arXiv:2512.20197v1 [math.QA] 23 Dec 2025

Clifford 代数上的可分余环新例子

CLAUDIA MENINI 和 BLAS TORRECILLAS

摘要。本文继续了我们在 [MT1] 和 [MT2] 中开展的研究。本文的主要目的是研究余环 $(A \otimes H^{op}, H, \psi)$ 的可分性条件。该余环是利用 8维克利福德代数 $A = Cl(\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \lambda)$ 构造的，并将其视为一个 H-余模代数，其中 H 是 Radford 在 [R] 中引入的 8 维幺模带 Hopf 代数 $E(2)$。

目录

1. 引言 7
2. 预备知识 8 2.1. 8维Clifford代数及其余代数结构 10

第1部分。计划 11
3. Casimir条件 11 4. α 13
的计算 5. 态射条件 14 6. 归一化条件 14 7. 态射条件（13）蕴含归一化条件 15 8. 方程 $B($
$h \otimes h')(1_A \otimes h'') = (1_A \otimes h_1'')B(h_2''h \otimes h_3''h')$ 15 8.1. 情形
$h'' = g$ 158.2. 情形
$h'' = x_i$ 169. 简化
17 10. 方程（12）的约化 19 10.1. 情形
$h' = x_i$ 1910.2. 情形
$h' = x_1x_2$ 2011. 各种情
形 21 11.1.
$d = X_i$ 23

第2部分：卡西米尔条件 35
12. $B(g \otimes 1_H)$ 36
12.1. 情形 1_H 36
12.2. 情形 g12.3. 36
情形 $x_1$12.4. 情形 36
$x_2$12.5. 情形 x_1x_2 36
12.6. 情形 gx_1 37
12.7. 情形 gx_2 38
38

2010 数学学科分类。主要分类号 16T05；次要分类号 15A66、18M05。关键词和短语。克利福德代数、可分函子、幺半范畴、余可分余代数、cowreath。本文撰写期间，第一作者是“代数与几何结构及其应用国家小组”（GNSAGA-INdAM）的成员，并获得 MIUR 国家研究项目 PRIN 2017 的部分资助，资助截至 2024 年 9 月 31 日。第二作者获得 PID2024- 158993NB-I00 和 Proyecto Lanzadera 的部分资助。

12.8. 情形 gx_1x_2 12.9. 得到的等式 12.10. 元素 B 38
$(g \otimes 1_H)$ 的最终形式 13. $B(x_1 \otimes 1_H)$ 13.1. 情形 1_H 39
13.2. 情形 g 13.3. 情形 x_1 13.4. 情形 x_2 13.5. 情形 41
gx_1 13.6. 情形 gx_2 13.7. 情形 x_1x_2 13.8. 情形 gx_1x_2 41
13.9. 元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$ 的最终形式 14. $B(x_2 \otimes 1_H)$ 42
14.1. 情形 1_H 14.2. 情形 g 14.3. 情形 x_2 14.4. 情形 42
x_1 14.5. 情形 x_1x_2 14.6. 情形 gx_1 14.7. 情形 gx_2 42
14.8. 情形 gx_1x_2 14.9. 元素 $B(x_2 \otimes 1_H)$ 的最终形 42
式 15. $B(gx_1 \otimes 1)$ 15.1. 情形 1_H 15.2. 情形 g 15.3. 42
情形 x_1 15.4. 情形 x_2 15.5. 情形 x_1x_2 15.6. 情形 gx_2 45
15.7. 情形 gx_1x_2 15.8. 元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的最终形 48
式 16. $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 16.1. 情形 1_H 16.2. 情形 g 52
16.3. 情形 x_1 16.4. 情形 x_2 16.5. 情形 x_1x_2 16.6. 情 55
形 gx_1 16.7. 情形 gx_2 16.8. 情形 gx_1x_2 16.9. 元素 B 56
$(gx_2 \otimes 1_H)$ 的最终形式 17. $B(x_1x_2 \otimes 1_H)$ 17.1. 情 56
形 1_H 17.2. 情形 g 17.3. 情形 x_1 17.4. 情形 x_2 17.5. 56
情形 x_1x_2 17.6. 情形 gx_1 17.7. 情形 gx_2 17.8. 情形 57
gx_1x_2 17.9. 元素 $B(x_1x_2 \otimes 1_H)$ 的最终形式 18. B 57
$(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 重写后的形式 57
61
64
67
71
72
72
73
73
73
73
78
80
81
81
81
82
82
82
83
85
87
90
90
90
91
91
91
92
93
101
106
112
115
116

19. $B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$ 元素 $B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$ 的 117 页 140
19.1. 情形 1_H 117
19.2. 情形 g 118
19.3. 情形 x_1 118
19.4. 情形 x_2 119
19.5. 情形 x_1x_2 120
19.6. 情形 gx_1 128
19.7. 情形 gx_2 133
19.8. 情形 gx_1x_2 138
19.9. 最终形式
20. $B(1 \otimes x_1)$ 和 $B(1 \otimes x_2)$ 141
21. $B(1 \otimes gx_1)$ 142
21.1. 情形 1_H 143
21.2. 情形 g, x_1 和 x_2 143
21.3. 情形 x_1x_2 143
21.4. 情形 gx_1 146
21.5. 情形 gx_2 150
21.6. 情形 gx_1x_2 153
22. $B(1 \otimes gx_2)$ 153
22.1. 情形 1_H 154
22.2. 情形 g 155
22.3. 情形 x_1 155
22.4. 情形 x_2 155
22.5. 情形 x_1x_2 156
22.6. 情形 gx_1 158
22.7. 情形 gx_2 161
22.8. 情形 gx_1x_2 164
23. $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 164
23.1. 情形 1_H 165
23.2. 情形 g 166
23.3. 情形 x_1 166
23.4. 情形 x_2 166
23.5. 情形 x_1x_2 166
23.6. 情形 gx_1 169
23.7. 情形 gx_2 173
23.8. 情形 gx_1x_2 176
24. $B(x_1 \otimes x_1)$ 177
24.1. 情形 1_H 178
24.2. 情形 g 178
24.3. 情形 x_1 179
24.4. 情形 x_2 183
24.5. 情形 x_1x_2 184
24.6. 情形 gx_1 188
24.7. 情形 gx_2 188
24.8. 情形 gx_1x_2 189
25. $B(x_1 \otimes x_2)$ 192
25.1. 情形 1_H 192
25.2. 情形 g 192
25.3. 情形 x_1 193
25.4. 情形 x_2 196
25.5. 情形 x_1x_2 200
25.6. 情形 gx_1 201
25.7. 情形 gx_2 201

25.8. 情形 $gx_1x_2$26. $B(1 \otimes gx_1x_2)$ 202
26.1. 情形 1_H26.2. 情形 g26.3. 情 206
形 $x_1$26.4. 情形 $x_2$26.5. 情形 x_1x_2 207
26.6. 情形 gx_1 和 $gx_2$26.7. 情形 207
$gx_1x_2$27. $B(x_1 \otimes x_1x_2)$ 27.1. $B($ 208
$x_1 \otimes x_1x_2, 1_A, gx_1)$ 27.2. $B($ 211
$x_1 \otimes x_1x_2, G, gx_1x_2)$ 27.3. $B($ 212
$x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)$ 27.4. $B($ 212
$x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)$ 27.5. $B($ 212
$x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)$ 27.6. $B($ 216
$x_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1)$ 27.7. $B($ 217
$x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1)$ 27.8. $B($ 218
$x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)$ 28. $B($ 221
$x_1 \otimes gx_1)$ 28.1. $B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)$ 224
28.2. $B(x_1 \otimes gx_1;\ G, gx_1x_2)$ 28.3. B 227
$(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$ 28.4. $B($ 230
$x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)$ 28.5. $B($ 231
$x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)$ 28.6. $B($ 233
$x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1)$ 29. $B(x_1 \otimes gx_2)$ 238
29.1. 情形 1_H29.2. 情形 g29.3. 情 238
形 $x_1$29.4. 情形 $x_2$29.5. 情形 x_1x_2 240
29.6. 情形 $gx_1$29.7. 情形 $gx_2$29.8. 244
情形 $gx_1x_2$30. $B(x_1 \otimes gx_1x_2)$ 30.1. 249
$B\,(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2)$ 30.2. $B($ 252
$x_1 \otimes gx_1x_2;\ G, gx_1)$ 30.3. $B($ 254
$x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)$ 30.4. $B($ 256
$x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)$ 30.5. $B($ 257
$x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)$ 30.6. $B($ 257
$x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)$ 30.7. $B($ 257
$x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\,)$ 30.8. $B($ 258
$x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)$ 31. $B($ 258
$x_2 \otimes x_1)$ 31.1. $B\,(x_2 \otimes x_1; 1_A, g)$ 262
31.2. $B\,(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2)$ 31.3. $B\,($ 265
$x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2)$ 31.4. $B\,(x_2 \otimes x_1;$ 268
$G, 1_H)$ 31.5. $B\,(x_2 \otimes x_1;\ G, x_1x_2)$ 268
31.6. $B\,(x_2 \otimes x_1;\ G, gx_1)$ 31.7. $B\,($ 269
$x_2 \otimes x_1;\ G, gx_2)$ 31.8. $B\,(x_2 \otimes x_1;$ 271
$X_1, 1_H)$ 31.9. $B\,(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2)$ 272
273
274
277
280
282
283
284
285
285
287
287
288
289
290
290

31.10. $B\left(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1\right)$ 31.11. $B\left(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2\right)$ 31.12. $B\left(x_2 \otimes x_1;\ X_2, 1_H\right)$ 31.13. $B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right)$ 31.14. $B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1)$ 31.15. $B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2)$ 31.16. $B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g)$ 31.17. $B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1)$ 31.18. $B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2\right)$ 31.19. $B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right)$ 31.20. $B(x_1 \otimes x_2; GX_1, g)$ 31.21. $B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right)$ 31.22. $B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2\right)$ 31.23. $B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right)$ 31.24. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g)$ 31.25. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)$ 31.26. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)$ 31.27. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2)$ 31.28. $B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1X_2, 1_H)$ 31.29. $B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)$ 31.30. $B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1)$ 31.31. $B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)$ 32. $B\left(x_2 \otimes x_2\right)$ 32.1. $B\left(x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2\right)$ 32.2. $B(x_2 \otimes x_2;\ G, gx_2)$ 32.3. $B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)$ 32.4. $B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2)$ 32.5. $B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2)$ 32.6. $B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2)$ 33. $B(x_2 \otimes x_1x_2)$ 33.1. $B(x_2 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_2)$ 33.2. $B\left(x_2 \otimes x_1x_2;\ G, gx_1x_2\right)$ 33.3. $B\left(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2\right)$ 33.4. $B\left(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2\right)$ 33.5. $B\left(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_2\right)$ 33.6. $B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)$ 34. $B(x_2 \otimes gx_1)$ 34.1. $B(x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)$ 34.2. $B(x_2 \otimes gx_1;\ G, gx_1x_2)$ 34.3. $B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$ 34.4. $B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)$ 34.5. $B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)$ 34.6. $B(x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1)$ 35. $B(x_2 \otimes gx_2)$ 35.1. $B(x_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_2)$ 35.2. $B(x_2 \otimes gx_2;\ G, gx_1x_2)$ 35.3. $B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)$ 35.4. $B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)$ 35.5. $B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2)$ 35.6. $B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2)$ 36. $B(x_2 \otimes gx_1x_2)$ 36.1. $B\left(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2\right)$ 36.2. $B\left(x_2 \otimes gx_1x_2;\ G, gx_2\right)$

293
293
294
295
298
299
301
301
302
303
307
308
308
309
312
312
312
313
316
316
320
321
323
323
324
325
326
327
330
331
332
332
334
336
337
338
342
344
345
346
348
349
350
351
351
352
353
356
357
358
359
359
361

36.3. $B\,(x_2 \otimes gx_1x_2;\, X_1, gx_2)$ 36.4. $B\,($ $x_2 \otimes gx_1x_2;\, X_2, gx_2)$ 36.5. $B\,(x_2 \otimes gx_1x_2;$ $X_1X_2, gx_1x_2)$ 36.6. $B\,(x_2 \otimes gx_1x_2;\, GX_1,$ $gx_1x_2)$ 36.7. $B\,(x_2 \otimes gx_1x_2;\, GX_2, gx_1x_2)$ 36.8. $B\,(x_2 \otimes gx_1x_2;\, GX_1X_2, gx_2)$ 37. B $(x_1x_2 \otimes x_1)$ 37.1. $B(x_1x_2 \otimes x_1;\, 1_A, gx_1x_2)$ 37.2. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1;\ G, gx_1)$ 37.3. $B\,($ $x_1x_2 \otimes x_1;\, X_1, gx_1)$ 37.4. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1;$ $X_2, gx_1)$ 37.5. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1;\, X_1X_2, gx_1x_2)$ 37.6. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1;\, GX_1, gx_1x_2)$ 37.7. B $(x_1x_2 \otimes x_1;\, GX_2, gx_1x_2)$ 37.8. $B\,($ $x_1x_2 \otimes x_1;\, GX_1X_2, gx_1)$ 38. $B(x_1x_2 \otimes x_2)$ 38.1. $B(x_1x_2 \otimes x_2;\, 1_A, gx_1x_2)$ 38.2. $B\,($ $x_1x_2 \otimes x_2;\ G, gx_2)$ 38.3. $B\,(x_1x_2 \otimes x_2;\, X_1,$ $gx_2)$ 38.4. $B\,(x_1x_2 \otimes x_2;\, X_2, gx_2)$ 38.5. $B\,(x_1x_2 \otimes x_2;\, X_1X_2, gx_1x_2)$ 38.6. $B\,($ $x_1x_2 \otimes x_2;\, GX_1, gx_1x_2)$ 38.7. $B\,($ $x_1x_2 \otimes x_2;\, GX_2, gx_1x_2\,)$ 38.8. $B($ $x_1x_2 \otimes x_2;\, GX_1X_2, gx_2)$ 39. $B($ $x_1x_2 \otimes x_1x_2)$ 39.1. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1x_2;$ $G \otimes gx_1x_2)$ 39.2. $B\,(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\, X_1,$ $gx_1x_2)$ 39.3. $B(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\, X_2, gx_1x_2)$ 39.4. $B(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\, GX_1X_2, gx_1x_2)$ 40. $B(x_1x_2 \otimes gx_1)$ 40.1. $B\,(x_1x_2 \otimes gx_1;$ $1_A, gx_1)$ 40.2. $B\,(x_1x_2 \otimes gx_1;\ G, gx_1x_2)$ 40.3. $B\,(x_1x_2 \otimes gx_1;\, X_1, gx_1x_2)$ 40.4. B $(x_1x_2 \otimes gx_1;\, X_2, gx_1x_2)$ 40.5. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_1;\, X_1X_2, gx_1)$ 40.6. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_1;\, GX_1, gx_1)$ 40.7. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_1;\, GX_2, gx_1)$ 40.8. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_1;\, GX_1X_2, gx_1x_2)$ 41. $B($ $x_1x_2 \otimes gx_2)$ 41.1. $B\,(x_1x_2 \otimes gx_2;\, 1_A, gx_2)$ 41.2. $B\,(x_1x_2 \otimes gx_2;\ G, gx_1x_2)$ 41.3. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, X_1, gx_1x_2)$ 41.4. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, X_2, gx_1x_2)$ 41.5. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, X_1X_2, gx_2)$ 41.6. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, GX_1, gx_2)$ 41.7. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, GX_2, gx_2)$ 41.8. $B\,($ $x_1x_2 \otimes gx_2;\, GX_1X_2, gx_1x_2)$ 42. $B($ $x_1x_2 \otimes gx_1x_2)$ 42.1. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2;\, 1_A,$ $gx_1x_2)$ 42.2. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2;\, X_1X_2,$ $gx_1x_2)$ 42.3. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2;\, GX_1,$ $gx_1x_2)$ 42.4. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2;\, GX_2,$ $gx_1x_2)$

第3部分。条件(13)和条件(12) 473 43. 方程（13）473 43.1. 情形
$1_A \otimes g$ 47343.2. 情形
$1_A \otimes x_1$ 47343.3. 情形
$1_A \otimes x_2$ 49544. 方程（
12）522 44.1.
$d = G$ 52244.2.
$d = X_i$ 56544.3.
$d = X_1$ 56544.4.
$d = X_2$ 61945. 根据
（13）得到的所有等式列表 672 45.1.
G 67245.2.
X_1 67545.3.
X_2 67946. 非退
化情形 682 46.1. 所有单项式等式列表 0 683 46.2. 所有等式列表 1 684 46.3. 单项式等式列表 1 694 46.4. 所有等式列表 2 695 46.5. 单项式等式列表 2 705 46.6. 全部等式列表 3 706 46.7. 单项式等式列表 3 716 46.8. 所有等式列表 4 716 46.9. 单项式等式列表 4 726 46.10. 所有等式列表 5 726 46.11. 所有单项式等式列表 735 46.12. （46.10）中系数为 1 或 -1 的二项式等式列表 736 46.13. 上文得到的新幺半等式列表 739 46.14. 将上述等式代入二项式等式列表 740 46.15. 迄今为止的完整单项式等式列表 741 46.16. 推导更多单项式等式 742 46.17. 所有单项式等式列表 745 46.18. 所有等式列表 6 746 46.19. 上文所得结果的精简列表 755 47. 可分性结果 759 参考文献 760

1. 引言

范畴可分性概念由 [NVV] 引入，其中给出并研究了可分函子的概念。该理论拓展了交换环上可分代数的概念；这一概念由 M. Auslander 和 O. Goldmann 在 [AG] 中引入。其重要性还源于它在几乎所有代数领域中的应用（参见 [F]）。

可分性的概念可以推广到幺半范畴中的（余）代数（见 [BT]）。特别是，在双侧霍普夫模上构造的 cowreath 的研究见于 [BCT1, 命题 7。4] 以及 [BCT2]。回顾一下，在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，三元组 (A, X, ψ) 被称为一个 cowreath， X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象， A 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数，(X, ψ) 是范畴 $\mathcal{T}_{\# A}$ 中的一个余代数，并且 $\psi\colon X \otimes A \to A \otimes X$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，与 A 的代数结构相容（定义见“预备知识”一节）。

8 维幺模带 Hopf 代数 $E(2)$ 由 Radford 在 [R] 中引入。这个 Hopf代数有助于计算纽结的 Kauffman 不变量以及 Henning

在三维流形上的不变量，见 [G]。它是余根为 kC_2see [S] 的唯一 8 维 Hopf代数。一般族 $E(n)$ 曾在 [CD] 中被研究。

我们将研究利用由 G、X_1、X_2 生成的8维克利福德代数 $A = Cl(\alpha、\beta_1、\beta_2、\gamma_1、\gamma_2、\lambda)$ 所构造的 cowreath 的可分性，其关系为 $G^2 = \alpha$、$X_i^2 = \beta_i$ 和 $X_iG + GX_i = \gamma_i$ 以及 $X_1X_2 + X_2X_1 = \lambda$。$A$

是一个 $E(2)$-余模代数（事实上，当 $\alpha \neq 0$ [PV] 时，它是一个 cleft扩张）。这项研究延续了我们在 [MT1] 和 [MT2] 中开展的工作。具体而言，在 [MT2] 中，我们考虑了 $H = H_4$ 为域 k 上的 Sweedler四维Hopf代数的情形，而 $A = Cl(\alpha, \beta, \gamma)$ 是由两个元素 G、X 及关系 $G^2 = \alpha$、$X^2 = \beta$ 和 $XG + GX = \gamma$ 生成的广义Clifford代数，它是一个 H-余模代数。我们证明了 cowreath $(A \otimes H^{op}, H, \psi)$ 总是可分的。该结果并不需要特别的努力，因此接下来面对自然的后续步骤就顺理成章了。然而遗憾的是，这里的情况显得复杂得多。与之前一样，根据 [BCT1，命题 7.4]，，我们试图寻找一个 k-线性映射 $B: H \otimes H \to A \otimes H^{op}$，使其满足卡西米尔条件（6）、态射条件（7）和归一化条件（8）。我们可以证明，如果 B 满足态射条件（实际上只需满足其中的一部分，即方程（13））， 并且 $B(1_H \otimes 1_H) = 1_A \otimes 1_H$，那么归一化条件会自动满足（见 7）。随后我们专注于卡西米尔条件。利用由态射条件导出的等式，我们可以证明（见命题（9.1））， 所有形如 $B(h \otimes h')$ 的元素都可以由形如 $B(h \otimes 1_H)$ 的元素得到。因此，我们将卡西米尔条件施加于八个元素 $B(h \otimes 1_H)$，其

$$h \in \{1_H, g, x_1, x_2, x_1x_2, gx_1, gx_2, gx_1x_2\}$$

并得到结果（14），（81），（149），（217），（346），（347），（348）和（396）。随后，我们认为，如上所述，卡西米尔条件会自动满足其余所有由这八个元素写出的项。我们找到了一些捷径，例如命题（8.2）中的方法，但仍不得不在 23 种情形下直接验证。这花费了我们很长时间，也占用了大量篇幅。接着，我们处理态射条件。我们可以证明（见（5）），该条件可拆分为等式（12）和（13）。我们开始考察（12）。正如我们在第（5）节中指出的，只需针对 $G \otimes 1_H$、$X_1 \otimes 1_H$ 和 $X_2 \otimes 1_H$ 计算等式（12）。此外，正如我们在（10）中证明的，假设方程（13）成立，那么若方程（12）对 $h \otimes 1_H$ 成立，则对任意 $h \otimes h'$. 也成立。尽管如此，我们仍需检查许多情形，但最终发现方程（12）会自动成立。随后，我们处理等式（13）。由此得到了一长串等式（见 45）。此时，我们决定只考虑非退化情形，也就是说，我们的所有常数 α，β_1，β_2，γ_1，γ_2，λ 均不为零的情形。最终结果归纳于定理（47.1）中，该定理说明，在这种情形下，我们总能找到一个双线性形式 B，使其满足我们的三个可分性条件。

2. 预备知识

下文将采用 [BCT1] 中的所有定义和记号，但代数的单位元 A, 记作 $u: 1 \to A$。

设 $\mathcal{C}$ 为一个（严格）幺半范畴，并设 (A, m, u) 是 $\mathcal{C}$ 中的一个代数。回顾一下，经过 A 的一个（右）传递态射是一个二元组 (X, ψ)，满足 $X \in \mathcal{C}$，并且

$$\psi : X \otimes A \to A \otimes X \text{ in } \mathcal{C}$$

使得

$$\begin{aligned} \psi \circ (X \otimes m) &= (X \otimes m) \circ (A \otimes \psi) \circ (\psi \otimes A) \\ \psi \circ (X \otimes u) &= u \otimes X \end{aligned}$$

范畴 $\mathcal{T}_{\#\,A}$ 的对象是右传递。态射 $f: X \to Y$ 在 $\mathcal{T}_A^{\#}$ 中是一个态射 $f: X \to A \otimes Y$ 在 $\mathcal{C}$ 中，使得

$$(m \otimes Y) \circ (A \otimes f) \circ \psi = (m \otimes Y) \circ (A \otimes \psi) \circ (f \otimes A)$$

在 $\mathcal{T}_A^{\#}$ 中，两个态射 $f\colon X\to Y$和 $c\colon Y\to Z$ 的复合为

$$c\odot f=(m\otimes Z)\circ(A\otimes c)\circ f$$

and

$$\mathrm{Id}_{(X,\psi)}=u\otimes X.$$

$(X,\ \psi_X)$ 和 $(Y,\ \psi_Y)$ 的张量积为

$$X\circledast Y=(X\otimes Y,\psi_X\odot\psi_Y=(\psi_X\otimes Y)\circ(X\otimes\psi_Y))$$

$f\colon X\to X'$ 与 $c\colon Y\to Y'$ 的张量积为

$$f\circledast c=(m\otimes X'\otimes Y')\circ(A\otimes\psi_{X'}\otimes Y')\circ(f\otimes c).$$

单位对象为

$$\left(\underline{1},r_A^{-1}\circ l_A:\underline{1}\otimes A\to A\otimes\underline{1}\right)$$

还要回顾一下，$\mathcal{C}$中的*cowreath* 是一个三元组 $(A,\ X,\ \psi)$，其中 A是 $\mathcal{C}$中的一个代数，而 $(X,\ \psi)$ 是 $\mathcal{T}_{\#\ A}$中的一个余代数。 这意味着 $(X,\ \psi)\in\mathcal{T}_{\#\ A}$，并且存在态射

$$\delta:X\to A\otimes X\otimes X\text{ and }\varepsilon:X\to A$$

使得

$$(m\otimes X\otimes X)\circ(A\otimes\psi\otimes X)\circ(A\otimes X\otimes\psi)\otimes(\delta\otimes A)=(m\otimes X\otimes X)\circ(A\otimes\delta)\circ\psi \tag{1}$$

i.e. δ is a morphism in $\mathcal{T}_A^{\#}$

(2)

$$(m\otimes X\otimes X\otimes X\otimes X)\circ(A\otimes\delta\otimes X)\circ\delta=(m\otimes X\otimes X\otimes X)\circ(A\otimes\psi\otimes X\otimes X)\circ(A\otimes X\otimes\delta)\circ\delta$$

coassociativity

$$m\circ(A\otimes\varepsilon)\circ\psi=m\circ(\epsilon\otimes A)\ \text{ i.e. } \varepsilon\text{ is a morphism in }\mathcal{T}_A^{\#} \tag{3}$$

$$(m\otimes X)\circ(A\otimes\varepsilon\otimes X)\circ\delta=u\otimes X\ \text{ left counit property} \tag{4}$$

$$(m\otimes X)\circ(A\otimes\psi)\circ(A\otimes X\otimes\varepsilon)\circ\delta=u\otimes X\ \text{ right counit property} \tag{5}$$

我们还回顾一下，cowreath上的纠缠模(A,X,ψ)是一个对$(M,\rho\colon M\to M\otimes X)$，其中$(M,\mu)\in\mathcal{C}_A$ 满足

$$\begin{aligned}(\rho\otimes X)\circ\rho&=(\mu\otimes X\otimes X)\circ(M\otimes\delta)\circ\rho\ \text{coassociativity}\\(\mu\circ(M\otimes\varepsilon)\circ\rho&=\mathrm{Id}_M\ \text{counitality}\\\rho\circ\mu&=(\mu\otimes X)\circ(M\otimes\psi)\circ(\rho\otimes A)\ \text{A-linearity}\end{aligned}$$

纠缠模之间的态射是一个 A-线性态射 $f\colon M\to N$，满足$(f\otimes X)\circ\rho=\rho\circ f$.

纠缠模范畴记作 $\mathcal{C}(\psi)_A^X$.

设 H 是一个Hopf代数， A 是一个右 H-余模代数，且 $A\otimes H^{op}$ 是一个右 $H\otimes H^{op}$-余模代数，满足

$$\rho_{A\otimes H^{op}}:A\otimes H^{op}\to A\otimes H^{op}\otimes H\otimes H^{op},$$
$$\rho_{A\otimes H^{op}}(d\otimes h)=(d_0\otimes h_1)\otimes(d_1\otimes h_2).$$

H 通过以下方式成为一个右 $H\otimes H^{op}$-模余代数

$$h\left(h'\otimes h''\right)=h''hh'$$

并且 H可视为 $\mathcal{M}_{H\otimes H^{op}}={}_H\mathcal{M}_H$.中的余代数。我们考虑

$$\begin{aligned}\psi:\quad H\otimes A\otimes H^{op}&\to A\otimes H^{op}\otimes H\\h\otimes d\otimes l^{op}&\mapsto d_0\otimes l_1\otimes l_2hd_1.\end{aligned}$$

那么，$(H,\psi)\in\mathcal{T}_{\#\ A\otimes H^{op}}$ 和 (H,ψ) 是 $\mathcal{T}_{\#\ A\otimes H^{op}}$ 中的一个余代数，其定义为

$$\begin{aligned}\delta&:\quad H\to A\otimes H^{op}\otimes H\otimes H\\\delta(h)&=1_A\otimes1_H\otimes h_1\otimes h_2\end{aligned}$$

$$\epsilon\quad:\quad H\to A\otimes H^{op}$$

$$\epsilon(h) = \varepsilon_H(h)1_A \otimes 1_H$$

Doi-Hopf模范畴 $\mathcal{M}(H \otimes H^{op})^H_{A\otimes H^{op}}$ 与 H 上的双侧 (H, A)-双模范畴 ${}_H\mathcal{M}^H_A$ 同构。

一个 **Casimir态射** 是一个 k-线性映射 $B: H \otimes H \to A \otimes H^{op}$，满足以下性质:

1. **卡西米尔条件**

$$\begin{aligned}&(m_{A\otimes H^{op}} \otimes H) \circ (A \otimes H^{op} \otimes B \otimes H) \circ (\psi \otimes H \otimes H) \circ (H \otimes \delta)\\ =\ &(m_{A\otimes H^{op}} \otimes H) \circ (A \otimes H^{op} \otimes \psi) \circ (A \otimes H^{op} \otimes H \otimes B) \circ (\delta \otimes H)\end{aligned}$$

这可以改写为

(6) $B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes B^H(h_2 \otimes h')_1 \otimes B^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 = B^A(h \otimes h'_1) \otimes B^H(h \otimes h'_1) \otimes h'_2$

2. **态射条件**

即，B 是 $\mathcal{T}$中的一个态射 $^{\#}_{A\otimes H^{op}}$:

$$m_{A\otimes H^{op}} \circ (B \otimes A \otimes H^{op}) = m_{A\otimes H^{op}} \circ (A \otimes H^{op} \otimes B) \circ (\psi \otimes H) \circ (H \otimes \psi)$$

这可以写成

$$B(h \otimes h') \cdot (d \otimes h'') = (d_0 \otimes h''_1) \cdot B(h''_2 h d_1 \otimes h''_3 h' d_2) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}H \otimes \psi: \quad H \otimes H \otimes A \otimes H^{op} &\to H \otimes A \otimes H^{op} \otimes H\\ h \otimes h' \otimes d \otimes l^{op} &\mapsto h \otimes d_0 \otimes l_1 \otimes l_2 h' d_1.\end{aligned}$$

我们还考虑以下条件

3. **归一化条件**

$$m_{A\otimes H^{op}} \circ (A \otimes H^{op} \otimes B) \circ \delta = \epsilon \tag{8}$$

2.1. 8 维 Clifford代数及其余代数结构。我们用 $E(2)$ 表示 Radford 八维 Hopf代数。它由 g、x_1、x_2 生成，并满足关系 $g^2 = 1_H$、$x_i^2 = 0$、$x_i g = -g x_i$ 和 $x_i x_j = -x_j x_i$，其中每个 i、$j \in \{1, 2\}$ 均成立。$H = E(2)$ 的一组基为 $g_H = \left(g^i x_1^j x_2^h\right)_{i,\ j,\ k=0}$、1。余代数结构由 $\Delta(g) = g \otimes g$、$\Delta(x_i) = x_i \otimes g + 1_H \otimes x_i$、$\epsilon(g) = 1$ 和 $\epsilon(x_i) = 0$ 给出，而反幺元为 $S(g) = g$、$S(x_i) = g x_i$。

我们考虑由 G, X_1, X_2生成的 Clifford代数 $A = Cl(\alpha, \beta_i, \gamma_i, \lambda)$，其满足关系式$G^2 = \alpha$，$X_i^2 = \beta_i$ 和 $X_i G + G X_i = \gamma_i$ 和 $X_1 X_2 + X_2 X_1 = \lambda$。该 Clifford代数通过 $1_A \to 1_A \otimes 1_H$，$G \to G \otimes g, X_i \to X_i \otimes g + 1_A \otimes x_i$成为右$H$-余模代数。$A$的一组基为 $G_A = \left(G^i X_1^j X_2^h\right)_{i,j,k=0,1}$。

本文的主要目标是找出等价条件，使 cowreath $(A \otimes H^{op}, H, \psi)$ 关于某个双线性形式可分。根据 [BCT1，命题 7.4]，，我们需要找到一个双线性形式

$$B : H \otimes H \to A \otimes H^{op}$$

满足态射条件、归一化条件和卡西米尔条件。

Th双线性形式 $B: H \otimes H \to A \otimes H$ 由 $h \otimes h' \to B(h, h')$ 给出，其中以基底表示

$$\begin{aligned}B(h \otimes h') = &\sum\nolimits_{a,b(X_1),b(X_2),d,e(x_1),e(x_2)=0}^{1} B(h \otimes h'; G^a X_1^{b(X_1)} X_2^{b(X_2)}, g^d x_1^{e(x_1)} x_2^{e(x_2)})\\ &G^a X_1^{b(X_1)} X_2^{b(X_2)} \otimes g^d x_1^{e(x_1)} x_2^{e(x_2)}.\end{aligned}$$

为简便起见，在不会引起误解时，我们将简写为

$$\begin{aligned}b_1 &= b(X_1)\\ b_2 &= b(X_2)\\ e_1 &= e(x_1)\\ e_2 &= e(x_2)\end{aligned}$$

$$g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdot g^{\overline{d}}x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}=(-1)^{\overline{d}(e_1+e_2)}\,(-1)^{\overline{e_1}e_2}\,g^{d+\overline{d}}x_1^{e_1+\overline{e_1}}x_2^{e_2+\overline{e_2}}$$
$$g^{\overline{d}}x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}\cdot g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2}=(-1)^{d(\overline{e_1}+\overline{e_2})}\,(-1)^{e_1\overline{e_2}}\,g^{d+\overline{d}}x_1^{e_1+\overline{e_1}}x_2^{e_2+\overline{e_2}}$$
$$\frac{g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdot g^{\overline{d}}x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}}{g^{\overline{d}}x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}\cdot g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2}}=\frac{(-1)^{\overline{d}(e_1+e_2)+\overline{e_1}e_2}}{(-1)^{d(\overline{e_1}+\overline{e_2})+\overline{e_1}e_2+}}$$
$$g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdot g^{\overline{d}}x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}=(-1)^{e_1+e_2}\,g^{d+\overline{d}}x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdot x_1^{\overline{e_1}}x_2^{\overline{e_2}}$$

从而得到

$$B(h\otimes h')=\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}B(h\otimes h';G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},f)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

H 上的余乘法可以写为:

$$\Delta(g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{(e_2+u_2)u_1}\,g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\tag{9}$$

The H-coaction on A is given by:

$$\rho_A(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2})=\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}(-1)^{(l_2+b_2)l_1}\,G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\tag{10}$$

第1. 部分 计划

本部分将讨论使 cowreath ($A\otimes H^{op},\ H$) 关于双线性形式 B 可分所需的条件，并探讨可以进行哪些约化。

3. The Casimir Condition

卡西米尔条件由 $A\otimes H^{op}\otimes H$ 中的公式给出

$$B^A(h_2\otimes h')_0\otimes B^H(h_2\otimes h')_1\otimes B^H(h_2\otimes h')_2h_1B^A(h_2\otimes h')_1=B^A(h\otimes h'_1)\otimes B^H(h\otimes h'_1)\otimes h'_2$$

$$\Delta(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})=\sum\nolimits_{w_1=0}^{n_1}\sum\nolimits_{w_2=0}^{n_2}(-1)^{(n_2+w_2)w_1}\,g^mx_1^{(n_1-w_1)}x_2^{(n_2-w_2)}\otimes g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}$$

$$\begin{aligned}
&B^A((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h)_0\otimes B^H((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h)_1\\
&\otimes B^H((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h)_2\,((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2}))_1\,B^A((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h)_1\\
=\ &\sum\nolimits_{w_1=0}^{n_1}\sum\nolimits_{w_2=0}^{n_2}(-1)^{(n_2+w_2)w_1}\,B^A(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h)_0\otimes\\
&\otimes B^H(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h)_1\otimes\\
&B^H(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h)_2\left(g^mx_1^{(n_1-w_1)}x_2^{(n_2-w_2)}\right)B^A(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h)_1
\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}
&B(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h)\\
=\ &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}B(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes h;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.
\end{aligned}$$

因此，利用式（9）和式（10），我们得到

$$\begin{aligned}
&B^A((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_0\otimes B^H((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_1\\
&\otimes B^H((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_2\,((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2}))_1\,B^A((g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2})\otimes h')_1\\
=\ &\sum\nolimits_{w_1=0}^{n_1}\sum\nolimits_{w_2=0}^{n_2}(-1)^{(n_2+w_2)w_1}\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{(b_2+l_2)l_1}\\
&(-1)^{(b_2+l_2)l_1}\,(-1)^{(e_2+u_2)u_1}\,(-1)^{(b_2+l_2)l_1}\,(-1)^{(e_2+u_2)u_1}\\
&B(\left(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\right)\otimes h';G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})
\end{aligned}$$

$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^d x_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes$$
$$\otimes g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}g^m x_1^{(n_1-w_1)}x_2^{(n_2-w_2)}g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2}$$

