{\mathsf{f}} \sqcup C_{\mathsf{h}}$的瑞士奶酪型歌剧。令 $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}$ 和 $\mathcal{P}_{\mathsf{h}}$ 分别为 $\mathcal{P}$ 在颜色集C_{f}和C_{h}上限制得到的满子幺半群。$\mathcal{P}_{\mathsf{h}}$-代数A 上的 $\mathcal{P}_{\mathsf{f}}$-代数B 的瑞士奶酪作用，是定义在二元组（B，A）上的$\mathcal{P}$-代数结构，并且扩展了B 和A上的代数结构。

1.3. **Voronov 瑞士奶酪歌剧**。

定义 1.7. [19, 节 1]对于$n \geq 1$，瑞士奶酪歌剧 $\mathcal{SC}_n$ 是一个瑞士奶酪类型的拓扑歌剧。其颜色集为$C := \{\mathsf{f}, \mathsf{h}\}$。对于$k \geq 0$,

$$\mathcal{SC}_n(\underbrace{\mathsf{f}, \ldots, \mathsf{f}}_{k}; \mathsf{f}) = \mathcal{D}_{n+1}(k)$$

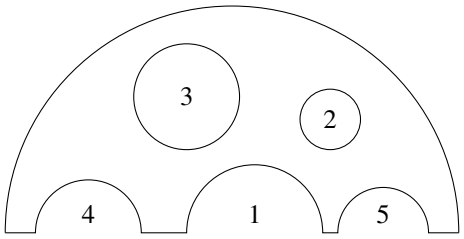
是单位$n+1$维圆盘内由k 个互不相交的小圆盘组成的有序构形空间。对于 $(c_1, \ldots, c_k) \in C^k$,

$$\mathcal{SC}_n(c_1, \ldots, c_k; \mathsf{h})$$

是单位半圆盘内由k 个互不相交的小圆盘或小半圆盘组成的有序构形空间

$$\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \geq 0,\ x_0^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\},$$

使得对于所有的$i \in \{1, \ldots, k\}$，若$c_i = \mathsf{f}$，则对应一个小圆盘；若$c_i = \mathsf{h}$，则对应一个半圆盘。例如，下图表示 $\mathcal{SC}_1$(h,f, f, h, h; h) 中的一个对象:



乘法通过插入圆盘或半圆盘，然后重新排序来定义。

1.4. **相对完全图算子**。

定义 1.8. [16, 第 3 节。2] 对于$n \geq 1$，相对完全图算子的第 n 阶滤过 $\mathcal{RK}_n$ 是一个瑞士奶酪型范畴歌剧。其颜色集仍为$C := \{\mathsf{f}, \mathsf{h}\}$。对于$k \geq 0$,

$$\mathcal{RK}_n(\underbrace{\mathsf{f}, \ldots, \mathsf{f}}_{k}; \mathsf{f}) = \mathcal{K}_{n+1}(k)$$

是偏序集（因此也是小范畴），其

- 元素为形如 (μ, σ) 的有序对，其中

$$\mu = (\mu_{ij} \in \{1, \ldots, n+1\})_{1\leq i<j\leq k} \tag{2}$$

以及 $\sigma \in \Sigma_k$,

• 偏序结构由以下方式给出

$$(\mu,\sigma)\le(\nu,\tau)\Leftrightarrow \text{for all } 1\le i<j\le k,(\mu_{ij},\sigma_{ij})=(\nu_{ij},\tau_{ij}) \text{ or } \mu_{ij}<\nu_{ij},$$

其中，对于 $\sigma\in\Sigma_k$ 和 $1\le i<j\le k$，$\sigma_{ij}\in\Sigma_2$ 是由 σ 对 i 和 j 进行的置换。对于 $(c_1,\ldots,c_k)\in C^k$，

$$\mathcal{RK}_n(c_1,\ldots,c_k;\mathsf{h})$$

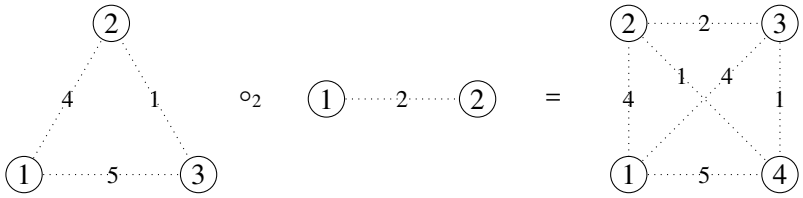
是偏序集 $\mathcal{K}_{n+1}(k)$，并满足以下附加条件。对于 $1\le i<j\le k$，若满足以下任一条件，则 $\mu_{ij}\le n$：

• $c_i=c_j=\mathsf{h}$,

• $c_i=\mathsf{f}$，$c_j=\mathsf{h}$和$\sigma_{ij}=id$,

• $c_i=\mathsf{h}$，$c_j=\mathsf{f}$和$\sigma_{ij}=(12)$。

为了定义乘法，请注意，(2) 中的整数集合 μ 可以看作是对具有$n+1$个顶点的完全图进行的边着色，颜色为 $1,\ldots,n+1$。于是 $(\mu_1,\sigma_1)\circ_i(\mu_2,\sigma_2):=(\mu_1\circ_i\mu_2,\sigma_1\circ_i\sigma_2)$，其中 $\mu_1\circ_i\mu_2$ 是通过将一个图插入另一个图的顶点内部，再对顶点重新编号得到的，如下图所示：

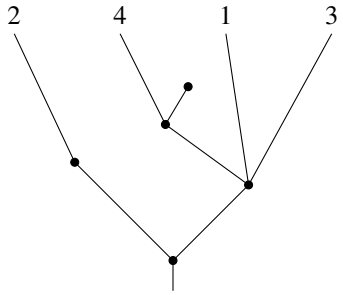


$\sigma_1\circ_i\sigma_2$ 其定义方式与幺半群 $\mathcal{A}ss$ [6, 例 1.15 (a)]中的定义相同。

定理 1.9。 [16, 定理3。5] 将分类空间函子逐点应用于 $\mathcal{RK}_n$ 所得到的拓扑歌剧与 $\mathcal{SC}_n$ 弱等价。

1.5. **范畴化 Baez-Dolan 加号构造**。 在本小节中，我们将 Baez-Dolan 加号构造 [1] 推广到范畴化歌剧。

定义 1.10。 [1, 第 3 节。1] 一棵梳状树是带有额外线性序的平面树，其叶子集为：



定义 1.11。 设 $\mathcal{P}$ 是一个范畴化歌剧。其运算 范畴由对所有 $k\ge 0$ 以及 $(c_1,\ldots,c_k,c)\in C^{k+1}$，取 $(c_1,\ldots,c_k;c)$ 的余积得到。

定义 1.12。 [1, 第 3 节。3]设 $\mathcal{P}$ 是 Cat 中的歌剧。一棵 $\mathcal{P}$-树 是配备了以下结构的梳状树：

• 每条边的 $\mathcal{P}$ 一种颜色，

- 每个顶点的 $\mathcal{P}$一种运算,

使得如果一个顶点装饰有 $p \in \mathcal{P}(c_1,\dots,c_k;c)$，其输入边装饰有 $c_1,\dots,c_k$，其输出边则装饰有 c。

定义 1.13. $\mathcal{P}$-树的目标是通过按照树的形状将装饰每个顶点的运算相乘，并根据叶子的顺序应用对称群作用而得到的 $\mathcal{P}$运算。由于 $\mathcal{P}$满足结合律和等变公理，因此该定义良好。

定义 1.14. 对于范畴歌剧 $\mathcal{P}$，令 $\mathcal{P}^+$ 为 Set 中的拟运算，其:

- 颜色是 $\mathcal{P}$的运算,
- 对于 $(c_1,\dots,c_k,c) \in C_{k+1}$，令

$$\mathcal{P}^+(c_1,\dots,c_k;c)$$

是顶点线性有序为 $\{v_1,\dots,v_k\}$ 的梳理 $\mathcal{P}$-树的集合，其中装饰v_i 的运算为c_i, 并附带一个从该 $\mathcal{P}$-树的目标到c的额外态射,

- 乘法通过将一棵 $\mathcal{P}$-树插入另一棵 $\mathcal{P}$-树的顶点中、重新排列叶子集（梳理），并复合额外态射来定义。

注 1.15. 如果 $\mathcal{P}$ 实际上是离散的，那么额外态射必须是恒等态射，由此便可恢复 [1]中的经典定义。

1.6. **带色函子歌剧**。

定义 1.16. [14, 定义 4.1] 设C 为一个集合，且$A := (A_c)_{c\in C}$ 是一个以C为指标的 $\mathcal{E}$-范畴族。A 上的一个着色函子-幺半群 由以下数据给出:

- 对于$k \geq 0$和（c_1，...，c_k，c）$\in C_{k+1}$，一个 $\mathcal{E}$-函子 ξ（c_1，...，c_k；c）：$A_{c_1}\otimes\dots\otimes A_{c_k} \to A_c$,

- 对于 $1 \leq i \leq k$、$j \geq 0$，$(c_1,\dots,c_k,c) \in C_{k+1}$ 以及 $(c'_1,\dots,c'_j) \in C_j$，一个 $\mathcal{E}$-自然变换

(3) $\xi(c_1,\dots,c_k;c) \circ_i \xi(c'_1,\dots,c'_j;c_i) \to \xi(c_1,\dots,c_{i-1},c'_1,\dots,c'_j,c_{i+1},\dots,c_k;c)$，其中 $\circ_i$ 是例1.3中定义的自同态歌剧 End_A 的乘法,

满足结合律、幺元性和等变公理。

1.7. **有色运算子的实现**。

定义1.17。 对于 $\mathcal{E}$ 中的带色歌剧 $\mathcal{P}$，令$u\mathcal{P}$为 $\mathcal{P}$的底层范畴。它是一个 $\mathcal{E}$-范畴，其对象是 $\mathcal{P}$ 的颜色，态射是一元运算，即

$$u\mathcal{P}(c,d) := \mathcal{P}(c;d).$$

注意， $\mathcal{P}$诱导出一个 $\mathcal{E}$-函子

$$\mathcal{P}(-,\dots,-;-) : u\mathcal{P}^{op}\otimes\dots\otimes u\mathcal{P}^{op}\otimes u\mathcal{P} \to \mathcal{E}. \tag{4}$$

此外，对于两个 $\mathcal{E}$-范畴 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$，令 $\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ 为从 $\mathcal{U}$ 到$\mathcal{V}$的 $\mathcal{E}$-函子的 $\mathcal{E}$-范畴。

定义 1.18. [3, 第 1.7] 节令$f\colon C \to D$ 为集合之间的一个函数，并令 $\mathcal{P}$ 为一个C-带色歌剧。对于$d \in D$，令$\mathcal{P}_d$ 为$u\mathcal{P}$ 的全子范畴，其对象限制为$f^{-1}(d)$中的对象。对于 $(d_1, \ldots, d_k, d) \in D^{k+1}$，令

$$\xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) : \mathcal{E}^{\mathcal{P}_{d_1}} \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}^{\mathcal{P}_{d_k}} \to \mathcal{E}^{\mathcal{P}_d} \tag{5}$$

由余端公式定义的 $\mathcal{E}$-函子

$$\xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d)(X_1, \ldots, X_k)(c) := \mathcal{P}(-, \ldots, -; c) \otimes_{\mathcal{P}_{d_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_{d_k}} X_1(-) \otimes \ldots \otimes X_k(-).$$

命题 1.19。 [3, 命题 1。8] 这些 $\mathcal{E}$-函子 (5) 可扩张为带色函子-幺半群。

1.8. **带色幺半群的凝聚**。对于一个 $\mathcal{E}$-范畴 $\mathcal{U}$，令 Hom$u$ 为 $\mathcal{E}$-值同态集，属于 $\mathcal{E}$-范畴 $\mathcal{E}^{\mathcal{U}}$。

定义 1.20. 设$f\colon C \to D$ 是集合之间的一个函数，且 $\mathcal{P}$ 是一个C-着色幺半群。我们还假设给定了一个 $\mathcal{E}$-函子 $\delta : u\mathcal{P} \to \mathcal{E}$。 δ沿 $\mathcal{P}f$ 的凝聚 定义为

$$\mathrm{Coend}^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\delta, \xi_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d)(\underbrace{\delta, \ldots, \delta}_{k})).$$

命题 1.21. [14, 命题 4.4] 余端$^f_{\mathcal{P}}$ 具有 D-着色幺半群的结构。

命题 1.22. [3, 命题 1.5]设 $f\colon C \to D$ 是集合之间的一个函数， $\mathcal{P}$是一个 C-着色幺半群，A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。那么，D-指标族

$$\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{P}_d}(\delta, A)\right)_{d \in D}$$

是一个余端$^f_{\mathcal{P}}$-代数。

2. 带色幺半群的瑞士奶酪构造

2.1. **宽松带基点范畴代数的幺半群**。

定义 2.1。 对于集合 $\mathcal{P}$ 上的带色歌剧，令 $\mathcal{P}_*$ 为范畴 $\mathcal{P}$-代数的范畴歌剧 A ，其配备了一个内部代数 [2, 定义 7.2], ，该内部代数是 $\mathcal{P}$-代数 $\zeta \to A$的一个松弛态射，其中 ζ 是终对象范畴 $\mathcal{P}$-代数。

注意，存在一个幺半群的态射 u ： $\mathcal{P} \to \mathcal{P}_*$ ，使得限制函子u^* 忘却内部代数。

定义 2.2。 一个黑白 $\mathcal{P}$-树 是一个 $\mathcal{P}$-树，其中一些顶点为黑色，另一些顶点为白色，并满足以下额外条件：由单位装饰的顶点不能为黑色，且不存在相邻黑色顶点对。

注 2.3。 $\mathcal{P}$-树的目标（见定义 1.13）可扩展为一个函子。事实上，如果 $\mathcal{P}$是一个范畴歌剧，则 $\mathcal{P}$-树的集合具有范畴结构。只有当两个 $\mathcal{P}$-树具有相同的底层梳状树和相同的边着色时，它们之间才存在态射。这些态射由每个顶点的一个态射给出。于是，目标是从 $\mathcal{P}$-树的范畴到 $\mathcal{P}$的运算范畴（见定义 1.11）的一个函子。

命题 2.4. 对于范畴歌剧 $\mathcal{P}, \mathcal{P}^+_*$: $= (\mathcal{P}^+)_*$ 是满足以下条件的幺半群：

- 颜色是 $\mathcal{P}$ 的运算，

- 对于 $(c_1, \ldots\ldots, c_k, c) \in C_{k+1}$,

$$\mathcal{P}^+_*(c_1, \ldots, c_k; c)$$

是由以下对象构成的范畴:

  - 对象是由黑色和白色 $\mathcal{P}$-树 T 给出的，白色顶点构成线性有序集 $\{v_1, \ldots, v_k\}$，其中 v_i 的运算是 c_i，并配有一个态射 $\epsilon : t(T) \to c$，其中 t 是备注 *2.3* 中的目标函子；一个态射 $(T, \epsilon) \to (T', \epsilon')$，由每个黑色顶点对应的一个态射给出，并诱导出一个态射 $\nu : T \to T'$，使得 $\epsilon' \cdot t(\nu) = \epsilon$,

- 乘法如定义 *1.14* 所述。

证明。 首先回顾 [2, 定义 9.1]： 对于任意C-带色歌剧 $\mathcal{P}$ 和范畴$\mathcal{P}$-代数 A，A 中的内部代数由以下内容给出:

- 对于$c \in C$，一个对象$a_c \in A_c$,
- 对于$k \geq 0$，$(c_1, \ldots, c_k, c) \in C_{k+1}$ 以及$o \in \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k, c)$，一个态射

$$m_o(a_{c_1}, \ldots, a_{c_k}) \to a_c, \tag{6}$$

其中m_o 是由代数结构诱导的函子,

满足结合律、幺元性和等变公理。

现在令 $\mathcal{Q}_*$ 为命题给出的范畴歌剧。我们来证明 $\mathcal{Q}_* = \mathcal{P}^+_*$。令 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{Q}_*$ 的子幺半群，它由仅包含白色顶点的树所对应的运算组成。 $\mathcal{Q}$ 与 $\mathcal{P}^+$之间存在一个显然的同构。

现在令A 为一个范畴 $\mathcal{Q}$-代数。将A中v5里唯一顶点为黑色的花冠所对应的运算加入 $\mathcal{Q}$，即可生成 $\mathcal{Q}$。因此，剩下要证明的是这些花冠对应于A中的一个内部代数。令c 为 $\mathcal{Q}$的一个颜色，也就是 $\mathcal{P}$的一个运算。对象$a_c \in A_c$ 由仅有一个黑色顶点且该顶点标记为c 的花冠诱导，额外态射为恒等态射。现在令$k \geq 0$，$(c_1, \ldots, c_k, c) \in C^{k+1}$ 以及$o \in \mathcal{Q}(c_1, \ldots, c_k; c)$。因此$o$ 是一个有k 个顶点的 $\mathcal{P}$-树，并附有一个额外态射。式(6)中的态射由o给出的额外态射诱导。□