由于

$$\begin{aligned}&g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}g^m x_1^{(n_1-w_1)}x_2^{(n_2-w_2)}g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\\ =\;&(-1)^{(a+b_1+b_2+l_1+l_2)(u_1+u_2+n_1-w_1+n_2-w_2)+m(u_1+u_2)+(n_1-w_1)u_2+l_1(n_2-w_2+u_2)}\\&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+m}x_1^{u_1+l_1+n_1-w_1}x_2^{u_2+l_2+n_2-w_2}\end{aligned}$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}&B^A((g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_0\otimes B^H((g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_1\\&\otimes B^H((g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2})_2\otimes h')_2\left((g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2})\right)_1 B^A((g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2})\otimes 1_H)_1\\=\;&\sum_{w_1=0}^{n_1}\sum_{w_2=0}^{n_2}(-1)^{(n_2+w_2)w_1}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}\\&(-1)^{\alpha\left(g^m x_1^{n_1-w_1}x_2^{n_2-w_2}\right)}(-1)^{\alpha\left(g^m x_1^{n_1-w_1}x_2^{n_2-w_2}\right)}(-1)^{\alpha\left(g^m x_1^{n_1-w_1}x_2^{n_2-w_2}\right)}\\&B(\left(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\right)\otimes h';G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2})\\&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^d x_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes\\&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+m}x_1^{u_1+l_1+n_1-w_1}x_2^{u_2+l_2+n_2-w_2}\end{aligned}$$

我们设

$$\begin{aligned}&\alpha\left(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};a,b_1,b_2,e_1,e_2;l_1,l_2,u_1,u_2\right)=(u_2+e_2)\,u_1+(l_2+b_2)\,l_1\\&+(a+b_1+b_2+l_1+l_2)\,(u_1+u_2+n_1+n_2)+m(u_1+u_2)+n_1u_2+l_1(n_2+u_2).\end{aligned}$$

为简洁起见，在上下文允许的情况下，我们设

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};a,b_1,b_2,e_1,e_2;l_1,l_2,u_1,u_2\right)=\alpha\left(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};a,b_1,b_2,e_1,e_2\right).$$

我们推得

$$\begin{aligned}&\alpha\left(g^m x_1^{n_1-w_1}x_2^{n_2-w_2}\right)\\=\;&(a+b_1+b_2+l_1+l_2)\,(u_1+u_2+n_1-w_1+n_2-w_2)+m(u_1+u_2)\\&+(n_1-w_1)\,u_2+l_1(n_2-w_2+u_2)+(l_2+b_2)\,l_1+(u_2+e_2)\,u_1\end{aligned}$$

$$B^A(h_2\otimes h')_0\otimes B^H(h_2\otimes h')_1\otimes B^H(h_2\otimes h')_2h_1B^A(h_2\otimes h')_1=B^A(h\otimes h_1')\otimes B^H(h\otimes h_1')\otimes h_2'$$

$$\Delta(g^\mu x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2})=\sum_{\omega_1=0}^{\nu_1}\sum_{\omega_2=0}^{\nu_2}(-1)^{(\nu_2+\omega_2)\omega_1}\,g^\mu x_1^{(\nu_1-\omega_1)}x_2^{(\nu_2-\omega_2)}\otimes g^{\mu+\nu_1+\nu_2+\omega_1+\omega_2}x_1^{\omega_1}x_2^{\omega_2}$$

We get

$$\begin{aligned}&B^A(h\otimes h_1')\otimes B^H(h\otimes h_1')\otimes h_2'\\=\;&\sum_{\omega_1=0}^{\nu_1}\sum_{\omega_2=0}^{\nu_2}(-1)^{(\nu_2+\omega_2)\omega_1}\,B^A(h\otimes g^\mu x_1^{(\nu_1-\omega_1)}x_2^{(\nu_2-\omega_2)})\otimes B^H(h\otimes g^\mu x_1^{(\nu_1-\omega_1)}x_2^{(\nu_2-\omega_2)})\\&\otimes g^{\mu+\nu_1+\nu_2+\omega_1+\omega_2}x_1^{\omega_1}x_2^{\omega_2}\end{aligned}$$

对于 $h=g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2}$和 $h'=g^\mu x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}$，我们最终得到

$$\begin{aligned}(11)\qquad&\sum_{w_1=0}^{n_1}\sum_{w_2=0}^{n_2}(-1)^{(n_2+w_2)w_1}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}\\&(-1)^{\alpha\left(g^m x_1^{n_1-w_1}x_2^{n_2-w_2};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}B(g^{m+n_1+n_2+w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes g^\mu x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2};G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2})\\&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^d x_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+m}x_1^{l_1+u_1+n_1-w_1}x_2^{l_2+u_2+n_2-w_2}\\=&\sum_{\omega_1=0}^{\nu_1}\sum_{\omega_2=0}^{\nu_2}(-1)^{(\nu_2+\omega_2)\omega_1}\,B^A(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2}\otimes g^\mu x_1^{\nu_1-\omega_1}x_2^{\nu_2-\omega_2})\otimes\\&\otimes B^H(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2}\otimes g^\mu x_1^{\nu_1-\omega_1}x_2^{\nu_2-\omega_2})\otimes g^{\mu+\nu_1+\nu_2+\omega_1+\omega_2}x_1^{\omega_1}x_2^{\omega_2}\end{aligned}$$

4. α的计算

为简便起见，在不会引起混淆时，我们将记作，

$$\begin{aligned}\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}\right) &= \alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; l_1, l_2, u_1, u_2\right) = \left(u_2 + e_2\right) u_1 + \left(l_2 + b_2\right) l_1 \\ &+ \left(a + b_1 + b_2 + l_1 + l_2\right)\left(u_1 + u_2 + n_1 + n_2\right) + m(u_1 + u_2) \\ &\quad + n_1 u_2 + l_1(n_2 + u_2)\end{aligned}$$

这里列出几个出现的情况。

4.0.1. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 0, 0, 0\right) = \left(a + b_1 + b_2\right)\left(n_1 + n_2\right)$$

.

4.0.2. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 0, 0, 1\right) = \left(a + b_1 + b_2\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_1$$

4.0.3. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 0, 1, 0\right) = e_2 + \left(a + b_1 + b_2\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m$$

4.0.4. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 1, 0, 0\right) = \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(n_1 + n_2\right)$$

4.0.5. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 1, 0, 0, 0\right) = b_2 + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(n_1 + n_2\right) + n_2$$

4.0.6. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 0,\ 1,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}\right) = \alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 0, 1, 1\right) = 1 + e_2 + \left(a + b_1 + b_2\right)\left(n_1 + n_2\right) + n_1$$

4.0.7. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 1,\ 0,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}\right) = \alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0,\ 1,\ 0,\ 1\right) = \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_1$$

4.0.8. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 0,\ 0,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2};\ 1,\ 0,\ 0,\ 1\right) = b_2 + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_1 + \left(n_2 + 1\right)$$

4.0.9. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 1,\ 1,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 1, 1, 0\right) = e_2 + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m$$

4.0.10. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 0,\ 1,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2};\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\right) = e_2 + b_2 + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_2$$

4.0.11. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 1, 1, 0, 0\right) = 1 + b_2 + \left(a + b_1 + b_2\right)\left(n_1 + n_2\right) + n_2$$

4.0.12. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (0,\ 1,\ 1,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 0, 1, 1, 1\right) = \left(1 + e_2\right) + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(n_1 + n_2\right) + n_1$$

4.0.13. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 0,\ 1,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 1, 0, 1, 1\right) = e_2 + b_2 + \left(a + b_1 + b_2 + 1\right)\left(n_1 + n_2\right) + n_1 + n_2$$

4.0.14. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 1,\ 0,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2};\ 1,1, 0, 1\right) = b_2 + \left(a + b_1 + b_2\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_1 + n_2$$

4.0.15. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 1,\ 1,\ 0)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 1, 1, 1, 0\right) = e_2 + 1 + b_2 + \left(a + b_1 + b_2\right)\left(1 + n_1 + n_2\right) + m + n_2$$

4.0.16. $(l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2) = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$。

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1} x_2^{n_2}; 1,1,1,1\right) = e_2 + b_2 + (a + b_1 + b_2)(n_1 + n_2) + n_1 + n_2 + 1$$

5. Morphism condition

现在，我们研究何时 $B\colon H \otimes H \to A \otimes H^{op}$ 是 $\mathcal{T}^{\sharp}_{A\otimes H^{op}}$ 中的一个态射。即

$$m_{A\otimes H^{op}} \circ (B \otimes A \otimes H^{op}) = m_{A\otimes H^{op}} \circ (A \otimes B) \circ (\psi \otimes H) \circ (H \otimes \psi)$$

这可以写成如下形式，见 (7)，

$$B(h \otimes h') \cdot (d \otimes h'') = (d_0 \otimes h''_1) \cdot B(h''_2 h d_1 \otimes h''_3 h' d_2)$$

这个等式可以拆分为

$$B(h \otimes h')(d \otimes 1_H) = (d_0 \otimes 1_H) B(h d_1 \otimes h' d_2) \tag{12}$$

$$B(h \otimes h')(1_A \otimes h'') = (1_A \otimes h''_1) B(h''_2 h \otimes h''_3 h') \tag{13}$$

事实上，假设 (12) 和 (13) 成立。那么

$$\begin{aligned} B(h \otimes h') \cdot (d \otimes h'') &= B(h \otimes h') \cdot (d \otimes 1_H) \cdot (1_A \otimes h'') \\ &\overset{(12)}{=} (d_0 \otimes 1_H) \cdot B(h d_1 \otimes h' d_2) \cdot (1_A \otimes h'') \\ &\overset{(13)}{=} (d_0 \otimes 1_H) \cdot (1_A \otimes h''_1) \cdot B(h''_2 h d_1 \otimes h''_3 h' d_2) \end{aligned}$$

现在，如果等式 (12) 对 $d,\ b \in A$ 成立，那么它对乘积也成立：

$$\begin{aligned} B(h \otimes h')(db \otimes 1_H) &= B(h \otimes h')(d \otimes 1_H)(b \otimes 1_H) \\ &= (d_0 \otimes 1_H) B(h d_1 \otimes h' d_2)(b \otimes 1_H) \\ &= (d_0 \otimes 1_H)(b_0 \otimes 1_H) B(h d_1 b_1 \otimes h' d_2 b_2) \\ &= ((db)_0 \otimes 1_H) B(h (db)_1 \otimes h' (db)_2). \end{aligned}$$

类似地，若等式 (13) 对 $s,\ t \in H$, 成立，则对以下乘积也成立：

$$\begin{aligned} B(h \otimes h')(1_A \otimes st) &= B(h \otimes h')(1_A \otimes t)(1 \otimes s) \\ &= (1_A \otimes t_1) B(t_2 h \otimes t_3 h')(1 \times s) \\ &= (1_A \otimes t_1)(1_A \otimes s_1) B(s_2 t_2 h \otimes s_3 t_3 h') \\ &= (1_A \otimes (st)_1) B((st)_2 h \otimes (st)_3 h'). \end{aligned}$$

因此，我们只需计算 $1_A \otimes g$、$1_A \otimes x_1$ 和 $1_A \otimes x_2$ 对应的等式 (13)，以及 $G \otimes 1_H$、$X_1 \otimes 1_H$ 和 $X_2 \otimes 1_H$ 对应的等式 (12)。

6. Normalized condition

归一化条件为

$$B(h_1 \otimes h_2) = \epsilon(h) 1_A \otimes 1_H \text{ for all } h \in H_4.$$

利用 (9)，我们可推出

$$B(1_H \otimes 1_H) = 1_A \otimes 1_H, \tag{14}$$

$$B(g \otimes g) = 1_A \otimes 1_H, \tag{15}$$

$$B(x_i \otimes g) + B(1_H \otimes x_i) = 0, \text{for } i = 1, 2, \tag{16}$$

$$B(g x_i \otimes 1_H) + B(g \otimes g x_i) = 0, \text{for } i = 1, 2. \tag{17}$$

$$B(x_1 x_2 \otimes 1_H) + B(x_1 \otimes g x_2) - B(x_2 \otimes g x_1) + B(1_H \otimes x_1 x_2) = 0 \tag{18}$$

$$B(g x_1 x_2 \otimes g) + B(g x_1 \otimes x_2) - B(g x_2 \otimes x_1) + B(g \otimes g x_1 x_2) = 0 \tag{19}$$

7. 态射条件 (13) 蕴含归一化条件

命题 7.1. 设 $B\colon H\otimes H\to A\otimes H^{op}$. 那么，若 B满足态射条件中的(13) 以及(14)，则它满足归一化条件。

证明。 将 $\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_H$ 作用于（13），得到

$$(\mathrm{Id}\otimes\epsilon_H)\left[B(h\otimes h')(1_A\otimes h'')\right]=(\mathrm{Id}\otimes\epsilon_H)\left[(1\otimes h_1'')B(h_2''h\otimes h_3''h')\right]$$

i.e.

$$(\mathrm{Id}\otimes\epsilon_H)\,B(h\otimes h')\,(1_A\otimes\epsilon_H(h''))=B\left(h_1''h\otimes h_2''h'\right)$$

并且 $h=h'=1_H$

$$(\mathrm{Id}_A\otimes\epsilon_H)\,B(1_H\otimes 1_H)\,(1_A\otimes\epsilon_H(h''))=B\left(h_1''\otimes h_2''\right)$$

i.e.

$$(1_A\otimes\epsilon_H(h''))=B\left(h_1''\otimes h_2''\right)$$

这就得到了归一化条件。 □

8. Equation $B(h\otimes h')(1_A\otimes h'')=(1_A\otimes h_1'')B(h_2''h\otimes h_3''h')$

正如我们在第（5）节中所指出的，我们只需对 $1_A\otimes g$、 $1_A\otimes x_1$ 和 $1_A\otimes x_2$ 计算等式（13）。

i) 对于 $1_A\otimes g$

$$B(h\otimes h')\ (1_A\otimes g)=(1_A\otimes g)B(gh\otimes gh') \tag{20}$$

ii) 对于 $1_A\otimes x_i$

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i)=(1_A\otimes x_i)B(gh\otimes gh')+B(x_ih\otimes gh')+B(h\otimes x_ih') \tag{21}$$

此外，我们只需针对 $G\otimes 1_H$ 和 $X_i\otimes 1_H$， $i=1$，2 计算等式 (12)。iii) 对于 $G\otimes 1_H$

$$B(h\otimes h')(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g) \tag{22}$$

iv) 对于 $X_i\otimes 1_H$

$$\begin{aligned} & B(h\otimes h')(X_i\otimes 1_H) \\ = \ & (X_i\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g)+B(hx_i\otimes h'g)+B(h\otimes h'x_i)\end{aligned} \tag{23}$$

8.1. **情形** $h''=g$。对于 $h''=g$，我们得到 (20):

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes g)=(1_A\otimes g)B(gh\otimes gh')$$

这等价于

$$B(gh\otimes gh')=(1_A\otimes g)B(h\otimes h')(1_A\otimes g) \tag{24}$$

此外，等式（24）可改写为

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{p,q,r,s,t,u=0}^{1}B(gh\otimes gh';G^pX_1^qX_2^r,g^sx_1^tx_2^u)G^pX_1^qX_2^r\otimes g^sx_1^tx_2^u \\ = \ & \sum\nolimits_{p,q,r,s,t,u=0}^{1}B(h\otimes h';G^pX_1^qX_2^r,g^sx_1^tx_2^u)G^pX_1^qX_2^r\otimes g^{s+1}x_1^tx_2^ug. \\ = \ & \sum\nolimits_{p,q,r,s,t,u=0}^{1}(-1)^{t+u}B(h\otimes h';G^pX_1^qX_2^r,g^sx_1^tx_2^u)G^pX_1^qX_2^r\otimes g^sx_1^tx_2^u\end{aligned}$$

因此，等式 (20) 等价于以下等式。

$$B(gh\otimes gh';d,f)\ =\ B(h\otimes h';d,f)\ \text{ any } d\in A \text{ and } f=1_H,g,x_1x_2,gx_1x_2 \tag{25}$$

$$B(gh\otimes gh';d,f) \;=\; -B(h\otimes h';d,f) \quad \text{any } d\in A \text{ and } f=x_i, gx_i \tag{26}$$

8.2. 情形 $h''=x_i$。我们有

$$[(\Delta\otimes \mathrm{Id}_H)\circ\Delta](x_i)=x_i\otimes g\otimes g+1_H\otimes x_i\otimes g+1_H\otimes 1_H\otimes x_i$$

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i) = (1_A\otimes x_i)B(gh\otimes gh') + (1_A\otimes 1_H)B(x_ih\otimes gh') + (1_A\otimes 1_H)B(h\otimes x_ih')$$

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i)=(1_A\otimes x_i)B(gh\otimes gh')+B(x_ih\otimes gh')+B(h\otimes x_ih') \tag{27}$$

利用 (24)，我们可以将 (27) 改写为如下形式

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i) = (1_A\otimes gx_i)B(h\otimes h')(1_A\otimes g) + B(x_ih\otimes gh') + B(h\otimes x_ih') \tag{28}$$

现在，在 (27) 中我们考虑 $h=g,\ \ h'=1_H.$

$$B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)=(1_A\otimes x_i)B(1_H\otimes g)+B(x_ig\otimes g)+B(g\otimes x_i)$$

$$B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i) = (1_A\otimes x_i)\,(1_H\otimes g)\;B(g\otimes 1_H)\,(1_H\otimes g)+(1_H\otimes g)\;B(x_i\otimes 1_H)\,(1_H\otimes g)+B(g\otimes x_i)$$

此外，由 (27)，利用 (24) 可得

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i)=(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes h')(1_A\otimes g)+B(x_ih\otimes gh')+B(h\otimes x_ih')$$

$$B(g\otimes x_i)=B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)+(1_H\otimes gx_i)\;B(g\otimes 1_H)\,(1_H\otimes g)\;-(1_H\otimes g)\;B(x_i\otimes 1_H)\,(1_H\otimes g)$$

引理 8.1. 假设等式(24) 成立。那么， $B(gh\otimes gh')$ 的卡西米尔条件等价于等式

$$\begin{aligned} & B^A(h_2\otimes h')_0\otimes gB^H(h_2\otimes h')_1g\otimes gB^H(h_2\otimes h')_2h_1B^A(h_2\otimes h')_1 \\ = \;& B^A(h\otimes h'_1)\otimes gB^H(h\otimes h'_1)g\otimes gh'_2 \end{aligned} \tag{29}$$

证明。 首先回顾 (24)

$$B(gh\otimes gh')=(1_A\otimes g)B(h\otimes h')(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$B^A(gh\otimes gh')\otimes B^H(gh\otimes gh')=B^A(h\otimes h')\otimes gB^H(h\otimes h')g \tag{30}$$

现在我们应用

$$\rho_{A\otimes H^{op}}: A\otimes H^{op}\to A\otimes H^{op}\otimes A\otimes H^{op},$$
$$\rho_{A\otimes H^{op}}(a\otimes h)=(a_0\otimes h_1)\otimes(a_1\otimes h_2).$$

到 (30) 的两边，得到

$$\begin{aligned} & B^A(gh\otimes gh')_0\otimes B^H(gh\otimes gh')_1\otimes B^A(gh\otimes gh')_1\otimes B^H(gh\otimes gh')_2 \\ = \;& B^A(h\otimes h')_0\otimes \left(gB^H(h\otimes h')g\right)_1\otimes B^A(h\otimes h')_1\otimes \left(gB^H(h\otimes h')g\right)_2 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & B^A(gh\otimes gh')_0\otimes B^H(gh\otimes gh')_1\otimes B^A(gh\otimes gh')_1\otimes B^H(gh\otimes gh')_2 \\ = \;& B^A(h\otimes h')_0\otimes gB^H(h\otimes h')_1g\otimes B^A(h\otimes h')_1\otimes gB^H(h\otimes h')_2g \end{aligned}$$

对于 $h=h_2$，我们得到

$$\begin{aligned} & B^A(gh_2\otimes gh')_0\otimes B^H(gh_2\otimes gh')_1\otimes B^A(gh_2\otimes gh')_1\otimes B^H(gh_2\otimes gh')_2 \\ = \;& B^A(h_2\otimes h')_0\otimes gB^H(h_2\otimes h')_1g\otimes B^A(h_2\otimes h')_1\otimes gB^H(h_2\otimes h')_2g \end{aligned} \tag{31}$$

我们写出卡西米尔条件

$$B^A(h_2\otimes h')_0\otimes B^H(h_2\otimes h')_1\otimes B^H(h_2\otimes h')_2h_1B^A(h_2\otimes h')_1=B^A(h\otimes h'_1)\otimes B^H(h\otimes h'_1)\otimes h'_2$$

对于 $B(gh\otimes gh')$。我们得到

$$\begin{aligned} & B^A((gh)_2\otimes gh')_0\otimes B^H((gh)_2\otimes gh')_1\otimes B^H((gh)_2\otimes gh')_2\,(gh)_1\,B^A((gh)_2\otimes gh')_1 \\ = \;& B^A(gh\otimes (gh')_1)\otimes B^H(gh\otimes (gh')_1)\otimes (gh')_2 \end{aligned}$$

i.e.

$$B^A(gh_2\otimes gh')_0\otimes B^H(gh_2\otimes gh')_1\otimes B^H(gh_2\otimes gh')_2gh_1B^A(gh_2\otimes gh')_1 \tag{32}$$

$$= \quad B^A(gh \otimes gh_1') \otimes B^H(gh \otimes gh_1') \otimes gh_2'.$$

现在我们有

$$\begin{aligned} & B^A(h \otimes h_1') \otimes gB^H(h \otimes h_1')g \otimes gh_2' \\ \overset{(30)}{=} \quad & B^A(gh \otimes gh_1') \otimes B^H(gh \otimes gh_1') \otimes gh_2' \\ \overset{(32)}{=} \quad & B^A(gh_2 \otimes gh')_0 \otimes B^H(gh_2 \otimes gh')_1 \otimes B^H(gh_2 \otimes gh')_2 gh_1 B^A(gh_2 \otimes gh')_1 \\ \overset{(31)}{=} \quad & B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_1 g \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 \end{aligned}$$

因此（29）成立。

反过来，假设（29）成立：

$$\begin{aligned} & B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_1 g \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 \\ = \quad & B^A(h \otimes h_1') \otimes gB^H(h \otimes h_1')g \otimes gh_2' \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} & B^A(gh \otimes gh_1') \otimes B^H(gh \otimes gh_1') \otimes gh_2' \\ \overset{(30)}{=} \quad & B^A(h \otimes h_1') \otimes gB^H(h \otimes h_1')g \otimes gh_2' \\ \overset{(29)}{=} \quad & B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_1 g \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 \\ \overset{(31)}{=} \quad & B^A(gh_2 \otimes gh')_0 \otimes B^H(gh_2 \otimes gh')_1 \otimes B^H(gh_2 \otimes gh')_2 gh_1 \otimes B^A(gh_2 \otimes gh')_1 \end{aligned}$$

因此等式（32）成立。 □

命题 8.2. 假设等式 (24) 成立。再假设，对于某些 $h, h' \in H$,$B(h \otimes h')$，满足卡西米尔条件。那么 $B(gh \otimes gh')$ 也满足。

证明。 我们考虑卡西米尔条件

$$B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes B^H(h_2 \otimes h')_1 \otimes B^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 = B^A(h \otimes h_1') \otimes B^H(h \otimes h_1') \otimes h_2'$$

然后在等式左侧乘以$(1_A \otimes g \otimes 1_H)$，右侧乘以（$1_A \otimes g \otimes g$），得到

$B^A(h_2 \otimes h')_0 \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_1 g \otimes gB^H(h_2 \otimes h')_2 h_1 B^A(h_2 \otimes h')_1 = B^A(h \otimes h_1') \otimes gB^H(h \otimes h_1')g \otimes gh_2'$即为（29）。因此，根据引理（8。1），我们由 $B(h \otimes h')$. □的卡西米尔条件得到了 $B(gh \otimes gh')$的卡西米尔条件

推论 8.3. 如果 $B(gx_i \otimes 1_H)$ 满足卡西米尔条件，那么 $B(1_H \otimes x_i)$ 也满足 s

证明。 利用 (28) 和 $h = h' = 1_H$，我们得到

$$B(1_H \otimes 1_H)(1_A \otimes x_i) = (1_A \otimes x_i)B(g \otimes g') + B(x_i \otimes g) + B(1_H \otimes x_i)$$

$$(1_A \otimes x_i) = (1_A \otimes x_i) + B(x_i \otimes g) + B(1_H \otimes x_i)$$

$$B(1_H \otimes x_i) = -B(x_i \otimes g) = -(1 \otimes g)\, B(gx_i \otimes 1_H)\, (1 \otimes g)$$

应用命题 8.2。 □

9. Simplification

命题 9.1. 假设 B 满足(13)。那么，所有形式为 $B(h \otimes h')$ 的元素都可以由形式为 $B(h \otimes 1_H)$ 的元素得到。特别地，我们得到

(33) $B(h \otimes x_1 x_2) = B(h \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(h \otimes x_2)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1 h \otimes x_2)(1_A \otimes g)$

(34) $B(h \otimes x_i) = B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_i) - (1_A \otimes gx_i)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_i h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$

证明。由（24）可知,

$$B\left(h\otimes g\right)=\left(1_A\otimes g\right)B\left(gh\otimes 1_H\right)\left(1_A\otimes g\right)$$

现在我们回顾

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i)\overset{(21)}{=}(1_A\otimes x_i)B(gh\otimes gh')+B(x_ih\otimes gh')+B(h\otimes x_ih')$$

因此我们得到

(35)

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_i)\overset{(24)}{=}(1_A\otimes x_i)(1_A\otimes g)B(h\otimes h')(1_A\otimes g)+(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes h')(1_A\otimes g)+B(h\otimes x_ih').$$

F或者$h=1_H$，我们得到

$$B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)\ =(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ +(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ +B(h\otimes x_i)$$

因此， $B(h\otimes x_i)$ 仅取决于 $B(h\otimes 1_H)$ 形式的项。

对于 $h'=x_j\ j\neq i$

$$B(h\otimes x_j)(1_A\otimes x_i)\ =(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes x_j)(1_A\otimes g)+(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes x_j)(1_A\otimes g)+B(h\otimes x_ix_j),$$

因此，运用前面的论证， $B(h\otimes x_ix_j)$也仅取决于$B(h\otimes 1_H)$形式的项。

Also for $h'=gx_j\ j\neq i$

$$B(h\otimes gx_j)(1_A\otimes x_i)\ =-(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes gx_j)(1_A\otimes g)+(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes gx_j)(1_A\otimes g)+B(h\otimes x_igx_j),$$

因此，利用（24），我们得到

$$(1_A\otimes g)B(gh\otimes x_j)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_i)\ =(1_A\otimes gx_i)(1_A\otimes g)B(gh\otimes x_j)+B(x_ih\otimes x_j)(1_A\otimes g)+B(h\otimes x_igx_j)$$

因此，运用前面的论证， $B(h\otimes gx_ix_j)$也仅取决于$B(h\otimes 1_H)$形式的项。

总之，所有形式为 $B(h\otimes h')$ 的项都可以写在形式为 $B\left(h\otimes 1_H\right)$ 的元素上

. □

注9.2. 对于 (34) 中的 $i=2$，我们得到

(36) $B(h\otimes x_2)\ =B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$,

从而（33）变为

$$\begin{aligned}B(h\otimes x_1x_2)\ =\ & B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\\ & -(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ & -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B(gx_2gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

(37)

$$\begin{aligned}B(h\otimes x_1x_2)\ =\ & B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & +(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & +(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & +(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\\ & +(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

$$-(1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes 1_H)$$
$$+B(x_1x_2h \otimes 1_H)$$

由（13）

$$B(h \otimes h')(1_A \otimes h'') = (1_A \otimes h''_1)B(h''_2h \otimes h''_3h')$$

对于 $h'' = g$，我们得到 和 $h = gt$

$$B(gt \otimes h')(1_A \otimes g) = (1_A \otimes g)B(ggt \otimes gh')$$
$$B(gt \otimes h')(1_A \otimes g) = (1_A \otimes g)B(t \otimes gh')$$

因此

$$B(h \otimes gh') = (1_A \otimes g)B(gh \otimes h')(1_A \otimes g) \tag{38}$$

因此，对于 (38) 中的 $h' = x_i$

$$B(h \otimes gx_i) = (1_A \otimes g)B(gh \otimes x_i)(1_A \otimes g)$$

因此，利用 (34)
我们得到 (39)

$$\begin{aligned} & B(h \otimes gx_i) \\ = \; & (1_A \otimes g)B(gh \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_i) \\ & +(1_A \otimes x_i)B(gh \otimes 1_H) \\ & -B(gx_igh \otimes 1_H) \end{aligned} \tag{39}$$

因此对于 $h' = x_1x_2$，在（38）中

$$B(h \otimes gx_1x_2) = (1_A \otimes g)B(gh \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g)$$

并利用 37

$$\begin{aligned} B(h \otimes gx_1x_2) \; = \; & (1_A \otimes g)B(gh \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ & -(1_A \otimes x_2)B(gh \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -B(x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & +(1_A \otimes x_1)B(gh \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1x_2)B(gh \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +B(x_1h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_2)B(x_1h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned} \tag{40}$$

10. 方程（12）的约化

我们想要证明，假设方程（13）成立，如果方程（12）对于 $h \otimes 1_H$成立，那么它对于任意 $h \otimes h'$. 也成立

10.1. 情形 $h' = x_i$。我们想要写出 $h' = x$对应的公式（12）的左侧 $_i$.

$$B(h \otimes x_i)(d \otimes 1_H) = (d_0 \otimes 1_H)B(hd_1 \otimes x_id_2)$$

我们利用（34）考察左侧

$B(h \otimes x_i) = B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_i) - (1_A \otimes gx_i)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_ih \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$
我们将左侧写成

$$\begin{aligned} B(h \otimes x_i)(d \otimes 1_H) \; = \; & B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_i)(d \otimes 1_H) - (1_A \otimes gx_i)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(d \otimes 1_H) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_ih \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(d \otimes 1_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(h \otimes x_i)(d \otimes 1_H) \; = \; & B(h \otimes 1_H)(d \otimes 1_H)(1_A \otimes x_i) - (1_A \otimes gx_i)B(h \otimes 1_H)(d \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_ih \otimes 1_H)(d \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

这里我们使用 $h\otimes 1_H$的公式

$$\begin{aligned} B(h\otimes x_i)(d\otimes 1_H) &= (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ &\quad -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_ihd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

因此，公式（12）的左侧对于 $h'=x_i$ 为

$$B(h\otimes x_i)(d\otimes 1_H)=(d_0\otimes 1_H)\begin{bmatrix} B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}. \tag{41}$$

10.2. 情形 $h'=x_1x_2$。 我们希望写出公式（12）对于 $h'=x_1x_2$ 的左侧

$$B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H)=(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes x_1x_2d_2)$$

我们利用（37）来处理左侧

$$B(h\otimes x_1x_2)=B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

我们写出左侧

$$\begin{aligned} &B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H)\\ =\;& B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(d\otimes 1_H)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes g)(d\otimes 1_H)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes g)(d\otimes 1_H)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H)\\ =\;& B(h\otimes x_2)(d\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(d\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(d\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

这里我们使用公式（41）

$$\begin{aligned} B(h\otimes x_2)(d\otimes 1_H) &= (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ &\quad -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

以及 $h\otimes x_2$ 中 $gx_1h\otimes 1_H$ 的公式

$$\begin{aligned} B(gx_1h\otimes x_2)(d\otimes 1_H) &= (d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ &\quad -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

然后我们代入

$$\begin{aligned} &B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H)\\ =\;& \begin{bmatrix} (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)\\ -(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)\begin{bmatrix} (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)\\ -(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes g)\begin{bmatrix} (d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)\\ -(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

我们计算

$$\begin{aligned} &B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H)\\ =\;& \begin{bmatrix} (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\\ -(1_A\otimes gx_i)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ -(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$-\begin{bmatrix} (1_A\otimes gx_1)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g) \\ -(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g) \\ -(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} (1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g) \\ -(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g) \\ -(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}$$

我们简化

(42)
$$\begin{aligned} & B(h\otimes x_1x_2)(d\otimes 1_H) \\ = & \begin{bmatrix} (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_1x_2) \\ +(1_A\otimes gx_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes gx_1) \\ +(1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes gx_1)\end{bmatrix} \\ & -\begin{bmatrix} (1_A\otimes gx_1)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes gx_2) \\ -(1_A\otimes x_1x_2)(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes d_2) \\ -(1_A\otimes x_1)(d_0\otimes 1_H)B(gx_2hd_1\otimes d_2)\end{bmatrix} \\ & -\begin{bmatrix} (1_A\otimes g)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes gx_2) \\ +(1_A\otimes x_2)(d_0\otimes 1_H)B(gx_1hd_1\otimes d_2) \\ -(d_0\otimes 1_H)B(x_1x_2hd_1\otimes d_2)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

11. CASES

11.0.1. 情形 $d=G$。
情形 $h'=g$。我们要证明的公式为

$$B(h\otimes g)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H)$$

利用 (24)，这等价于

$$(1_A\otimes g)B(gh\otimes 1_H)(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H)$$

由于 (12) 对任意 $B(h\otimes 1_H)$ 都成立，即

$$B(h\otimes 1)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes g)$$

我们推得

$$B(gh\otimes 1)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(ghg\otimes gh)$$

因此，利用（24），我们得到

$$B(gh\otimes 1)(G\otimes 1_H)=(1_A\otimes g)(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

从而

$$(1_A\otimes g)B(gh\otimes 1_H)(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H).$$

情形 $h'=x_i$。我们要证明的公式是

$$B(h\otimes x_i)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_ig)$$

由公式（41），我们现在知道

$$B(h\otimes x_i)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)\begin{bmatrix} B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g) \\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihg\otimes g)(1_A\otimes g)\end{bmatrix}$$

因此，$d=G$ 的左侧为

$$B(h\otimes x_i)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)\begin{bmatrix} B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g) \\ -B(x_ihg\otimes 1_H)\end{bmatrix}$$

我们想要得到适用于 $d=G$ 的右侧

$$\begin{gathered}(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes x_id_2)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_ig)=-(G\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_i) \\ =-(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes x_i)(1_A\otimes g) \\ \text{we substitute the formula (34)}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\text{for } B\left(ghg\otimes x_i\right) = &-(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)(1_A\otimes g)+\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_i)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ &+(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B(gx_ighg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

并且我们得到右侧

$$\begin{aligned}&-(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)(1_A\otimes g)+\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_i)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ &+(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B(gx_ighg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

现在我们化简右侧

$$\begin{aligned}&-(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes x_i)(1_A\otimes g)+\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_i)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ &-(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B(x_ihg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

因此，右侧为

$$\begin{aligned}&(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_i)+\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_i)B(ghg\otimes 1_H)\\ &-(G\otimes 1_H)B(x_ihg\otimes 1_H)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}+\quad &(G\otimes 1_H)B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)+\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_i)(1_A\otimes g)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g)\\ &-(G\otimes 1_H)B(x_ihg\otimes 1_H)\end{aligned}$$

Thus the right side is

$$\begin{aligned}+\quad &(G\otimes 1_H)B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)-\\ &(G\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_i)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g)\\ &-(G\otimes 1_H)B(x_ihg\otimes 1_H)\end{aligned}$$

因此它与左侧一致。

11.0.2. 情形 $h'=x_1x_2$. 我们应用已知的公式 **(37)**

$B(h\otimes x_1x_2) = B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes g) -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes g)$
我们写出左侧

$$\begin{aligned}&B(h\otimes x_1x_2)(G\otimes 1_H)\\ =\ &B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(G\otimes 1_H)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes g)(G\otimes 1_H)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes g)(G\otimes 1_H)\\ =\ &B(h\otimes x_2)(G\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

现在我们可以使用适用于 $h\otimes x_2$ 的公式 a，即（41）

$$B(h\otimes x_2)(G\otimes 1_H) = (G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_2g)$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\text{left side}\\ &(G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_2g)(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)(G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_2g)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes g)(G\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes x_2g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{array}{rl} & \text{left side} \\ - & (G\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1) \\ & +(G\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes g) \\ & +(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1hg\otimes gx_2)(1_A\otimes g) \end{array}$$

Thus the left side is

$$(G\otimes 1_H)\begin{bmatrix} -B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)+ \\ (1_A\otimes gx_1)B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+ \\ +B(x_1hg\otimes x_2) \end{bmatrix}$$

我们展开右侧

$$\begin{array}{rl} & \text{the right side} \\ & (G\otimes 1_H)B(hg\otimes x_1x_2g) \\ = & (G\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_1x_2) \\ = & (G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g) \end{array}$$

我们应用公式 $B(ghg\otimes x_1x_2)$，并且已知它成立 (37)

$$B(ghg\otimes x_1x_2) = B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_1ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g),$$

我们将其改写为以下形式

$$B(ghg\otimes x_1x_2) = B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes x_1) - (1_A\otimes gx_1)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g) + B(gx_1hg\otimes gx_2)$$

一个替代转换 i i id

$$\begin{array}{l} \text{the right side} \\ (G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)+ \\ -(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)+ \\ +(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1hg\otimes gx_2)(1_A\otimes g) \end{array}$$

并化简

$$\begin{array}{rl} & \text{the right side} \\ = & -(G\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)+ \\ & -(G\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1g)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)+ \\ & +(G\otimes 1_H)B(x_1hg\otimes x_2) \end{array}$$

我们应用共轭

$$\begin{array}{l} \text{the right side} \\ -(G\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)+ \\ +(G\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)B(hg\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+ \\ +(G\otimes 1_H)B(x_1hg\otimes x_2) \end{array}$$

这与左侧一致，因此得出结论：公式（12）成立。

11.1. $d = X_i$. 我们要证明的公式是

$$\begin{array}{rll} B(h\otimes h')(X_i\otimes 1_H) & = & (X_i\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g)+ \\ & & +(1_A\otimes 1_H)B(hx_i\otimes h'g) \\ & & +(1_A\otimes 1_H)B(h\otimes h'x_i). \end{array}$$

公式（12）

$$B(h\otimes h')(d\otimes 1_H) = (d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes h'd_2)$$

在我们的情形中变为

$$B(h\otimes h')(X_i\otimes 1_H)=(X_i\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g)+B(hx_i\otimes h'g)+B(h\otimes h'x_i)$$

11.1.1. 情形 $h'=x_i$. 要写出左侧，我们使用公式（41）

$$B(h\otimes x_i)(d\otimes 1_H)=(d_0\otimes 1_H)\left[\begin{array}{c} B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihd_1\otimes d_2)(1_A\otimes g)\end{array}\right]$$

在这种情形下

$$\begin{array}{rl} & B(h\otimes x_i)(X_j\otimes 1_H)\\ = & (X_j\otimes 1_H)\left[\begin{array}{c} B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihg\otimes g)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\\ & +(1_A\otimes 1_H)\left[\begin{array}{c} B(hx_j\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hx_j\otimes g)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihx_j\otimes g)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\\ & ++(1_A\otimes 1_H)\left[\begin{array}{c} B(h\otimes x_j)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes x_j)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes x_j)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\end{array}$$

因此左侧为

$$\begin{array}{rl} & B(h\otimes x_i)(X_j\otimes 1_H)\\ = & (X_j\otimes 1_H)\left[\begin{array}{c} B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hg\otimes g)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihg\otimes g)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\\ & +\left[\begin{array}{c} B(hx_j\otimes g)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(hx_j\otimes g)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ihx_j\otimes g)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\\ & +\left[\begin{array}{c} B(h\otimes x_j)(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)B(h\otimes x_j)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes g)B(gx_ih\otimes x_j)(1_A\otimes g)\end{array}\right]\end{array}$$

现在我们写出右侧

$$\begin{array}{l}(X_j\otimes 1_H)B(hg\otimes x_ig)+\\ (1_A\otimes 1_H)B(hx_j\otimes x_ig)+\\ (1_A\otimes 1_H)B(h\otimes x_ix_j)+\end{array}$$

我们将其改写为

$$\begin{array}{rl} - & (X_j\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_i)+\\ - & B(hx_j\otimes gx_i)+\\ & B(h\otimes x_ix_j)+\end{array}\tag{43}$$

我们对"h" $=hg$, hx_j使用（39）

$$\begin{array}{rl} & B(hg\otimes gx_i)\\ = & (1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_i)\\ & +(1_A\otimes x_i)B(ghg\otimes 1_H)\\ & -B(gx_ighg\otimes 1_H)\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & B(hx_j\otimes gx_i)\\ = & (1_A\otimes g)B(ghx_j\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_i)\\ & +(1_A\otimes x_i)B(ghx_j\otimes 1_H)\\ & -B(gx_ighx_j\otimes 1_H)\end{array}$$

并得到右侧为

右侧

$$
\begin{aligned}
- \quad & (X_j \otimes 1_H) \begin{bmatrix} -(1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_i) + \\ (1_A \otimes x_i)B(ghg \otimes 1_H) + \\ -B(gx_ighg \otimes 1_H) \end{bmatrix} + \\
& - \begin{bmatrix} (1_A \otimes g)B(ghx_j \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_i) + \\ +(1_A \otimes x_i)B(ghx_j \otimes 1_H) + \\ -B(gx_ighx_j \otimes 1_H) \end{bmatrix} + \\
& + B(h \otimes x_ix_j) +
\end{aligned}
$$

right side

$$
\begin{aligned}
- \quad & (X_j \otimes 1_H) \begin{bmatrix} -B(hg \otimes g)\,(1_A \otimes x_i) + \\ (1_A \otimes x_i)(1_A \otimes g)B(hg \otimes g)(1_A \otimes g) + \\ +(1_A \otimes g)B(gx_ihg \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} + \\
& - \begin{bmatrix} -B(hx_j \otimes g)(1_A \otimes x_i) + \\ +(1_A \otimes gx_i)B(hx_j \otimes g)(1_A \otimes g) + \\ +(1_A \otimes g)B(gx_ihx_j \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} + \\
& + B(h \otimes x_ix_j) +
\end{aligned}
$$

现在我们考虑 $i = 1$ 和 $j = 2$，并使用 (37)

$B(h \otimes x_1x_2) = B(h \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(h \otimes x_2)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes x_2)(1_A \otimes g)$并得到

right side

$$
\begin{aligned}
- \quad & (X_j \otimes 1_H) \begin{bmatrix} -B(hg \otimes g)\,(1_A \otimes x_i) + \\ (1_A \otimes x_i)(1_A \otimes g)B(hg \otimes g)(1_A \otimes g) + \\ +(1_A \otimes g)B(gx_ihg \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} + \\
& - \begin{bmatrix} -B(hx_j \otimes g)(1_A \otimes x_i) + \\ +(1_A \otimes gx_i)B(hx_j \otimes g)(1_A \otimes g) + \\ +(1_A \otimes g)B(gx_ihx_j \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} B(h \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \\ -(1_A \otimes gx_1)B(h \otimes x_2)(1_A \otimes g) \\ -(1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes x_2)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} +
\end{aligned}
$$

因此我们可以得出结论：公式（12）成立。

我们假设对于任意 h， $h' = 1_H$ （12）成立，且 $d = X_i$，即

$$B(h \otimes 1_H)(X_i \otimes 1_H) = (X_i \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_i \otimes g) + B(h \otimes x_i)$$

$$B(h \otimes 1_H)(X_1 \otimes 1_H) = (X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_1 \otimes g) + B(h \otimes x_1)$$

情形 $h' = x_1x_2$。我们需要证明，对于任意 h，下列公式成立，即

$$B(h \otimes x_1x_2)(X_i \otimes 1_H) = (X_i \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) + B(hx_i \otimes gx_1x_2)$$

我们使用 (37)

$$
\begin{aligned}
B(h \otimes x_1x_2) \quad = \quad & B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\
& + (1_A \otimes gx_2)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\
& + (1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\
& - (1_A \otimes gx_1)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\
& + (1_A \otimes x_1x_2)B(h \otimes 1_H) \\
& + (1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes 1_H) \\
& - (1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\
& - (1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes 1_H) \\
& + B(x_1x_2h \otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

我们将其改写为

$$\begin{aligned} B(h\otimes x_1x_2) &= B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ &\quad +(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &\quad +(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\\ &\quad -(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)\\ &\quad -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &\quad +(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\\ &\quad +(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &\quad +B(x_1x_2h\otimes 1_H) \end{aligned}$$

这里我们对 X_1 进行处理，即假设

$$B(h\otimes 1_H)(X_1\otimes 1_H)=(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)$$

因此，利用上面的等式，我们得到

$$\begin{aligned} B(h\otimes x_1x_2)\,(X_1\otimes 1_H) &= B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes x_1x_2)\\ &\quad +(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ &\quad +(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ &\quad -(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ &\quad -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ &\quad +(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ &\quad +(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\ &\quad +B(x_1x_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H) \end{aligned}$$

$$B(x_1x_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)=(X_1\otimes 1_H)B(x_1x_2hg\otimes g)+B(x_1x_2h\otimes x_1)$$

我们将右侧分成四部分，得到如下结果。

$$\begin{aligned} &1B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes x_1x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ =\;&[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes x_1x_2)\\ &(1_A\otimes gx_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)] \end{aligned}$$

$$B(gx_1h\otimes 1_H)(X_1\otimes 1_H)=(X_1\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_1\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_1)$$

$$\begin{aligned} 2\qquad &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ =\;&-(1_A\otimes x_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_1\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_1)]\\ &-(1_A\otimes g)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_1\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_2) \end{aligned}$$

$$B(gx_2h\otimes 1_H)(X_1\otimes 1_H)=(X_1\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2hx_1\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_1)$$

$$\begin{aligned} 3\qquad &+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\\ &+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\ =\;&(1_A\otimes x_1)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2hx_1\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_1)] \end{aligned}$$

$$(1_A \otimes g)\ [(X_1 \otimes 1_H)B(gx_2hg \otimes g)\ + B(gx_2hx_1 \otimes g)\ + B(gx_2h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes gx_1)$$
$$4B(x_1x_2h \otimes 1_H)(X_1 \otimes 1_H)\ = (X_1 \otimes 1_H)B(x_1x_2hg \otimes g)\ + B(x_1x_2h \otimes x_1)$$

Th因此，利用假设（对任意 h，式 (12) 成立）以及 $d = X_1$，可得 us

$$\begin{aligned}
& B(h \otimes x_1x_2)\,(X_1 \otimes 1_H) \\
= \ & [(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_1 \otimes g) + B(h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes x_1x_2) \\
& (1_A \otimes gx_2)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_1 \otimes g) + B(h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes gx_1) \\
& -(1_A \otimes gx_1)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_1 \otimes g) + B(h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes gx_2) \\
& +(1_A \otimes x_1x_2)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes g) + B(hx_1 \otimes g) + B(h \otimes x_1)] + \\
& -(1_A \otimes x_2)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(gx_1hg \otimes g) + B(gx_1hx_1 \otimes g) + B(gx_1h \otimes x_1)] \\
& -(1_A \otimes g)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(gx_1hg \otimes g) + B(gx_1hx_1 \otimes g) + B(gx_1h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes gx_2) + \\
& (1_A \otimes x_1)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(gx_2hg \otimes g) + B(gx_2hx_1 \otimes g) + B(gx_2h \otimes x_1)] + \\
& (1_A \otimes g)\,[(X_1 \otimes 1_H)B(gx_2hg \otimes g) + B(gx_2hx_1 \otimes g) + B(gx_2h \otimes x_1)]\,(1_A \otimes gx_1) \\
& (X_1 \otimes 1_H)B(x_1x_2hg \otimes g) + B(x_1x_2h \otimes x_1)
\end{aligned}$$

现在我们应将其与右侧进行比较，右侧为

$$(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) + B(hx_1 \otimes gx_1x_2)$$

我们先写出 $B(hg \otimes gx_1x_2)$。我们使用 (40)

$$\begin{aligned}
B(hg \otimes gx_1x_2) \ = \ & (1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& -(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& -B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& +(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& +(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(1_A \otimes gx_1)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& -(1_A \otimes gx_2)B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}$$

然后 $B(hx_1 \otimes gx_1x_2)$，始终使用 (40)

$$\begin{aligned}
B(hx_1 \otimes gx_1x_2) \ = \ & (1_A \otimes g)B(ghx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& -(1_A \otimes x_2)B(ghx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& -B(x_2hx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& +(1_A \otimes x_1)B(ghx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& +(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(1_A \otimes gx_1)B(x_2hx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}$$

因此，右侧为

$$\begin{aligned}
& \text{right side}(X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) + B(hx_1 \otimes gx_1x_2) \\
= \ & (X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& -(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& -(X_1 \otimes 1_H)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& +(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& +(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(X_1 \otimes 1_H)B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)B(x_1hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1x_2hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes g)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&-B(x_2hx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes gx_1)B(x_2hx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{left side} + \text{assumption } B(h\otimes x_1x_2)\,(X_1\otimes 1_H)\\
&=[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes x_1x_2)\\
&(1_A\otimes gx_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\\
&(1_A\otimes gx_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]\\
&(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_1\otimes g)+B(h\otimes x_1)]+\\
&-(1_A\otimes x_2)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_1\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_1)]\\
&-(1_A\otimes g)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_1\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_2)+\\
&(1_A\otimes x_1)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2hx_1\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_1)]+\\
&(1_A\otimes g)\,[(X_1\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2hx_1\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_1)]\\
&(1_A\otimes gx_1)\\
&(X_1\otimes 1_H)B(x_1x_2hg\otimes g)+B(x_1x_2h\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

我们首先利用 (24) 将其改写一次。

1重写左侧 $+$假设$B(h\otimes x_1x_2)\,(X_1\otimes 1_H)$= $[(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B($
$hx_1\otimes g)\ +B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes gx_2)\ [(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B($
$hx_1\otimes g)\ +B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_1)$–$(1_A\otimes gx_1)\ [(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B($
$hx_1\otimes g)\ +B(h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_2)$+$(1_A\otimes x_1x_2)\ [(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B($
$hx_1\otimes g)\ +B(h\otimes x_1)]+$—$(1_A\otimes x_2)\ [(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(x_1hg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B(gx_1h\otimes x_1)]$–$($
$1_A\otimes g)\ [(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(x_1hg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B(gx_1h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_2)$+$(1_A\otimes x_1)\ [($
$X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(x_2hg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B(gx_2hx_1\otimes g)\ +B(gx_2h\otimes x_1)]+(1_A\otimes g)\ [(X_1\otimes 1_H)$
$(1_A\otimes g)B(x_2hg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\ +B(gx_2hx_1\otimes g)\ +B(gx_2h\otimes x_1)]\,(1_A\otimes gx_1)\,(X_1\otimes 1_H)B($
$x_1x_2hg\otimes g)\ +B(x_1x_2h\otimes x_1)$

我们将它重写第二次

$$
\begin{aligned}
&2\text{rewritten left side} + \text{assumption}B(h\otimes x_1x_2)\,(X_1\otimes 1_H)\\
&=(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B\,(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)+B(h\otimes x_1)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes g)B\,(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes gx_1)+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1)\\
&-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B\,(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes gx_2)-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)B\,(ghg\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
+(1_A \otimes x_1x_2)B(hx_1 \otimes g) + (1_A \otimes x_1x_2)B(h \otimes x_1)+ \\
-(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)B\left(x_1hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
-(1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes x_1) \\
-(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B\left(x_1hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\
-(1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_2)+ \\
(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B\left(x_2hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
+(1_A \otimes x_1)B(gx_2hx_1 \otimes g) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes x_1)+ \\
(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B\left(x_2hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \\
+(1_A \otimes g)B(gx_2hx_1 \otimes g)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_1) \\
(X_1 \otimes 1_H)B(x_1x_2hg \otimes g)+ \\
+B(x_1x_2h \otimes x_1)
\end{gathered}
$$

我们将它重写第三次

$$
\begin{gathered}
3\text{rewritten left side} + \text{assumption} B(h \otimes x_1x_2)\left(X_1 \otimes 1_H\right) \\
= (X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B\left(ghg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1x_2) \\
(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g)B\left(ghg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \\
-(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B\left(ghg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\
+(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g)B\left(ghg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
-(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)B\left(x_1hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
-(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B\left(x_1hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\
(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B\left(x_2hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B\left(x_2hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \\
(X_1 \otimes 1_H)B(x_1x_2hg \otimes g) \\
+(1_A \otimes gx_2)B(hx_1 \otimes g)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes gx_2)B(h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_1) \\
-(1_A \otimes gx_1)B(hx_1 \otimes g)(1_A \otimes gx_2) - (1_A \otimes gx_1)B(h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_2) \\
+(1_A \otimes x_1x_2)B(hx_1 \otimes g) + (1_A \otimes x_1x_2)B(h \otimes x_1)+ \\
-(1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes x_1) \\
-(1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_2)+ \\
+(1_A \otimes x_1)B(gx_2hx_1 \otimes g) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes x_1)+ \\
+(1_A \otimes g)B(gx_2hx_1 \otimes g)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes x_1)(1_A \otimes gx_1) \\
+B(hx_1 \otimes g)(1_A \otimes x_1x_2) + B(h \otimes x_1)(1_A \otimes x_1x_2) \\
+B(x_1x_2h \otimes x_1)
\end{gathered}
$$

此处我们使用

$$
\begin{gathered}
B\left(hg \otimes g\right) = (1_A \otimes g)B\left(ghg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
B\left(gx_1hg \otimes g\right) = (1_A \otimes g)B\left(x_1hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g) \\
B\left(gx_2hg \otimes g\right) = (1_A \otimes g)B\left(x_2hg \otimes 1_H\right)(1_A \otimes g)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{part of right side } (X_1 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) \\
= \quad & 1(X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& 2 - (X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& 7 - (X_1 \otimes 1_H)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& 3 + (X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& 4 + (X_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&8+(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)B(x_2hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&5+(X_1\otimes 1_H)B(x_1hg\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&6-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)B(x_1hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&9+(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1x_2hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

带有假设的左侧部分

$$
\begin{aligned}
= \;& 1(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B\left(ghg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&2(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes g)B\left(ghg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&3-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B\left(ghg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&4+(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)B\left(ghg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)\\
&6-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B\left(x_1hg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)\\
&5-(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B\left(x_1hg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&8(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B\left(x_2hg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)\\
&7(X_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B\left(x_2hg\otimes 1_H\right)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&9(X_1\otimes 1_H)B(x_1x_2hg\otimes g)
\end{aligned}
$$

右侧的最后部分

$$
\begin{aligned}
&6+(1_A\otimes g)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&1-(1_A\otimes x_2)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&3-B(x_2hx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&2+(1_A\otimes x_1)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
&4+(1_A\otimes gx_1x_2)B(ghx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&5+(1_A\otimes gx_1)B(x_2hx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

左侧的最后部分+假设。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}(1_A\otimes gx_2)B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1)\\
&2-(1_A\otimes gx_1)B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2)\\
&4+(1_A\otimes x_1x_2)B(hx_1\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_1)+\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2)+\\
&5+(1_A\otimes x_1)B(gx_2hx_1\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes x_1)+\\
&3+(1_A\otimes g)B(gx_2hx_1\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1)\\
&6+B(hx_1\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+B(h\otimes x_1)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+B(x_1x_2h\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

因此，我们必须证明以下求和为零。

$$
\begin{aligned}
&1+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1)\\
&2-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2)\\
&3+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_1)+\\
&5-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_1)\\
&6-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&7+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes x_1)+\\
&8+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1)\\
&4+B(h\otimes x_1)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&9+B(x_1x_2h\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

我们使用（34）

$$
\begin{aligned}
B(h\otimes x_1) &= B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1) -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g) -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
B(gx_1h\otimes x_1) &= B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
B(gx_2h\otimes x_1) &= B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(gx_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+(1_A\otimes g)B(x_1x_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ 1(1_A\otimes gx_2)\\
B(h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1) &= 1{,}1-(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+1{,}2(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)2-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_1)\\
(1_A\otimes gx_2) &= 2{,}1+(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)2{,}2-(1_A\otimes x_1)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\ 3(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_1) = 1{,}\\
1(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)3{,}1-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)4B(h\otimes x_1)(1_A\otimes x_1x_2) &= 2{,}1-(1_A\otimes gx_1)\\
B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)4{,}1-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)5-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_1) &= 1{,}2-(1_A\otimes x_2)B(\\
gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+3{,}1(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)6-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_2) &= 4{,}1+(1_A\otimes g)B(\\
gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+2{,}2(1_A\otimes x_1)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)7+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes x_1) &= 7{,}1(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\\
(1_A\otimes x_1)+7{,}2(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)8+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes x_1)(1_A\otimes gx_1) &= 7{,}1-(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)(\\
1_A\otimes x_1)8{,}1-B(x_1x_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
9+B(x_1x_2h\otimes x_1) &= 8{,}1B(x_1x_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)7{,}2-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

因此，我们的论断得证。

现在我们必须对 X_2. 做此操作

我们必须证明，对于任意 h ，下面的公式成立

$$B(h\otimes x_1x_2)(X_2\otimes 1_H)=(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes gx_1x_2)+B(hx_2\otimes gx_1x_2)$$

$$
\begin{aligned}
B(h\otimes x_1x_2)\,(X_2\otimes 1_H) \;=\;& B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
&+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
&+B(x_1x_2h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

现在我们应用该假设，即公式对 $B(h\otimes 1_H)$ 成立，即

$$B(h\otimes 1_H)(X_2\otimes 1_H)=(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)$$

$$
\begin{aligned}
&1B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
=\;&[(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes x_1x_2)\\
&(1_A\otimes gx_2)\,[(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)\,[(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)\,[(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]
\end{aligned}
$$

$$B(gx_1h\otimes 1_H)(X_2\otimes 1_H) =(X_2\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g) +B(gx_1hx_2\otimes g) +B(gx_1h\otimes x_2)$$

$$
\begin{aligned}
& 2-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\
= \;& -(1_A\otimes x_2)\,[(X_2\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_2\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_2)]+\\
& -(1_A\otimes g)\,[(X_2\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_2\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}
$$

$$
B(gx_2h\otimes 1_H)(X_2\otimes 1_H)=(X_2\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_2)
$$

$$
\begin{aligned}
& 3+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\\
& +(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)\,(X_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
= \;& +(1_A\otimes x_1)\,[(X_2\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_2)]+\\
& +(1_A\otimes g)\,[(X_2\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_1)
\end{aligned}
$$

$$
4B(x_1x_2h\otimes 1_H)(X_2\otimes 1_H)=(X_2\otimes 1_H)B(x_1x_2hg\otimes g)+B(x_1x_2h\otimes x_2)
$$

因此，利用对任意 h (12) 均成立这一假设， $d=X_2$ 给出

$$
\begin{aligned}
& \text{左侧加上假设 } [(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes x_1x_2)\\
& (1_A\otimes gx_2)\ [\ (X_2\otimes 1_H)\ B\ (hg\otimes g)\ +B\ (hx_2\otimes g)\ +B\ (h\otimes x_2)\ ]\ (1_A\otimes gx_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1)\ [(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_2)\\
& +(1_A\otimes x_1x_2)\ [(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)+B(hx_2\otimes g)+B(h\otimes x_2)]+\\
& -(1_A\otimes x_2)\ [(X_2\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_2\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_2)]+\\
& -(1_A\otimes g)\ [(X_2\otimes 1_H)B(gx_1hg\otimes g)+B(gx_1hx_2\otimes g)+B(gx_1h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_2)\ +\\
& +(1_A\otimes x_1)\ [(X_2\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_2)]+\\
& +(1_A\otimes g)\ [(X_2\otimes 1_H)B(gx_2hg\otimes g)+B(gx_2h\otimes x_2)]\,(1_A\otimes gx_1)\ +\\
& (X_2\otimes 1_H)\ B\ (x_1x_2hg\otimes g)\ +B\ (x_1x_2h\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

我们将其改写，将包含（$X_2\otimes 1_H$）的部分分离出来

$$
\begin{aligned}
\text{new}\quad & \text{left side plus assumptions}(X_2\otimes 1_H)B(hg\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& (X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)B(hg\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
& -(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)B(hg\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)B(hg\otimes g)\\
& (-X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)B(gx_1hg\otimes g)\\
& -(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1hg\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)B(gx_2hg\otimes g)\\
& +(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_2hg\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
& +(X_2\otimes 1_H)B(x_1x_2hg\otimes g)\\
& +B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& +(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_2)\\
& +B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& +(1_A\otimes gx_2)B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(1_A\otimes x_1x_2)B(hx_2\otimes g)+\\
& -(1_A\otimes x_2)B(gx_1hx_2\otimes g)\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_1hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
& -(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_2)+\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes x_2) + \\
&+(1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes x_2)(1_A \otimes gx_1) + \\
&+B(x_1x_2h \otimes x_2)
\end{aligned}
$$

现在我们考虑右侧

$$\text{right side}(X_2 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) + B(hx_2 \otimes gx_1x_2)$$

我们使用（40）

$$
\begin{aligned}
B(h \otimes gx_1x_2) \quad = \quad & (1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& -(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& -B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& +(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& +(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(1_A \otimes gx_1)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& -(1_A \otimes gx_2)B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \text{right side}(X_2 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) \\
= \quad & (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& -(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& -(X_2 \otimes 1_H)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& +(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& +(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(X_2 \otimes 1_H)B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\
& -(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)B(x_1hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\
& +(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(gx_1x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}
$$

现在我们将其与重写后的左侧中包含 $X_2 \otimes 1_H$ 的部分进行比较

$$
\begin{aligned}
\text{new} \quad & \text{left side plus assumptions containing } X_2 \otimes 1_H \\
& 1(X_2 \otimes 1_H)B(hg \otimes g)(1_A \otimes x_1x_2) \\
2 \quad & (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)B(hg \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \\
& 3 - (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)B(hg \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\
& 4 + (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)B(hg \otimes g) \\
& 5(-X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)B(gx_1hg \otimes g) \\
& 6 - (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(gx_1hg \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\
& 7 + (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)B(gx_2hg \otimes g) \\
& 8 + (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(gx_2hg \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \\
& 9 + (X_2 \otimes 1_H)B(x_1x_2hg \otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{right side}(X_2 \otimes 1_H)B(hg \otimes gx_1x_2) \\
= \quad & 1(X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\
& 2 - (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& 8 - (X_2 \otimes 1_H)B(x_2hg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\
& 3 + (X_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)B(ghg \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4+(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)B(ghg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&7+(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)B(x_2hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&6+(X_2\otimes 1_H)B(x_1hg\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&5-(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)B(x_1hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&9+(X_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)B(gx_1x_2hg\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

现在我们使用（40）来写出右侧部分 $B(hx_2\otimes gx_1x_2)$

$$
\begin{aligned}
B(hx_2\otimes gx_1x_2) \;=\;& 6(1_A\otimes g)B(ghx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&1-(1_A\otimes x_2)B(ghx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&2+(1_A\otimes x_1)B(ghx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&3+(1_A\otimes gx_1x_2)B(ghx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&5+B(x_1hx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&4-(1_A\otimes gx_2)B(x_1hx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

并将其与左侧剩余的部分进行比较

$$
\begin{aligned}
&+B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_2)\\
&6+B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&1+(1_A\otimes gx_2)B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_1)\\
&2-(1_A\otimes gx_1)B(hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&3+(1_A\otimes x_1x_2)B(hx_2\otimes g)+\\
&4-(1_A\otimes x_2)B(gx_1hx_2\otimes g)\\
&5-(1_A\otimes g)B(gx_1hx_2\otimes g)(1_A\otimes gx_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_2)+\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)+\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes x_2)+\\
&+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)+\\
&+B(x_1x_2h\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

现在我们要证明以下求和为零

$$
\begin{aligned}
&1+B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1x_2)\\
2\quad&+(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)\\
&3-(1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)\\
4\quad&+(1_A\otimes x_1x_2)B(h\otimes x_2)\\
5\quad&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1h\otimes x_2)+\\
6\quad&-(1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_2)+\\
7\quad&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2h\otimes x_2)+\\
8\quad&+(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)+\\
9\quad&+B(x_1x_2h\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

现在我们使用（36）

$$
\begin{aligned}
B(h\otimes x_2) \;=\;& B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_2h\otimes 1_H)\\
&(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
B(gx_1h\otimes x_2) \;=\; B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\;-(1_A\otimes gx_2)B(gx_1h\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\;-(1_A\otimes g)B(gx_1gx_2h\otimes 1_H\quad)
$$

$$(1_A \otimes g)$$

$$B(gx_2h \otimes x_2) = B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

$$B(x_1x_2h \otimes x_2) = B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

and we get

$$\begin{aligned} & 1 + B(h \otimes x_2)(1_A \otimes x_1x_2) \\ = \; & 1{,}1 - (1_A \otimes gx_2)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1x_2) + \\ & 1{,}2 - (1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1x_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 + (1_A \otimes gx_2)B(h \otimes x_2)(1_A \otimes gx_1) \\ = \; & 1{,}1(1_A \otimes gx_2)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes gx_1) + \\ & 2{,}1 - (1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3 - (1_A \otimes gx_1)B(h \otimes x_2)(1_A \otimes gx_2) \\ = \; & 3{,}1(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes gx_2)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \\ & +3{,}2(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4 + (1_A \otimes x_1x_2)B(h \otimes x_2) \\ = \; & 3{,}1(1_A \otimes x_1x_2)B(h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - 4{,}1(1_A \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5 - (1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes x_2) + \\ = \; & 5{,}1 - (1_A \otimes x_2)B(gx_1h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) + 5{,}2(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6 - (1_A \otimes g)B(gx_1h \otimes x_2)(1_A \otimes gx_2) + \\ = \; & +5{,}1(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2)B(gx_1h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) + 6{,}1B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7 + (1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes x_2) + \\ = \; & 3{,}2(1_A \otimes x_1)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - 4{,}1(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes gx_2)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 8 + (1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes x_2)(1_A \otimes gx_1) \\ = \; & 1{,}2(1_A \otimes g)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes gx_1) \\ & -2{,}1(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2)B(gx_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 9 \qquad + B(x_1x_2h \otimes x_2) \\ = \; & 6{,}1B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - 5{,}2(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2h \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

因此，我们的论断得证。

第2. 部分 卡西米尔条件

在本部分中，我们将探讨卡西米尔条件。具体来说，我们考虑这七个元素 $g \otimes 1_H$， $x_1 \otimes 1_H$， $x_1 \otimes 1_H$， $x_2 \otimes 1_H$， $x_1x_2 \otimes 1_H$， $gx_1 \otimes 1_H$， $gx_2 \otimes 1_H$， $gx_1x_2 \otimes 1_H$，并假设 B 关于它们满足卡西米尔条件，从而推导出在这种情形下得到的特定形式。

完成上述工作后，我们将考虑其他元素。由于条件 (12)，我们只需考虑其中的一半。事实上，命题 8.2 指出，假设条件 (12) 成立，且对于某个 h， $h' \in H$, $B(h \otimes h')$ ，满足卡西米尔条件，那么 $B(gh \otimes gh')$ 也满足该条件。

为此，我们将大量运用命题 9.1 及其相关的所有公式。借助这些公式，我们可以利用 (13) ，用 $B(h \otimes 1_H)$ 表示所有的 $B(h \otimes h')$，其中 $h \otimes 1_H$ 遍历这七个元素。

这将　　这将是一个漫长的检验过程，最终会表明不会再出现其他条件。

12. $B\left(g\otimes 1_H\right)$

我们将 $B\left(g\otimes 1_H\right)$ 的卡西米尔条件写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\quad & B^A(g\otimes 1_H)\otimes B^H(g\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

我们重点考察张量第三部分的不同出现形式。

12.1. 情形 1_H。 方程左侧可得

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
\alpha\left(g;0,0,0,0\right) &\equiv 0
\end{aligned}$$

并且我们得到等式变为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
=\quad &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0. \tag{44}$$

12.2. 情形 g。 方程左侧可得

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
\alpha\left(g;0,0,0,0\right) &\equiv 0
\end{aligned}$$

鉴于 (44)，我们没有得到任何新结果。

12.3. 情形 x_1。 方程左侧为

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1\\
l_2 &= u_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

鉴于 (44)，我们得到一个平凡等式。

12.4. 情形 x_2。 方程左侧为

$$\begin{aligned}
l_2+u_2 &= 1\\
l_1 &= u_1=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

由（44）可得一个平凡等式。

12.5. 情形 x_1x_2。

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ &\alpha\left(g;0,0,1,1\right)\equiv 1+e_2\\ &\alpha\left(g;0,1,1,0\right)\equiv e_2+a+b_1+b_2\\ &\alpha\left(g;1,0,0,1\right)\equiv a+b_1\\ &\alpha\left(g;1,1,0,0\right)\equiv 1+b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{l_2=0\\ l_1+u_1=1}}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\\ =\;&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2+a+b_1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{1+b_2}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+ \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)+(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)\\ +(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+B(g\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)\end{array}\right]G^a\otimes g^d\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=0}}\left[B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)\right]G^a\otimes g^dx_1\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=0}}\left[B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)+(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)\right]G^a\otimes g^dx_2\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1x_2\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=0}}\left[(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+B(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)\right]G^aX_1\otimes g^d+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_2+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=0}}\left[(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)+B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)\right]G^aX_2\otimes g^d\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^d \end{aligned}$$

并且我们得到

$B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2,\ \ g^d)\ +(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;\ G^aX_2,\ \ g^dx_1)\ +(-1)^aB(g\otimes 1_H;\ G^aX_1,\ g^dx_2)$ (45)$+B(g\otimes 1_H;\ G^a,\ \ g^dx_1x_2)$ 当且仅当 $a+d\ \equiv 1$

$$B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)=0\text{ whenever }a+d\ \equiv 1 \tag{46}$$

$$B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2,\ \ g^dx_2)\ +(-1)^aB(g\otimes 1_H;\ G^aX_2,\ \ g^dx_1x_2)\ =0\text{当}\ \ a+d\ \equiv 0 \tag{47}$$

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)=0 \text{ whenever } a+d \equiv 1\ . \tag{48}$$

12.6. 情形 $gx_{1\circ}$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1} (-1)^{\alpha(g;l_1,0,u_1,0)}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}=0$$

并且我们得到

(49) $B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2^{b_2},\ \ g^dx_2^{e_2})+(-1)^{a+e_2+1}\,B(g\otimes 1_H;\ G^aX_2^{b_2},\ \ g^dx_1x_2^{e_2})\ =0$ 对于 $a+b_2+d+e_2\equiv 0$

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_2+d+e_2\equiv 1. \tag{50}$$

12.7. 情形 $gx_{2\circ}$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(g;0,l_2,0,u_2)}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}=0$$

因此我们得到

(51)

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1})+(-1)^{(a+b_1+1)}\,B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}, g^dx_1^{e_1}x_2)=0 \text{ for } a+b_1+d+e_1\equiv 0$$

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2)=0 \text{ for } a+b_1+d+e_1\equiv 1. \tag{52}$$

12.8. 情形 gx_1x_2**.** 我们得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}=0.$$

并且根据 **(44)**，公式成立。

最后我们得到

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0 \ \ (44)$$

and

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_2+d+e_2\equiv 1 \ \ (50)\,.$$

12.9. **我们得到的等式**。等式（50）分解为

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0 \tag{53}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{54}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0 \tag{55}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0 \tag{56}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0 \tag{57}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{58}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0 \tag{59}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{60}$$

此外，我们得到了

$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_2^{e_2})+(-1)^{a+e_2+1}B(g\otimes 1_H; G^aX_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2}) = 0$对于 $a+b_2+d+e_2\equiv 0$ (49)，它分解为

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0 \tag{61}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + B(g\otimes 1_H; G, gx_1) = 0 \tag{62}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{63}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0 \tag{64}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) + B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = 0 \tag{65}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0 \tag{66}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \tag{67}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0 \ = 0 \tag{68}$$

我们还得到了

$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1})+(-1)^{(a+b_1+1}B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}, g^dx_1^{e_1}x_2) = 0$对于 $a+b_1+d+e_1 \equiv 0$(51)，它分解为

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) = 0 \tag{69}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) = 0 \tag{70}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \tag{71}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0$$

这由 $B(g\otimes 1_H;\ X_1X_2, x_1) = 0$(54) 和 $B(g\otimes 1_H;\ X_1, x_1x_2) = 0$(56) 得出

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, g) + B(g\otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \tag{72}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{73}$$

$$B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0 \tag{74}$$

$$\begin{aligned} B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) &= 0 \\ \text{This follows from } B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) &= 0 \quad (57) \\ \text{and } B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) &= 0 \quad (59) \end{aligned}$$

此外，得到的等式

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2)=0 \text{ for } a+b_1+d+e_1\equiv 1 \quad (52)$$

分解为

(75)
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2)=0$$
$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2)=0 \text{ this is } (78)\ .$$

(76)
$$B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2)=0$$

(77)
$$B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2)=0$$

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2)+B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \quad = \quad 0 \quad (65)$$

根据（77）变为

(78)
$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2)=0$$
$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2)=0 \text{ this is } \quad (60)$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2)=0 \quad \text{this follows from } (80)$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2)=0 \text{ this is } (58)$$

(79)
$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2)=0$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2)-B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \quad = \quad 0 \quad (68)$$
$$\text{in view of } B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \quad = \quad 0 \quad (79)$$
$$\text{implies}$$

(80)
$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2)=0$$

等式

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)+(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)+(-1)^aB(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)$$
$$+B(g\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)=0 \text{ whenever } \overline{a+d}=1 \quad (45)$$

分解为

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)+B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1)-B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2)$$
$$+B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2)=0$$
$$\text{In view of } (63)\, B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2)-B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2)=0 \text{ this reduces to}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)+B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1)=0$$
$$\text{which is } (61)$$

and

$$+B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g)-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1)+B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2)$$
$$+B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)=0$$
$$\text{This follows in view of } (64)\ B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g)-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1)=0$$
$$\text{and } (67)\, B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2)+B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)=0$$

等式

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)+(-1)^aB(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)=0 \text{ whenever } a+d\equiv 0\,(46)$$

splits in

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1)+B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2)=0 \ (54)\,(56)$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1)-B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2)=0 \ (57)\ (59)$$

等式

$B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2, g^dx_2)\ +(-1)^a\ B(g\otimes 1_H;\ G^aX_2, g^dx_1x_2)\ =0$当 $a+d\ \equiv 0$(47) 在其中可分裂时

$$\begin{aligned} B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2)+B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) &= 0 \\ \text{this is}\quad (78)\quad B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2)+B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) &= 0 \end{aligned}$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2)-B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2)=0 \text{ This is } \quad (80)\,.$$

最后，等式

$$B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)=0 \text{ whenever } a+d\equiv 1 \quad (48)$$

可分解为

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2)=0$$

，这就是（60），并且

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2)=0$$

这就是（58）。

12.10. 元素 () 的最终形式。鉴于以上内容，我们得到

$$\begin{aligned} (81)\qquad B\left(g\otimes 1_H\right) &= B\left(g\otimes 1_H; 1_A, g\right)1_A\otimes g \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, x_1\right)1_A\otimes x_1 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, x_2\right)1_A\otimes x_2 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)1_A\otimes gx_1x_2 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, 1_H\right)G\otimes 1_H \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right)G\otimes x_1x_2 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right)G\otimes gx_1 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right)G\otimes gx_2 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, x_1\right)X_1\otimes 1_H \\ &\quad -B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)X_1\otimes gx_2 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, x_2\right)X_2\otimes 1_H \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)X_2\otimes gx_1 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes g \\ &\quad -B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right)GX_1\otimes g \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right)GX_1\otimes x_2 \\ &\quad -B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right)GX_2\otimes g \\ &\quad -B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right)GX_2\otimes x_1 \\ &\quad +B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right)GX_1X_2\otimes 1_H \end{aligned}$$

13. $B\left(x_1\otimes 1_H\right)$

这里我们假设 $B\left(x_1\otimes 1_H\right)$ 满足卡西米尔条件，并推导出在这种情形下 $B\left(x_1\otimes 1_H\right)$ 将具有的特定形式。

我们将卡西米尔条件 (6) 写为 $B\left(x_1\otimes 1_H\right)$.