2.2. **瑞士奶酪加号构造**。

定义 2.5. 给定一个集合 C，令 $\mathrm{SOp}(C)$ 表示由C着色的歌剧所构成的幺半群。

注意，$\mathrm{SOp}(C) = \mathrm{Com}(C)^+$，其中 $\mathrm{Com}(C)$ 是终端C-带色歌剧。对于一个C-带色歌剧 $\mathcal{P}$，存在一个歌剧态射的典范映射 [4, 第 3 节.14]

$$\phi : \mathcal{P}^+ \to \mathrm{SOp}(C) \tag{7}$$

它由唯一映射 $\mathcal{P} \to \mathrm{Com}(C)$ 诱导。

定义 2.6. [4, 定义 3.3] 设 $\mathcal{P}$ 是一个范畴歌剧， $\mathcal{O}$ 是一个范畴 $\mathcal{P}^+$-代数。一个 $\mathcal{O}$-代数 由一个以C为指标的集合 $A := (A_c)_{c \in C}$ （其元素为小范畴）以及一个 $\mathcal{P}^+$-代数态射给出

$$\mathcal{O} \to \phi^*(\mathrm{End}_A),$$

其中 ϕ^* 是由 (7) 诱导的限制函子。

定义 2.7. 令 $\mathcal{P}^+_{sc}$ 为这样一个幺半群，其代数是由 $(\mathcal{O}, A)$ 组成的对，其中 $\mathcal{O}$ 是一个 $\mathcal{P}^+_*$-代数，而 A 是一个 $u^*(\mathcal{O})$-代数。

命题 2.8. $\mathcal{P}^+_{sc}$ 是瑞士奶酪型幺半群，其:

- 颜色集为 $B \sqcup C$，其中 B 是 $\mathcal{P}$ 的运算集合，C 是 $\mathcal{P}$ 的颜色集,

- 对于$(c_1,\dots,c_k,c)\in B_{k+1}$,

$$\mathcal{P}^+_{sc}(c_1,\dots,c_k;c)=\mathcal{P}^+_*(c_1,\dots,c_k;c).$$

- 对于 $(c_1,\ .....,\ c_k)\in(B\sqcup C)_k$ 以及 $c\in C$,

$$\mathcal{P}^+_{sc}(c_1,\dots,c_k;c)$$

是这样一个范畴：其对象为黑色和白色的 $\mathcal{P}$-树，顶点和叶子构成线性有序集，叶子为 $\{x_1,.....,\ x_k\}$，满足

– 若 $c_i\in B$，则 x_i 是一个顶点；若 $c_i\in C$，则 x_i 是一片叶子，– 在两种情况下，x_i 都以 c_i 为装饰，– 根边以 c 为装饰，而态射由每个黑色顶点对应的一个态射给出，

- 乘法可以通过将一棵 $\mathcal{P}$-树的根嫁接到另一棵 $\mathcal{P}$-树的叶子上来定义，也可以按照定义 *1.14* 通过插入来定义。

证明。 令 Q为该命题给出的范畴歌剧。我们来证明$Q=\mathcal{P}^+_{sc}$。由于 Q 的颜色集为 $B\sqcup C$，一个 Q-代数由一个以B为指标的族 O和一个以C为指标的族 A给出。 Q 在 B 上的限制是 $\mathcal{P}^+_*$，因此族 O 具有 $\mathcal{P}^+_*$-代数的结构。剩下要证明的是， Q对 A 的作用相当于定义 2.6 意义下的一个 $u^*(O)$-作用。该作用由 Q 的运算所诱导，这些运算的目标颜色属于C ，且对应于只有一个白色顶点的花冠。□

2.3. **带色歌剧上代数的 Hochschild 对象**。

定义 2.9。 对于一个C-带色歌剧 $\mathcal{P}$，令 $\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(C)$ 为其代数是C-带色歌剧 Q 且配备歌剧映射 $\mathcal{P}\to Q$ 的幺半群。令 $\mathrm{Gr}(\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(C))$ 为其代数是C-带色歌剧 Q 且配备歌剧映射$\mathcal{P}\to Q$以及一个 Q-代数 A 的幺半群。

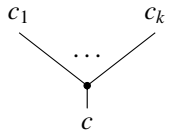
引理 2.10. 存在一个幺半群的态射 *ds*

$$\mathcal{P}^+_{sc}\to\mathrm{Gr}(\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(C)), \tag{8}$$

它限制为一个态射

$$\mathcal{P}^+_*\to\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(C). \tag{9}$$

证明。 我们明确描述瑞士奶酪型幺半群 $\mathrm{Gr}(\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(C))$。我们可以参照 [4, 第 3 节 3] 中对一个略有不同的幺半群所做的工作。首先回顾一下，C-花束 是一个C-着色的平面花冠。因此，它由 $k\ \geq\ 0$ 以及 $(c_1,\dots,c_k,c)\in C^{k+1}$给出：



$\mathrm{Gr}(\mathcal{P}/\mathrm{SOp}(I)$ 的颜色集为 $Bq(C)\sqcup C$，其中 $Bq(C)$ 是 C-花束的集合。其运算与 $\mathcal{P}^+_{sc}$ 相同，只是白色顶点没有标记 $\mathcal{P}$ 的运算。

在颜色上，态射 8 由函数 $B\sqcup C\ \to Bq(C)\ \sqcup C$ 给出，该函数是投影 $B\ \to Bq(C)$，并在C上取恒等态射。在运算上，它会遗忘白色顶点的装饰。态射 9 是将态射 8 从 $B\sqcup C$ 限制到B而得。□

定义 2.11。 对于C-颜色范畴歌剧 $\mathcal{P}$，令

$$\Delta\mathcal{P} := u\mathcal{P}^+_*$$

是 $\mathcal{P}^+_*$ 的底层范畴。回忆命题 2.4， $\Delta\mathcal{P}$ 的对象是 $\mathcal{P}$ 的运算。对于 $c \in C$，令 $\Delta\mathcal{P}_c$ 为 $\mathcal{P}$ 中目标为 c 的运算所构成的全子范畴。

定义 2.12. 令 $\mathcal{P}$ 为一个 C-带色范畴歌剧，且 A 为一个 $\mathcal{P}$-代数。那么 End_A 是一个 $\mathcal{P}$/S $\mathrm{Op}(C)$-代数，借助映射 (9)，可以将其限制到 $\mathcal{P}^+_*$。令 $\delta\colon \Delta\mathcal{P} \to \mathrm{Cat}$。对于 $c \in C$，我们定义

$$\mathrm{Hoch}(A)_c := \underline{\mathrm{Hom}}_{\Delta\mathcal{P}_c}(\delta, \mathrm{End}_A).$$

例 2.13. 如果 $\mathcal{P}$ 是结合代数的歌剧 $\mathcal{A}ss$ ，那么 $\mathcal{P}^+_* = \mathcal{L}_2$ 是乘法非对称歌剧 [3] 的歌剧。底层范畴 $\Delta\mathcal{P} = u\mathcal{L}_2$ 是单纯形范畴 Δ。对于一个结合代数 A 和典范嵌入 δ，我们便得到 A 的经典 Hochschild 上链概念。

2.4. **瑞士奶酪作用**。

定义 2.14. 设 $\mathcal{P}$ 是一个C-带色歌剧。设$f\colon B \sqcup C \to C \sqcup C$是由目标映射 $B \to C$ 和 C 上的恒等态射给出的函数。$C \sqcup C$-带色歌剧 $\mathrm{SC}(\mathcal{P})$ 定义为沿着 f 对 $\mathcal{P}^+_{sc}$ 进行的凝聚。

引理 2.15. 设 $\mathcal{P}$ 是一个范畴型带色歌剧，且 A 是一个 $\mathcal{P}$-代数。那么，数对 $(\mathrm{Hoch}(A),A)$ 具有 $\mathrm{SC}(\mathcal{P})$-代数的结构。

证明。 根据A 是一个 $\mathcal{P}$-代数的定义，存在一个歌剧映射 $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$。还要注意，$A$ 平凡地是一个 End_A-代数。因此，利用引理 2.10，数对 (A, End_A) 具有 $\mathcal{P}^+_{sc}$-代数的结构。结论由命题 1.22 得出。 □