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{w_1=0}^{1}\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)} \\ &B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_{11}+e_{12}+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2} \\ =\ & B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes 1_H \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}+\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_{11}}\sum_{u_2=0}^{e_{12}}(-1)\\
&B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_{11}+e_{12}+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+\\
=\quad & B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

我们着重考察张量第三部分的不同出现形式。

13.1. 情形 1_H。 从左侧第一项无法得到 1_H沿用同样的论证，在情形 $B(g\otimes 1_H)$，我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \tag{82}$$

我们着重考察张量第三部分的不同出现形式。

13.2. 情形 g。 从左侧第一项无法得到 g 。从第二项我们只能得到 (82)。

13.3. 情形 x_1。 这里我们会有两个加项，其中 x_1 位于第三位置。
由左侧第一项可得 (44)。由左侧第二项可得 (82)。

13.4. 情形 x_2。 由左侧第一项无法得到 x_2。由左侧第二项可得 (82)。

13.5. 情形 gx_1。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
l_1 &= u_1\equiv 0\\
l_2 &= u_2\equiv 0.
\end{aligned}$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &\equiv 1\\
l_2 &= u_2\equiv 0
\end{aligned}$$

并且，由于

$$\begin{aligned}
\alpha(x_1;0,0,0,0) &= a+b_1+b_2\\
\alpha(1_H;0,0,1,0) &= e_2+a+b_1+b_2\\
\alpha(1_H;1,0,0,0) &= b_2
\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
&+\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{e_2+a+b_1+b_2}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}\\
&+\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{b_2}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0
\end{aligned}$$

现在我们考虑以下情形。

13.5.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d)\right]$$
$$G^a \otimes g^d = 0$$

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, g) = 0 \tag{83}$$
$$-B(g\otimes 1_H; G, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0 \tag{84}$$

13.5.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2)\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_2) = 0 \tag{85}$$
$$-B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \tag{86}$$

13.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0 \tag{87}$$
$$-B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \tag{88}$$

13.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \begin{bmatrix} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d) + \\ (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) - B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) \end{bmatrix}$$
$$G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; X_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0 \tag{89}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_1\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0 \tag{90}$$

13.5.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0 \tag{91}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \tag{92}$$

13.5.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

从而得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{93}$$
$$-B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{94}$$

13.5.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g_1^dx_2) \end{array} \right] G^aX_2\otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0 \tag{95}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0 \tag{96}$$

13.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{97}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{98}$$

13.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) - B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

于是得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{99}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{100}$$

13.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} -B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) &= 0 \\ B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) &= 0 \end{aligned}$$

这些结果已为人所知。

13.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{101}$$
$$-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{102}$$

13.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{103}$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{104}$$

13.5.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1x_2) G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} -B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) &= 0\\ B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) &= 0 \end{aligned}$$

这正是我们已经得到的结果。

13.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_2) - B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_1x_2)\right]$$

$$G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{105}$$

$$-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{106}$$

13.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_1) G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) &= 0\\ -B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) &= 0 \end{aligned}$$

这些结果已经是已知的。

13.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_1x_2) G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} B(g\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) &= 0\\ B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) &= 0 \end{aligned}$$

这些结果已经是已知的。

13.6. 情形 gx_2。 左侧第一项未出现在卡西米尔条件中。我们考虑第二项

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{\substack{u_2=0\\l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1}x_2^{e_2})$$

$$G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}$$

$$=\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$

$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+b_2$ 且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$

$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

现在我们按照上述情形继续进行。

13.6.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=1}}^{1}\left[(-1)^a\,B(x_1\otimes 1_H;G^a,g^dx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^d)\right]G^a\otimes g^d=0$$

我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_2,g) = 0 \tag{107}$$

$$-B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_2,1_H) = 0 \tag{108}$$

13.6.2. $G^a\otimes g^dx_2$.

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}}^{1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2=0$$

我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_2) = 0 \tag{109}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_2) = 0 \tag{110}$$

13.6.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}}^{1}\left[(-1)^a\,B(x_1\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)\right]G^a\otimes g^dx_1=0$$

于是我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1) = 0 \tag{111}$$

$$-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1) = 0 \tag{112}$$

13.6.4. $G^aX_2\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}}^{1}(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)G^aX_2\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_2) = 0$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

13.6.5. $G^aX_1\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d=0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)\right]G^aX_1\otimes g^d=0$$

由此得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_1,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H) = 0 \tag{113}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,g) = 0 \tag{114}$$

13.6.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{115}$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{116}$$

13.6.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 我们没有这样的加项。

13.6.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) = 0 \tag{117}$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G X_1 X_2, x_2) = 0 \tag{118}$$

13.6.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{119}$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{120}$$

13.6.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right]$$
$$G^a X_1 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g x_1 x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, g x_1) = 0 \tag{121}$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G X_1, x_1 x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G X_1 X_2, x_1) = 0 \tag{122}$$

13.6.11. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} (-1)^{a} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) = 0$$
$$-B(x_1 \otimes 1_H; G X_1 X_2, x_2) = 0$$

这正是我们之前得到的结果。

13.6.12. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$。 我们没有这样的加项。

13.6.13. $G^a X_1 \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{123}$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{124}$$

13.6.14. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d x_2$. 我们没有这样的加项。

13.6.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} (-1)^a\, B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) &= 0\\ -B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) &= 0 \end{aligned}$$

这正是我们已经得到的结果。

13.6.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 我们没有这样的加项。

13.7. **情形** x_1x_2。

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} +\\ &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_{11}} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_{12}} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_{11}+e_{12}+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} +\\ = \;& B^A(x_1 \otimes 1_H) \otimes B^H(x_1 \otimes 1_H) \otimes 1_H \end{aligned}$$

对于第一项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0\\ l_2 + u_2 &= 1\\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1\\ \alpha\,(x_1; 0, 0, 0, 1) &\equiv 1\\ \alpha\,(x_1; 0, 1, 0, 0) &\equiv a + b_1 + b_2 + 1 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;0,l_2,0,u_2)}\, B(g \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}\\ = \;& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}\, B(g \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1} +\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)}\, B(g \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1} \otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^a, g^dx_2)G^a \otimes g^d\\ &2\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)G^a \otimes g^dx_1\\ &3\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)G^aX_2 \otimes g^d\\ &4\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1\\ &5\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)G^aX_1 \otimes g^d\\ &6\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(g \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&7\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2\otimes g^d\\
&8\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)G^a\otimes g^d +\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)G^a\otimes g^dx_1\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1x_2\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)G^aX_1\otimes g^d\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1\otimes g^dx_2\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1\otimes g^dx_1\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_1x_2
\end{aligned}
$$

第二项给出

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\\
=\ &\sum\nolimits_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} +\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} +\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} +\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\alpha\,(1_H;1,1,0,0) &\equiv 1+b_2\equiv 0\\
\alpha\,(1_H;0,1,1,0) &\equiv e_2+a+b_1\\
\alpha\,(1_H;1,0,0,1) &\equiv a+1\\
\alpha\,(1_H;0,0,1,1) &\equiv 1+e_2\equiv 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2+a+b_1}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d
\end{aligned}
$$

$$\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d$$

1 $\sum_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)G^a\otimes g^d$

2 $\sum_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^a\otimes g^dx_1$

3 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2$

4 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1x_2$

5 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{+a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)G^a\otimes g^d$

6 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{+a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1\otimes g^d$

7 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{+a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_2$

8 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_2$

9 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)G^a\otimes g^d$

10 $\sum_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_2\otimes g^d$

11 $\sum_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1$

12 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1$

13 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)G^a\otimes g^d$

14 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^d$

15 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^d$

16 $\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^d$

由此可得

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}}^{1} \begin{bmatrix} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) \\ (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2) \\ (-1)^a\, B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^d) - B(g\otimes 1_H; G^a, g^dx_2) \end{bmatrix} G^a\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)\\ -B(x_1\otimes 1_H;X_1,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ +B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0 \end{array} \tag{125}$$

$$\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,g)-B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\\ +B(x_1\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ -B(g\otimes 1_H;GX_2,g)-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0 \end{array} \tag{126}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+\\ (-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)-B(g\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2) \end{array}\right]$$
$$G^a\otimes g^dx_1=0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)-B(x_1\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)+\\ B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)-B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}=0 \tag{127}$$

$$\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\\ -B(g\otimes 1_H;GX_2,x_1)-B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2) \end{array}=0 \tag{128}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)\\ +(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2) \end{array}\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+B(g\otimes 1_H;X_2,gx_2)=0 \tag{129}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;GX_2,x_2)=0 \tag{130}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)+(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)\right]G^a\otimes g^dx_1x_2=0$$

and we get

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)+B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)=0 \tag{131}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)=0 \tag{132}$$

于是我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+\\ (-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)-B(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2) \end{array}\right]$$
$$G^aX_1\otimes g^d=0$$

于是我们得到

(133)
$$-B(x_1\otimes 1_H;\ X_1X_2,gx_1)+B(x_1\otimes 1_H;\ X_1,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;\ X_1X_2,g)-B(g\otimes 1_H;\ X_1,gx_2)$$
(134)
$$=0B(x_1\otimes 1_H;\ GX_1X_2,x_1)+B(x_1\otimes 1_H;\ GX_1,x_1x_2)+B(g\otimes 1_H;\ GX_1X_2,1_H)-B(g\otimes 1_H;\ GX_1,x_2)$$
$$=0$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^aB(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]$$
$$G^aX_1\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0 \tag{135}$$

$$-B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)+B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0 \tag{136}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}\left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\\ +B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)\end{array}\right]$$
$$G^aX_2\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;X_2,gx_2)=0 \tag{137}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;GX_2,x_2)=0 \tag{138}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)\right]G^aX_2\otimes g^dx_1=0$$

and we get

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)=0$$

已经得到且

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)=0 \tag{139}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^aX_1X_2\otimes g^d=0$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0$$

已经得到

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0 \tag{140}$$

13.8. 情形 gx_1x_2**.** 左侧第一项

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2=1}}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha\left(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2}\right) &= \alpha\left(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2};l_1,l_2,u_1,u_2\right)=(u_2+e_2)\,u_1+(l_2+b_2)\,l_1\\ &+ (a+b_1+b_2+l_1+l_2)\,(u_1+u_2+n_1+n_2)+m(u_1+u_2)+n_1u_2+l_1(n_2+u_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha\left(a,b_1,b_2,e_2,l_1,l_2,u_1,u_2\right)=(l_2+b_2)\,l_1+(u_2+e_2)\,u_1+\\ &\quad +(a+b_1+b_2+l_1+l_2)\,(u_1+u_2+1)+l_1u_2+u_2\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ u_1+l_1 &\equiv 0\\ l_2+u_2 &\equiv 1\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\overline{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2} &\equiv 0\\ u_1+l_1 &\equiv 0\\ l_2+u_2 &\equiv 1\end{aligned}$$

鉴于（44），我们已经知道 $B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ \ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$ 当且仅当 er $\overline{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2}=0$

左侧第二项为

$$\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H,l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &= 1 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1+u_1 &\equiv 1 \\ l_2+u_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H,0,0,1,1)=1+e_2, \alpha(1_H,1,0,0,1)=a+b_1$, $\alpha(1_H,0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2+1, \alpha(1_H,1,1,0,0)=1+b_2$我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{\substack{u_1=0 \\ l_1+u_1\equiv 1}}^{e_1} \sum_{\substack{u_2=0 \\ l_2+u_2\equiv 1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H,l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)} = \\ &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0 \\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{1+e_2} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d + \\ &\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+b_1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} + \\ &\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0 \\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} + \\ &\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0 \\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{1+b_2} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0 \\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d + \\ &\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} + \\ &\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0 \\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} + \\ &\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0 \\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

这里我们考虑所有情形。

13.8.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0 \\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d + \\ &\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} + \\ &\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0 \\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} + \\ &\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0 \\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + \\ +(-1)^aB(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) + B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) \end{array} \right] G^a\otimes g^d +$$

由此得到

$$\begin{array}{c} +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_1,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;X_2,gx_1)+B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,g)=0\end{array} \tag{141}$$

$$\begin{array}{c} B(x_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1,x_2)+\\ -B(x_1\otimes 1_H;GX_2,x_1)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0\end{array} \tag{142}$$

13.8.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{1+a}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_2) = 0 \tag{143}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2) = 0 \tag{144}$$

13.8.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)\right]G^a\otimes g^dx_1$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1) = 0 \tag{145}$$

$$(B(x_1\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1) = 0 \tag{146}$$

13.8.4. $G^aX_2\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^aX_2\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_2) &= 0\\ B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2) &= 0\end{aligned}$$

这正是我们已经得到的结果。

13.8.5. $G^aX_1\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)\right]G^aX_1\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1) &= 0\\ B(x_1\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1) &= 0\end{aligned}$$

这正是我们已经得到的结果。

13.8.6. $G^a\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1x_2=0$$

于是我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) = 0 \tag{147}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) = 0 \tag{148}$$

13.8.7. $G^aX_2\otimes g^dx_2$. 没有这样的加项。

13.8.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^aB(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) &= 0\\ B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) &= 0\end{aligned}$$

这正是我们已经得到的

13.8.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) &= 0\\ B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) &= 0\end{aligned}$$

这正是我们已经得到的

13.8.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 不存在这样的项。

13.8.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^d=0$$

于是得到

$$\begin{aligned}B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) &= 0\\ B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) &= 0\end{aligned}$$

这是我们已经得到的结果。

13.8.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

13.8.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

13.8.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 没有这样的项。

13.8.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 没有这样的项。

13.8.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 没有这样的项。

利用上面从 (82) 到 (148) 得到的所有等式，我们得到$B(x_1 \otimes 1_H)$ 的以下形式.

13.9. **元素的最终形式** $B(x_1 \otimes 1_H)$。这里我们也使用 $B(g \otimes 1_H)$ 的最终形式。

$$\begin{aligned}(149)\qquad & B(x_1\otimes 1_H)\\ = \;& B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)\,1_A\otimes 1_H+\\ & B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\,1_A\otimes x_1x_2+\\ & B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\,1_A\otimes gx_1+\\ & B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\,1_A\otimes gx_2+\\ & B(x_1\otimes 1_H;G,g)\,G\otimes g+\\ & B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\,G\otimes x_1+\\ & B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)\,G\otimes x_2+\\ & B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\,G\otimes gx_1x_2+\\ & [-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)]\,X_1\otimes g+\\ & -B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)X_1\otimes x_1+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)]\,X_1\otimes x_2+\\
&-B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2+\\
&-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes g+\\
&-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_2\otimes x_1+\\
&[-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)]\,X_1X_2\otimes 1_H+\\
&-B(g\otimes 1_H;X_1X_2,g)X_1X_2\otimes gx_1+\\
&[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)]\,GX_1\otimes 1_H+\\
&B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)GX_1\otimes x_1x_2+\\
&-B(g\otimes 1_H;GX_1,g)GX_1\otimes gx_1+\\
&[-B(g\otimes 1_H;GX_2,g)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]\,GX_1\otimes gx_2+\\
&B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)GX_2\otimes 1_H+\\
&B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1+\\
&[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]\,GX_1X_2\otimes g+\\
&-B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1
\end{aligned}
$$

14. $B(x_2\otimes 1_H)$

我们将卡西米尔公式 **(11)** 写为 $B(x_2\otimes 1_H)$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w_2=0}^{1}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_2^{1-w_2};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}\\
&B(g^{1+w_2}x_2^{w_2}\otimes g^{\mu}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2};G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1-w_2}\\
=\;& B^A(x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\\
&\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\\
&\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B^A(x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

我们着重考察张量第三部分的不同出现形式。

14.1. 情形 1_H**.** 在情形 $B(x_1\otimes 1_H)$,中使用相同的论证，我们得到

$$
B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\ \equiv 1 \tag{150}
$$

14.2. 情形 g。 我们无法从左侧第一项得到 g 。因此我们得到

$$
\begin{aligned}
g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} &= g\Rightarrow\\
u_1 &= l_1=l_2=u_2=0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \text{ so that,} \\ B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1. \\ & \text{This is (150)} \end{aligned}$$

14.3. 情形 $x_{2\circ}$ 这里会有两项，其中 x_2 位于第三位置。

由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2+1} &= x_2 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ u_1+l_1 &= 0 \text{ so that } u_1=0=l_1 \\ l_2+u_2 &= 0 \text{ so that } l_2=0=u_2 \text{ and} \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \text{ but we already know} \\ B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0 \quad (44) \end{aligned}$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} &= x_2 \Rightarrow \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2+u_2 &= 1 \\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \text{ We already know, in view of (150) that} \\ B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1. \end{aligned}$$

14.4. 情形 $x_{1\circ}$ 由左侧第一项无法得到 x_1. 由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} &= x_1 \Rightarrow \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2 &= u_2=0 \\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \text{ so that,} \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1. \\ & \text{This is (150)} \end{aligned}$$

14.5. 情形 $x_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1} \\ & +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = \;& B^A(x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H \end{aligned}$$

由第一项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2+1} &= x_1x_2 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ u_1+l_1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 0 \text{ so that } l_2=0=u_2 \text{ and} \end{aligned}$$

$$a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 \quad \equiv \quad 1$$

并且可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{u_1=0}^{e_1}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,0,u_1,0)}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}\\
=\ &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(x_2;0,0,1,0)}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(x_2;1,0,0,0)}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}$$

由第二项可得

$$\begin{aligned}
g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} &= x_1x_2\Rightarrow\\
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1\\
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \text{ so that,}\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\\
=\ &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\
&\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
&\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
&\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)=e_2,\alpha(x_2;1,0,0,0)=a+b_1,\alpha(1_H;0,0,1,1)=1+e_2,\alpha(1_H;0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2+1,\alpha(1_H;1,0,0,1)=a+b_1,\alpha(1_H;1,1,0,0)=1+b_2$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
&\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\
&\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2+a+b_1}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
&\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
&\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}$$

14.5.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d) + \\ +B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) \\ +(-1)^{a_1} B(x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) \\ +B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) \end{array} \right]$$

$G^a \otimes g^d \quad = \quad 0$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) + B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) \\ +B(x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) - B(x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_1 X_2, 1_H) \end{array} = 0 \tag{151}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, g x_1) + B(g\otimes 1_H; G X_1, g) + B(x_2\otimes 1_H; G, g x_1 x_2) \\ -B(x_2\otimes 1_H; G X_2, g x_1) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1, g x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1 X_2, g) \end{array} = 0 \tag{152}$$

14.5.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + \\ (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; 1_A, g x_1 x_2) - B(g\otimes 1_H; X_1, g x_2) + \\ -B(x_2\otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) \end{array} = 0 \tag{153}$$

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; G, x_1 x_2) + B(g\otimes 1_H; G X_1, x_2) + \\ +B(x_2\otimes 1_H; G X_2, x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_2) \end{array} = 0 \tag{154}$$

14.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + \\ B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right]$$
$$G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, g x_1) - B(x_2\otimes 1_H; X_1, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_1) = 0 \tag{155}$$

$$B(g\otimes 1_H; G X_1, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1, x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_1) = 0 \tag{156}$$

14.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) + \\ B(x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_2, g x_1) - B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, g) + \\ B(x_2\otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) - B(x_2\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) \end{array} = 0 \tag{157}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G X_2, x_1) + B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, 1_H) + \\ B(x_2\otimes 1_H; G X_2, x_1 x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_2) \end{array} = 0 \tag{158}$$

14.5.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array} \right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{159}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{160}$$

14.5.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^a\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{161}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{162}$$

14.5.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$
$$-B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这些已是已知结果。

14.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1,\ g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2,\ g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$-B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这些已为人所知

14.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^{a+1}\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{163}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{164}$$

14.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 没有这样的项。

14.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这些已为人所知。

14.5.12. $G^aX_2\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1x_2=0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$
$$B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这些都是已知的。

14.5.13. $G^aX_1\otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

14.5.14. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}-B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$
$$-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这些结果已经为人所知。

14.5.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$。没有这样的项。
$G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$。没有这样的项。

14.6. 情形 gx_1。从左侧第一项无法得到 gx_1.从左侧第二项得到

$$\begin{aligned}g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} &= gx_1\Rightarrow\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0\Rightarrow l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}=0$$

由于

$$\alpha\left(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2};0,0,1,0\right)=e_2+(a+b_1+b_2)$$

and

$$\alpha\left(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2};1,0,0,0\right)=b_2$$

我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{b_2}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

14.6.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}\left[(-1)^aB(x_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^d)\right]G^a\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0 \tag{165}$$

$$-B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+B(x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)=0 \tag{166}$$

14.6.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_2 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2)\right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) + B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) = 0 \tag{167}$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, g x_1 x_2) + B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, g x_2) = 0 \tag{168}$$

14.6.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0 \tag{169}$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, g x_1) = 0 \tag{170}$$

14.6.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, 1_H) = 0 \tag{171}$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, g x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, g) = 0 \tag{172}$$

14.6.5. $G^a X_1 \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$
$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, g x_1) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

14.6.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g x_1 x_2) = 0 \tag{173}$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1 x_2) = 0 \tag{174}$$

14.6.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a} B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) = 0 \tag{175}$$

$$-B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1 x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, x_2) = 0 \tag{176}$$

14.6.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(x_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$
$$-B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这正是我们之前得到的结果。

14.6.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{177}$$

$$-B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{178}$$

14.6.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 没有这样的项。

14.6.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$
$$-B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

14.6.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{179}$$

$$-B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{180}$$

14.6.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

14.6.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

14.6.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。 不存在这样的项。

14.6.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

14.7. 情形 gx_{2° 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2+1} &\equiv gx_2\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 0 \text{ so that } l_1=0=u_1\\ l_2+u_2 &= 0 \text{ so that } l_2=0=u_2 \text{ and}\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

and

$$\alpha\left(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};0,0,0,0\right)=\left(a+b_1+b_2\right)\left(n_1+n_2\right)$$
$$\alpha=\alpha\left(x_2,0,0,0,0\right)=a+b_1+b_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2} &= gx_2\Rightarrow\\ u_1 &= l_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \text{ so that,}\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+b_2$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{(a+b_1+b_2)}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ &+\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)}\\ &B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{(e_2-u_2)}\\ &= \sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{(a+b_1+b_2)}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\ &+\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{(a+b_1+b_2)}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\ &+\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}. \end{aligned}$$

14.7.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c}(-1)^aB(g\otimes 1_H;G^a,g^d)+(-1)^aB(x_2\otimes\ 1_H;G^a,g^dx_2)+\\ +B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+B(x_2\otimes\ 1_H;X_2,g)=0 \tag{181}$$

$$-B(g\otimes 1_H;G,1_H)-B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_2\otimes\ 1_H;GX_2,1_H)=0 \tag{182}$$

14.7.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_2)\right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, x_2) = 0 \tag{183}$$

$$-B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \tag{184}$$

14.7.3. $G^a \otimes g^d x_1$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c}(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + (-1)^a B(x_2\otimes\ 1_H; G^a, g^d x_1 x_2)\\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_1)\end{array}\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, x_1) = 0 \tag{185}$$

$$-B(g\otimes 1_H; G, gx_1) - B(x_2\otimes\ 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_2, gx_1) = 0 \tag{186}$$

14.7.4. $G^a X_2 \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, x_2) = 0 \tag{187}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \tag{188}$$

14.7.5. $G^a X_1 \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c}(-1)^{(a+1)} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1, g^d x_2)\\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d)\end{array}\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(x_2\otimes\ 1_H; X_1, x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

$$+B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

14.7.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{189}$$

$$-B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{190}$$

14.7.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0 \tag{191}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0 \tag{192}$$

14.7.8. $G^aX_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0 \tag{193}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0 \tag{194}$$

14.7.9. $G^aX_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) + (-1)^{a+1} B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes\ 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{195}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{196}$$

14.7.10. $G^aX_1 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + (-1)^{a+1} B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) \\ +B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array}\right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) - B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{197}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{198}$$

14.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a} B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^{a} B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

and we get

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0 \tag{199}$$

$$-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0 \tag{200}$$

14.7.12. $G^aX_2 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

这些结果已为人所知。

14.7.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{201}$$

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{202}$$

14.7.14. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}(-1)^a\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0$$
$$-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0$$

这些结果已为人所知。

14.7.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^a\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)+(-1)^a\,B(x_2\otimes\ 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_1X_2\otimes g^dx_1=0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;X_1X_2,x_1x_2)=0 \tag{203}$$

$$-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)=0 \tag{204}$$

14.7.16. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^a\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2=0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

这些结果已为人所知。

$$-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

14.8. 情形 gx_1x_2**.** 对于第一项，我们得到

$$\begin{aligned}&B^A(g\otimes 1_H)_0\otimes B^H(g\otimes 1_H)_1\otimes B^H(g\otimes 1_H)_2x_2B^A(g\otimes 1_H)_1\\ =\ &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha}\,B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2&\equiv 1\\ u_1+l_1&=1\\ l_2&=u_2=0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 0\\ u_1+l_1&=1\\ l_2&=u_2=0\end{aligned}$$

其中

$$\alpha=(a+b_1+b_2+l_1)(u_1+1)+l_1\,(b_2+1)+e_2u_1$$

因此我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{(a+b_1+b_2+l_1)(u_1+1)+l_1(b_2+1)+e_2u_1}$$
$$B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{e_2}$$

i.e.

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{(a+b_1+b_2+l_1)(u_1+1)+l_1(b_2+1)+e_2u_1}$$

$$
\begin{aligned}
& B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{e_2}\\
= & \sum^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}
$$

对于第二项，我们有

$$
\begin{aligned}
& B^A(x_2\otimes\ 1_H)_0\otimes B^H(x_2\otimes\ 1_H)_1\otimes B^H(x_2\otimes\ 1_H)_2B^A(x_2\otimes\ 1_H)_1\\
= & \sum^1_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum^{b_1}_{l_1=0}\sum^{b_2}_{l_2=0}\sum^{e_1}_{u_1=0}\sum^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\beta}B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)}\otimes g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}
\end{aligned}
$$

其中 $\beta=(l_2+b_2)\ l_1+(u_2+e_2)\ u_1+(a+b_1+b_2+l_1+l_2)\ (u_1+u_2)\ +l_1u_2$

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}
$$

使得

$$a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

$$
\sum^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}\sum^{b_1}_{l_1=0}\sum^{b_2}_{l_2=0}\sum^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}\sum^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}
(-1)^{(l_2+b_2)l_1+(u_2+e_2)u_1+(a+b_1+b_2+l_1+l_2)(u_1+u_2)+l_1u_2}
$$

$$
\begin{aligned}
& B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{(e_1-u_1)}x_2^{(e_2-u_2)} =\\
& \sum^1_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_1d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+(a+b_1)}B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+1}B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
& +\sum^1_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+
\end{aligned}
$$

由此我们得到

$$
\begin{aligned}
& \sum^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
& +\sum^1_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_1d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{+e_2+(a+b_1)}B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
& \sum^1_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+1}B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
& \sum^1_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_2\otimes\ 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+
\end{aligned}
$$

14.8.1. $G^a \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + (-1)^{(a+1)} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d) + \\ B(x_2\otimes\ 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + \\ (-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) \end{array} \right] G^a \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, g x_1) - B(g\otimes 1_H; X_1, g) + \\ B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, g x_1) + \\ -B(x_2\otimes\ 1_H; X_1, g x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_1 X_2, g) \end{array} = 0 \tag{205}$$

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, x_1) + B(g\otimes 1_H; G X_1, 1_H) + \\ B(x_2\otimes\ 1_H; G, x_1 x_2) - B(x_2\otimes\ 1_H; G X_2, x_1) + \\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1, x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1 X_2, 1_H) \end{array} = 0 \tag{206}$$

14.8.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^{(a+1)} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + \\ +(-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_2 +$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) - B(g\otimes 1_H; X_1, x_2) + \\ -B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_1 X_2, x_2) \end{array} = 0 \tag{207}$$

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; G, g x_1 x_2) + B(g\otimes 1_H; G X_1, g x_2) + \\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G X_2, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1 X_2, g x_2) \end{array} = 0 \tag{208}$$

14.8.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^{(a+1)} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + \\ B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right]$$
$$G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, x_1) - B(x_2\otimes\ 1_H; X_1, x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; X_1 X_2, x_1) = 0 \tag{209}$$

$$B(g\otimes 1_H; G X_1, g x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1 X_2, g x_1) = 0 \tag{210}$$

14.8.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^{e_2} B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + (-1)^{(a+1)} B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) + \\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_2, x_1) - B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, 1_H) + \\ +B(x_2\otimes\ 1_H; X_2, x_1 x_2) - B(x_2\otimes\ 1_H; X_1 X_2, x_2) \end{array} = 0 \tag{211}$$

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G X_2, g x_1) + B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, g) + \\ +B(x_2\otimes\ 1_H; G X_2, g x_1 x_2) + B(x_2\otimes\ 1_H; G X_1 X_2, g x_2) \end{array} = 0 \tag{212}$$

14.8.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + \\ +(-1)^{a+1} B(x_2\otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

从而得到

14.8.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, g x_1 x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{213}$$

$$B(g\otimes 1_H; G X_1, x_1 x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{214}$$

14.8.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, g x_1 x_2) - B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_2) = 0$$
$$-B(g\otimes 1_H; G X_2, x_1 x_2) + B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_2) = 0$$

这些结果已为人所知

14.8.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(x_2 \otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, g x_1 x_2) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$
$$-B(g\otimes 1_H; G X_1, x_1 x_2) - B(x_2 \otimes\ 1_H; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

这些结果已为人所知。

14.8.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(x_2 \otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_1) - B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{215}$$

$$B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{216}$$

$G^a X_1 \otimes g^d x_1$。不存在这样的项。

14.8.10. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, g x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$
$$B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

这些已为人所知。

14.8.11. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{(a+1)}\, B(g\otimes 1_H; G^a X_1 X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

因此我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$
$$B(g\otimes 1_H; G X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

已知的

14.8.12. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$. 不存在这样的项。

14.8.13. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d \\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

$$-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这些已经是已知的。

14.8.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1$. 没有这样的项。

14.8.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2$. 没有这样的项。

利用上述从 (150) 到 (216) 得到的所有等式，我们得到$B\left(x_2\otimes 1_H\right)$ 的以下形式。

14.9. **元素** $B\left(x_2\otimes 1_H\right)$ **的最终形式**。

$$\begin{aligned}
(217)\qquad B\left(x_2\otimes 1_H\right) \;=\;& B\left(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H\right) 1_A\otimes 1_H \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2\right) 1_A\otimes x_1x_2 \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) 1_A\otimes gx_1 + \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2\right) 1_A\otimes gx_2 + + \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; G, g\right) G\otimes g \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; G, x_1\right) G\otimes x_1 + \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; G, x_2\right) G\otimes x_2 + \\
&+B\left(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2\right) G\otimes gx_1x_2 + \\
&-B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1)X_1\otimes g + \\
&+B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)X_1\otimes x_2 + \\
&+\left[-B(g\otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] X_2\otimes g + \\
&+\left[-B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] X_2\otimes x_1 \\
&-B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2)X_2\otimes x_2 + \\
&-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g)X_2\otimes gx_1x_2 + \\
&+\left[B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] X_1X_2\otimes 1_H + \\
&-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g)X_1X_2\otimes gx_2 + \\
&+B(x_2\otimes 1_H; G, x_1)GX_1\otimes 1_H + \\
&-B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2 + \\
&+\left[B(g\otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2\otimes\ 1_H; G, x_2\right] GX_2\otimes 1_H + \\
&+B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)GX_2\otimes x_1x_2 + \\
&+\left[B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] GX_2\otimes gx_1 + \\
&+B(g\otimes 1_H; G, gx_2)GX_2\otimes gx_2 + \\
&+\left[B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] GX_1X_2\otimes g + \\
&-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)GX_1X_2\otimes x_2
\end{aligned}$$

15. $B(gx_1 \otimes 1)$

我们将卡西米尔公式 (11) 写成 $B(gx_1 \otimes 1_H)$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(gx_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}\\
&B(g^{w_1}x_1^{w_1}\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B\left(gx_1\otimes 1_H\right)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B\left(gx_1\otimes 1_H\right)\otimes 1_H.
\end{aligned}$$

由于 $B(1_H\otimes 1_H)=1_A\otimes 1_H$，我们得到

$$\begin{aligned}
&1_A\otimes 1_H\otimes gx_1+\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B\left(gx_1\otimes 1_H\right)\otimes 1_H.
\end{aligned}$$

15.1. 情形 1_H。

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=1_H$$

因此

$$\begin{aligned}
u_1+l_1 &= 0\\
u_2+l_2 &= 0\\
d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
u_1 &= l_1=0\\
u_2 &= l_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
\alpha\left(g;0,0,0,0\right)&=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
=\;&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}
\end{aligned}$$

这意味着

$$B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0 \tag{218}$$

15.2. 情形 g**.**

$$g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=g$$

这意味着

$$\begin{aligned} u_1+l_1 &= 0\\ u_2+l_2 &= 0\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2 &= l_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这由情形 1_H 得出。

15.3. 情形 x_1。

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=x_1$$

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2} &= x_1\Rightarrow\\ l_2 &= u_2=0\\ u_1+l_1 &= 1\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这由情形 1_H 得出。

15.4. 情形 x_2。

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=x_2$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2+l_2 &= 1\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2+l_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这可由情形 1_H 得出。

15.5. 情形 x_1x_2。

$$\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=x_1x_2$$

$$\begin{aligned} u_1+l_1 &= 1\\ u_2+l_2 &= 1\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1+l_1 &= 1\\ u_2+l_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(g;0,0,1,1)}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(g;0,1,1,0)}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(g;1,1,0,0)}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(g;1,0,0,1)}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}$$

因为 $\alpha(g;0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1+e_2$, $\alpha(g;0,\ 1,\ 1,\ 0) = e_2+a+b_1+b_2$,
$\alpha(g;1,\ 1,\ 0,\ 0) = 1+b_2$, $\alpha(g;1,\ 0,\ 0,\ 1) = \alpha(g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2};1,\ 0,\ 0,\ 1) = a+b_1+1$

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}$$

15.5.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)+\\ +B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)\end{array}\right] G^a\otimes g^d = 0$$

于是得到

$$\begin{array}{c} B(gx_1\otimes 1_H;, gx_1x_2) - B(gx_1\otimes 1_H; X_2, gx_1)+\\ +B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1, gx_2)\end{array} = 0 \tag{219}$$

$$\begin{array}{c} B(gx_1\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, x_1)+\\ +B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, x_2)\end{array} = 0 \tag{220}$$