小范畴的范畴配备了*Thomason* 模型结构。在这一模型结构中，范畴之间的函子在诱导神经之间的弱等价时，是一个弱等价。

猜想 2.16。 设 $\mathcal{P}$为一个带色范畴算子，A 为一个 $\mathcal{P}$-代数。那么$\mathrm{Hoch}(A)$ 是 A 上瑞士奶酪作用的同伦范畴中的终对象（见定义 *1.6*）。

3. Kontsevich 瑞士奶酪猜想的弱版本

3.1. **复杂度映射**。 回顾一下 [20, 定义 4.1]，可以定义范畴化歌剧之间的松弛态射这一概念。简言之，对于歌剧的松弛态射 $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，不同于经典歌剧态射中满足 $f(x \circ_i y) = f(x) \circ_i f(y)$ 的情形，我们假设 f配备了自然变换 $f(x \circ_i y) \to f(x) \circ_i f(y)$，并满足显然的公理。

引理 3.1。 存在一个歌剧的松弛态射

$$f : (\mathcal{K}_n)^+_{sc} \to \mathcal{RK}_{n+1}. \tag{10}$$

证明。 回顾命题 2.8，$(\mathcal{K}_n)^+_{sc}$的颜色集为 $B \sqcup 1$，其中 $\mathcal{B}$是 $\mathcal{K}_n$ 的运算集合， $1 = \{*\}$是单元素集。 $\mathcal{RK}_{n+1}$ 的运算集合为{f,h}。在颜色上，f 将 B 中的元素映射为f ，并将 $*$ 映射为h。

现在令 $(c_1, \ldots, c_k, c) \in (B \sqcup 1)^{k+1}$，并定义一个函子

$$f : (\mathcal{K}_n)^+_{sc}(c_1, \ldots, c_k; c) \to \mathcal{RK}_{n+1}(f(c_1), \ldots, f(c_k); f(c))$$

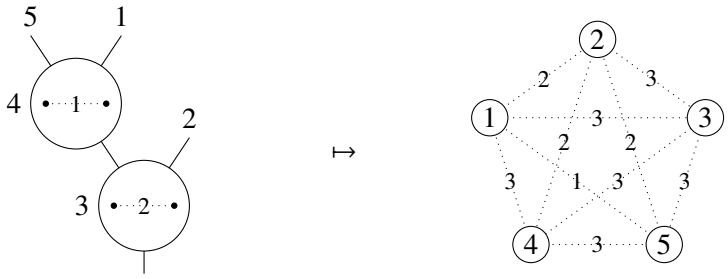
令 $x \in (\mathcal{K}_n)^+_{sc}(c_1, \ldots, c_k; c)$。令 $f(x) := (\mu, \sigma)$，其中 μ 和 σ 定义如下。回忆一下，x 是一棵黑白 $\mathcal{K}_n$-树，其中每个元素 $\{1, 。.., k\}$ 都对应于该树的一个顶点或一片叶子。对于 $1 \le i < j \le k$，如果i 和j 彼此位于正上方和正下方，那么 $\mu_{ij} := n + 1$，并且

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} id & \text{if } i \text{ is above } j, \\ (12) & \text{if } i \text{ is below } j. \end{cases}$$

如果 i 和 j 不在同一条竖线上，那么在 $\mathcal{K}_n$-树 x 中存在一个极大顶点 v，它位于 i 和 j 的下方。注意，v 上标记着一个运算 $(\mu', \sigma') \in \mathcal{K}_n(|v|)$，其中 $|v|$ 是 v 的输入边数。令 $\{1, .., |v|\}$ 中的 l 和 m 分别对应于位于 i 和 j 下方的边。我们定义 $(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) := (\mu'_{lm}, \sigma'_{lm})$。作为示意，函子

$$f : (\mathcal{K}_2)^+_{sc}(*, *, c_3, c_4, *; *) \to \mathcal{RK}_3(\mathsf{h}, \mathsf{h}, \mathsf{f}, \mathsf{f}, \mathsf{h}; \mathsf{h}) \tag{11}$$

可以表示如下：



c_3 和 c_4 在 (11) 中分别是标记编号为 3 和 4 的顶点的运算。

注意，如果 i 和 j 满足以下条件之一：

- $f(c_i) = f(c_j) = \mathsf{h}$,
- $f(c_i) = \mathsf{f}$, $f(c_j) = \mathsf{h}$ 和 $\sigma_{ij} = id$,
- $f(c_i) = \mathsf{h}$, $f(c_j) = \mathsf{f}$ 以及 $\sigma_{ij} = (12)$,

那么，由于叶子上方不可能有任何东西，i 和 j 不可能一个位于另一个上方，因此 $\mu_{ij} \le n$。这证明 f 定义良好。证明 f 确实是幺半松弛算子留给读者完成。□

3.2. **余端的一个公式**。

定义 3.2. [8, 定义 3.1] 设 $\mathcal{P}$ 是 Cat 中一个带色歌剧，其颜色集为C，且 $f\colon C \to D$ 是集合间的函数。对于 $c \in C$ 以及 $\mathbf{d} := (d_1, \ldots, d_k) \in D^k$，我们定义 $\mathcal{P}^f\mathbf{d}/c$为如下范畴：

- 其对象是元素 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in C_k$，满足 $f_k(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$，并带有一个运算 $o \in \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c)$,
- 从 $o \in \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c)$ 到 $o' \in \mathcal{P}(c'_1, \ldots, c'_k; c)$ 的态射由 k 元组的一元运算给出

$$(p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{P}(c_1; c'_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(c_k; c'_k) \tag{12}$$

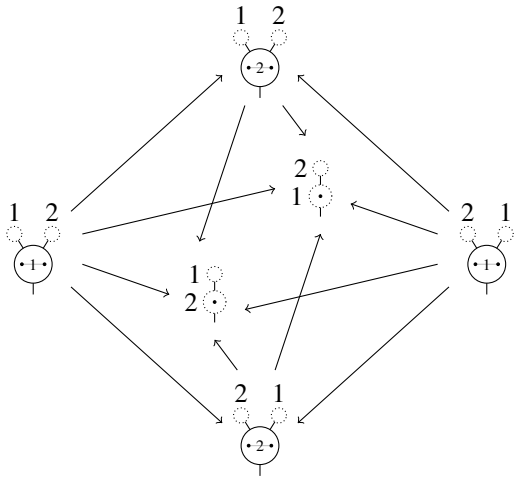
以及一个额外态射

$$o \to m(o', p_1, \ldots, p_k). \tag{13}$$

注 3.3. $\mathcal{P}^f{}_{\mathbf{d}}/c$ 的态射由两类态射生成。第一类是额外态射 (13) 为恒等态射的情形。第二类是k元组 (12) 由 $\mathcal{P}$ 的单位元给出的情形。

例3.4. 设 $\mathcal{P} = (\mathcal{K}_n)^+_{sc}$，B 为 $\mathcal{K}_n$ 的运算集合，$\mathrm{f} : \mathrm{B} \sqcup 1 \to \{\mathrm{f}, \mathrm{h}\}$ 如引理 3.1 中所定义。对于 $\mathrm{c} \in \mathrm{B} \sqcup 1$ 以及 $\mathrm{d} = (\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_k) \in \{\mathrm{f}, \mathrm{h}\}^k$，令 l 为满足 $\mathrm{d}_i = \mathrm{f}$ 的元素 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{k}\}$ 的个数，m 为满足 $\mathrm{d}_i = \mathrm{h}$ 的元素 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{k}\}$ 的个数。当然，$\mathrm{l} + \mathrm{m} = \mathrm{k}$。$\mathcal{P}^f\,\mathrm{d/c}$ 的对象是恰有 m 个白色顶点的黑白 $\mathcal{K}_n$树。若 $\mathrm{f}(\mathrm{c}) = \mathrm{f}$，则存在一个额外态射，从这棵树的目标指向 c。注意，由于 $\mathcal{K}_n$ 的运算范畴是偏序集，该额外态射由黑白 $\mathcal{K}_n$树唯一确定。若 $\mathrm{f}(\mathrm{c}) = \mathrm{h}$，则这棵树必须恰有 n 片叶子。$\mathcal{P}^f\,\mathrm{d/c}$ 的第一类态射是黑色顶点与白色顶点之间边的收缩。第二类态射是形状完全相同的黑白 $\mathcal{K}_n$树之间的态射。对于每个黑色顶点，它们由 $\mathcal{K}_n$ 的运算范畴中的态射给出。