15.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^a\otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0 \tag{221}$$

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0 \tag{222}$$

15.5.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^a\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0 \tag{223}$$

$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0 \tag{224}$$

15.5.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

15.5.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

15.5.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^a \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{225}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{226}$$

15.5.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。我们没有这样的等式。

15.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这些结果已为人所知。

继续这样下去，我们得不到任何新信息。

15.5.9. 情形 gx_1。

$$\begin{aligned}
& 1_A \otimes 1_H \otimes gx_1 \\
& + \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad & B\left(gx_1 \otimes 1_H\right) \otimes 1_H .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
d + e_1 + e_2 + u_1 + u_2 + a + b_1 + b_2 + l_1 + l_2 + 1 &\equiv 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1
\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}
& 1_A \otimes 1_H + \\
& + \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 \equiv 1}}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{\substack{u_1=0 \\ l_1+u_1=1}}^{e_1} (-1)^{\alpha(g;l_1,0,u_1,0)} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2} = 0
\end{aligned}$$

并且，由于 $\alpha(g;0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + a + b_1 + b_2 + 1$, $\alpha(g;1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2$，我们得到

$$\begin{aligned}
& 1_A \otimes 1_H \\
& + \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_2 \equiv 0}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1 x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_2^{e_2} + \\
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_2+d+e_1+e_2 \equiv 0}}^{1} (-1)^{b_2} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} = 0
\end{aligned}$$

15.5.10. $G^a \otimes g^d$。

$$\begin{aligned}
& 1_A \otimes 1_H + \\
& + \sum\nolimits_{\substack{a,d=0 \\ a+d \equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d) \right] G^a \otimes g^d = 0
\end{aligned}$$

并得到

$$1 + -B(gx_1 \otimes 1_H; 1_H, x_1) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) = 0 \tag{227}$$

$$[B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) + B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g)] = 0 \tag{228}$$

15.5.11. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0 \\ a+d \equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) \right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) = 0 \tag{229}$$

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = 0 \tag{230}$$

15.5.12. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0 \tag{231}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0 \tag{232}$$

15.5.13. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) - B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, g) = 0 \tag{233}$$

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1 X_2, 1_H) = 0 \tag{234}$$

15.5.14. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0$$
$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0$$

这些已是已知结果。

15.5.15. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1 x_2) = 0 \tag{235}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1 x_2) = 0 \tag{236}$$

15.5.16. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_2) = 0 \tag{237}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1 x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1 X_2, gx_2) = 0 \tag{238}$$

15.5.17. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1 x_2) = 0$$
$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1 x_2) = 0$$

这些结果已为人所知。

15.5.18. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{239}$$

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0 \tag{240}$$

15.5.19. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 我们没有这样的项。

15.5.20. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$
$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

这些已经是已知的。

15.5.21. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{241}$$

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{242}$$

继续这样做，我们不会获得更多信息

15.6. **情形** gx_2。 由于 $\alpha(g;0,0,0,1) \equiv a+b_1+b_2+1, \alpha(g;0,1,0,0) \equiv 0$ 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+e_1+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+b_1+b_2+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}$$
$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

15.6.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_2) + B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)\right] G^a\otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; X_2, 1_H) = 0 \tag{243}$$

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, gx_2) + B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, g) = 0 \tag{244}$$

$G^a \otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2 = 0$$

并得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0 \tag{245}$$

$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0 \tag{246}$$

15.6.2. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0 \tag{247}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1 x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0 \tag{248}$$

15.6.3. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0$$
$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0$$

这些都是已知的。

15.6.4. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, g) = 0 \tag{249}$$

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1 X_2, 1_H) = 0 \tag{250}$$

15.6.5. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{251}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1 x_2) = 0 \tag{252}$$

15.6.6. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。 我们没有这样的项。

15.6.7. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_2) = 0 \tag{253}$$

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1 X_2, gx_2) = 0 \tag{254}$$

15.6.8. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0$$
$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1 x_2) = 0$$

这是我们已经得到的。

15.6.9. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

因此我们得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{255}$$

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0 \tag{256}$$

15.6.10. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

因此我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0 \tag{257}$$

$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0 \tag{258}$$

这些都是已知的。

15.6.11. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 我们没有任何这样的项

15.6.12. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$
$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

照此继续下去，我们得不到任何新结果

15.7. **情形** gx_1x_2。

$$\begin{aligned}
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &\equiv 1\\
l_2+u_2 &\equiv 1
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &\equiv 1\\
l_2+u_2 &\equiv 1
\end{aligned}$$

因为，根据（218）

$$B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

我们没有得到任何新结果。

利用上面从 (218) 到 (258) 得到的所有等式，我们得到$B(gx_1\otimes 1_H)$ 的以下形式。

15.8. **元素** $B\left(gx_1\otimes 1_H\right)$ **的最终形式**。

$$\begin{aligned}
B\left(gx_1\otimes 1_H\right) &= B(gx_1\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes g+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,x_1)1_A\otimes x_1\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,x_2)1_A\otimes x_2\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,1_H)G\otimes 1_H+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)G\otimes gx_1+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_2)G\otimes gx_2+\\
&+\left[-1+B(gx_1\otimes 1_H;1_H,x_1)\right]X_1\otimes 1_H+\\
&-B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,x_2)X_2\otimes 1_H+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\
&-B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)GX_1\otimes g+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\
&-B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_2)GX_2\otimes g+\\
&-B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\
&+B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H
\end{aligned}$$

16. $B\left(gx_2\otimes 1_H\right)$

我们将卡西米尔公式 (11) 写为 $B\left(gx_2\otimes 1_H\right)$.
对于 $h=g^mx_1^{n_1}x_2^{n_2}$和 $h'=g^\mu x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}$，我们最终得到

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B\left(gx_2\otimes 1_H\right)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

由于 $B(1_H\otimes 1_H)=1_A\otimes 1_H$，我们得到

$$\begin{aligned}
&1_A\otimes 1_H\otimes gx_2\\
+\quad&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B\left(gx_2\otimes 1_H\right)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

16.1. 情形 1_H。 左侧第一项没有这样的项。对于第二项，我们得到

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=1_H$$

因此

$$\begin{aligned} u_1+l_1 &= 0\\ u_2+l_2 &= 0\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2 &= l_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\, B(gx_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ =\ &\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0} B(gx_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

这意味着

$$B(gx_2\otimes\ 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0 \tag{259}$$

16.2. 情形 $g_\circ$

$$g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=g$$

这意味着

$$\begin{aligned} u_1+l_1 &= 0\\ u_2+l_2 &= 0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+l_1+l_2+1 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2 &= l_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这由情形 1_H 得出。

16.3. 情形 $x_{1\circ}$

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=x_1$$

$$\begin{aligned} g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{l_2+u_2} &= x_1\Rightarrow\\ l_2 &= u_2=0\\ u_1+l_1 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2+l_1+l_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这由情形 1_H 推得。

16.4. 情形 $x_{2\circ}$

$$g^{d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1}x_1^{u_1+l_1}x_2^{u_2+l_2}=x_2$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2+l_2 &= 1\\ d+e_1+e_2+u_1+u_2+a+b_1+b_2+l_1+l_2+1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= l_1=0\\ u_2+l_2 &= 1\\ d+e_1+e_2+a+b_1+b_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

这由情形 1_H 得出。

16.5. 情形 x_1x_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& 0
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1
\end{aligned}$$

因此，由于 $\alpha(g;0,\ 0,\ 1,\ 1)=1+e_2$，$\alpha(g;0,\ 1,\ 1,\ 0)=e_2+a+b_1+b_2$, $\alpha(g;1,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+1$ 并且

$\alpha(g;1,1,0,0)=1+b_2$

16.5.1.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\
&+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{e_2+a+b_1+1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\
&+\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{a}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
&+\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
=\;& 0
\end{aligned}$$

$(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ $G^a\otimes g^d$

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c}B(gx_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)+\\ +(-1)^{a}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

于是得到

$$\begin{array}{c}B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes 1_H;X_2,gx_1)+\\ +B(gx_2\otimes 1_H;X_1,gx_2)+B(gx_2\otimes 1_H;X_1X_2,g)\end{array}=0 \tag{260}$$

and

$$\begin{array}{c}B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;GX_2,x_1)+\\ -B(gx_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)\end{array}=0 \tag{261}$$

16.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0 \tag{262}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0 \tag{263}$$

16.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

and we get

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_1) = 0 \tag{264}$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, gx_1) = 0 \tag{265}$$

16.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

由此我们得到与情形 $G^a \otimes g^d x_2$. 中相同的等式

16.5.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

由此我们得到与情形 $G^a \otimes g^d x_1$. 中相同的等式

16.5.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, gx_1 x_2) = 0 \tag{266}$$

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{267}$$

16.5.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。 不存在这样的项。

16.5.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到与情形 $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 中相同的方程

16.5.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到与情形 $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 中相同的方程

16.5.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$. 没有这样的项。

16.5.11. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到与情形 $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 中相同的方程

16.5.12. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$. 没有这样的项。

16.5.13. $G^a X_1 \otimes g^d x_1 x_2$。

16.5.14. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d x_2$. 没有这样的项。

16.5.15. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d x_1$. 没有类似这样的项。

16.5.16. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d x_1 x_2$. 没有这样的项。

16.6. **情形** gx_1。

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\end{aligned}$$

并且，由于 $\alpha(g;0,0,1,0)=e_2+(a+b_1+b_2)+1$ 和 $\alpha(g;1,0,0,0)=b_2$, 我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)+1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}$$
$$+\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{b_2}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

$G^a\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}B(gx_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1)+B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^d)\right]G^a\otimes g^d=0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(gx_2\otimes 1_H;X_1,1_H)=0 \tag{268}$$

$$B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_1)+B(gx_2\otimes 1_H;GX_1,g)=0 \tag{269}$$

16.6.1. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[(-1)^aB(gx_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;X_1,gx_2)=0 \tag{270}$$

$$-B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)=0 \tag{271}$$

16.6.2. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1)G^a\otimes g^dx_1=0$$

于是得到

$$B(gx_2\otimes 1_H;X_1,gx_1)=0 \tag{272}$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H;GX_1,x_1)=0 \tag{273}$$

16.6.3. $G^aX_2\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[(-1)^aB(gx_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)-B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)\right]G^aX_2\otimes g^d=0$$

并得到

$$B(gx_2\otimes 1_H;X_2,gx_1)-B(gx_2\otimes 1_H;X_1X_2,g)=0 \tag{274}$$

$$-B(gx_2\otimes 1_H;GX_2,x_1)-B(gx_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0 \tag{275}$$

16.6.4. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) G^aX_1 \otimes g^d$$

于是我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0$$

这是我们已经知道的。

16.6.5. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) G^a \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0 \tag{276}$$

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0 \tag{277}$$

16.6.6. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0 \tag{278}$$

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0 \tag{279}$$

16.6.7. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

并且我们得到与情形 $G^a \otimes g^dx_1x_2$. 中相同的方程

16.6.8. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{280}$$

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0 \tag{281}$$

16.6.9. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 我们没有任何类似这样的项。

16.6.10. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到与情形 $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 中相同的方程

16.6.11. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到与小节 x_1x_2. 的情形 $G^a \otimes g^dx_1x_2$ 中相同的方程

16.6.12. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 没有这样的项。

16.6.13. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

并且我们得到与小节 x_1x_2. 中情形 $G^a\otimes g^dx_1x_2$ 相同的方程

16.6.14. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$. 我们没有这样的项。

16.6.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$. 我们没有这样的项。

16.7. **情形** gx_2. 我们有

$$\begin{aligned} & 1_A\otimes 1_H\otimes gx_2 \\ + \quad & \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = \quad & 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2+u_2 &= 1 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(g;0,0,0,1) = (a+b_1+b_2)+1$ 以及 $\alpha(g;0,1,0,0) = 0$，我们得到

$$\begin{aligned} & 1_A\otimes 1_H + \\ & +\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1} B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} + \\ & +\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} = 0 \end{aligned}$$

16.7.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\begin{aligned} & 1_A\otimes 1_H + \\ & \sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_2) + B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)\right] G^a\otimes g^d = 0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$1 - B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(gx_2\otimes 1_H; X_2, 1_H) = 0 \tag{282}$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_2) + B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, g) = 0 \tag{283}$$

16.7.2. $G^a\otimes g^dx_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0 \tag{284}$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0 \tag{285}$$

16.7.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0 \tag{286}$$

$$B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1 x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0 \tag{287}$$

16.7.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

16.7.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, g) = 0 \tag{288}$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, 1_H) = 0. \tag{289}$$

16.7.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{290}$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1 x_2) = 0 \tag{291}$$

16.7.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。 我们没有这样的项。

16.7.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_2) = 0 \tag{292}$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1 X_2, gx_2) = 0 \tag{293}$$

16.7.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

16.7.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

and we get

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{294}$$

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0 \tag{295}$$

16.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1} = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这是我们已经得到的结果。

16.7.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

16.7.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

从而得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这是我们在情形 gx_1.中已经知道的结果

16.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 不存在这样的项。

16.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这是我们已经得到的

16.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 没有这样的项。

16.8. **情形** gx_1x_2**.**

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=0$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ d+e_1+e_2+a+b_1+b_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

由 (259) 可知，只要 $d+e_1+e_2+a+b_1+b_2\equiv 0$，就有 $B(gx_2\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$

利用上面从 (259) 到 (295) 得到的所有等式，我们可以得到 $B\left(gx_2\otimes 1_H\right)$ 的如下形式。

16.9. **元素** $B\left(gx_2\otimes 1_H\right)$ **的最终形式**。

$$\begin{aligned} B\left(gx_2\otimes 1_H\right) &= B(gx_2\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes g+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,x_1)1_A\otimes x_1\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,x_2)1_A\otimes x_2\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,1_H)G\otimes 1_H+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_1)G\otimes gx_1+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_2)G\otimes gx_2+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,x_1)X_1\otimes 1_H+\\ &-B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\ &[-1+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,x_2)]\,X_2\otimes 1_H+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\ &-B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_1)GX_1\otimes g+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\ &-B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_2)GX_2\otimes g+\\ &-B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\ &+B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H \end{aligned}$$

17. $B(x_1x_2\otimes 1_H)$

我们将卡西米尔公式 (11) 写成 $B(x_1x_2\otimes 1_H)$。

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(1_H\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$
$$-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$

$$
\begin{aligned}
& B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \quad & B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

17.1. 情形 1_H。

$$
\begin{aligned}
(296)\qquad & +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \quad & B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &\equiv 0\\
l_2+u_2 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$
(297)\qquad B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1
$$

17.2. 情形 g。

$$
\begin{aligned}
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &\equiv 0\\
l_2+u_2 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

并且根据（18），等式成立。

17.3. 情形 x_1。

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

对于第一项，我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ l_1 &= u_1=0 \\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

由 (259)，我们有

$$B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

因此，第一项为零。对于第二项，我们有

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

并且得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

根据 (18)，等式成立。

17.4. 情形 x_2。

$$\begin{aligned} & -\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1} \\ & +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

对于第一项，我们有

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ l_1 &= u_1=0 \\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

由 (218)，可知，只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$，使得第一项为零，就有 $B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$。现在考虑第二项。

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1 &= u_1=0 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

根据 (18)，等式成立。

17.5. 情形 x_1x_2。

$$\begin{aligned} &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(1_H\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1} \\ &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \\ &-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1} \\ &+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = \quad & B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H \end{aligned}$$

第一项给出 $1_A\otimes 1_H\otimes x_1x_2$.我们来考虑第二项。

$$\begin{aligned} &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1+1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1 &= u_1=0 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;0,l_2,0,u_2)}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}. \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}-B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

我们来考虑第三项。

$$-\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2+1 &= 1\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\end{aligned}$$

$$-\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,0,u_1,0)}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2$和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1$，我们得到

$$-\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}(-1)^{e_2}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$-\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

考虑第四项。

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}\sum\nolimits^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}$$

并且，由于 $\alpha(1_H;0,0,1,1)=1+e_2$, $\alpha(1_H;0,1,1,0)=e_2+(a+b_1+b_2+1)$ $\alpha(1_H;1,0,0,1)=a+b_1$且 $\alpha(1_H;1,1,0,0)=1+b_2$,我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}(-1)^{e_2+a+b_1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

综上，我们得到

$$1_A\otimes 1_H+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}} -B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1} B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$
$$-\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$-\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+1} B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

17.5.1. $G^a\otimes g^d$。

$$1_A\otimes 1_H+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_2)+(-1)^a B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)+(-1)^a B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^d)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)+(-1)^a B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)+\\ +(-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)\end{array}\right] G^a\otimes g^d=0$$

从而得到

$$\begin{array}{c} 1-B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2)+B(gx_2\otimes 1_H; X_2, 1_H)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_1)+B(gx_1\otimes 1_H; X_1, 1_H)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)\end{array}=0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_2)-B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, g)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H; G, gx_1)-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, g)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g)\end{array}=0.$$

通过使用元素的形式 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$，我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2)+B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_1)-1+B(gx_1\otimes 1_H; 1_H, x_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)\end{array}=0$$

i.e.

$$\begin{array}{c} -1+B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)\end{array}=0 \tag{298}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_2)+B(gx_2\otimes 1_H;G,gx_2)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)+B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g) \end{array} =0$$

i.e.

$$\begin{array}{c} +B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g) \end{array} =0 \tag{299}$$

17.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} (-1)^a\,B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)+B(gx_1\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+\\ +(-1)^a\,B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+(-1)^{a+1}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2 \end{array}\right]$$

$$G^a\otimes g^dx_2=0$$

并得到

$$\begin{array}{c} B(gx_2\otimes 1_H;X_2,gx_2)+B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\\ +B(gx_1\otimes 1_H;X_1,gx_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2) \end{array} =0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H;GX_2,x_2)+B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H;GX_1,x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2) \end{array} =0$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2) \end{array} =0$$

i.e.

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2)=0 \tag{300}$$

and

$$\begin{array}{c} +B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2) \end{array} =0$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)=0 \tag{301}$$

17.5.3. $G^a\otimes g^dx_1$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)+\\ +(-1)^a\,B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1)+(-1)^{a+1}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1) \end{array}\right]$$

$$G^a\otimes g^dx_1=0$$

并得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes 1_H;X_2,gx_1)+\\ +B(gx_1\otimes 1_H;X_1,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)-B(gx_2\otimes 1_H;GX_2,x_1)+\\ -B(gx_1\otimes 1_H;GX_1,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=0. \end{array}$$

通过使用元素的形式 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$，我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \end{array}$$

i.e.

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{302}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0. \end{array}$$

i.e.

$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0. \tag{303}$$

17.5.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) + \\ +(-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + \\ +(-1)^{a+1} B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) \end{array} \right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + \\ +B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + \\ -B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \\ +B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \end{array} = 0$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

这就是 (300)，并且

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ -B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0$$

这是 (301)。

17.5.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^{a+1} B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + \\ -B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + \\ (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array} \right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

并得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; X_1, gx_2) - B(gx_2\otimes 1_H; X_1X_2, g) + \\ -B(gx_1\otimes 1_H; X_1, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + \\ -B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \end{array} = 0$$

i.e.

$$+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

即 (302) 和

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)GX_1 + B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0$$

即 (303)。

17.5.6. $G^a\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^a B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^a B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right]$$
$$G^a\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$\begin{array}{c} B(gx_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \tag{304}$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0. \tag{305}$$

17.5.7. $G^aX_2\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^a B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$
$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

由形式 关于元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$，我们知道上述等式中的每个加项都为零。

17.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + \\ +(-1)^a\, B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

17.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这是我们已经得到的结果。

17.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) - B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

根据形式　　关于元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$，我们知道上述等式中的每个加项都为零。

17.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)+ \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right]$$
$$G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

从而得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1)+ \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1)+ \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0.$$

利用元素的形式 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2 \otimes 1_H)$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

17.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

从而得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

By 由元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式可知，这些等式已为人所知 .

17.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$$

于是得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

由元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式可知，这些等式已为人所知。

17.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

By 元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式，我们知道这些等式已为人所知 .

17.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这是我们已经得到的。

17.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

17.6. 情形 gx_1。

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(1_H \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1} \\
+ & \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \\
& -\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1} \\
& +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\
= & \ B^A(x_1x_2 \otimes 1_H) \otimes B^H(x_1x_2 \otimes 1_H) \otimes 1_H
\end{aligned}$$

我们只需考虑第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \\
l_1+u_1+1 &= 1 \\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0
\end{aligned}$$

并且，由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0) = a + b_1 + b_2$, 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

考虑第四项

$$\begin{aligned}&+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}.\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2 = 0\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}\\ &B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a+b_1+b_2)$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{b_2}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.\end{aligned}$$

综上，我们得到:

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{a+b_1+b_2}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{b_2}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.\end{aligned}$$

17.6.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[\begin{array}{c}(-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^d)+(-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) = 0 \tag{306}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, 1_H) - B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0 \tag{307}$$

17.6.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^a B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1x_2)+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) \end{array} \right]$$
$$G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} = 0 \tag{308}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} = 0. \tag{309}$$

17.6.3. $G^a \otimes g^d x_1$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0 \tag{310}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \tag{311}$$

17.6.4. $G^a X_2 \otimes g^d$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(gx_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1)+ \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d) \end{array} \right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0.$$

通过使用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$[1 - B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_2)] - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0 \tag{312}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0. \tag{313}$$

17.6.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(gx_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1)\right]$$
$$G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0.$$

通过使用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0 \tag{314}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \tag{315}$$

17.6.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1x_2)\right] G^a\otimes g^d x_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{316}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{317}$$

17.6.7. $G^aX_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_2) + (-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_1x_2) + \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_2)\end{array}\right] G^aX_2\otimes g^d x_2$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} -B(gx_2\otimes 1_H; X_2, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2)\end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2)\end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0 \tag{318}$$

and

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0. \tag{319}$$

17.6.8. $G^aX_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_2) + (-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$-B(gx_2\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

通过使用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{320}$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \tag{321}$$

17.6.9. $G^aX_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d x_1)\right] G^aX_2\otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

通过使用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$-B(gx_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{322}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0. \tag{323}$$

17.6.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1)G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0.$$

By 元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式已知，因此我们知道这些等式已经为人所知 .

17.6.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

利用元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

它们分别是 (322) 和 (323)。

17.6.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

and we get

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这正是我们已经得到的结果。

17.6.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_2 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

这些已由元素 $B(gx_2 \otimes 1_H)$ 的形式所知。

17.6.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这正是我们已经得到的结果。

17.6.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

这些已由元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式所知。

17.6.16. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(gx_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这些已由元素 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的形式所知。

17.7. 情形 gx_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
+\quad&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad & B^A(x_1x_2 \otimes 1_H) \otimes B^H(x_1x_2 \otimes 1_H) \otimes 1_H \\
& -\sum\nolimits^1_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2+1}
\end{aligned}
$$

我们只需考虑第三项和第四项。

我们考察第三项。

$$
\begin{aligned}
& -\sum\nolimits^1_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2+1}
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \\
l_1+u_1 &= 0 \\
l_2+u_2+1 &= 1
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) = a+b_1+b_2$，我们得到

$$
\sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 \equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2+1} B(gx_1 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}.
$$

我们考察第四项。

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits^1_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \\
l_1+u_1 &= 0 \\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2+u_2 &= 1.
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 \equiv 0}} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0 \\ l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)} B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2-u_2}.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1) = a+b_1+b_2$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0) = 0$，我们得到

$$
\sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1 \equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2} B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} +
$$

$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

综上所述，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$

$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

17.7.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^d)+(-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)\end{array}\right] G^a\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, g)+B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g)=0 \tag{324}$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H)=0. \tag{325}$$

17.7.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)\right] G^a\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2)=0 \tag{326}$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2)=0. \tag{327}$$

17.7.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)+(-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)\end{array}\right] G^a\otimes g^dx_1$$

于是得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)=0 \tag{328}$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1)=0. \tag{329}$$

17.7.4. $G^aX_2\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)+(-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2)\right] G^aX_2\otimes g^d=0$$

于是得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2)=0$$

and

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, g)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2)=0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2)=0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2)=0$$

它们分别为（326）和（327）。

17.7.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^d) + (-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) \end{array} \right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

由此得到

$$\begin{array}{c} B(gx_1\otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g) \end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} [-1+B(gx_1\otimes 1_H; 1_H, x_1)] - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) + \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \end{array} = 0 \tag{330}$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0. \tag{331}$$

17.7.6. $G^a\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)\right] G^a\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

由此得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{332}$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{333}$$

17.7.7. $G^aX_2\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2) G^aX_2\otimes g^dx_2 = 0$$

并得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0$$

由于元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，这些结果已为人所知。

17.7.8. $G^aX_1\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

并得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

通过使用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0 \tag{334}$$

and

$$-B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0 \tag{335}$$

17.7.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) + (-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

and we get

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

它们分别为 (332) 和 (333)。

17.7.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c}(-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + (-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\end{array}\right] G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

并得到

$$\begin{array}{c}B(gx_1\otimes 1_H; X_1, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1)\end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c}-B(gx_1\otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1)\end{array} = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0 \tag{336}$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0 \tag{337}$$

17.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

and we get

$$-B(gx_1\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$-B(gx_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(gx_1\otimes 1_H; G, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

它们分别是 (334) 和 (335)。

17.7.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(gx_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并得到

$$B(gx_1\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0.$$

由于元素 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 的形式已为人所知。

17.7.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(gx_1 \otimes 1_H;\ G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$

并且我们得到

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这正是我们已经得到的结果。

17.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这些结果已由元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式给出。

17.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^a\, B(x_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right]$$
$$G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

利用元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这是我们已经得到的结果。

17.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(gx_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

由于元素 $B(gx_1 \otimes 1_H)$ 的形式而已知。

17.8. 情形 gx_1x_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
+\quad&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\quad&B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

第一项给出 $1_A\otimes 1_H\otimes x_1x_2.$ 第二项给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1+1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1 &= u_1=1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}$$

由于根据 (259)，当 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0.$ 时，该加项为零 $B(gx_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$ $=0$

第三项也有类似的结论。

考虑第三项

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}\sum\nolimits^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}$$

i.e.

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

考虑到 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\ =\ 1+e_2$, $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\ =\ e_2+(a+b_1+b_2+1)$,$\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\ =a+b_1$和 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\ =1+b_2$, 我们最终得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2+a+b_1}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}(-1)^{a+1}\,B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

17.8.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[\begin{array}{c}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^aB(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)+\\ +(-1)^{a+1}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c}B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,g)\end{array}=0 \tag{338}$$

and

$$\begin{array}{c}B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)\end{array}=0. \tag{339}$$

17.8.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[(-1)^{a+1}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0 \tag{340}$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0. \tag{341}$$

17.8.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^a\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{342}$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0. \tag{343}$$

17.8.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

它们分别是 (340) 和 (341)。

17.8.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

它们分别是 (342) 和 (343)。

17.8.6. $G^a \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^a\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{344}$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0. \tag{345}$$

17.8.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。 我们没有这样的加项。

17.8.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

我们刚刚得到的结果。

17.8.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这正是我们刚刚得到的。

17.8.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 不存在这样的项。

17.8.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这是我们刚刚得到的。

17.8.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

17.8.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

17.8.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 没有这样的项。

17.8.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。 没有这样的项。

17.8.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。利用从（297）到（345）的等式，我们得到 $B(x_1x_2\otimes 1_H)$ 的以下形式。

17.9. **元素 $B(x_1x_2\otimes 1_H)$的最终形式**。

$$\begin{aligned}
B(x_1x_2\otimes 1_H) \quad =(346)\quad & B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H)1_A\otimes 1_H + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)1_A\otimes x_1x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1)1_A\otimes gx_1 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2)1_A\otimes gx_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g)G\otimes g + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_1)G\otimes x_1 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_2)G\otimes x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g)X_1\otimes g + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1)X_1\otimes x_1 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)X_1\otimes x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g)X_2\otimes g + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)X_2\otimes x_1 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2)X_2\otimes x_2 + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2 + \\
& +\left[+1 - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)\right] X_1X_2\otimes 1_H + \\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1
\end{aligned}$$

$+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2、\ gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1、\ 1_H)GX_1\otimes 1_H++B($
$x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1、\ x_1x_2)GX_1\otimes x_1x_2+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1、\ gx_1)GX_1\otimes gx_1+B(x_1x_2\otimes 1_H;$
$GX_1、\ gx_2)GX_1\otimes gx_2++B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、\ 1_H)GX_2\otimes 1_H++B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、\ x_1x_2)$
$GX_2\otimes x_1x_2++B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、\ gx_1)GX_2\otimes gx_1++B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、\ gx_2)$
$GX_2\otimes gx_2++[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、\ gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;$
$GX_1、\ gx_2)]GX_1X_2\otimes g-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1、\ x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1+-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2、$
$x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_2$

18. $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$ 的改写

现在我们使用从（297）到（345）的等式来改写 $B(gx_1\otimes 1_H)$ 和 $B(gx_2\otimes 1_H)$。

$$
\begin{aligned}
(347)B\left(gx_1\otimes 1_H\right) &= [B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)]\,1_A\otimes g+\\
&+[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)]\,1_A\otimes x_1\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)1_A\otimes x_2\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\
&+[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)]\,G\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\
&+[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]\,G\otimes gx_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)G\otimes gx_2+\\
&+[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)]\,X_1\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)X_2\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\
&[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]\,GX_1\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\
&B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(348)B\left(gx_2\otimes 1_H\right) &= [-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)]\,1_A\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)1_A\otimes x_1\\
&+[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)]\,1_A\otimes x_2\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\
&+[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)]\,G\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1+\\
&+[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)]\,G\otimes gx_2+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)X_1\otimes 1_H+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\
&\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]X_2\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\
&+\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]GX_2\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

19. $B(gx_1x_2\otimes 1_H)$

我们将卡西米尔公式（11）写成 $B(gx_1x_2\otimes 1_H)$。

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(gx_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&-\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B^A(gx_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(gx_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

19.1. 情形 1_H。 我们只需考虑最后一个加项。

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
l_1 &= u_1\\
l_2 &= u_2
\end{aligned}
$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(g;0,0,0,0)}\,B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ =\;& B^A(gx_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(gx_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

因此我们得到

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0 \tag{349}$$

19.2. 情形 g。我们只需考虑最后一个加项。

$$\begin{aligned}&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 0\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1 &= u_1\\ l_2 &= u_2\end{aligned}$$

由（349）可知，$B(gx_1x_2\otimes 1_H;\, G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$ 当 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$ 时。因此该等式成立。

19.3. 情形 x_1。我们只需考虑第二项和第四项。我们来考虑第二项

$$\begin{aligned}&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 0\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1 &= u_1\\ l_2 &= u_2\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(gx_1;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

由于根据 150 $B(x_2\otimes 1_H;\, G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$ 只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$，该加项始终为零。下面考虑第四项。

$$\begin{aligned}&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 \end{aligned}$$

根据（349），我们知道 $B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$ 只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$,因此该加项为零。总之，由于 $\alpha(gx_1;0,0,0,0) = a+b_1+b_2$,我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} = 0$$

19.4. 情形 x_2**.** 我们只需考虑第三项和第四项。下面考察第三项。

$$\begin{aligned} &-\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1} \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2+u_2+1 &= 1 \end{aligned}$$

因此我们推得 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$. 由于根据 (82) $B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$无论何时 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$, 这一项总是为零。

下面考虑最后一项。

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 0 \\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 \end{aligned}$$

由（349）可知，当 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$, 时， $B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$，因此该加项为零。

19.5. 情形 x_1x_2**.** 我们来考虑第一项

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ l_1+u_1+1 &= 1\\ l_2+u_2+1 &= 1\end{aligned}$$

由此可推得

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 0\end{aligned}$$

并且，由于 $\alpha(gx_1x_2;0,0,0,0)=0$, 我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

考虑第二项。

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ l_1+u_1+1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

因此我们推得

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

于是得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;0,l_2,0,u_2)}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}.$$

由于 $\alpha(gx_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)=0$ 且 $\alpha(gx_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2+1$ 我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

我们来考虑第三项。

$$-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$

$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2+1 &= 1 \end{aligned}$$

因此我们推得

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,0,u_1,0)+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}.$$

由于 $\alpha(gx_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2+1$ 和 $\alpha(gx_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1,$ 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{a}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

考虑第四项。

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

因此我们推导出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

由于，$\alpha(g;0,0,1,1)=1+e_2,\ \alpha(g;0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2,\ \alpha(g;1,0,0,1)=a+b_1+1$ 和$\alpha(g;1,1,0,0)=1+b_2,$我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{a+b_1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{e_2}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{a}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+a+b_1+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

综上，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+a+b_1+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} +$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

19.5.1. $G^a\otimes g^d$.

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a, g^d)+B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_2)+(-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)+\\ +B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)+(-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^d)\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)\\ +(-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)\end{array}\right] G^a\otimes g^d=0$$

我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, g)+B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2)+B(x_2\otimes 1_H; X_2, g)+\\ +B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1)+B(x_1\otimes 1_H; X_1, g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)+\\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, g)\end{array} =0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(x_2\otimes 1_H; G, x_2)-B(x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H)+\\ +B(x_1\otimes 1_H; G, x_1)-B(x_1\otimes 1_H; GX_1, 1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)\end{array} =0$$

考虑元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$，我们得到

$$B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)+B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)+[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)]+\\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)+[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)-B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)]+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)+\\ =0-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1X_2, g)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; 1_A, g))+B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)+\\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, g)\end{array} =0 \tag{350}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(x_2\otimes 1_H; G, x_2)-[B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(x_2\otimes 1_H; G, x_2]+\\ +B(x_1\otimes 1_H; G, x_1)-[B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(x_1\otimes 1_H; G, x_1)]+B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)\end{array} =0$$

i.e.