例如，假设 c 是 $\mathcal{K}_2$ 的唯一零元运算，而 $\mathbf{d} = (\mathrm{f},\mathrm{f})$。那么$\mathcal{P}^f{}_{\mathbf{d}}/c$ 包含下图所示的子范畴:



在上图中，白色顶点绘制为虚线圆圈，而黑色顶点绘制为实线圆圈。注意，我们得到的是一个二维球面。另一方面，$\mathcal{RK}_2(\mathrm{f}, \mathrm{f}; \mathrm{f})$也等价于一个二维球面。事实上，复杂度映射 f一般诱导出一个弱等价 $\mathcal{P}^f{}_{\mathbf{d}}/c \to \mathcal{RK}_d(d_1, \ldots, d_k; f(c))$。这将在引理 3.7 中得到证明。

引理 3.5。 设 $\mathcal{P}$ 为一个颜色集为 C 的范畴歌剧，$f : C \to D$ 为一个函数，$c \in C$，$d := f(c)$，以及 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_k) \in D^k$。令 $\delta : u\mathcal{P} \to \mathrm{Cat}$ 为将 c 映射到逗号范畴 $u\mathcal{P}/c$ 的函子。那么存在一个同构

$$\xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d)(\delta, \ldots, \delta)(c) \simeq \mathcal{P}^f_{\mathbf{d}}/c.$$

证明。 我们可以采用与证明 [8, 引理 3.3] 中相同的论证。 □

3.3. **由复杂度映射诱导的弱等价**。

引理 3.6。 幺半松弛算子 f: $\mathcal{P} \to Q$诱导出幺半松弛算子余端$^f_{\mathcal{P}} \to$ 余端$^{id}_Q \simeq Q$。

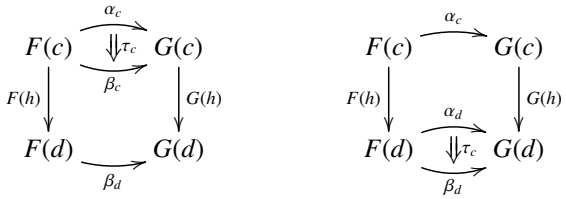
证明。 设 $(d_1, \ldots, d_k, d) \in D^{k+1}$。对于 $(c_1, \ldots, c_k, c) \in \mathcal{P}_{d_1} \times \ldots \times \mathcal{P}_{d_k} \times \mathcal{P}_d$，有一个复合

$$\mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c) \times \delta(c_1) \times \ldots \times \delta(c_k) \to \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c) \to \mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d), \tag{14}$$

其中第一个函子是投影，第二个函子由 f 给出。滥用记号，令 $\mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d)$ 表示常值函子 $\mathcal{P}_d \to \mathsf{Cat}$，它将所有对象映射到 $\mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d)$。根据余端的泛性质，函子 (14) 诱导出一个自然变换

$$\xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) := \xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d)(\delta, \ldots, \delta) \Rightarrow \mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d). \tag{15}$$

回顾一下，对于一个范畴 $\mathcal{C}$、两个函子 F、$G\colon \mathcal{C} \to \mathsf{Cat}$ 以及两个自然变换α、$\beta\colon F \Rightarrow G$，一个修正 $\tau\colon \alpha \Rrightarrow \beta$ 由一个自然变换 $\tau_c\colon \alpha_c \Rightarrow \beta_c$给出，该变换对所有 $c \in \mathcal{C}$都成立，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的所有 $h : c \to d$，以下自然变换相同:



令 $1 \le i \le k$、$j \ge 0$，$(d_1, \ldots, d_k, d) \in D^{k+1}$ 以及 $(d'_1, \ldots, d'_j) \in D^j$。自然变换 (15) 给出自然变换

$$\alpha : \xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) \circ_i \xi^f_{\mathcal{P}}(d'_1, \ldots, d'_j; d_i) \to \mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d) \circ_i \mathcal{Q}(d'_1, \ldots, d'_j; d_i)$$

and

$$\beta : \xi^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) \circ_i \xi^f_{\mathcal{P}}(d'_1, \ldots, d'_j; d_i) \to \mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_{i-1}, d'_1, \ldots, d'_j, d_{i+1}, \ldots, d_k; d).$$

β 是利用由函子-幺半群结构产生的自然变换 (3) 得到的。α和β 带有一个修正 τ : $\alpha \Rrightarrow \beta$，它由$f$的弱结构诱导。

最后，函子

$$\mathrm{Coend}^f_{\mathcal{P}}(d_1, \ldots, d_k; d) \to \mathcal{Q}(d_1, \ldots, d_k; d) \tag{16}$$

由自然变换 (15) 诱导，而弱结构则由这些修正诱导。□

根据定义，如果幺半松弛算子的底层函子是弱等价，则该算子是弱等价 。

引理 3.7. 由复杂度映射**(10)**诱导并由引理 *3.6* 给出的幺半群松弛态射

$$\mathrm{SC}(\mathcal{K}_n) \to \mathcal{RK}_n \tag{17}$$

由复杂度映射 (10)诱导并由引理 *3.6* 给出的映射是一个弱等价。

证明。 为简化记号，令 $\mathcal{P} = (\mathcal{K}_n)^+_{sc}$ 和 $\mathcal{Q} = \mathcal{RK}_n$。令 $c \in B \sqcup 1$，其中 B 是 $\mathcal{K}_n$ 的运算集合，$d := f(c)$ 且 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_k) \in \{\mathsf{f}, \mathsf{h}\}^k$。复杂度映射 f诱导出一个函子

$$\mathcal{P}^f_{\mathbf{d}}/c \to \mathcal{Q}^{id}_{\mathbf{d}}/d \tag{18}$$

我们仍将其记为f，这里沿用了记号。由此得到自然变换；根据引理 3.5，它们恰好就是自然变换 (15)。注意，如果这些自然变换逐点都是弱等价，则由它们诱导的所需幺半松弛算子

(17) 也同样是弱等价。因此，只要证明对于所有c和$\mathbf{d}$，(18) 中的函子f都是弱等价，我们就能得到所需结果。

回忆一下，函子$F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$是同伦左共终的，当对所有$y \in \mathcal{Y}$，切片范畴$F/y$都是可缩的 [10, 定义19.6.1]。根据 [17, 定理A], ，如果一个函子是同伦左共终的，那么它就是弱等价。因此，我们必须证明函子f是同伦左共终的。

注意，$Q^{id}\mathfrak{a}/d$就是范畴$\mathcal{RK}_n(d_1,\dots,d_k; d)$。令$q = (\mu,\sigma) \in Q^{id}\mathfrak{a}/d$。我们来证明$f/q$是可缩的。我们将沿用 [8, 引理3.4]中的论证。我们对k作归纳。

首先，假设$k = 0$。那么q是唯一的零元运算。由于$Q^{id}\mathfrak{a}/d = \mathcal{RK}_n(; d)$是平凡范畴，$f/q$同构于$\mathcal{P}^f\mathfrak{a}/c$。该范畴已在例3.4中描述。当$k = 0$时，其中的对象只能是唯一顶点为黑色的花冠。它有一个终对象：其唯一顶点由c装饰（若$c \in B$），或由唯一的零元运算装饰（若$c = *$）的花冠。因此，它是可缩的。

现在假设$k \geq 1$。令$i := \sigma^{-1}(1)$，并令$\mathbf{d}' = (d_1,\dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_k)$。由于$f$是幺半松弛算子，我们有一个自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^f_{\mathbf{d}}/c & \xrightarrow{f} & Q^{id}_{\mathbf{d}}/d \\ \downarrow{\scriptstyle -\circ_i o} & & \downarrow{\scriptstyle -\circ_i c(o)} \\ \mathcal{P}^f_{\mathbf{d}'}/c & \xrightarrow[f]{} & Q^{id}_{\mathbf{d}'}/d \end{array} \tag{19}$$

其中o是$\mathcal{P}$中唯一的零元运算，其目标为c_i。令$q' := q \circ_i f(o)$。方程（19）诱导出一个函子

$$F : f/q \to f/q'$$

将$f(p) \to q$映射到复合

$$f(p \circ_i o) \to f(p) \circ_i f(o) \to q \circ_i f(o) = q'.$$

具体而言，若$d_i = \mathsf{f}$，F会将以i编号的白色顶点变为黑色顶点，并在必要时收缩黑色顶点之间的边，移除一元黑色顶点。若$d_i = \mathsf{h}$，F会移除以i编号的叶边，并在必要时将装饰该叶边下方顶点的运算与零元运算复合。注意，由于$i = \sigma^{-1}(1)$，以i编号的白色顶点或叶子不可能位于另一个白色顶点之上。

现在我们将证明，F是同伦左共终的。令$x \in f/q'$，由$p' \in \mathcal{P}^f\mathfrak{a}/c$以及一个映射$f(p') \to q'$给出。我们希望证明$F/x$是可缩的。与 [7,第 5 节3],中一样，我们考虑典范包含函子

$$F_x \to F/x, \tag{20}$$

其中F_x是F在x上的纤维。

我们来证明F_x有一个终对象。不失一般性，我们假设p'的根顶点是黑色的。事实上，我们总可以在根边上插入一个一元黑色顶点。令r为装饰该根顶点的运算。那么$\mathrm{r} = (\mu',\sigma') \in \mathcal{K}_n(\mathrm{l})$，其中$\mathrm{l}$是该根顶点的输入边数。$\{1,\dots,\mathrm{l}\}$中的每个元素都对应于完全图$\mathrm{r}$的一个顶点，同时也对应于该根顶点的一条输入边。按如下方式定义$\mathrm{S} \subset \{1,\dots,\mathrm{l}\}$。若对于所有满足白色顶点或编号为$\mathrm{j}$的叶子位于$\mathrm{s}$上方的$\mathrm{j} \in \{1,\dots,\mathrm{k}\}$，都有$\mu_{ij} \leq \mathrm{n}$，则$\mathrm{s} \in \mathrm{S}$。令$\mathrm{t}$为以下运算$\mathcal{K}_n$：它由集合$\mathrm{S} \sqcup 1$上的完全图给出。$\mathrm{S}$上的边着色由$\mathrm{r}$在$\mathrm{S}$上的限制给出。令$\mathrm{S}$为$\mathrm{S}$在$\{1,\dots,\mathrm{l}\}$中的补集。连接

$i \in S$ 与 $*$ 之间的边，其颜色取所有 $j \in S$ 对应的 μ_{ij}^{r} 的最小值。令 t' 为将 r 限制到 S 所得到的运算$\mathcal{K}_n$。令 r' 为以下黑白 $\mathcal{K}_n$-树。它恰有两个顶点，一个黑色顶点和一个白色顶点。根顶点为黑色，并以t为装饰。白色顶点位于根顶点对应于 $*$的输入边上方。它以 t'为装饰。现在，令 p为将 r' 插入 p' 的根顶点中所得到的黑白 $\mathcal{K}_n$-树。于是，p 是 F_x 的终对象。

最后，让我们证明 F_x 是 F/x 的反射子范畴。也就是说，我们要证明函子 (20) 有一个左伴随 L。设 $F(y) \to x$ 是 F/x 中的一个对象。设 v 是 $F(y)$ 的黑色顶点，它取代了y 中原来的第 i 个白色顶点。通过映射 $F(y) \to x$，我们得到 x 中唯一确定的黑色顶点 w，它是 v 的像。如果映射 $F(y) \to x$ 将 v 与一个白色顶点之间的边收缩，那么 w 由插入一个一元黑色顶点得到。我们将 x 中的黑色顶点 w 变回白色顶点，并定义为 $L(y)$。伴随单位由映射 $F(y) \to x$ 给出。余单位是恒等态射。

总之，函子 (20) 是右伴随，因此是弱等价。由于对于所有 $x \in f/q'$，F_x 都是可缩的，F/x 也可缩。由此我们推得 F 是同伦左共终。因此它是弱等价。根据归纳法，对于所有 $q \in Q^{id}\,\mathbf{d}\,/d$，$f/q$ 都是可缩的。所以f 也是同伦左共终。□

3.4. **主定理的证明**。

引理 3.8. 设 $\mathcal{P}$ 和 Q 是两个范畴幺半群。若存在一个幺半群的松弛态射 $f\colon \mathcal{P} \to Q$，且它是弱等价，则 $\mathcal{P}$ 和 Q 是（严格）弱等价的。

ˆ证明。 设C 为 $\mathcal{P}$的颜色集。令 $\mathcal{P}$ 为以下 CC-带色歌剧。对于 $(c_1, \ldots, c_k, c) \in C^{k+1}$，记

$$f : \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c) \to Q(f(c_1), \ldots, f(c_k); f(c))$$

仍表示作为松弛态射结构一部分给出的函子f。令

$$\hat{\mathcal{P}}(c_1, \ldots, c_k; c)$$

为逗号范畴f/id，其定义见 [13, 第二节.6]。具体来说，它是这样一个范畴：其

- 对象是三元组 (p, q, α)，其中 $p \in \mathcal{P}(c_1, \ldots, c_k; c)$，$q \in Q(f(c_1), \ldots, f(c_k); f(c))$，且 $\alpha\colon f(p) \to q$ 是 $Q(f(c_1), \ldots, f(c_k); f(c))$ 中的一个态射，
- 态射 $(p, q, \alpha) \to (p', q', \alpha')$ 由态射 $\phi\colon p \to p'$ 和 $\psi\colon q \to q'$ 给出，使得 $\psi\alpha = \alpha' f(\phi)$。

ˆ 显然，$\mathcal{P}$ 具有幺半群的结构。此外，存在显然的（严格）幺半群态射

$$\mathcal{P} \xleftarrow{\pi} \hat{\mathcal{P}} \xrightarrow{\psi} Q$$

由投影给出。π 具有逐点左伴随 λ，它将p 映至 $(p, f(p), id)$。特别地，它是弱等价。由于 $\psi\lambda = f$，ψ 也是弱等价。□

定理 3.9. 范畴化歌剧 $\mathrm{SC}(\mathcal{K}_n)$ 与 $\mathcal{RK}_n$ 弱等价。

证明。 这由引理 3.7 和引理 3.8 立即推出。 □

推论 3.10. 若 A 是一个 $\mathcal{K}_n$-代数，则这一对$(A,\mathrm{Hoch}(A))$ 是一个 $\mathcal{RK}_n$-代数。

证明。 这直接由引理 2.15 和定理 3.9 得出。 □

4. Hochschild-Pirashvili 上链上的作用

4.1. **单纯球面**。

定义 4.1。 对于 $n \geq 1$，令 $S^n := \Delta^n/\partial\Delta^n$ 为 n 维单纯球面。

注 4.2. 存在一个典范双射 [3,页 35]

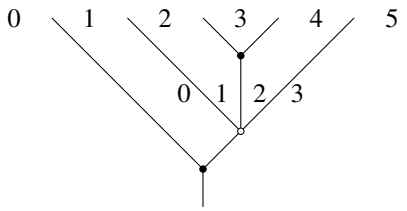
$$S^n(m) \simeq \binom{m}{n} \sqcup 1,$$

其中 $\binom{m}{n}$ 是 $\{1,\dots,m\}$ 的子集组成的集合，这些子集包含 n 个元素，而 $1 = \{*\}$ 是单元素集合。事实上， $\Delta^n(m)$ 是从 m 到 n的保序函数集合。 $\Delta^n(m)$ 内部的函数，也就是说不属于 $\partial\Delta^n(m)$ 的函数，都是满射。根据 Joyal 对偶，它们对应于从 $\{1,\dots,n\}$ 到 $\{1,\dots,m\}$ 的保序单射。

此外， Δ的态射对应于具有黑色顶点和唯一白色顶点的平面树，且不存在一元黑色顶点，也不存在连接两个黑色顶点的边。源由白色顶点上方的边数给出，目标由叶子数给出。例如，映射 $f\colon 3 \to 5$对应的平面树由

$$0, 1, 2, 3 \mapsto 1, 2, 4, 5 \tag{21}$$

如下:



对于态射 $f\colon l \to m \text{ in } \Delta \text{ and } i \in \{1,\dots,m\}$，令 λ_i 为与 f 对应的平面树的第 i 个叶子。则

$$S^1(f)(k) = \begin{cases} j & \text{if } \lambda_i \text{ is above the } j\text{-th incoming edge of the white vertex,} \\ * & \text{if } \lambda_i \text{ is not above the white vertex.} \end{cases}$$

对于 $n > 1 \text{ and } X \subset \{1,\dots,m\}$，其中含有 n 个元素,

$$S^n(f)(X) = \begin{cases} S^1(f)(X) & \text{if this set is a subset of } \{1,\dots,l\} \text{ which has } n \text{ elements,} \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