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)\end{array} =0 \tag{351}$$

19.5.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_2) + (-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + \\ +(-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_2\otimes 1_H; X_2, x_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_2) + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \end{array} = 0.$$

通过考 虑元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$，我们得 t

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + [-B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \end{array} = 0$$

i.e.

$$-B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0 \tag{352}$$

and

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right) - B(g\otimes 1_H; G, gx_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - [-B(g\otimes 1_H; GX_2, g) - B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)] \\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, g) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0. \tag{353}$$

19.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + \\ (-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1) + \\ +(-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

and we get

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \\ +B(x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ -B(x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \end{array} = 0.$$

通过考 g 考虑元素的形式 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$，我们得到 t

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \\ +[-B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] - B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \end{array} = 0$$

i.e

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{354}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ -[B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)] + B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + \\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H;GX_1,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0. \tag{355}$$

19.5.4. $G^aX_2\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^d)+B(x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)+(-1)^a\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\end{array}\right]G^aX_2\otimes g^d=0$$

and we get

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H)+\\ B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)\end{array}=0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,G)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)\end{array}=0.$$

考虑到 元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$ 的形式，我们得到 et

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+\\ -B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+[-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)]+\\ B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)\end{array}=0$$

i.e.

$$-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0 \tag{356}$$

and

$$\begin{array}{c} -B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-[B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)\end{array}=0.$$

i.e.

$$-B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0. \tag{357}$$

19.5.5. $G^aX_1\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G^aX_1,g^d)+B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_2)+\\ (-1)^{a+1}\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^d)+B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)\end{array}\right]G^aX_1\otimes g^d=0$$

and we get

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\\ -B(x_2\otimes 1_H;X_1X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;X_1,x_1)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)\end{array}=0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;GX_1,g)+B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+\\ +B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)+B(x_1\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)\end{array}=0.$$

考虑元素的形式 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$，我们得到

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\\ -\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]-B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)\end{array}=0$$

i.e.

$$-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)=0 \tag{358}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;GX_1,g)-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+ \\ +[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)]-B(g\otimes 1_H;GX_1,g)+\ =0. \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1) \end{array}$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0. \tag{359}$$

19.5.6. $G^a\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+ \\ +(-1)^a\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2) \end{array}\right]G^a\otimes g^dx_1x_2=0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+ \\ +B(x_1\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) \end{array}=0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+ \\ -B(x_1\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) \end{array}=0.$$

考虑到元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+ \\ -B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2) \end{array}=0$$

i.e.

$$-B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=0 \tag{360}$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+ \\ -B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2) \end{array}=0.$$

i.e.

$$-B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0. \tag{361}$$

19.5.7. $G^aX_2\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2) \\ +(-1)^a\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2) \end{array}\right]G^aX_2\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;X_2,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2) \end{array}=0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;GX_2,x_2)-B(x_1\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2) \\ -B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2) \end{array}=0.$$

考虑到元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$ 的形式，我们知道这些等式成立，因为它们的所有加项都为零。

19.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) + \\ -B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) - B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + \\ -B(x_1\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + \\ -B(x_1\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

考虑元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$ 的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} -B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \\ +B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

i.e.

$$B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + \\ -B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$-B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

这些等式就是我们上面得到的 (360) 和 (361)。

19.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + \\ +(-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

因此我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \\ +B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + \\ -B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

考虑到元素的形式 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$，我们得到

$$\begin{array}{c} B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + \\ -B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

i.e.

$$-B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$\begin{array}{c} -B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + \\ +B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

i.e.

$$B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

这些等式就是我们在上面得到的（360）和（361）。

19.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + \\ (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array} \right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \\ -B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \\ +B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \end{array} = 0.$$

考虑元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$ 的形式，我们知道这些等式成立，因为它们的所有加项均为零。

19.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) + \\ +B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

and we get

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + \\ +B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + \\ +B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

考 虑元素 $B(g\otimes 1_H)$、 $B(x_1\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes\ 1_H)$ 的形式，我们得 t

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ -B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

i.e

$$-B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + \\ -B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \end{array} = 0$$

i.e.

$$-B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

这些等式正是我们在上文得到的（360）和（361）。

19.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

and we get

$$B(g\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

考虑到元素 $B(g\otimes 1_H)$ 和 $B(x_1\otimes 1_H)$， 的形式，我们知道这些等式成立，因为它们的所有加项都为零。

19.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

容易验证，根据元素 $B(g\otimes 1_H)$ 和 $B(x_2\otimes 1_H)$，的形式可知，这些等式成立，因为它们的所有加项都为零。

19.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) - B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

与上述情形得出相同的结论。

19.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0.$$

与上述情形得出相同的结论。

19.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(g\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

与上述情形得出相同的结论。

19.6. **情形** gx_1。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} = 0
\end{aligned}$$

我们考察第一项。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\
l_1+u_1+1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}$$

并且由于 $\alpha(gx_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a+b_1+b_2$，我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+b_1+b_2} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

我们考察第二项。

$$\begin{aligned}
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1} (-1)^{\alpha(g;l_1,0,u_1,0)}$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}.$$

由于 $\alpha(g;0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2+a+b_1+b_2+1$ 且 $\alpha(g;1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2$，我们最终得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{b_2} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

总之，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1+b_2} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{b_2} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} = 0$$

19.6.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^d) + (-1)^{a+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d)\end{array}\right] G^a\otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, 1_H) = 0 \tag{362}$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, g) = 0. \tag{363}$$

19.6.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} (-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_2) + (-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2)\end{array}\right] G^a\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2) = 0 \tag{364}$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; G, x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_2) = 0. \tag{365}$$

19.6.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1)\right] G^a\otimes g^d x_1 = 0$$

并得到

$$B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0 \tag{366}$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0. \tag{367}$$

19.6.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d) + (-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_1) + \\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) \end{array}\right] G^aX_2\otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(x_2\otimes 1_H; X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

考虑到元素 $B(x_2\otimes 1_H)$，我们得到

$B(g\otimes 1_H; 1_A, g)+B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0$以及

$$(\quad)$$

$$B(g\otimes 1_H; G, 1_H)+B(x_2\otimes 1_H; G, x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

19.6.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d) + (-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1)\right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(x_2\otimes 1_H; X_1, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1) = 0 \tag{370}$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1) = 0 \tag{371}$$

19.6.6. $G^a \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_1x_2)\right] G^a\otimes g^d x_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) = 0 \tag{372}$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0. \tag{373}$$

19.6.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}\left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_2)+(-1)^{a+1}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1x_2)+\\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_2)\end{array}\right]G^aX_2\otimes g^dx_2$$

并且我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0.$$

By taking in account the form of the element $B(x_2\otimes 1_H)$, we obtain

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=0 \tag{374}$$

and

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0. \tag{375}$$

19.6.8. $G^aX_1\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}B(x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1,g^dx_2)\ +(-1)^{a+1}B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1,g^dx_1x_2)\right]G^aX_1\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)=0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)=0.$$

考虑元素 $B(x_2\otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)=0$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1x_2)=0.$$

它们分别是 (372) 和 (373)。

19.6.9. $G^aX_2\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^{a+1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^dx_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)\right]G^aX_2\otimes g^dx_1=0$$

并且我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)=0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0.$$

考虑元素 $B(x_2\otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)=0 \tag{376}$$

and

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0. \tag{377}$$

19.6.10. $G^aX_1\otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1,g^dx_1)G^aX_1\otimes g^dx_1=0$$

因此我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0.$$

这些结论已为人所知，因为只需检查元素 $B(x_2\otimes 1_H)$ 的形式即可验证。 .

19.6.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^{a+1}\, B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

考虑元素 $B(x_2\otimes 1_H)$的形式，我们得到

$$B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes 1_H; G, gx_1) - B(x_2\otimes\ 1_H; G, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

它们分别是 (376) 和 (377)。

19.6.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

考虑元素 $B(x_2\otimes 1_H)$的形式，我们得到

$$B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{378}$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0. \tag{379}$$

19.6.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且得到

$$-B(x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

这些结果已为人所知，因为通过检查元素 $B(x_2\otimes 1_H)$的形式即可轻松验证。

19.6.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) + (-1)^a\, B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$B(x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

考虑元素 $B(x_2\otimes 1_H)$的形式，我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

它们分别是（378）和（379）。

19.6.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^a\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1=0$$

于是我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=0$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=0.$$

这些结果已为人所知，因为很容易从元素 $B(x_2\otimes 1_H)$。的形式看出这一点

19.6.16. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}(-1)^a\,B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2=0$$

于是我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)=0$$

and

$$-B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g.x_1x_2)=0$$

这些结果已为人所知，因为很容易从元素 $B(x_2\otimes 1_H)$ 的形式看出这一点 .

19.7. 情形 gx_2。

$$\begin{aligned}
&-\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=0
\end{aligned}$$

我们考虑第一项。

$$\begin{aligned}
&-\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2+1 &= 1
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(gx_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2$ 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2+1}\,B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e}.$$

我们来考虑第二项

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=0.$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1.\end{aligned}$$

我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}(-1)^{\alpha(g;0,l_2,0,u_2)}$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}.$$

由于 $\alpha(g;0,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+b_2+1$ 且 $\alpha(g;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，因此我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}(-1)^{a+b_1+b_2+1}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}.$$

总之，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}(-1)^{a+b_1+b_2+1}B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e}+$$
$$+\quad\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}(-1)^{a+b_1+b_2+1}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\quad\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0.$$

19.7.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}B(x_1\otimes 1_H;G^a,g^d)+(-1)^{a+1}B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^a,g^dx_2)+\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;G^aX_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,1_H)=0 \tag{380}$$

and

$$B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,g)=0. \tag{381}$$

19.7.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_2)\right] G^a\otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0 \tag{382}$$

and

$$B(x_1\otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0. \tag{383}$$

19.7.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^a, g^d x_1x_2) + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_1) \end{array}\right] G^a\otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0 \tag{384}$$

and

$$B(x_1\otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0. \tag{385}$$

19.7.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^d + (-1)^{a} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_2, g^d x_2)\right] G^aX_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; GX_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$, 的形式，我们得到

$$-B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_2)) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; G, x_2) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0.$$

这些分别是 (382) 和 (383)。

19.7.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^d) + (-1)^{a} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^d x_2) + \\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) \end{array}\right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

并得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_1, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$, 的形式，我们得到 ( )

386

$$[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ g)\ - B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1)] + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ \ gx_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ g)\ = 0$$

and

(387)

$$[-B(g\otimes 1_H\ ;\ G,\ \ 1_H)\ - B\ (x_1\otimes 1_H;\ \ G,\ \ x_1)\ ] - B\ (gx_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ x_2)\ + B\ (gx_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_1X_2,\ \ 1_H)\ = 0\ .$$

19.7.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes 1_H; G^a, g^d x_1 x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0 \tag{388}$$

and

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g x_1 x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G X_2, g x_1 x_2) = 0 \tag{389}$$

19.7.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes 1_H; G X_2, g x_2) = 0.$$

这些结果已经为人所知，因为通过元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$ 的形式可以很容易地验证这一点 .

19.7.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_1, g^d x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

从而得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes 1_H; G X_1, g x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G X_1 X_2, g x_2) = 0.$$

考虑到元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$[-B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2)] + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; X_1 X_2, x_2) = 0 \tag{390}$$

and

$$[B(g \otimes 1_H; G X_2, g) + B(x_1 \otimes 1_H; G, g x_1 x_2)] + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G X_1 X_2, g x_2) = 0. \tag{391}$$

19.7.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(x_1 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1) + (-1)^a B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G^a X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

and we get

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes 1_H; G X_2, g x_1) - B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G X_2, g x_1 x_2) = 0.$$

考虑到元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes 1_H; G, g x_1 x_2) - B(g x_1 x_2 \otimes 1_H; G X_2, g x_1 x_2) = 0.$$

它们分别为（388）和（389）。

19.7.10. $G^aX_1 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) + (-1)^a B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2) + \\ B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array} \right] G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; GX_1, gx_1) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1, 1_H) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0 \tag{392}$$

and

$$B(g\otimes 1_H; GX_1, g) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0. \tag{393}$$

19.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

and we get

$$-B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$，的形式，我们得到

$$[B(g\otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] - B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$[B(g\otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)] + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

它们分别是（390）和（391）。

19.7.12. $G^aX_2 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1x_2) G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

这些已经是已知的，因为通过元素 $B(x_1\otimes 1_H)$ 的形式很容易验证 .

19.7.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{a,\ d=0}^{a+d\equiv 1} \left[(-1)^a B(x_1\otimes 1_H;\ G^aX_1,\ \ g^dx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G^aX_1X_2,\ \ g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

考虑元素 $B(x_1\otimes 1_H)$，，我们得到

$$-B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{394}$$

and

$$-B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0. \tag{395}$$

19.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

由于元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$ 的形式显而易见，因此这些结果已为人所知。

19.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \Big[(-1)^{a+1}\, B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^{a+1}\, B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\Big]$$
$$G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

and

$$B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

考虑到元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$，，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

它们分别是（394）和（395）。

19.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这些结果早已为人所知，因为只需检查元素 $B(x_1 \otimes 1_H)$ 的形式即可轻易验证 .

19.8. **情形** gx_1x_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
+\quad&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})
\end{aligned}$$

$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$
$$= 0$$

我们考虑第一项。

$$\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1+1 &= 1\\ l_2+u_2+1 &= 1\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\end{aligned}$$

由于根据（44），$B(g\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$，这一项便为零。

我们考虑第二项

$$+\quad\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1+1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

由于根据（82），我们知道 $B(x_1\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$，这一项便为零。

让我们来考虑第三项

$$-\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(gx_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}$$

我们得到

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2+1 &= 1\end{aligned}$$

i.e.

$$a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 \equiv 1$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

因为根据（82），只要 $B(x_1\otimes 1_H;\ G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1,$ 该加项就为零。现在考虑最后一个加项。

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(g;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2+1 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

由于根据 (349), $B(gx_1x_2\otimes 1_H; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0$ 只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$,这个加项也为零。

利用从 (349) 到 (395) 的等式，我们得到 $B(gx_1x_2\otimes 1_H)$. 的以下形式。

19.9. **元素 $B(gx_1x_2\otimes 1_H)$ 的最终形式。**

$$\begin{aligned} B(gx_1x_2\otimes 1_H) \quad (396) &B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes g+\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)1_A\otimes x_1\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)1_A\otimes x_2\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)G\otimes 1_H+\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)G\otimes gx_1+\\ &+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)G\otimes gx_2+\\ &+\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]X_1\otimes 1_H+\\ &-B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_1\otimes x_1x_2+\\ &-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)X_1\otimes gx_1+\\ &+\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]X_1\otimes gx_2+\\ &+\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]X_2\otimes 1_H+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_2\otimes x_1x_2+\\ &+\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]X_2\otimes gx_1+\\ &+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes gx_2+\\ &+\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}\right]X_1X_2\otimes g+\\ &+\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_1+\\ &+\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_2+\\ &+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_1x_2\\ &+\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]GX_1\otimes g+\\ &+B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)GX_1\otimes x_1+\\ &+\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_1\otimes x_2+ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]GX_2\otimes g+\\
&+\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_2\otimes x_1+\\
&-B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)GX_2\otimes x_2-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes 1_H\\
&+B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1x_2+\\
&\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_1+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_2+
\end{aligned}
$$

20. $B\left(1\otimes x_1\right)$ AND $B\left(1\otimes x_2\right)$

由（34）可得

$$B(1_H\otimes x_i)=(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes gx_i)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_i\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

$$B(1_H\otimes x_i)=(1_A\otimes x_i)-(1_A\otimes x_i)-(1_H\otimes g)B(gx_i\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

因此

$$B(1_H\otimes x_i)=-(1_A\otimes g)B(gx_i\otimes 1_H)(1_A\otimes g). \tag{397}$$

鉴于命题 8.2，我们不必同时检验 $B(1_H\otimes x_1)$ 和$B(1_H\otimes x_2)$ 的卡西米尔条件。

我们得到

$$
\begin{aligned}
B\left(1\otimes x_1\right) \;=\;& \left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]1_A\otimes g+\\
&+\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]1_A\otimes x_1\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)1_A\otimes x_2\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\
&\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right]G\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\
&+\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)G\otimes gx_2+\\
&+\left[+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]X_1\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)X_2\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\
&+\left[+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]GX_1\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
B(1_H\otimes x_2) \;=\;& \left[+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]1_A\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)1_A\otimes x_1\\
&+\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]1_A\otimes x_2\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\\
&-\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)\right]G\otimes 1_H+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1+\\
&+\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]G\otimes gx_2+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)X_1\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2+\\
&-\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]X_2\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1\otimes x_2+\\
&-\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]GX_2\otimes g+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_2\otimes x_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

21. $B(1\otimes gx_1)$

由（39）可得

$$
\begin{aligned}
&B(1_H\otimes gx_1)\\
=\;&(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)+B(x_1\otimes 1_H)
\end{aligned}
\tag{398}
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
&B(1_H\otimes gx_1)\\
=\;&B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H\right)1_A\otimes 1_H+\\
&+B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)1_A\otimes x_1x_2+\\
&+\left[2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)\right]1_A\otimes gx_1+\\
&+B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)1_A\otimes gx_2+\\
&+B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)G\otimes g+\\
&+B\left(x_1\otimes 1_H;G,x_1\right)G\otimes x_1+\\
&+B\left(x_1\otimes 1_H;G,x_2\right)G\otimes x_2+\\
&+\left[-2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B\left(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2\right)\right]G\otimes gx_1x_2\\
&+\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]X_1\otimes g+\\
&-B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)X_1\otimes x_1+\\
&+\left[-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1\otimes x_2+\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1\otimes gx_1x_2\\
&-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes g+\\
&-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_2\otimes x_1+\\
&+\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes 1_H\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_1\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]GX_1\otimes 1_H+\\
&B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1\otimes x_1x_2+\\
&\left[-B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)\right]GX_1\otimes gx_1\\
&\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1\otimes gx_2+\\
&+B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)GX_2\otimes 1_H+\\
&+\left[-2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_2\otimes gx_1+
\end{aligned}
$$

$$+\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes g$$
$$-B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)GX_1X_2\otimes x_1$$

我们将卡西米尔条件 **(11)** 写作 $B(1_H\otimes gx_1)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &\sum_{\omega_1=0}^{1}B^A(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes g^{\omega_1}x_1^{\omega_1}\\
=\ &B^A(1_H\otimes gx_1)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1)\otimes 1_H+\\
+\ &B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_1
\end{aligned}$$

21.1. 情形 1_{H° 我们得到

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &\equiv 0\\
l_2+u_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2\equiv 0
\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
=\ &=B^A(1_H\otimes gx_1)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

因此

$$B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \tag{399}$$

21.2. 情形 g, x_1 **以及** x_{2° 都给出

$$a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

并且我们没有得到新信息。

21.3. 情形 $x_1x_{2^\circ}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &\sum_{\omega_1=0}^{1}B^A(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes g^{\omega_1}x_1^{\omega_1}\\
=\ &B^A(1_H\otimes gx_1)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1)\otimes 1_H\\
&B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_1
\end{aligned}$$

$$a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 \equiv 0$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &\equiv 1\\ l_2+u_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &\equiv 1\\ l_2+u_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1\equiv 1}}\sum\nolimits^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2\equiv 1}} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes x_1x_2\\ &=0 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &= 1+e_2,\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right)=e_2+a+b_1+b_2+1\\ ,\alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &= a+b_1\text{and }\alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)=1+b_2 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ =\ &0 \end{aligned}$$

21.3.1. $(0,\ 0,\ 0,\ 0)\,G^a\otimes g^d$。我们

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[\begin{array}{c} B(1_H\otimes gx_1;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^aB(1_H\otimes gx_1;G^aX_2,g^dx_1)+\\ +(-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1,g^dx_2)+B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1X_2,g^d) \end{array}\right]G^a\otimes g^d$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &+B(1_H\otimes gx_1;1_A,x_1x_2)+B(1_H\otimes gx_1;X_2,x_1)\\ &-B(1_H\otimes gx_1;X_1,x_2)+B(1_H\otimes gx_1;X_1X_2,1_H)=0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &+B(1_H\otimes gx_1;G,gx_1x_2)-B(1_H\otimes gx_1;GX_2,gx_1)\\ &+B(1_H\otimes gx_1;GX_1,gx_2)+B(1_H\otimes gx_1;GX_1X_2,g)=0 \end{aligned}$$

根据元素 $B(1_H\otimes gx_1)$，两个等式都没有提供任何新信息。

21.3.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[(-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

因此我们得到

$$-B(1_H\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)+B(1_H\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)=0$$

and

$$B(1_H\otimes gx_1;GX_2,x_1x_2)+B(1_H\otimes gx_1;GX_1X_2,x_2)=0$$

由元素 $B(1_H\otimes gx_1)$，的形式可知，这两个等式都没有提供新的信息 n.

21.3.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1;\ G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_1;\ G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$, 的形式，两个等式都没有给我们带来新信息。

21.3.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_2, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，这两个等式都没有提供新的信息 n.

21.3.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_1) = 0$$

这两者我们都已经得到了。

21.3.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，两个等式都没有提供新的信息 n.

21.3.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 我们没有这样的加项。

21.3.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

已经得到

21.3.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

已经获得

21.3.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。 我们没有这样的加项。

21.3.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这是我们已经得到的

21.3.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 我们没有这样的加项。21.3.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。 我们没有这样的加项。21.3.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。我们没有这样的加项。21.3.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。 我们没有这样的加项。21.3.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 我们没有这样的加项

.

21.4. **情形** gx_1。

$$\begin{array}{rl} & \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ & g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = & \sum_{\omega_1=0}^{1} B^A(1 \otimes gx_1^{1-\omega_1}) \otimes B^H(1 \otimes gx_1^{1-\omega_1}) \otimes g^{\omega_1}x_1^{\omega_1} \\ = & B^A(1_H \otimes gx_1) \otimes B^H(1_H \otimes gx_1) \otimes 1_H \\ & B^A(1_H \otimes g) \otimes B^H(1_H \otimes g) \otimes gx_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1 \\ l_1+u_1 &\equiv 1 \\ l_2+u_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &\equiv 1 \\ l_2 &= u_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1\equiv 1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2} = B^A(1_H \otimes g) \otimes B^H(1_H \otimes g)$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,0) &= e_2+(a+b_1+b_2) \\ \alpha(1_H;1,0,0,0) &= b_2 \end{aligned}$$

我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$+\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{b_2}B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

$= \quad B^A(1_H \otimes g) \otimes B^H(1_H \otimes g)$

由于

$$B(1_H \otimes g, G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) = \pm B(g1_H \otimes 1_H, G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2})$$

我们也知道

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(1_H \otimes g, G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} = 0$$

i.e.

$$B(1_H \otimes g, G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1$$

21.4.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_1; G^a, g^d x_1) + B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1, g^d) - B(1_H \otimes g; G^a, g^d)\right] G^a \otimes g^d = 0$$

and we get

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, g) + B(1_H \otimes gx_1; 1_A, gx_1) - B(1_H \otimes g; 1_A, g) = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, 1_H) - B(1_H \otimes gx_1; G, x_1) - B(1_H \otimes g; G, 1_H) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式，这两个等式都没有给我们带来新的信息 n.

21.4.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1, g^d x_2) - B(1_H \otimes g; G^a, g^d x_2)\right]$$

$$G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

并得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, x_2) - B(1_H \otimes gx_1; 1_A, x_1 x_2) - B(1_H \otimes g; 1_A, x_2) = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(1_H \otimes gx_1; G, gx_1 x_2) - B(1_H \otimes g; G, gx_2) = 0$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，两个等式都没有提供新信息。

21.4.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1, g^d x_1) G^a \otimes g^d x_1 = B(1_H \otimes g; G^a, g^d x_1) G^a \otimes g^d x_1$$

并得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, x_1) - B(1_H \otimes g; 1_A, x_1) = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_1) - B(1_H \otimes g; G, gx_1) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，两个等式都没有提供新信息。

21.4.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_1) - B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d) - B(1_H \otimes g; G^a X_2, g^d)\right]$$

$$G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

因此我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1 X_2, 1_H) - B(1_H \otimes gx_1; X_2, x_1) - B(1_H \otimes g; X_2, 1_H) = 0$$

$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1 X_2, g) + B(1_H \otimes gx_1; GX_2, gx_1) - B(1_H \otimes g; GX_2, g) = 0.$$

由元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式可知，两个等式都没有提供新的信息 on.

21.4.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1, g^dx_1) - B(1_H \otimes g; G^aX_1, g^d)\right] G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1, x_1) - B(1_H \otimes g; X_1, 1_H) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_1) - B(1_H \otimes g; GX_1, g) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

21.4.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes g; G^a, g^dx_1x_2)\right] G^a \otimes g^dx_1x_2$$

并得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(1_H \otimes g; 1_A, gx_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2) - B(1_H \otimes g; G, x_1x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式，两个等式都没有为我们提供新的信息 n.

21.4.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_2) - B(1_H \otimes g; G^aX_2, g^dx_2)\right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes g; X_2 \otimes gx_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_2) - B(1_H \otimes gx_1; GX_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes g; GX_2 \otimes x_2) = 0$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，两个等式都没有给出新信息 on.

21.4.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes g; G^aX_1, g^dx_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(1_H \otimes g; X_1, gx_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2) - B(1_H \otimes g; GX_1, x_2) = 0$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，两个等式都没有给出新信息。

21.4.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1) - B(1_H \otimes g; G^aX_2, g^dx_1)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) - B(1_H \otimes g; X_2, gx_1) = 0.$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_1) - B(1_H \otimes g; GX_2, x_1) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式，这两个等式都没有提供新信息。

21.4.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$-\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_1, g^dx_1) = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes g; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes g; GX_1, x_1) = 0$$

根据元素 $B(g \otimes 1_H)$，的形式，这两个等式都没有提供新信息。

21.4.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1) - B(1_H \otimes g; G^aX_1X_2, g^d)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) - B(1_H \otimes g; X_1X_2, g) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_1) - B(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，这两个等式没有给出任何新信息 n.

21.4.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes g; G^aX_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes g; X_2, x_1x_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes g; GX_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这两个等式没有给出任何新信息。

21.4.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_1, g^dx_1x_2) = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes g; X_1, x_1x_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes g; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

根据元素 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，我们得不到任何新信息。

21.4.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes g; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，两个等式都没有给我们带来新信息。

21.4.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1) = 0$$
$$-B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

由元素 $B(g \otimes 1_H)$，的形式，我们得不到任何新信息。

21.4.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

根据元素 $B(g \otimes 1_H)$，我们得不到任何新信息。

21.5. 情形 gx_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;&0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2&\equiv 1\\
l_1+u_1&\equiv 0\\
l_2+u_2&\equiv 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 0\\
l_1&= u_1\equiv 0\\
l_2+u_2&\equiv 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2\equiv 1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}\\
=\;&0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)=a+b_1+b_2$ 且 $\alpha(1_H;0,1,0,0)=0$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
&+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

21.5.1. $(0,0,0,0)$ $G^a\otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[(-1)^aB(1_H\otimes gx_1;G^a,g^dx_2)+B(1_H\otimes gx_1;G^aX_2,g^d)\right]G^a\otimes g^d=0$$

并且我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;1_A,gx_2)+B(1_H\otimes gx_1;X_2,g)=0$$

$$-B(1_H\otimes gx_1;G,x_2)+B(1_H\otimes gx_1;GX_2,1_H)=0.$$

根据元素 $B(1_H\otimes gx_1)$，的形式，两个等式都没有提供新的信息 n.

21.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}-B(1_H\otimes gx_1;G^aX_2,g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2=0.$$

因此我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;X_2,x_2)=0$$

$$B(1_H\otimes gx_1;GX_2,gx_2)=0.$$

根据元素 $B(1_H\otimes gx_1)$，这两个等式都没有提供新的信息 n.

21.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_1; G^a, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; 1_A, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_2, x_1) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_2, gx_1) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式，两个等式都没有给出新的信息 n.

21.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_2, x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_2, gx_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，的形式，两个等式都没有给出新的信息 n.

21.5.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1, g^d x_2) + B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1, x_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, 1_H) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, g) = 0$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，这两个等式都没有提供新的信息 n.

21.5.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0.$$

并且我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes gx_1; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，这两个等式都没有提供新的信息 n.

21.5.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。我们没有这样的项

21.5.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，两个等式都没有提供新信息。

21.5.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$，两个等式都没有为我们提供新的信息 n.

21.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_1) = 0$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，这两个等式都没有给我们带来新的信息 n.

21.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_1)$ 的形式，这两个等式都没有给我们带来新的信息 n.

21.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 我们没有这样的项。

21.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

21.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 我们没有这样的项

21.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a_2}\, B(1_H \otimes gx_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

由此得到

$$B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们之前得到的结果。

21.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 我们没有任何类似这样的项。

21.6. 情形 gx_1x_2。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=&\sum_{\omega_1=0}^{1}B^A(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(1\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes g^{\omega_1}x_1^{\omega_1}\\
=&B^A(1_H\otimes gx_1)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1)\otimes 1_H\\
&B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=&\sum_{\omega_1=0}^{1}B^A(1_H\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(1_H\otimes gx_1^{1-\omega_1})\otimes gx_1^{\omega_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2&\equiv 1\\
l_1+u_1&=1\\
l_2+u_2&=1
\end{aligned}$$

因此

$$a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

并且我们知道，根据 (399),

$$B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1.$$

22. $B\left(1\otimes gx_2\right)$

由 (39) 可得

$$\begin{aligned}
&B(1_H\otimes gx_2)\\
=&(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)\\
&+B(x_2\otimes 1_H)
\end{aligned}\tag{400}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
B\left(1_H\otimes gx_2\right)=&B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H\right)1_A\otimes 1_H\\
&+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)1_A\otimes x_1x_2\\
&+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)1_A\otimes gx_1+\\
&+\left[2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)\right]1_A\otimes gx_2+\\
&+B\left(x_2\otimes 1_H;G,g\right)G\otimes g\\
&+B\left(x_2\otimes 1_H;G,x_1\right)G\otimes x_1+\\
&+B\left(x_2\otimes 1_H;G,x_2\right)G\otimes x_2+\\
&+\left[2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+B\left(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2\right)\right]G\otimes gx_1x_2+\\
&-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)X_1\otimes g+\\
&+B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_1\otimes x_2+\\
&+\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]X_2\otimes g+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_2\otimes x_1\\
&-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)X_2\otimes x_2+\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_2\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes 1_H+\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_2+\\
&+B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)GX_1\otimes 1_H+\\
&\left[-2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1\otimes gx_2+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right]GX_2\otimes 1_H+\\
&+B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)GX_2\otimes x_1x_2+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_2\otimes gx_1+\\
&-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)GX_2\otimes gx_2\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes g+\\
&-B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)GX_1X_2\otimes x_2
\end{aligned}
$$

由（11）可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &\sum_{\omega_2=0}^{1}B^A(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes g^{\omega_2}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &B^A(1_H\otimes gx_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_2)\otimes 1_H+\\
&B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_2
\end{aligned}
$$

22.1. 情形 $1_{H\circ}$

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &= 0\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

使得

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &= 0\\
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0
\end{aligned}
$$

等式右边给出

$$B^A(1_H\otimes gx_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_2)$$

而等式变为:

$$\alpha\left(1_H;0,0,0,0\right)=\left(a+b_1+b_2\right)\left(n_1+n_2\right)=0$$

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\otimes 1_H\\
= \quad & B^A(1_H\otimes gx_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_2)\otimes 1_H
\end{aligned}$$

因此我们推得

$$B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \tag{401}$$

22.2. 情形 $g_\circ$

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \quad & \sum\nolimits^{1}_{\omega_2=0} B^A(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes g^{\omega_2}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}$$

从左侧

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &\equiv 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &= 1\\
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0
\end{aligned}$$

从右侧我们只得到零。因此我们得到

$$B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

这一点我们已经知道。

22.3. 情形 $x_{1\circ}$ 等式右边为 **0**。至于左侧，我们得到

$$B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

which we already know.

22.4. 情形 $x_{2\circ}$

$$B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

这是我们已经知道的。

22.5. **情形** $x_1x_{2\circ}$ 等式右边为 0。至于左侧，我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &= 1+e_2,\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right)=e_2+a+b_1+b_2+1,\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &= a+b_1 \text{and } \alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)=1+b_2, \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1} B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ =\ & 0 \end{aligned}$$

22.5.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H\otimes gx_2;G^a,g^dx_1x_2)G^a\otimes g^d+\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_1)G^a\otimes g^d+\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1,g^dx_2)G^a\otimes g^d+\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^d)G^a\otimes g^d \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[\begin{array}{c} B(1_H\otimes gx_2;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^aB(1_H\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_1)\\ (-1)^{a+1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1,g^dx_2)+B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

i.e.

$$\begin{aligned} &B(1_H\otimes gx_2;1_A,x_1x_2)+B(1_H\otimes gx_2;X_2,x_1)+\\ &-B(1_H\otimes gx_2;X_1,x_2)+B(1_H\otimes gx_2;X_1X_2,1_H)\\ =\ & 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &B(1_H\otimes gx_2;G,gx_1x_2)-B(1_H\otimes gx_2;GX_2,gx_1)+\\ &+B(1_H\otimes gx_2;GX_1,gx_2)+B(1_H\otimes gx_2;GX_1X_2,g)\\ =\ & 0 \end{aligned}$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.5.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{1+a} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2})\right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

and we get

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1, gx_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, gx_1) = 0,$$
$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, x_1) = 0\ .$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1 x_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, x_2) = 0\ .$$

这两者都已经找到。

22.5.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1, gx_1 x_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, x_1) = 0\ .$$

这两者都已经找到。

22.5.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, gx_1 x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式得以满足。

22.5.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 不存在这样的项。

22.5.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, gx_1 x_2) = 0\ .$$

两者都已被找到

22.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

因此我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们之前已经得到的结果。

22.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 不存在这样的项。

22.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这是我们已经得到的结果。

22.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

22.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

22.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 没有这样的项。

22.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。 没有这样的项。

22.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

22.6. **情形** gx_1。 等式右边为零。

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &= 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &= 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2 = 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2=0}}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2} = 0$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a+b_1+b_2)$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2$，我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2=1}}^{1} (-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_2^{e_2} +$$
$$\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2=1}}^{1} (-1)^{b_2} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

22.6.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_2; G^a, g^d x_1) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d)\right] G^a \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_2; 1_A, gx_1) + B(1_H \otimes gx_2; X_1, g) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_2; G, x_1) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, 1_H) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.2. $G^a \otimes g^d x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{1+a} B(1_H \otimes gx_2; G^a, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_2)\right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; 1_A, x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1, x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; G, gx_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1) G^a \otimes g^d x_1$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_1) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1) - B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_1) - B(1_H \otimes gx_2; X_1 X_2, 1_H) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_1) - B(1_H \otimes gx_2; GX_1 X_2, g) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.5. $G^a X_1 \otimes g^d$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1) G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_1) = 0\ .$$

这两者都已获得。

22.6.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

并得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) - B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$
$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

于是得到以下我们已得到过的等式。

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0\ ,$$
$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1, x_1x_2) = 0\ .$$

22.6.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

22.6.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。 没有这样的项

22.6.11. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

并得到下列我们已经得到的等式。

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0\ ,$$
$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

22.6.12. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$$

并得到下列我们已经得到的等式。

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0,$$
$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

22.6.13. $G^a X_1 \otimes g^d x_1 x_2$. 没有这样的项

22.6.14. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}\,B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到下面这些已经得到过的等式。

$$-B(1_H\otimes gx_2;X_1X_2,x_1x_2)\ ,$$

$$B(1_H\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)\ .$$

22.6.15. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$. 不存在这样的项。

22.6.16. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的项。

22.7. **情形** gx_2。

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\&B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\=\ &\sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1}B^A(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(1_H\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes g^{\omega_2}x_2^{\omega_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2&=1\\l_1+u_1&=0\Rightarrow l_1=u_1=0\\l_2+u_2&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&=0\\l_1+u_1&=0\Rightarrow l_1=u_1=0\\l_2+u_2&=1\end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2=0}}^{1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)}\,B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes gx_2=B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_2$$

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1=1}}^{1}(-1)^{(a+b_1+b_2)}\,B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2=1}}^{1}B(1_H\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=\\=\ &B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\end{aligned}$$

22.7.1. $G^a\otimes g^d$. 左侧为

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d=1}}^{1}\left[(-1)^a\,B(1_H\otimes gx_2;G^a,g^dx_2)+B(1_H\otimes gx_2;G^aX_2,g^d)\right]G^a\otimes g^d$$

从而得到

$$\begin{aligned}B(1_H\otimes gx_2;1_A,gx_2)+B(1_H\otimes gx_2;X_2,g)&=B\left(1_H\otimes g;1_A,g\right)\\-B(1_H\otimes gx_2;G,x_2)+B(1_H\otimes gx_2;GX_2,1_H)&=B\left(1_H\otimes g;G,1_H\right)\end{aligned}$$

根据元素 $B(1_H\otimes gx_2)$ 和 $B(g\otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立 .

22.7.2. $G^a \otimes g^d x_2$. 左侧为

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_2) G^a \otimes g^d x_2$$

从而得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_2) = B\left(1_H \otimes g; 1_A, x_2\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_2) = B\left(1_H \otimes g; G, gx_2\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立 .

22.7.3. $G^a \otimes g^d x_1$。 左侧为

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes gx_2; G^a, g^d x_1 x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1$$

并且得到

$$B(1_H \otimes gx_2; 1_A, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_1) = B\left(1_H \otimes g; 1_A, x_1\right),$$

$$-B(1_H \otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_1) = B\left(1_H \otimes g; G, gx_1\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立。

22.7.4. $G^a X_2 \otimes g^d$。 左侧为

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} (-1)^{(a+1)} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_2) G^a X_2 \otimes g^d$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_2) = B\left(1_H \otimes g; X_2, 1_H\right)$$

and

$$+B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_2, g\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立。

22.7.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。 左侧为

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} \left[(-1)^{(a+1)} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d)\right] G^a X_1 \otimes g^d +$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1, x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, 1_H) = B\left(1_H \otimes g; X_1, 1_H\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, g) = B\left(1_H \otimes g; GX_1, g\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立 .

22.7.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2$$

我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) = B\left(1_H \otimes g, 1_H, gx_1x_2\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) = B\left(1_H \otimes g, G, x_1x_2\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立 .

22.7.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 第一侧没有项。

22.7.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1 \otimes g^dx_2$$

我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = B\left(1_H \otimes g; X_1, gx_2\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_1, x_2\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式得以满足。

22.7.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} (-1)^{(a+1)} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1$$

我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; X_2, gx_1\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_2, x_1\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式得以满足。

22.7.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} \left[(-1)^{(a+1)} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = B\left(1_H \otimes g; X_1, gx_1\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_1) = B\left(1_H \otimes g; GX_1, x_1\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立。

22.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=1}}^{1} (-1)^{a} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, g\right)$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H\right)$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立。

22.7.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 左侧没有这样的项。

22.7.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; X_1, x_1x_2\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_1, gx_1x_2\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立 .