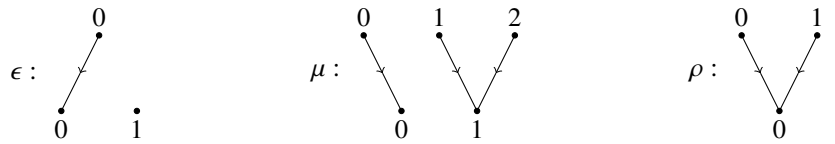
例如，如果 f 是映射 (21)，那么 $S^2(f)$ 是映射

$$12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45 \mapsto *, *, *, *, 12, 12, 13, *, 23, 23.$$

4.2. **Hochschild-Pirashvili 上链**。

定义 4.3. 令 FSet_* 为有限基点集范畴的（骨架）范畴。其对象为非负整数，态射 $l \to m$ 是任意将 0 映到 0 的函数 $\{0,\dots,l\} \to \{0,\dots,m\}$。它是一个对称幺半范畴，其幺半积由基点并 $\vee$给出。

定义 4.4. 令 $\epsilon\colon\ 0 \to 1$、$\mu\colon\ 2 \to 1$ 和 $\rho\colon\ 1 \to 0$ 为 FSet_* 中由下图表示的态射:



定义 4.5。 对于闭单范畴 $\mathcal{E}$ 和 $M \in \mathcal{E}$，令 $\otimes_M$ 表示逆变自函子像上的单结构

$$\mathcal{E}(-, M) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}.$$

定义为

$$\mathcal{E}(A, M) \otimes_M \mathcal{E}(B, M) := \mathcal{E}(A \otimes B, M).$$

定义 4.6。 [3, 第 2 节。9] 设 $\mathcal{E}$ 为对称闭单范畴，A为 $\mathcal{E}$中的交换幺半群，且M 为A-模。令

$$\mathcal{L}(A, M) : \mathrm{FSet}_* \to \mathcal{E}$$

它是唯一的逆变函子，将 1 映到 $\mathcal{E}(A,M)$，将 ϵ、μ 和 ρ 分别映到与A的乘法、A 的单位以及M 对A 的作用相对应的映射，并且相对于单张量积 $\vee$ 和 $\otimes_M$是强单函子。

定义 4.7. [15, 第 1 节。7] 设A 是一个交换代数，即向量空间范畴中的交换幺半群，且M 是一个A-模。我们考虑由下列逆变函子复合得到的协变函子

$$\Delta \xrightarrow{S^d} \mathrm{FSet}_* \xrightarrow{\mathcal{L}(A,M)} \mathrm{Vect}.$$

A 的 d 阶 *Hochschild-Pirashvili* 上链，其系数取自ffi*cients in M* ，定义为与这个余单纯向量空间相关联的上链复形。

4.3. **同伦左共终函子的构造**。

引理 4.8. 对于 $n \geq 1$，存在一个函子

$$\alpha_n : \Delta \to \Delta\mathcal{K}_n.$$

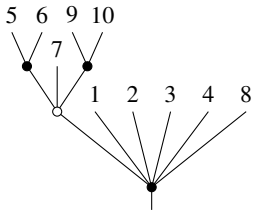
证明。 回顾定义 2.11， $\Delta\mathcal{K}_n$ 是一个范畴，其对象是 $\mathcal{K}_n$的运算。还要回顾一下，$\mathcal{K}_n$-树是一个顶点装饰着 $\mathcal{K}_n$运算的梳状树。一个态射由一棵黑白 $\mathcal{K}_n$-树给出，该树有唯一的白色顶点，此外还附有一个从这棵 $\mathcal{K}_n$-树的目标出发的额外态射。该态射的源是装饰白色顶点的运算，目标则是额外态射的目标。

对于 $m \geq 0$，我们定义 $\alpha_n(m) := (\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(k)$，其中

$$k := \frac{m!}{\binom{m}{n} n!(m-n)!}$$

并且 (μ, σ) 定义如下。首先，注意到$\binom{m}{n} n!(m-n)!$配备了字典序。此外，存在唯一确定的保序双射 $\{1, \ldots, k\} \simeq \binom{m}{n}$。现在，对于 $1 \leq i < j \leq k$，令 $\{i_1, \ldots, i_n\}$ 和 $\{j_1, \ldots, j_n\}$ 分别为与 i 和 j 对应的 $\{1, \ldots, m\}$ 的子集。我们定义 $\mu^{ij} := \lambda$，其中 λ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 中满足 $i_\lambda \neq j_\lambda$ 的最小元素。

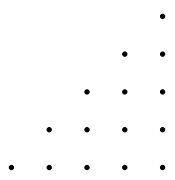
现在，令 $f\colon l \to m$ 为 Δ 中的一个态射。令 $g := S_n(f)$。我们将 $\alpha_n(f)$ 定义为如下黑白 $\mathcal{K}_n$-树。根顶点是一个黑色顶点，并以 $g^{-1}(*)$ 为标记。根上方对应于 $*$ 的边上有一个白色顶点。该白色顶点以 $\alpha_n(l)$ 为标记。白色顶点上方对应于 $S \in \alpha_n(l)$ 的边上方有一个黑色顶点；若 $g^{-1}(S)$ 不是单元素集，则该黑色顶点以 $g^{-1}(S)$ 为标记。树的叶子集上的额外线性序会重新排列这些纤维。从这棵树的目标到 $\alpha_n(m)$ 的态射是唯一确定的，因为 $\mathcal{K}_n(k)$ 是一个偏序集。例如，若 $f\colon 3 \to 5$ 是注 4.2 中的映射 (21)，那么 $\alpha_2(f)$ 如下所示：



事实上，根顶点上方有 6 条边，对应于纤维$g^{-1}(*) = \{*, 12, 13, 14, 15, 34\}$中的 6 个元素。白色顶点上方有 3 条边，对应于 $\alpha_2(3)$中的 3 个元素。白色顶点上方的第一条和最后一条边上方都有一个黑色顶点，因为它们分别对应于 12 和 23，而$g^{-1}(12)$和$g^{-1}(23)$都含有两个元素。

很容易验证，α_n 确实是一个函子。 □

注 4.9。将 $\alpha_n(m)$视为 $\mathbb{R}^n$中$_{m!\ n!(m-n)!}$ 个点的构形或许会有所帮助。~~例如~~，当$m = 6$且$n = 2$时，点的构形如下所示：



此外，可以构造一个函数 π，其定义域为 $\mathbb{R}^n$中 k 个点的构形空间，陪域为 $\mathcal{K}_n(k)$。该函数将$(x_1, \ldots, x_k)$映射到(μ, σ)，其中

- μ_{ij}是最小的 $\lambda \in \{1, \ldots\ldots, n\}$使得$x_i$和$x_j$的第 λ 个坐标不同，
- $\sigma_{ij} = id$当且仅当$x_i < x_j$。

那么，$\alpha_n(m)$ 是上述$_{m!\ n!(m-n)!}$ 个点的构形经由~~π 的~~像。

引理 4.10. 引理 *4.8* 中的函子 α_n 是同伦左共终的。

证明。假设我们有一个 $\Delta\mathcal{K}_n$ 的对象，由$k \geq 0$ 和$p \in \mathcal{K}_n(k)$ 给出。为简化记号，令 $C := \alpha_n/p$。我们要证明 C是可缩的。C 的对象由$n \geq 0$ 以及一个态射 $\alpha_n(m) \to p$ 给出。这样的态射由一棵黑白 $\mathcal{K}_n$-树给出，该树有唯一一个以 $\alpha_n(m)$ 装饰的白色顶点，并且还有一个从这棵树的目标到p的额外态射。

令 C_0 为 C 的全子范畴，其对象是根顶点为唯一白色顶点的黑白 $\mathcal{K}_n$-树。由于 C_0 有一个始对象，因此它是可缩的。注意，$\alpha_n(n) \in \mathcal{K}_n(1)$ 是幺半群 $\mathcal{K}_n$ 的单位。C_0 的始对象由 $m = n$ 给出，而态射 $\alpha_n(n) \to p$ 是如下的 $\mathcal{K}_n$-树。根顶点是白色的，且装饰为