22.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 左侧没有这样的项。

22.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d=0}}^{1} (-1)^a\, B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$$

我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1\right)$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1\right).$$

根据元素 $B(1_H \otimes gx_2)$ 和 $B(g \otimes 1_H)$ 的形式，这些等式成立。

22.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 第一项中没有这样的项。

22.8. **情形** gx_1x_2。

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2=1}}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\l_1+u_1=1}}^{e_1} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+d+e_1+e_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \quad &\sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1} B^A(1_H \otimes gx_2^{1-\omega_2}) \otimes B^H(1_H \otimes gx_2^{1-\omega_2}) \otimes g^{\omega_2}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}$$

由于

$B(1_H \otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$ 在 $a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1$ 的情况下，

我们无须检查。

23. $B\left(1_H \otimes x_1x_2\right)$

对于 (33) 中的 $h = 1_H$，并利用 $i = 2,$ 的 (397)，可得

$B(1_H \otimes x_1x_2) = B(1_H \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes x_2)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes x_2)(1_A \otimes g)$ 和

$$B(1_H \otimes x_2) = -(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g).$$

对于 (36) 中的 $h = gx_1$，可得

$B(gx_1 \otimes x_2) = B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$ 最后可得

$$\begin{aligned}
&B(1_H \otimes x_1x_2)\\
= \quad &-(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)\\
&+(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)\\
&-(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)
\end{aligned} \tag{402}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&B(1_H \otimes x_1x_2)\\
= \quad &B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H)1_A \otimes 1_H +\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)1_A \otimes x_1x_2 +\\
&+\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right]1_A \otimes gx_1\\
&+\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right](1_A \otimes gx_2) +\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)G \otimes g +\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)G \otimes x_1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)G \otimes x_2 +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\begin{array}{c} -3B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)- \\ 2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}\right]G\otimes gx_1x_2\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)X_1\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)X_1\otimes x_1+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)X_1\otimes x_2+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)X_2\otimes g+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)X_2\otimes x_1+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)X_2\otimes x_2+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[\begin{array}{c} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]\\
&X_1X_2\otimes 1_H+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)GX_1\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1\otimes x_1x_2\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\\
&\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]GX_1\otimes gx_2\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)GX_2\otimes 1_H+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_2\otimes x_1x_2+\\
&+\left[\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \\ -2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]GX_2\otimes gx_1\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)GX_2\otimes gx_2GX_2\otimes gx_1\\
&+\left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes g\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1+\\
&-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_2
\end{aligned}
$$

我们将卡西米尔条件 **(11)** 写为 $B(1_A\otimes x_1x_2)$。

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;&B^A(1_A\otimes x_1x_2)\otimes B^H(1_A\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\
&B^A(1_A\otimes x_1)\otimes B^H(1_A\otimes x_1)\otimes gx_2\\
&-B^A(1_A\otimes x_2)\otimes B^H1_A\otimes x_2)\otimes gx_1\\
&+B^A(1_A\otimes 1_H)\otimes B^H(1_A\otimes 1_H)\otimes x_1x_2
\end{aligned}
$$

23.1. 情形 1_H**.** 考虑左侧，我们得到

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \tag{403}$$

由此我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$

$$
\begin{aligned}
& B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad & B^A(1_A \otimes x_1x_2) \otimes B^H(1_A \otimes x_1x_2) \otimes 1_H \\
& B^A(1_A \otimes x_1) \otimes B^H(1_A \otimes x_1) \otimes gx_2 \\
& -B^A(1_A \otimes x_2) \otimes B^H 1_A \otimes x_2) \otimes gx_1 \\
& +B^A(1_A \otimes 1_H) \otimes B^H(1_A \otimes 1_H) \otimes x_1x_2
\end{aligned}
$$

23.2. 情形 $g_\circ$ 未提供其他信息

23.3. 情形 x_1**.** 考察左侧可得

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1
\end{aligned}
$$

23.4. 情形 x_2**.** 考察左侧可得

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 + u_2 &= 1 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1
\end{aligned}
$$

由于

$$B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1$$

we get no new information.

23.5. 情形 x_1x_2**.** 考察左侧可得

$$
\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 + u_2 &= 1 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_1=0 \\ l_1+u_1=1}}^{e_1} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0 \\ l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d=0 \\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1x_2) \\
& G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1-1} x_2^{e_2-1} + \\
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2, g^d x_1 x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2-1} \otimes g^d x_1^{e_1-1} x_2^{e_2} + \\
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1 X_2^{b_2}, g^d x_1x_2) G^a X_1^{b_1-1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2-1} + \\
& \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-1} X_2^{b_2-1} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}
\end{aligned}
$$

由于

$$\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$$

$$\alpha\left(1_H;0,1,1,0\right)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv e_2+a+b_1\equiv d$$
$$\alpha\left(1_H;1,0,0,1\right)\equiv b_2+(a+b_1+b_2+1)+1\equiv a+b_1\equiv a+1$$
$$\alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)\equiv 1+b_2\equiv 0$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^d B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1} B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$-B(1_A\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

23.5.1. $G^a\otimes g^d$。

$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}+\left[\begin{array}{c}-B(1_A\otimes 1_H;G^a,g^d)+B(1_H\otimes x_1x_2;G^a,g^dx_1x_2)+\\ +(-1)^d B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_1)+\\ (-1)^{a+1} B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1,g^dx_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d$$

于是我们得到

$$-B(1_A\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(1_H\otimes x_1x_2;1_A,x_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;X_2,x_1)$$
$$-B(1_H\otimes x_1x_2;X_1,x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;X_1X_2,1_H)=0$$

and

$$-B(1_A\otimes 1_H;G,g)+B(1_H\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)-B(1_H\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)$$
$$+B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g)=0.$$

利用 $B(1_H\otimes x_1x_2)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[(-1)^d B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]$$
$$G^a\otimes g^dx_2=0$$

于是我们得到

$$-B(1_H\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)=0$$

and

$$B(1_H\otimes x_1x_2;GX_2,x_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1X_2,x_2)=0.$$

利用 $B(1_H\otimes x_1x_2)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.5.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[(-1)^{a+1} B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1,g^dx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1)\right]G^a\otimes g^dx_1=0$$

我们得到

$$-B(1_H\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)=0$$

and

$$B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1,x_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1X_2,x_1)=0.$$

通过使用 $B(1_H\otimes x_1x_2)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.5.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)]$$

$$G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

23.5.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^d B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

这正是我们已经得到的结果。

23.5.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^a \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这些已为人所知

23.5.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。 没有项。

23.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^d B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

已经得到

23.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

已经得到

23.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 我们一无所获

23.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

已经有了

23.5.12. $G^aX_2 \otimes g^d x_1 x_{2\circ}$ 无项
23.5.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1 x_{2\circ}$ 无项
23.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_{2\circ}$ 无项
23.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_{1\circ}$ 无项
23.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1 x_{2\circ}$ 无项

23.6. 情形 $gx_{1\circ}$

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2} \\ = \;& -B^A(1_A \otimes x_2) \otimes B^H(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1 x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^d x_2^{e_2} + \\ & \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^aX_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} \\ = \;& -B^A(1_A \otimes x_2) \otimes B^H 1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\,(1_H; 0, 0, 1, 0) &\equiv e_2 + a + b_1 + b_2 \\ \alpha\,(1_H; 1, 0, 0, 0) &\equiv b_2 \end{aligned}$$

我们最终得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1 x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^d x_2^{e_2} + \\ & \sum\nolimits^1_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{b_2} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^aX_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} \\ = \;& -\sum\nolimits^1_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0} B(1_A \otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} \end{aligned}$$

23.6.1. $G^a \otimes g^d{}_\circ$

$$\sum\nolimits^1_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}} \left[B(1_H \otimes x_2; G^a, g^d) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^a, g^d x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d)\right]$$

$$G^a \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$B(1_A \otimes x_2; 1_A, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, g) = 0$$

and

$$B(1_A \otimes x_2; G, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; G, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, 1_H) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.6.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a, g^d x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d x_2) + B(1_H \otimes x_2; G^a, g^d x_2)\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; 1_A, x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; G, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2) = 0$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们没有得到新信息。

23.6.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^a, g^d x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; 1_A, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; G, gx_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们没有得到新信息。

23.6.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^d x_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^d)\right] G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

W我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_2, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, x_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_2, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们没有得到新信息。

23.6.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d x_1)\right] G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们没有得到新信息 .

23.6.6. $G^a \otimes g^d x_1x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^a, g^d x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d x_1x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; G, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, x_1x_2) = 0$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.6.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(1_H \otimes x_2; G^aX_2, g^dx_2) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) \\ -B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \end{array} \right] G^aX_2 \otimes g^dx_2 = 0.$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_2, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_2, x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.6.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1, x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.6.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_2, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_2, x_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.6.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1)G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1, gx_1) = 0$$

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1, x_1) = 0$$

这些已为人所知。

23.6.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.6.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_2)$ 的形式，我们没有得到新信息 .

23.6.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

这些已经是已知的。

23.6.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) + (-1)^a\, B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, x_2) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这两者都已为人所知。

23.6.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

这两者此前都已为人所知。

23.6.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这两种情形都已为人所知。

23.7. **情形** gx_2。

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\sum^{1}{}_{\substack{a,\ b_1\ b_2\ d\ e_1\ e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0 \\ l_2+u_2=1}}^{e_2} {}_{,\ \ ,,}(-1)^{\alpha(1_H;0,\ l_2,\ 0,\ u_2)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes$$

$$= B^A(1_A \otimes x_1) \otimes B^H(1_A \otimes x_1) \otimes gx_2$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} +$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} +$$

$$= B^A(1_A \otimes x_1) \otimes B^H(1_A \otimes x_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) &\equiv a + b_1 + b_2 \\ \alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$-\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(1_A \otimes x_1, G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+b_1+b_2} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_1^{e_1} +$$

$$+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1} \otimes g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2} = 0$$

23.7.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^a, g^d) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^a, g^d x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_2, g^d)\right] G^a \otimes g^d = 0.$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, 1_A, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, g) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, G, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; G, x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, 1_H) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们没有得到新信息。

23.7.2. $G^a \otimes g^d x_2$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^a, g^d x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^a X_2, g^d x_2)\right] G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, 1_A, x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, G, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, gx_2) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们没有得到新信息 .

23.7.3. $G^a \otimes g^d x_1$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^a, g^d x_1) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2; G^a, g^d x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^d x_1)\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, 1_A, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, G, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们没有得到新的信息。

23.7.4. $G^aX_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^d x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_2, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_2, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, gx_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们没有得到新的信息。

23.7.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^d x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^d)\right]$$
$$G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.7.6. $G^a \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^a, g^d x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^d x_1x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, 1_A, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, G, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.7.7. $G^aX_2 \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_2, g^d x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^d x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_2, gx_2) = 0$$
$$-B(1_A \otimes x_1, GX_2, x_2) = 0$$

已知

23.7.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_1, g^dx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1, gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1, x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到任何新信息 .

23.7.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_2, g^dx_1) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_2, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_2, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到任何新信息 .

23.7.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$.

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(1_A \otimes x_1, G^aX_1, g^dx_1) + (-1)^{a+1} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) \\ +B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array}\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(1_A \otimes x_1, G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^{a} B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \\ +B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^d) \end{array}\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1X_2, g) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1X_2, 1_H) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到新信息 .

23.7.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(1_A \otimes x_1, G^aX_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_2, gx_1x_2) = 0$$

这些已为人所知。

23.7.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

通过使用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们没有得到任何新信息 .

23.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} -B(1_A \otimes x_1, G^aX_1X_2, g^dx_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这些都是已知的。

23.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{a,d=0}^{1} \left[-B(1_A \otimes x_1, G^aX_1X_2, g^dx_1) + (-1)^a B(1_H \otimes x_1x_2;\ G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0 \quad a+d\equiv 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1X_2, x_1) + B(1_H \otimes x_1x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1X_2, gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

利用 $B(1_H \otimes x_1x_2)$ 和 $B(1_A \otimes x_1)$ 的形式，我们得不到新信息。

23.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} -B(1_A \otimes x_1, G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(1_A \otimes x_1, X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_A \otimes x_1, GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这些已为人所知。

23.8. **情形** gx_1x_2. 右侧没有任何内容。从左侧我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

由于

$$B(1_H \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ 当 } a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1 \text{ 时}$$

无需检查。

24. $B\left(x_1\otimes x_1\right)$

由（34）可知

$B(x_1\otimes x_1)=B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(gx_1x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$
我们得到

$$B(x_1\otimes x_1)=B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g) \tag{404}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
& B\left(x_1\otimes x_1\right)\\
= \;& -2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)1_A\otimes gx_1x_2+\\
- \;& 2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)G\otimes gx_1+\\
& +2\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]X_1\otimes gx_1+\\
& +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes gx_1+\\
& +2\left[B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1\otimes gx_1x_2+\\
& +2\left[+B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_1.
\end{aligned}$$

我们为 $B(x_1\otimes x_1)$ 写出卡西米尔公式，得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{w_1=0}^{1}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}\\
& B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \;& \sum_{\omega_1=0}^{\nu_1}B^A(x_1\otimes x_1^{\nu_1-\omega_1})\otimes B^H(x_1\otimes x_1^{\nu_1-\omega_1})\otimes g^{1+\omega_1}x_1^{\omega_1}.
\end{aligned}$$

24.0.1. $B\left(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2\right)$。

$$\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e &\equiv 1\\
l_1+u_1+1-w_1 &= 0\Rightarrow l_1=u_1=0,w_1=1\\
l_2+u_2 &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{w_1=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};0,0,u_1,u_2\right)}\\
& B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1+1-w_1}x_2^{u_2}\\
= \;& \sum_{\omega_1=0}^{1}B^A(x_1\otimes x_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(x_1\otimes x_1^{1-\omega_1})\otimes g^{1+\omega_1}x_1^{\omega_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,u_1,u_2)}\\
& B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1+1}x_2^{u_2}\\
& +\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}\\
& B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
= \;& \sum_{\omega_1=0}^{\nu_1}B^A(x_1\otimes x_1^{\nu_1-\omega_1})\otimes B^H(x_1\otimes x_1^{\nu_1-\omega_1})\otimes g^{1+\omega_1}x_1^{\omega_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)}B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1+\\
& +(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{\alpha(x_1;0,0,1,0)}\, B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_2\\
&+(-1)^{\alpha(x_1;0,0,1,1)}\, B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes g\otimes x_2\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes g\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_2\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2
\end{aligned}
$$

情形 $1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1+1}x_2^{u_2}\\
&+\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\;& B^A(x_1\otimes x_1)\otimes B^H(x_1\otimes x_1)\otimes g+\\
&B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_1
\end{aligned}
$$

第一项左侧给出

$$u_1=u_2=0$$

第二项是不可能的。右侧为零。

24.1. 情形 1_H。 由于

$$
\begin{aligned}
1+\omega_1 &\equiv 0\\
\omega_1 &= 0
\end{aligned}
$$

是不可能的，等式右边为零。从左侧我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1+1-w_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1+1-w_1 &= 0\Rightarrow w_1=1, l_1=u_1=0\\
l_2+u_2 &= 0\Rightarrow l_2=u_2=0
\end{aligned}
$$

并且由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0)=0$，，我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

因此我们得到

$$B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0. \tag{405}$$

元素的形式满足这一条件。

24.2. 情形 g。 由右侧可得

$$
\begin{aligned}
1+\omega_1 &\equiv 1\\
\omega_1 &= 0
\end{aligned}
$$

即 $\omega_1=0$.从左侧我们得到

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1+1-w_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1+u_1+1-w_1 &= 0 \Rightarrow w_1=1, l_1=u_1=0 \\ l_2+u_2 &= 0 \Rightarrow l_2=u_2=0 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ = \quad & B^A(x_1\otimes x_1)\otimes B^H(x_1\otimes x_1) \end{aligned}$$

根据 (405)，这一点已经成立。

24.3. 情形 x_1。 从右侧可得

$$\begin{aligned} 1+\omega_1 &\equiv 0 \\ \omega_1 &= 1 \end{aligned}$$

即 $\omega_1=1$.从左侧可得

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv w_1 \\ l_1+u_1+1-w_1 &= 1 \Rightarrow l_1+u_1=w_1 \\ l_2+u_2 &= 0 \Rightarrow l_2=u_2=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{w_1=0}\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0 \\ l_1+u_1=w_1}} (-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,0,u_1,0\right)} \\ & B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2} \\ = \quad & B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H) \end{aligned}$$

$$\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,0,u_1,0\right)=e_2u_1+b_2l_1+(a+b_1+b_2+l_1)(u_1+1-w_1)$$

我们考察左侧。

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{w_1=0}\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv w_1}}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0 \\ l_1+u_1=w_1}} (-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,0,u_1,0\right)} \\ & B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(x_1;0,0,0,0) &= a+b_1+b_2 \\ \alpha(1_H;0,0,1,0) &= e_2+a+b_1+b_2 \\ \alpha(1_H;1,0,0,0) &= b_2 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1+b_2} B(g\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1+b_2} B(x_1\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2} \\ & +\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0 \\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{b_2} B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

24.3.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a, g^d) + (-1)^a B(x_1\otimes x_1; G^a, g^d x_1) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d)\right] G^a \otimes g^d$$

and we get

$$B(g\otimes x_1; 1_A, 1_H) + B(x_1\otimes x_1; 1_A, x_1) + B(x_1\otimes x_1; X_1, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0$$

$$-B(g\otimes x_1; G, g) - B(x_1\otimes x_1; G, gx_1) + B(x_1\otimes x_1; GX_1, g) - B(x_1\otimes 1_H; G, g) = 0$$

24.3.2. $G^a \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a, g^d x_2) + (-1)^{1+a} B(x_1\otimes x_1; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_2)\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_2$$

并且得到

$B(g\otimes x_1;\ 1_A,\ \ gx_2) - B(x_1\otimes x_1;\ 1_A,\ \ gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1;\ X_1,\ \ gx_2) - B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2) = 0$和

$-B(g\otimes x_1;\ G, x_2) + B(x_1\otimes x_1;\ G, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_1;\ GX_1, x_2) - B(x_1\otimes 1_H;\ G, x_2) = 0$根据这些元素的形式，这些条件均成立。

24.3.3. $G^a \otimes g^d x_1$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a, g^d x_1) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1$$

并得到

$$B(g\otimes x_1; 1_A, gx_1) + B(x_1\otimes x_1; X_1, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G, x_1) + B(x_1\otimes x_1; GX_1, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.4. $G^a X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1) - B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d)\right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, g) - B(x_1\otimes x_1; X_2, gx_1) - B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, g) - B(x_1\otimes 1_H; X_2, g) = 0$$

and

$B(g\otimes x_1;\ GX_2,\ \ 1_H) + B(x_1\otimes x_1;\ GX_2,\ \ x_1) - B(x_1\otimes x_1;\ GX_1X_2,\ \ 1_H) - B(x_1\otimes 1_H;\ GX_2,\ \ 1_H) = 0$鉴于元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.5. $G^a X_1 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d$$

因此我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, g) - B(x_1\otimes x_1; X_1, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1, g) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1, 1_H) + B(x_1\otimes x_1; GX_1, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

24.3.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2$$

于是我们得到

$$B(g\otimes x_1; 1_A, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1, x_1 x_2) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, g x_1 x_2) = 0$$

根据元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_2) + (-1)^a B(x_1\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d x_2$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_2, x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1;\ GX_2, g x_2) - B(x_1\otimes x_1;\ GX_2, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1;\ GX_1 X_2, g x_2) - B(x_1\otimes 1_H;\ GX_2, g x_2) = 0$$

根据元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_2) + (-1)^a B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1, x_1 x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1, g x_2) - B(x_1\otimes x_1; GX_1, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, g x_2) = 0$$

这些条件根据元素的形式得以满足。

24.3.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1) - B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_1$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, x_1) - B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_2, x_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_2, g x_1) - B(x_1\otimes x_1; GX_1 X_2, g x_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_2, g x_1) = 0$$

这些条件根据元素的形式得以满足。

24.3.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1) G^a X_1 \otimes g^d x_1$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1, g x_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, g x_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

24.3.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d$$

并得到

$$B(g\otimes x_1; X_1X_2, 1_H) + B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_1X_2, g) - B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

24.3.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1x_2$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

24.3.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) G^aX_1\otimes g^dx_1x_2$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_2$$

并且得到

$$B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_1X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些条件均得到满足。

24.3.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1$$

并且我们得到

$$B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_1X_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些条件得以满足。

24.3.16. $G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^a\,B(g\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2$$

于是得到

$$B(g\otimes x_1;X_1X_2,x_1x_2)-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1x_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1x_2)=0$$

根据元素的形式，这些等式成立。

24.4. 情形 x_2。等式右边为零。

对于等式左侧，我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e &\equiv 1\\ l_1+u_1+1-w_1 &= 0\Rightarrow l_1=u_1=0,w_1=1\\ l_2+u_2 &= 1\end{aligned}$$

由于

$$\alpha\left(1_H;0,l_2,0,u_2\right)=\left(a+b_1+b_2+l_2\right)u_2.$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}\,B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ +\quad&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&B\left(x_1\otimes x_1\right)\\ =\;&-2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)1_A\otimes gx_1x_2+\\ -\;&2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)G\otimes gx_1+\\ &+2\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]X_1\otimes gx_1+\\ &+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes gx_1+\\ &+2\left[B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1,gx_1x_2+\\ &+2\left[+B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_1.\end{aligned}$$

我们只需考虑上面这些元素的系数出现的情形。

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}\,B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ +\quad&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}\,B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ +\quad&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0\end{aligned}$$

现在我们在上面的等式中寻找 $B(x_1\otimes x_1;\,1_A,gx_1x_2)$ 项。它只在满足以下条件时出现在第一项中

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2=0\\ e_1 &= 1\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}(-1)^a\,B(x_1\otimes x_1;G^a,g^dx_1x_2)G^a\otimes g^dx_1$$

因此，我们需要考虑第二项中何时出现基元素$G^a \otimes g^d x_1$. 这意味着

$$e_2 = 0.$$

因此我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(x_1 \otimes x_1; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1 \otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1; 1_A, g x_1 x_2) + B(x_1 \otimes x_1; X_2, g x_1) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes x_1; G, x_1 x_2) + B(x_1 \otimes x_1; G X_2, x_1)$$

根据该元素的形式，这些条件均成立。
$B(x_1 \otimes x_1;\ G,\ g x_1)$。该项不能出现在上面的等式中。
$B(x_1 \otimes x_1; X_1,\ g x_1)$。该项不能出现在上面的等式中。
$B(x_1 \otimes x_1; X_2,\ g x_1)$。此项已出现在情形 $B(x_1 \otimes x_1;\ 1_A,\ g x_1 x_2)$ 中，根据该元素的形式，此情形已满足。

$B(x_1 \otimes x_1; G X_1,\ g x_1 x_2)$。我们按照上文的做法。从第一项得到

$$b_1 = e_1 = 1, b_2 = 0 \Rightarrow G^a X_1 \otimes g^d x_1$$

从第二项得到

$$e_2 = 0$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_1 \otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_1 = 0$$

并得到

$$B(x_1 \otimes x_1; G X_1, g x_1 x_2) + B(x_1 \otimes x_1; G X_1 X_2, g x_1) = 0$$

这已是已知的。
$B(x_1 \otimes x_1; G X_1 X_2,\ g x_1)$。此项已出现在上文的情形中。

24.5. 情形 $x_1 x_2$. 右侧为零。左侧给出

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{w_1=0}^{1} \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1}; l_1, l_2, u_1, u_2\right)} \\
&B(g^{n_1+w_1} x_1^{w_1} \otimes x_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
&G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1-w_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad &\sum\nolimits_{\omega_1=0}^{\nu_1} B^A(x_1 \otimes x_1^{\nu_1-\omega_1}) \otimes B^H(x_1 \otimes x_1^{\nu_1-\omega_1}) \otimes g^{1+\omega_1} x_1^{\omega_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a + b_1 + b_2 + l_1 + l_2 + d + e_1 + e_2 + u_1 + u_2 &\equiv 0 \\
l_1 + u_1 + 1 - w_1 &= 1 \Rightarrow l_1 + u_1 = w_1 \\
l_2 + u_2 &= 1
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 + w_1 \\
l_1 + u_1 + 1 - w_1 &= 1 \Rightarrow l_1 + u_1 = w_1 \\
l_2 + u_2 &= 1
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
\alpha\left(x_1; 0, 0, 0, 1\right) &= (a + b_1 + b_2)(1 + 1) + 1 \equiv 1 \\
\alpha\left(x_1; 0, 1, 0, 0\right) &= (a + b_1 + b_2 + 1) \\
\alpha\left(1_H; 0, 0, 1, 1\right) &= 1 + e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(1_H;0,1,1,0\right) &= e_2+a+b_1+b_2+1\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &= a+b_1\\ \alpha\left(1_H;1,1,0,0\right) &= 1+b_2\end{aligned}$$

我们得到左侧为

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}} -B(g\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1}\,B(g\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ +\quad&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1}\,B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\end{aligned}$$

24.5.1. $G^a\otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[\begin{array}{c}-B(g\otimes x_1;G^a,g^dx_2)+(-1)^aB(g\otimes x_1;G^aX_2,g^d)+B(x_1\otimes x_1;G^a,g^dx_1x_2)\\ +(-1)^aB(x_1\otimes x_1;G^aX_2,g^dx_1)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1,g^dx_2)+B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]$$
$$G^a\otimes g^d=0$$

并且得到

$$\begin{array}{c}-B(g\otimes x_1;1_A,x_2)+B(g\otimes x_1;X_2,1_H)+B(x_1\otimes x_1;1_A,x_1x_2)\\ +B(x_1\otimes x_1;X_2,x_1)-B(x_1\otimes x_1;X_1,x_2)+B(x_1\otimes x_1;X_1X_2,1_H)=0\end{array}$$

and

$$\begin{array}{c}-B(g\otimes x_1;G,gx_2)-B(g\otimes x_1;GX_2,g)+B(x_1\otimes x_1;G,gx_1x_2)\\ -B(x_1\otimes x_1;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_1;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1;GX_1X_2,g)=0\end{array}$$

根据元素的形式，这些条件均得到满足。

24.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[(-1)^aB(g\otimes x_1;G^aX_2,g^dx_2)+(-1)^{1+a}B(x_1\otimes x_1;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^dx_2)\right]$$
$$G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且得到

$$B(g\otimes x_1;X_2,gx_2)-B(x_1\otimes x_1;X_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1;X_1X_2,gx_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_1;GX_2,x_2)+B(x_1\otimes x_1;GX_2,x_1x_2)+B(x_1\otimes x_1;GX_1X_2,x_2)=0$$

根据这些元素的形式，这些条件均得以满足。

24.5.3. $G^a \otimes g^d x_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^a B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1) + \\ (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并且得到

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; 1_A, g x_1 x_2) + B(g\otimes x_1; X_2, g x_1) + \\ -B(x_1\otimes x_1; X_1, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1) = 0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G, x_1 x_2) - B(g\otimes x_1; G X_2, x_1) + \\ +B(x_1\otimes x_1; G X_1, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1) = 0 \end{array}$$

根据元素的形式，这些条件均成立。

24.5.4. $G^a X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \right]$$
$$G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, g x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_2, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_2, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_2) = 0.$$

这两者都已被找到。

24.5.5. $G^a X_1 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_2) + (-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d) + \\ B(x_1\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; X_1, g x_2) - B(g\otimes x_1; X_1 X_2, g) + \\ +B(x_1\otimes x_1; X_1, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1) = 0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G X_1, x_2) + B(g\otimes x_1; G X_1 X_2, 1_H) + \\ B(x_1\otimes x_1; G X_1, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1) = 0 \end{array}$$

鉴于这些元素的形式，这些条件均得到满足。

24.5.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2) \right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes x_1; X_2, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_2, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些条件均得到满足。

24.5.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 这是不可能的

24.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1X_2, x_2) + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这两者都已被发现。

24.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$。 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g \otimes x_1; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1 \otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这两者都已被发现。

24.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g \otimes x_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(g \otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

并得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, x_1x_2) - B(g \otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些条件均得到满足。

24.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g \otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_2) + B(x_1 \otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1X_2, x_2) + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0\ .$$

这两个结果此前都已找到。

24.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 这是不可能的

24.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g \otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这两个结果此前都已被发现。

24.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 这是不可能的

24.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) = 0\ .$$

它们都已被找到。

24.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 这是不可能的

24.6. **情形** gx_1。 卡西米尔条件的右侧项为零。左侧项给出 u s

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1+w_1\\ l_1+u_1+1-w_1 &= 1\Rightarrow l_1+u_1=w_1\\ l_2+u_2 &= 0\Rightarrow l_2=u_2=0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1+w_1}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=w_1}}^{e_1}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,0,u_1,0\right)}\\ &B(g^{n_1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}. \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} B\left(x_1\otimes x_1; gx_1\right) &= \sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)}\,B(g\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &\quad G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

因此我们得到

$$B(g\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

由于根据（24）

$$B(g\otimes x_1) = (1_A\otimes g)B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes g)$$

这已由（399）得知。

24.7. **情形** gx_2。 右侧为零。

左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1+1-w_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1+1-w_1 &= 0\Rightarrow w_1=1, l_1=u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1. \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)}\,B(x_1\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\ &\qquad G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2} = 0 \end{aligned}$$

因为根据 (405) $B(x_1\otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$ 只要 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$，我们就知道这已经为零。

24.8. 情形 gx_1x_2。 右侧为零。左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1+1-w_1 &\equiv 1\\ l_2+u_2 &\equiv 1. \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv w_1\\ l_1+u_1+1-w_1 &= 1\Rightarrow l_1+u_1=w_1\\ l_2+u_2 &= 1. \end{aligned}$$

As

$\alpha(x_1;0,0,0,1)=\alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};0,0,0,1)(a+b_1+b_2)(1+n_1+n_2)+m+n_1\alpha(x_1;0,1,0,0)=\alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};0,1,0,0)(1+a+b_1)(n_1+n_2)=(a+b_1+b_2+1)\alpha(1_H;0,0,1,1)=\alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};0,0,1,1)=1+e_2+(a+b_1+b_2)(n_1+n_2)+n_1=1+e_2\alpha(1_H;0,1,1,0)=\alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};0,1,1,0)=e_2+(a+b_1+b_2+1)(1+n_1+n_2)+m=e_2+a+b_1+b_2+1$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;1,0,0,1) &= \alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};1,0,0,1)=b_2+(a+b_1+b_2+1)(1+n_1+n_2)+m+n_1+(n_2+1)\\ &\equiv b_2+(+b_2+1)+1\equiv a+b_1\\ \alpha(1_H;1,1,0,0) &= \alpha(g^m x_1^{n_1}x_2^{n_2};1,1,0,0)=1+b_2+(a+b_1+b_2)(n_1+n_2)+n_2=1+b_2 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}} -B(g\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1}B(g\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+a+b_1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0 \end{aligned}$$

24.8.1. $G^a\otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,\\ a+d\equiv 1}}{}^{d=0}\Big[+(-1)^{a}B(g\otimes x_1;G^a,g^dx_2)+(-1)^{a}B(g\otimes x_1;G^aX_2,g^d)+B(x_1\otimes x_1;G^a,g^dx_1x_2)\Big)(x_1\otimes x_1;G^aX_2,g^dx_1)+(-1)^{a+1}B(x_1\otimes x_1;G^aX_1,g^dx_2)+B(x_1\otimes x_1;G^aX_1X_2,g^d)\Big]$$

$$G^a\otimes g^d=0$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1;1_A,gx_2)+B(g\otimes x_1;X_2,g)+B(x_1\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+\\ &+B(x_1\otimes x_1;X_2,gx_1)-B(x_1\otimes x_1;X_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1;X_1X_2,g)=0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1;G,x_2)-B(g\otimes x_1;GX_2,1_H)+B(x_1\otimes x_1;G,x_1x_2)+\\ &-B(x_1\otimes x_1;GX_2,x_1)+B(x_1\otimes x_1;GX_1,x_2)+B(x_1\otimes x_1;GX_1X_2,1_H)=0 \end{aligned}$$

鉴于该元素的形式，这些条件均得以满足。

24.8.2. $G^a \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a\, B(g\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_2) + (-1)^{1+a}\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

并得到

$$B(g\otimes x_1; X_2, x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_2, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_2, gx_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

根据该元素的形式，这些条件成立。

24.8.3. $G^a \otimes g^d x_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G^a, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(g\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_1) + \\ (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1)\end{array}\right]$$
$$G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; 1_A, x_1x_2) + B(g\otimes x_1; X_2, x_1) +$$
$$-B(x_1\otimes x_1; X_1, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G, gx_1x_2) - B(g\otimes x_1; GX_2, gx_1) +$$
$$+B(x_1\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

根据这些元素的形式，这些条件成立。

24.8.4. $G^aX_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(g\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_2) + B(x_1\otimes x_1; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right]$$
$$G^aX_2 \otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_2, gx_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

这两个结果都已经求得。

24.8.5. $G^aX_1 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_1; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^d) \\ +B(x_1\otimes x_1; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1) + \end{array}\right] G^aX_1 \otimes g^d = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes x_1; X_1, x_2) - B(g\otimes x_1; X_1X_2, 1_H) +$$
$$+B(x_1\otimes x_1; X_1, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; GX_1, gx_2) + B(g\otimes x_1; GX_1X_2, g) +$$
$$+B(x_1\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

24.8.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

并得到

$$B(g\otimes x_1; X_2, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_2, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件均得到满足。

24.8.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 这是不可能的

24.8.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2) + (-1)^a B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes x_1; X_1 X_2, g x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; G X_1 X_2, x_2) - B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件均得到满足。

24.8.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes x_1; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_1; X_2, g x_1 x_2) - B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_2, x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0.$$

这两者此前都已被发现。

24.8.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes x_1; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1} B(g\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_1 = 0$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, g x_1 x_2) - B(g\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_1, x_1 x_2) + B(g\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些条件均得到满足。

24.8.11. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(g\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_2) + B(x_1\otimes x_1; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1 X_2, g x_2) + B(x_1\otimes x_1; X_1 X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_1; G X_1 X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_1; G X_1 X_2, x_1 x_2) = 0.$$

这两者都已被发现。

24.8.12. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$. 这是不可能的

24.8.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，这些条件得以满足。

24.8.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2$。这是不可能的

24.8.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(g\otimes x_1; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这两者都已找到。

24.8.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2$。 这是不可能的。

$$25.\ B\left(x_1\otimes x_2\right)$$

由公式（36）可得

$$\begin{aligned} B(x_1\otimes x_2) &= B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2) - (1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g) \\ &\quad +(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g) \end{aligned} \tag{406}$$

并得到

我们为 $x_1\otimes x_2$ 写出卡西米尔条件

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{w_1=0}^{1}\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)} \\ &B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = &\sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1} B^A(x_1\otimes x_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(x_1\otimes x_2^{1-\omega_2})\otimes g^{1+\omega_2}x_2^{\omega_2}. \end{aligned}$$

25.1. **情形** 1_H。 由左侧可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1+1-w_1 &= 0 \Rightarrow w_1=1, l_1=u_1=0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

从而得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$
$$\otimes 1_H = 0$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ for every } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

鉴于该元素的形式，此条件得到满足。

25.2. **情形** g。 和往常一样，这不会提供更多信息。

25.3. **情形** x_1。 右侧没有任何信息。左侧给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1+1-w_1 &= 1 \Rightarrow l_1+u_1=w_1 \\ l_2 &= u_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv w_1 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\alpha\left(x_1;0,0,0,0\right)=a+b_1+b_2 \\ &\alpha\left(1_H;0,0,1,0\right)=e_2+(a+b_1+b_2) \\ &\alpha\left(1_H;1,0,0,0\right)=b_2 \end{aligned}$$

我们得到等式为

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+b_1+b_2}B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+ \\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{b_2}B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0 \end{aligned}$$

25.3.1. $G^a\otimes g^d$。 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[\begin{array}{c}(-1)^aB(g\otimes x_2;G^a,g^d)+(-1)^aB(x_1\otimes x_2;G^a,g^dx_1)\\ +B(x_1\otimes x_2;G^aX_1,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes x_2;1_A,1_H)+B(x_1\otimes x_2;1_A,x_1)+B(x_1\otimes x_2;X_1,1_H)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;G,g)-B(x_1\otimes x_2;G,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;GX_1,g)=0$$

根据这些元素的形式，这些条件均成立。

25.3.2. $G^a\otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[\begin{array}{c}(-1)^aB(g\otimes x_2;G^a,g^dx_2)+(-1)^{1+a}B(x_1\otimes x_2;G^a,g^dx_1x_2)\\ +B(x_1\otimes x_2;G^aX_1,g^dx_2)\end{array}\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且得到

$$B(g\otimes x_2;1_A,gx_2)-B(x_1\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;X_1,gx_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;G,x_2)+B(x_1\otimes x_2;G,x_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;GX_1,x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，满足上述条件。

25.3.3. $G^a\otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1}\left[(-1)^aB(g\otimes x_2;G^a,g^dx_1)+B(x_1\otimes x_2;G^aX_1,g^dx_1)\right]G^a\otimes g^dx_1=0$$

因此我们得到

$$B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;X_1,gx_1)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;G,x_1)+B(x_1\otimes x_2;GX_1,x_1)=0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

25.3.4. $G^aX_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_2, g^d) + \\ (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1) - B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^d) \end{array} \right] G^aX_2\otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_2; X_2, g) - B(x_1\otimes x_2; X_2, gx_1) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, g) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_2, 1_H) + B(x_1\otimes x_2; GX_2, x_1) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

根据元素的形式，这些等式成立。

25.3.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1, g^d) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1) \end{array} \right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(g\otimes x_2; X_1, g) - B(x_1\otimes x_2; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_1, 1_H) + B(x_1\otimes x_2; GX_1, x_1) = 0$$

根据元素的形式，这些等式成立。

25.3.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a}\, B(g\otimes x_2; G^a, g^dx_1x_2) \\ +B(x_1\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) \end{array} \right] G^a\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并得到

$$B(g\otimes x_2; 1_A, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些等式成立。

25.3.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_2) + \\ (-1)^{a}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \end{array} \right]$$
$$G^aX_2\otimes g^dx_2 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2; X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_2, gx_2) - B(x_1\otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些等式成立。

25.3.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$.