其装饰为 $\mathcal{K}_\backslash$ 的单位。它是一个一元顶点，其上方唯一的顶点是黑色的，并以 p 为装饰。额外态射是 p 上的恒等态射。

现在证明 C_0 是 C的反射子范畴。我们定义包含映射 $C_0 \to C$的左伴随 L。假设有一个对象 $\mathrm{c} \in C$，由 $\mathrm{m} \geq 0$ 和一个态射 $\mathrm{x}\colon \alpha_n(\mathrm{m}) \to \mathrm{p}$ 给出。令 r 为由态射 x 给出的 $\mathcal{K}_n$-树的根顶点。如果 r 是白色的，那么我们可以定义 $\mathrm{L(c)} := \mathrm{c}$。否则，r 是黑色的。在这种情况下，令 l 为 r 上方边的数量。r 装饰有一个对象 $(\mu, \sigma) \in \mathcal{K}_n(\mathrm{l})$。令 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{l}\}$ 满足：r 上方第 i 条边位于 x 的 $\mathcal{K}_n$-树唯一的白色顶点之下。我们将集合 $\{1, \ldots, \mathrm{l}\}$ 划分为 $2\mathrm{n}+1$ 个子集。第一个子集由 $\{\mathrm{i}\}$ 给出；其余 $2\mathrm{n}$ 个子集如下给出。对于 $\mu' \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ 和 $\sigma' \in \Sigma_2$，对应于有序对 (μ', σ') 的子集包含所有满足 $\mathrm{j} \in \{1, \ldots, \mathrm{l}\}$、$\mathrm{j} \neq \mathrm{i}$、$\mu^{ij} = \mu'$ 且$\sigma_{ij} = \sigma'$的元素。此外，对于上述有序对 (μ', σ')，有一个由 $\mathrm{o}_{\mu', \sigma'}$ 给出的运算，其定义为将复图 (μ, σ) 限制到对应于 (μ', σ') 的子集上。现在我们如下定义黑白 $\mathcal{K}_n$-树 L(c)。根顶点是唯一的白色顶点，并装饰有 $\alpha_n(\mathrm{m}+2)$。它上方的每条边都对应于 $\{0, \ldots, \mathrm{m}+1\}$中含有 n 个元素的一个子集。令 $\mathrm{S} = \{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_n\}$ 为这样的一个子集。首先考虑 S 不含 0 或 $\mathrm{n}+1$的情况。此时，S 对应边上方的黑色顶点定义为 c 中 S 对应边上方的黑色顶点。现在考虑 S 具有 $\{0, \ldots, \mathrm{n}\}\backslash\{\mu'\}$ 的形式，其中 $\mu' \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$。此时，S 对应边上方的黑色顶点装饰有 $\mathrm{o}_{\mu'}$,id。接下来考虑 S 具有 $\{\mathrm{m}-\mathrm{n}+1, \ldots, \mathrm{m}+1\}\backslash\{\mathrm{m}-\mathrm{n}+\mu'\}$ 的形式，其中 $\mu' \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$。此时，S 对应边上方的黑色顶点装饰有 $\mathrm{o}_{\mu'}$,(12)。最后，考虑 S 含有 0 或 $\mathrm{n}+1$，但不包含于 $\{0, \ldots, \mathrm{n}\}$或$\{\mathrm{m}-\mathrm{n}+1, \ldots, \mathrm{m}+1\}$ 的情况。此时，S 对应边上方的黑色顶点是零元。这就定义了 L(c)。伴随单位由态射 $\mathrm{m} \to \mathrm{m}+2$ 给出，它属于 Δ，并将 i 映至 $\mathrm{i}+1$。余单位是恒等态射。总之，C_0 是 C 的反射子范畴，且 C_0 可缩。这证明了 C也可缩。□

4.4. **Hochschild 上链的两种定义之间的等价性**。

定理 4.11. 设 A 是一个交换代数。将 A 视为一个 $\mathcal{K}_n$-代数时，定义 *2.12* 中的 *Hochschild* 对象 $\mathrm{Hoch}(A)$与 A 的阶 n *Hochschild-Pirashvili* 上链一致。

证明. 下图交换：

(22)
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{S^n} & \mathrm{FSet}_*^{op} \\ {\scriptstyle \alpha_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}(A,A)} \\ \Delta\mathcal{K}_n & \xrightarrow[\mathrm{End}_A]{} & \mathrm{Cat} \end{array}$$

对于任意小范畴 C 以及任意函子 $X\colon C \to \mathrm{Cat}$，令 $\delta\colon C \to \mathrm{Cat}$ 为由 $\delta(c) := C/c$ 给出的函子，并且

$$\mathrm{Tot}(X) := \underline{\mathrm{Hom}}_C(\delta, X).$$

我们有

(23)
$$\mathrm{Hoch}(A) = \mathrm{Tot}(\mathrm{End}_A) = \mathrm{Tot}(\mathrm{End}_A \cdot \alpha_n) = \mathrm{Tot}\left(\mathcal{L}(A,A) \cdot S^n\right),$$

其中，第一个等式由 $\mathrm{Hoch}(A)$ 的定义 2.12 得出，第二个等式用到了引理 4.8 和 [10, 定理 19.6.7 (2)], ，最后一个等式则归功于方形 (22) 的交换性。结论由以下事实得出：余正规化可以视为

第 3 节中的全局化 [3, 11]。这意味着，(23) 中的最后一项与定义 4.7 相同。□

推论 4.12。 对于交换代数 A，A 的 n 阶 *Hochschild-Pirashvili* 上链上存在一个 $\mathcal{K}_{n+1}$ 作用。

证明。 根据推论 3.10， $\mathcal{RK}_{n+1}$ 在这一对 $(A, \mathrm{Hoch}(A))$ 上有一个作用。特别地，A 上存在一个 $\mathcal{K}_{n+1}$ 作用。结论由定理 4.11 得出。□

参考文献

[1] John Baez 和 James Dolan。高维代数 III：n-范畴与 opetope 代数。《数学进展》, 135(2):145–206, 1998。[2] Michael Batanin。Eckmann–Hilton 论证与高阶歌剧。《数学进展》, 217(1):334–385, 2008。[3] Michael Batanin 和 Clemens Berger。格路径歌剧与 Hochschild 上链。《当代数学》, 504:23–52, 2009。[4] Michael Batanin、Florian De Leger 和 David White。准驯良 substitude 与 Grothendieck 构造。《范畴论及其应用》, 44(24):676–730, 2025。[5] Michael Batanin 和 Boris Shoikhet。微分分次范畴的扭曲张量积与 Kontsevich 瑞士奶酪猜想。arXiv 预印本 arXiv:2412.03239, 2024。[6] Clemens Berger。实构形空间和 E_n-幺半群的组合模型。《当代数学》, 202:37–52, 1997。[7] Denis-Charles Cisinski。预层作为同伦类型的模型。法国数学会, 2006。[8] Vasily Dolgushev、Dmitry Tamarkin 和 Boris Tsygan。Deligne 猜想的瑞士奶酪版本的证明。《国际数学研究通知》, 2011(20):4666–4746, 2011。[10] Philip Hirschhorn。模型范畴及其局部化。第 99 号。美国数学会, 2009。[11] Po Hu、Igor Kriz 和 Alexander Voronov。关于 Kontsevich 的 Hochschild 上同调猜想。《数学汇刊》, 142(1):143–168, 2006。[12] Maxim Kontsevich。变形量子化中的幺半群与动机。《数学物理通讯》, 48(1):35–72, 1999。[13] Saunders Mac Lane。《工作中的数学家之范畴论》，第 5 卷。施普林格科学与商业媒体, 1998。[14] James McClure 和 Jeffrey S mith。余单纯对象与小 n-立方体，I。《美国数学杂志》, 126(5):1109–1153, 2004。[15] Teimuraz Pirashvili。高阶 Hochschild 同调的 Hodge 分解。载于《高等师范学校科学年刊》, 第 33 卷, 第 151–179 页。爱思唯尔, 2000。[16] Alexandre Quesney。相对格路径歌剧。《代数与几何拓扑》, 18 1798, 2018 3 1753( ): – 。[17] Daniel Quillen。高阶代数 K-理论：I。载于《高阶 K-理论：巴特尔纪念研究所西雅图研究中心于1972年8月28日至9月9日举行的会议论文集》, 第 85–147 页。施普林格, 2006。[18] Justin Thomas。Kontsevich 瑞士奶酪猜想。《几何与拓扑》, 20(1):1–48, 2016。[19] Alexander Voronov。瑞士奶酪歌剧。《当代数学》, 239(365-374):11, 1999。[20] Mark Weber。作为多项式 2-单子代数的幺半群。《范畴论及其应用》, : – , 2015 30 1659 -1712。电子邮箱: fdeleger@mail.ntua.gr