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(g\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^{a}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

我们得到

$$-B(g\otimes x_2; X_1, x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_1, gx_2) - B(x_1\otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些结论成立。

25.3.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1) - B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes x_2; X_2, x_1) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$+B(g\otimes x_2; GX_2, gx_1) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

25.3.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$。

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1) G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$-B(g\otimes x_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_1, gx_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

25.3.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c}(-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^aX_1X_2) +\\ (-1)^a\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\end{array}\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

并得到

$$B(g\otimes x_2; X_1X_2, 1_H) + B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_1X_2, g) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

25.3.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c}(-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2)\\ -B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\end{array}\right] G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

25.3.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且得到

$$-B(g\otimes x_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

$$B(g\otimes x_2; GX_1, x_1x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些结论成立。

25.3.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} (-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array} \right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes x_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_1X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这些结论成立。

25.3.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

我们得到

$$B(g\otimes x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

根据该元素的形式，这个结论成立。

25.3.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(g\otimes x_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

根据该元素的形式，这一结论成立。

25.4. **情形** x_2。左侧得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1+1-w_1 &= 0 \Rightarrow w_1 = 1 \text{ and } l_1 = u_1 = 0 \\ l_2+u_2 &= 1 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

右侧得到

$$\omega_2 = 1$$

因此得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)} \\ & B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes x_2 \\ = & \sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1} B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_2 \end{aligned}$$

i.e.

as

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,0,1) &\equiv a+b_1+b_2 \\ \alpha(1_H;0,1,0,0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2) \\ & G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\otimes x_2 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\otimes x_2\\
=\;& B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_2.
\end{aligned}
$$

25.4.1. $G^a\otimes g^d$。我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^a B(x_1\otimes x_2; G^a, g^dx_2) + B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^d)\right] G^a\otimes g^d\\
=\;& B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^d)G^a\otimes g^d
\end{aligned}
$$

我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; 1_A, x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_2, 1_H) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes x_2; G, gx_2) + B(x_1\otimes x_2; GX_2, g) - B(x_1\otimes 1_H; G, g) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

25.4.2. $G^a\otimes g^dx_2$.

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2\\
=\;& B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2
\end{aligned}
$$

我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; X_2, gx_2) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0$$

and

$$B(x_1\otimes x_2; GX_2, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

25.4.3. $G^a\otimes g^dx_1$. 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} \left[(-1)^a B(x_1\otimes x_2; G^a, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1)\right] G^a\otimes g^dx_1\\
=\;& B(x_1\otimes 1_H; G^a, g^dx_1)G^a\otimes g^dx_1
\end{aligned}
$$

我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_2, gx_1) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes x_2; G, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; GX_2, x_1) - B(x_1\otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些关系成立。

25.4.4. $G^aX_2\otimes g^d$. 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}} (-1)^{a+1} B(x_1\otimes x_2; G^aX_2, g^dx_2)G^aX_2\otimes g^d\\
=\;& B(x_1\otimes 1_H; G^aX_2, g^d)G^aX_2\otimes g^d
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; X_2, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; X_2, g) = 0$$

and

$$B(x_1\otimes x_2; GX_2, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些结论成立。

25.4.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1, g^dx_2) + B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^d)\right] G^aX_1 \otimes g^d + \\ = \quad & B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^d) G^aX_1 \otimes g^d \end{aligned}$$

我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_2; X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, g) - B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) = 0.$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_1, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0$$

由元素的形式可知，这些等式成立。

25.4.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(x_1 \otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G^a, g^dx_1x_2)\right] G^a \otimes g^dx_1x_2 = 0.$$

并且我们得到

$$B(x_1 \otimes x_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

由元素的形式可知，这些等式成立。

25.4.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$. 左侧没有任何内容。因此我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_2) G^aX_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

从而得到

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) &= 0 \\ B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) &= 0 \end{aligned}$$

根据这些元素的形式，这些等式成立。

25.4.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) G^aX_1 \otimes g^dx_2 \\ = \quad & \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_2) G^aX_1 \otimes g^dx_2 \end{aligned}$$

并且得到

$$B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) = 0.$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这些等式成立。

25.4.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_2, g^dx_1)\right] G^aX_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

并得到

$$-B(x_1 \otimes x_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些结论成立。

25.4.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 + \\ = & \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1) G^aX_1 \otimes g^dx_1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_2; X_1, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_1) - B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

25.4.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^d)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$-B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

25.4.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2) G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; GX_2 \otimes gx_1x_2) = 0$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

25.4.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[B(x_1 \otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

根据该元素的形式，这些等式成立。

25.4.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} B(x_1 \otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_2) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2 = 0$$

并且我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些结论成立。

25.4.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并得到

$$+B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这些关系成立。

25.4.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(x_1\otimes 1_H; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并得到

$$B(x_1\otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些关系成立。

25.5. **情形** x_1x_2。 我们从左侧得到

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{w_1=0}^{1}\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}\\
&B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\quad &\sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1} B^A(x_1\otimes x_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(x_1\otimes x_2^{1-\omega_2})\otimes g^{1+\omega_2}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1+u_1+1-w_1 &= 1 \text{ i.e.} l_1+u_1 = w_1\\
l_2+u_2 &= 1\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1+w_1
\end{aligned}$$

右侧为零。因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;0,l_2,0,u_2)}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&\qquad G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\l_1+u_1=1}}^{e_1}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&\qquad B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} = 0
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e=0\\a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\
&\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,,d,e_1,e_2=0\\a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)}\, B(g\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\a+b_1+b_2+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\a+b_1+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\
&+\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\a+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1\otimes x_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2) G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}
\end{aligned}$$

$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}}(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

由于

$$\begin{aligned}B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \text{ and}\\ B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0\end{aligned}$$

所有加项都等于零，因此等式成立。

25.6. 情形 gx_1**.** 从左侧

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= w_1\\ l_2 &= u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1+w_1\end{aligned}$$

右侧为零。我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1 \text{ and}\\ B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) &= 0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0\end{aligned}$$

所有加项都等于零，因此等式成立。

25.7. 情形 gx_2。 由左侧可得

$$\begin{aligned}l_1+u_1+1-w_1 &= 0\Rightarrow w_1=1,l_1=u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\end{aligned}$$

右侧无内容。因此我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits^{e_2}_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,0,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}=0$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ +\quad &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\end{aligned}$$

由于

$$B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ for } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

所有加项都等于零，等式成立。

25.8. **情形** gx_1x_2。 右侧没有任何内容。从左侧我们得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= w_1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv w_1 \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv w_1}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=w_1}}^{e_1}\sum_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}$$
$$B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}$$

因此我们得到

$$\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv w_1+1}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=w_1}}^{e_1}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,0,u_1,1\right)}$$
$$B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}+$$
$$\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv w_1+1}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=w_1}}^{e_1}(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1};l_1,1,u_1,0\right)}$$
$$B(g^{1+w_1}x_1^{w_1}\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}$$

因此

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}$$
$$B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,1)}$$
$$B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}+$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)}$$
$$B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,u_1,0)}$$
$$B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2}$$

最后我们得到

$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}$$
$$+\sum_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+$$
$$\sum_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$\sum_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}$$
$$\sum_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(x_1;0,0,0,1\right) &\equiv 1\\ \alpha\left(x_1;0,1,0,0\right) &\equiv a+b_1+b_2+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &\equiv 1+e_2\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &\equiv a+b_1\\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right) &\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\\ \alpha\left(1_H;1,1,0,0\right) &\equiv 1+b_2\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}} -B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}} B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+a+b_1}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\end{aligned}$$

25.8.1. $G^a\otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}\left[\begin{array}{c}-B(g\otimes x_2;G^a,g^dx_2)+(-1)^a\,B(g\otimes x_2;G^aX_2,g^d)\\ +B(x_1\otimes x_2;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1,g^dx_2)\\ +(-1)^a\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_2,g^dx_1)+B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^d)\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

并且得到

$$\begin{gathered}-B(g\otimes x_2;1_A,gx_2)+B(g\otimes x_2;X_2,g)+B(x_1\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+\\ -B(x_1\otimes x_2;X_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_2;X_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,g)=0\end{gathered}$$

and

$$\begin{gathered}-B(g\otimes x_2;G,x_2)-B(g\otimes x_2;GX_2,1_H)+B(x_1\otimes x_2;G,x_1x_2)+\\ +B(x_1\otimes x_2;GX_1,x_2)-B(x_1\otimes x_2;GX_2,x_1)+B(x_1\otimes x_2;GX_1X_2,1_H)=0\end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

25.8.2. $G^a\otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}\left[\begin{array}{c}(-1)^a\,B(g\otimes x_2;G^aX_2,g^dx_2)+\\ (-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_2)\end{array}\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且得到

$$B(g\otimes x_2;X_2,x_2)-B(x_1\otimes x_2;X_2,x_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,x_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;GX_2,gx_2)+B(x_1\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

25.8.3. $G^a \otimes g^d x_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_2; G^a, g^d x_1 x_2) + (-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^a X_2, g^d x_1) + \\ (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2; 1_A,\ \ x_1x_2) + B(g\otimes x_2; X_2,\ \ x_1) - B(x_1\otimes x_2;\ X_1,\ \ x_1x_2) + B(x_1\otimes x_2;\ X_1X_2,\ x_1) = 0$$

以及

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes x_2; G, gx_1x_2) - B(g\otimes x_2; GX_2, gx_1) + B(x_1\otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) \\ +B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0 \end{array}$$

这根据元素的形式成立。

25.8.4. $G^a X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_2; G^a X_2, g^d x_2) + B(x_1\otimes x_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array} \right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2; X_2, x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_2,\ \ gx_2) + B(x_1\otimes x_2;\ GX_2,\ \ gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_2) = 0$$

二者均已得到。

25.8.5. $G^a X_1 \otimes g^d$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes x_2; G^a X_1, g^d x_2) + (-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d) \\ +B(x_1\otimes x_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array} \right] G^a X_1 \otimes g^d = 0.$$

于是得到

$$-B(g\otimes x_2; X_1, x_2) - B(g\otimes x_2; X_1X_2, 1_H) + B(x_1\otimes x_2; X_1, x_1x_2) - B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_1,\ \ gx_2) + B(g\otimes x_2; GX_1X_2,\ \ g) + B(x_1\otimes x_2;\ GX_1,\ \ gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1) = 0$$

二者均已得到。

25.8.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(g\otimes x_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

于是得到

$$B(g\otimes x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes x_2; GX_2, x_1x_2) + B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些关系成立。

25.8.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。 不存在这类加项

25.8.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2) + (-1)^a\, B(x_1\otimes x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes x_2; X_1X_2, gx_2) + B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes x_2; GX_1X_2, x_2) - B(x_1\otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件成立。

25.8.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}\left[-B(g\otimes x_2;G^aX_2,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)\right]G^aX_2\otimes g^dx_1=0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;GX_2,x_1x_2)+B(x_1\otimes x_2;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这些关系成立。

25.8.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}\left[-B(g\otimes x_2;G^aX_1,g^dx_1x_2)+(-1)^{a+1}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1)\right]G^aX_1\otimes g^dx_1=0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)-B(g\otimes x_2;X_1X_2,gx_1)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;GX_1,x_1x_2)+B(g\otimes x_2;GX_1X_2,x_1)=0$$

鉴于该元素的形式，这些关系成立。

25.8.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1}\left[-B(g\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_2)+B(x_1\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)\right]G^aX_1X_2\otimes g^d=0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2;X_1X_2,gx_2)+B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes x_2;GX_1X_2,x_2)+B(x_1\otimes x_2;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这正是我们已经得到的结果。

25.8.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的加项。

25.8.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}(-1)^{a+1}\,B(g\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_1x_2=0$$

并得到

$$-B(g\otimes x_2;X_1X_2,x_1x_2)=0$$

and

$$B(g\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)=0$$

这由该元素的形式可知。

25.8.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 没有加项

25.8.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1}-B(g\otimes x_2;G^aX_1X_2,g^dx_1x_2)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1=0$$

于是得到

$$-B(g\otimes x_2;X_1X_2,x_1x_2)=0$$
$$B(g\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)=0$$

它们刚刚出现在上文中。

25.8.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 不存在这样的加项。

26. $B\left(1\otimes gx_1x_2\right)$

利用（27），对于 $i=1$ 我们得到

$$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_1)=(1_A\otimes x_1)B(gh\otimes gh')+B(x_1h\otimes gh')+B(h\otimes x_1h')$$

于是对于 $h=1_H,\ h'=gx_2$ 并应用 (24)，我们得到

(407) $B(1_H\otimes gx_1x_2)=(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\left(1_A\otimes g\right)+B(x_1\otimes x_2)-B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)$

由于

$$\begin{aligned}B(x_1\otimes x_2)&\overset{(406)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

我们最终得到

$$\begin{aligned}&B(1_H\otimes gx_1x_2)\overset{(407)}{=}(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\left(1_A\otimes g\right)\\&+B(x_1\otimes x_2)-B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)\\=\;&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\left(1_A\otimes g\right)\\&+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\left(1_A\otimes g\right)\\&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\&-(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\&-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

利用 (406) 可得

$$\begin{aligned}B\left(1\otimes gx_1x_2\right)=\;&B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes g+\\&-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)1_A\otimes x_1\\&-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)1_A\otimes x_2\\&+\left[\begin{array}{c}4B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)\\+2B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]1_A\otimes gx_1x_2+\\&+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)G\otimes 1_H+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)G\otimes x_1x_2+\\&\left[2B\left(x_2\otimes 1_H;G,g\right)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]G\otimes gx_1\\&\left[-2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]G\otimes gx_2+\\&+\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]X_1\otimes 1_H+\\&-B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_1\otimes x_1x_2+\\&-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)X_1\otimes gx_1\\&+\left[\begin{array}{c}2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\+B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]X_1\otimes gx_2+\\&+\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]X_2\otimes 1_H\\&+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)X_2\otimes x_1x_2+\\&+\left[\begin{array}{c}-2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\-2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]X_2\otimes gx_1+\\&+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes gx_2+\\&+\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]X_1X_2\otimes g+\\&-\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_1+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_2+\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]GX_1\otimes g+\\
&-B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)GX_1\otimes x_1+\\
&-\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_1\otimes x_2+\\
&\left[-2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]GX_2\otimes g+\\
&+\left[+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_2\otimes x_1+\\
&+B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)GX_2\otimes x_2+\\
&+\left[-2B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_2\otimes gx_1x_2+\\
&+\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes 1_H\\
&+B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1x_2+\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\\+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes gx_1+\\
&+\left[+B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_2
\end{aligned}
$$

将卡西米尔条件写为 $B(1\otimes gx_1x_2)$，可得

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &\sum\nolimits_{\omega_1=0}^{1}\sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1}(-1)^{(1+\omega_2)\omega_1}B^A(1_H\otimes gx_1^{1-\omega_1}x_2^{1-\omega_2})\otimes B^H(1_H\otimes gx_1^{1-\omega_1}x_2^{1-\omega_2})\otimes g^{1+\omega_1+\omega_2}x_1^{\omega_1}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}
$$

26.1. 情形 1_H**.** 我们注意到，等式右边为 0。左侧给出

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0
\end{aligned}
$$

并且由于，我们得到

$$\alpha\left(1_H;0,0,0,0\right)=0$$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}B(1_H\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0$$

由此可推得

$$B(1_H\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

26.2. 情形 g**.** 右侧为

$$B^A(1_H\otimes gx_1x_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1x_2)\otimes g$$

左侧给出

$$
\begin{aligned}
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= 0\\
l_2+u_2 &= 0
\end{aligned}
$$

从而

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1 &= u_1=0 \\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ &= B^A(1_H\otimes gx_1x_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_1x_2) \end{aligned}$$

这成立，因为

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

26.3. 情形 x_1**.** 右侧为

$$-B^A(1_H\otimes gx_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_2)\otimes x_1$$

左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2=0 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,0\right) &= e_2+\left(a+b_1+b_2\right)\left(1+n_1+n_2\right)+m \\ &= e_2+\left(a+b_1+b_2\right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;1,0,0,0\right) &= b_2+\left(a+b_1+b_2+1\right)\left(n_1+n_2\right)+n_2) \\ &= b_2 \end{aligned}$$

等式变为

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{e_2+a+b_1+b_2}\,B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2}+ \\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}}^{1}(-1)^{b_2}\,B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ = \;& -B^A(1_H\otimes gx_2)\otimes B^H(1_H\otimes gx_2) \end{aligned}$$

26.3.1. $G^a\otimes g^d$。我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1}\left[(-1)^a\,B(1_H\otimes gx_1x_2; G^a, g^dx_1)+B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1, g^d)\right]G^a\otimes g^d \\ &+B(1_H\otimes gx_2; G^a, g^d)G^a\otimes g^d \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &B(1_H\otimes gx_1x_2; 1_A, x_1)+B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1, 1_H)+ \\ &+B(1_H\otimes gx_2; 1_A, 1_H)=0. \end{aligned}$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; G, gx_1) + B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1, g)+ \\ +B(1_H \otimes gx_2; G, g) = 0.$$

By

26.3.2. $G^a \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a, g^d x_1x_2)G^a \otimes g^d x_2+ \\ \sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a X_1, g^d x_2)G^a \otimes g^d x_2 \\ +B(1_H \otimes gx_2; G^a, g^d x_2)G^a \otimes g^d x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2)+ \\ +B(1_H \otimes gx_2; 1_A, gx_2) = 0.$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; G, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1, x_2)+ \\ +B(1_H \otimes gx_2; G, x_2) = 0.$$

这些条件通过使用元素的形式得到满足。

26.3.3. $G^a \otimes g^d x_1$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a X_1, g^d x_1)G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1) + B(1_H \otimes gx_2; 1_A, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1, x_1) + B(1_H \otimes gx_2; G, x_1) = 0$$

这些条件通过使用元素的形式得到满足。

26.3.4. $G^a X_2 \otimes g^d$. 左侧为

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a X_2, g^d x_1) - B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a X_1X_2, g^d)\right] G^a X_2 \otimes g^d +$$

由此得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) - B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) + B(1_H \otimes gx_2; X_2, g) = 0$$

and

$$+B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_2, x_1) - B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, 1_H) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, 1_H) = 0$$

which are satisfied in view of the form of the elements.

26.3.5. $G^a X_1 \otimes g^d$. 左侧给出

$$\sum_{\substack{a,d=0 \\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^a X_1, g^d x_1)G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2} \otimes g^d x_2^{e_2}$$

由此得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1) + B(1_H \otimes gx_2; X_1, g) = 0$$

and

$$+B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1, x_1) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, 1_H) = 0$$

根据元素的形式，这些条件均得以满足。

26.3.6. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$. 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a \otimes g^d x_1 x_2$$

并且我们得到

$$B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_1, x_1 x_2) + B(1_H \otimes g x_2; 1_A, x_1 x_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_1, g x_1 x_2) + B(1_H \otimes g x_2; G, g x_1 x_2) = 0$$

根据元素的形式，这些条件得以满足。

26.3.7. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^a B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2) - B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_2$$

并且我们得到

$$B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_2, x_1 x_2) - B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_1 X_2, x_2) + B(1_H \otimes g x_2; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_2, g x_1 x_2) - B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_1 X_2, g x_2) + B(1_H \otimes g x_2; G X_2, g x_2) = 0$$

根据元素的形式，这些条件得以满足。

26.3.8. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$. 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) G^a X_1 \otimes g^d x_2$$

于是得到

$$B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_1, x_1 x_2) + B(1_H \otimes g x_2; X_1, x_2) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_1, g x_1 x_2) + B(1_H \otimes g x_2; G X_1, g x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这些条件得到满足。

26.3.9. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$. 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} -B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) G^a X_2 \otimes g^d x_1$$

于是得到

$$-B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_1 X_2, x_1) + B(1_H \otimes g x_2; X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_1 X_2, g x_1) + B(1_H \otimes g x_2; G X_2, g x_1) = 0$$

根据这些元素的形式，这些条件得到满足。

26.3.10. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。 不存在这样的项。

26.3.11. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} (-1)^a B(1_H \otimes g x_1 x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) G^a X_1 X_2 \otimes g^d$$

于是我们得到

$$B(1_H \otimes g x_1 x_2; X_1 X_2, x_1) + B(1_H \otimes g x_2; X_1 X_2, 1_H) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes g x_1 x_2; G X_1 X_2, g x_1) + B(1_H \otimes g x_2; G X_1 X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

26.3.12. $G^aX_2 \otimes g^d x_1x_{2\circ}$ 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这些条件都成立。

26.3.13. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_{2\circ}$ 没有这样的项。

26.3.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_{2\circ}$ 左侧给出

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$+B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些条件均得到满足。

26.3.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_{1\circ}$ 没有此类项。

26.3.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_{2\circ}$ 没有此类项。

26.4. 情形 $x_{2\circ}$ 右侧为

$$B^A(1_H \otimes gx_1) \otimes B^H(1_H \otimes gx_1) \otimes x_2$$

左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1 &= u_1 = 0\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,0,1\right) &= +\left(a+b_1+b_2\right)\left(1+n_1+n_2\right)+m+n_1\\ &= a+b_1+b_2 \end{aligned}$$

and

$$\alpha\left(1_H;0,1,0,0\right) = \left(a+b_1+b_2+1\right)\left(n_1+n_2\right) = 0$$

我们得到等式为

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}}^{1} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2} \otimes g^dx_1^{e_1} +\\ &+\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1} \otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\ =\;& B^A(1_H \otimes gx_1) \otimes B^H(1_H \otimes gx_1) \end{aligned}$$

26.5. 情形 x_1x_2。 右侧为 0。 左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

这为 0，因为

$B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},\ g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0$ 当 $a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$**26.6. 情形** gx_1 **且** gx_2。 右侧为 0。左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 0 \end{aligned}$$

这为 0，因为

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

情形 gx_2 完全对称。

26.7. 情形 gx_1x_2。 右侧为

$$B^A(1_H\otimes g)\otimes B^H(1_H\otimes g)\otimes gx_1x_2$$

左侧给出

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1. \end{aligned}$$

As

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &= 1+e_2\\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right) &= e_2+a+b_1+b_2+1 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,b_2,d,=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 1}}^{1} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d +\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 1}}^{1} (-1)^{e_2+a+b_1} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\ &\sum\nolimits_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} =$$
$$= B^A(1_H\otimes g)$$

26.7.1. $G^a\otimes g^d$. 我们得到

$$= \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} B(1_H\otimes gx_1x_2; G^a, g^dx_1x_2) + (-1)^a\, B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_2, g^dx_1) + \\ (-1)^{a+1}\, B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1, g^dx_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^d) \end{array} \right] G^a\otimes g^d +$$

并得到

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)$$
$$-B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) = B(1_H\otimes g; 1_A, g)$$

and

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; G, x_1x_2) - B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_2, x_1)$$
$$+B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_1, x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_1X_2, 1_H) = B(1_H\otimes g; G, 1_H).$$

鉴于元素的形式，这些条件均成立。

26.7.2. $G^a\otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{1+a}\, B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right] G^a\otimes g^dx_2$$
$$= \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} B(1_H\otimes g; G^a, g^dx_2)G^a\otimes g^dx_2$$

并得到

$$-B(1_H\otimes gx_1x_2; X_2, x_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1X_2, x_2) = -B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2)$$

and

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = -B(g\otimes 1_H; G, gx_2)$$

鉴于元素的形式，这些条件均成立。

26.7.3. $G^a\otimes g^dx_1$。

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{a+1}\, B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^a\otimes g^dx_1$$
$$= \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d=0\\ a+d\equiv 0}} B(1_H\otimes g; G^a, g^dx_1)G^a\otimes g^dx_1$$

于是我们得到

$$-B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1, x_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; X_1X_2, x_1) = -B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1)$$

and

$$B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) = -B(g\otimes 1_H; G, gx_1)$$

鉴于元素的形式，这些条件得以满足。

26.7.4. $G^aX_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_2)\right]$$

$$G^aX_2 \otimes g^d = \sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_2, g^d) G^aX_2 \otimes g^d$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, x_2) = B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = B(g \otimes 1_H; GX_2, g)$$

鉴于这些元素的形式，这些条件得以满足。

26.7.5. $G^aX_1 \otimes g^d$。 我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array}\right] G^aX_1 \otimes g^d \\ = \quad &\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 0}}^{1} B(g \otimes 1_H; G^aX_1, g^d) G^aX_1 \otimes g^d \end{aligned}$$

于是得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, x_1x_2) - B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, x_1) = B(1_H \otimes g; X_1, 1_H)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1,\ gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1) = B(1_H \otimes g;\ GX_1,\ g),$$

这正是我们在情形 $G^a \otimes g^dx_1$. 中已经得到的结果

26.7.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^a \otimes g^dx_1x_2 = \sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes g; G^a, g^dx_1x_2) G^a \otimes g^dx_1x_2$$

并且得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = B(1_H \otimes g; 1_A, gx_1x_2)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = B(1_H \otimes g; G, x_1x_2)$$

根据这些元素的形式，这些结论成立。

26.7.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。 左侧没有这样的项。因此我们得到

$$B(1_H \otimes g; X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes g; GX_2, x_2) = 0$$

根据该元素的形式，这一结论成立。

26.7.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。 我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^a\, B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1 \otimes g^dx_2 \\ = \quad &\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes g; G^aX_1, g^dx_2) G^aX_1 \otimes g^dx_2 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = B(1_H \otimes g; X_1, gx_2)$$

and

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = B(1_H \otimes g; GX_1, x_2)$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

26.7.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_2 \otimes g^dx_1$$

于是我们得到

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = B(1_H \otimes g; X_2, gx_1)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = B(1_H \otimes g; GX_2, x_1)$$

这由元素的形式可知成立。

26.7.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 左侧没有这样的项。因此我们得到

$$B(1_H \otimes g; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$B(1_H \otimes g; GX_1, x_1) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

26.7.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d=0\\a+d\equiv 1}}^{1} B(1_H \otimes gx_1x_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)G^aX_1X_2 \otimes g^d +$$

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, g\right)$$

and

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H\right)$$

根据元素的形式，这些关系成立。

26.7.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 左侧没有任何内容。我们得到

$$B\left(1_H \otimes g; X_2, x_1x_2\right) = 0$$

and

$$B\left(1_H \otimes g; GX_2, gx_1x_2\right) = 0$$

根据元素的形式，这个关系成立。

26.7.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$。 左侧没有任何内容。我们得到

$$B\left(1_H \otimes g; X_1, x_1x_2\right) = 0$$

and

$$B\left(1_H \otimes g; GX_1, gx_1x_2\right) = 0$$

根据元素的形式，这个关系成立。

26.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$。 左侧没有任何内容。我们得到

$$B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, x_2\right) = 0$$

$$B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_2\right) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些关系成立。

26.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 左侧没有任何内容。我们得到

$$B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1\right) = 0$$

and

$$B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1\right) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些关系成立。

26.7.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$. 左侧没有任何内容。我们得到

$$B\left(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1x_2\right) = 0$$

and

$$B\left(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2\right) = 0$$

根据该元素的形式，这些结论成立。

27. $B\left(x_1 \otimes x_1x_2\right)$

应用（33），我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes x_1x_2) &= B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes g) \\ &\quad -(1_A \otimes g)B(gx_1x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes x_1x_2) = B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes g)$$

利用（406），我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes x_1x_2) &= B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ &\quad +(1_A \otimes gx_2)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ &\quad -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ &\quad -(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &\quad +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1 \otimes 1_H) \\ &\quad -(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned} \tag{408}$$

从而

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes x_1x_2) &= -2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g)1_A \otimes gx_1 + \\ &\quad \left[4B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] G \otimes gx_1x_2 + \\ &\quad + \begin{bmatrix} -4B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 4B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ -2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_1 \otimes gx_1x_2 + \\ &\quad -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)X_2 \otimes gx_1x_2 + \\ &\quad + \begin{bmatrix} -2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_1X_2 \otimes gx_1 + \\ &\quad + \left[-2B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] GX_1 \otimes gx_1 + \\ &\quad + \left[+2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_1 + \\ &\quad + \left[-2B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

我们写出 $B(x_1 \otimes x_1x_2)$ 的卡西米尔公式：

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(g \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \\ &+ \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\ = \ &B^A(x_1 \otimes x_1x_2) \otimes B^H(x_1 \otimes x_1x_2) \otimes 1_H \\ &B^A(x_1 \otimes x_1) \otimes B^H(x_1 \otimes x_1) \otimes gx_2 \\ &(-1)\, B^A(x_1 \otimes x_2) \otimes B^H(x_1 \otimes x_2) \otimes gx_1 \\ &B^A(x_1 \otimes 1_H) \otimes B^H(x_1 \otimes 1_H) \otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;&B^A(x_1\otimes x_1x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\
&B^A(x_1\otimes x_1)\otimes B^H(x_1\otimes x_1)\otimes gx_2\\
&(-1)\,B^A(x_1\otimes x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_2)\otimes gx_1\\
&B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

27.1. $B(x_1\otimes x_1x_2,\ 1_A,\ gx_1)$。现在，我们来求上面等式中的 $B(x_1\otimes x_1x_2;\ 1_A,\ gx_1)$ 各项。得到

$$\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_1=1,e_2=0
\end{aligned}$$

并且，由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0)=0$ 且 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2+(a+b_1+b_2)=0$

$$\begin{aligned}
&+B(x_1\otimes x_1x_2;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes 1_H\\
&B(x_1\otimes x_1x_2;1_A,gx_1)1_A\otimes g\otimes gx_1
\end{aligned}$$

27.1.1. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes 1_H$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;&B^A(x_1\otimes x_1x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\
&B^A(x_1\otimes x_1)\otimes B^H(x_1\otimes x_1)\otimes gx_2\\
&-B^A(x_1\otimes x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_2)\otimes gx_1\\
&B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

第一项左侧不可能。第二项

$$\sum_{u_1=0}^{1}B(x_1\otimes x_1x_2;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes 1_H$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0\\
l_2 &= u_2=0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
d &= 1\\
e_1 &= 1\\
e_2 &= 0\\
a &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

由此得到

$$+B(x_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

右侧只有第一项有贡献

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

因此我们得不到新的结果。

27.1.2. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1$. 左侧第一项

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(g \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; 1_A, g)1_A \otimes g \otimes gx_1$$

左侧第二项

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \end{aligned}$$

因为 $\alpha(1_H; 0,0,1,0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) = 0$和 $\alpha(1_H; 1,0,0,0) = b_2 = 0$, 我们得到

$$\left[B(x_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, g)\right] 1_A \otimes g \otimes gx_1$$

同时考虑右侧 $-B^A(x_1 \otimes x_2) \otimes B^H(x_1 \otimes x_2) \otimes gx_1$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; 1_A, g) + B(x_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, g) = -B(x_1 \otimes x_2; 1_A, g)$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

27.2. $B(x_1 \otimes x_1x_2,\ G,\ gx_1x_2)$。现在我们在卡西米尔等式中寻找 $B(x_1 \otimes x_1x_2,\ G,\ gx_1x_2)$ 中的项，得到

$$a = 1, b_1 = b_2 = 0, d = e_1 = e_2 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{u_1=0}^{1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)} B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2} \\ = \ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \end{aligned}$$

$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes g\otimes x_1x_2$$

27.2.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$。左侧第一项不可能。左侧第二项

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

我们得到

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=l_2=u_2=0\\d&=e_1=e_2=1\\a&=1,b_1=b_2=0\end{aligned}$$

并且我们得到

$$B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(x_1\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H=B(x_1\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$并且我们没有得到新信息。

27.2.2. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$. 左侧第一项不可能。左侧第二项

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2+u_2=1\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&=0\\d&=1,e_1=1,e_2=u_2\\a&=1,b_1=0,b_2=l_2.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+b_2=1$ 且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$ 我们得到

$$\left[-B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$\left[-B(x_1\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;\ GX_2,\ gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_2=B(x_1\otimes x_1;\ G,\ gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2$鉴于这些元素的形式，该式成立。

27.2.3. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_1$。左侧的第一项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0=l_2=u_2\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 1\\d&=1,e_1=0,e_2=1\\a&=1,b_1=0,b_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2=1$ 我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

第二项左侧给出

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$

$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=1 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$[B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)]\,G\otimes gx_2\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$$\left[\begin{array}{l} -B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2) \\ +B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_2;G,gx_2) \end{array}\right] G\otimes gx_2\otimes gx_1=0$$

鉴于该元素的形式，这一条件成立。

27.2.4. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

左侧第一项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2 \\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)=1$和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2+1=1$

$$\begin{aligned} \alpha(x_1;0,0,0,1) &= 1 \\ \alpha(x_1;0,1,0,0) &= a+b_1+b_2+1 \end{aligned}$$

$$[-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)]\,G\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第二项

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &= 0 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &= 1+e_2,\ \alpha(1_H;0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2+1, \\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &= a+b_1 \text{ and } \alpha(1_H;1,1,0,0)=1+b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &= 1+e_2\equiv 0,\ \alpha(1_H;0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1, \\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &= a+b_1\equiv 0 \text{ and } \alpha(1_H;1,1,0,0)=1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)+ \\ B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g) \end{array}\right] G\otimes g\otimes x_1x_2$$

同时考虑左侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)+B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)+ \\ &-B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g) \\ =\ & B(x_1\otimes 1_H;G,g) \end{aligned}$$

根据元素的形式，这一等式成立。

27.3. $B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1,\ gx_1x_2)$。 现在我们在 Casimir 等式中寻找 $B(x_1 \otimes x_1x_2;\ X_1,\ gx_1x_2)$ 的项，并得到

$$a = 0, b_1 = 1, b_2 = 0, d = e_1 = e_2 = 1$$

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l_1=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,u_2)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1^{1-l_1} \\
&\qquad \otimes g x_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{l_1+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
&= (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H \\
&\quad + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
&\quad + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\
&\quad + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 \\
&\quad + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes g x_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2} x_1^{1+1} x_2^{u_2} = 0 \\
&\quad + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes g x_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2} x_1^{1+u_1} x_2^{u_2} = 0
\end{aligned}$$

27.3.1. 情形 $X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$。

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1 \otimes x_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

无 来自左侧的第一项。左侧的第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 1 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0
\end{aligned}$$

于是我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$$

同时处理左侧后，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)$$

因此我们没有得到新信息。

27.3.2. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。 左侧第一项没有贡献，而第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)=1$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$\left[-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)\right]X_1\otimes gx_1\otimes gx_2$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)=B(x_1\otimes x_1;X_1,gx_1)$$

根据元素的形式，这一结论成立。

27.3.3. 情形 $X_1\otimes gx_2\otimes gx_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=1\\ a &= 0,b_1=1,b_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2=1$我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=1\\ a &= 0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1 \text{ and } l_1=0\Rightarrow u_1=1=e_1,b_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2+(a+b_1+b_2)=1+1\equiv 0$，我们得到

$$B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2,X_1,gx_2)=0$$

这由这些元素的形式可知成立。

27.3.4. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)=1$和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)=(a+b_1+b_2+1)\equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2\\ a &= 0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1,e_1=1,b_2=l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)=1+e_2\equiv 0$以及 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)=0+(0+1+1+1)\equiv 1$，我们得到

$$\left[B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)\\ &-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)=B(x_1\otimes 1_H;X_1,g) \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

27.3.5. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 = b_1, e_2 = 1 \\ a &= 0, b_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$$

同时考察左侧，可得

$$B(g \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

这由元素的形式可知。

27.3.6. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,1) = 1$ 且 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) = a + b_1 + b_2 + 1 = 0$

$$\left[-B(g \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1, e_2 = u_2 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,0,0,1) = a + b_1 = 1$ 且 $\alpha(1_H; 1,1,0,0) = 1 + b_2 = 0$,可得

$$\left[-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2.$$

同样考虑右侧，可得

$$\begin{aligned} -B(g \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) \\ +B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) = B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

27.4. $B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, \quad gx_1x_2)$。

$$a = 0, b_1 = 0, b_2 = 1, d = 1, e_1 = 1, e_2 = 1$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&+\sum_{l_2=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,u_2)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\\
&\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{l_2+u_2}=\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}+=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2+\text{doing}\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,11,1)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}=0
\end{aligned}$$

27.4.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$。 左侧第一项没有得到任何结果。从左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
d &= e_1 = e_2 = 1\\
a &= b_1 = 0, b_2 = 1
\end{aligned}$$

从而得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)$$

因此我们没有得到新的结果。

27.4.2. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 左侧第一项没有任何结果。左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
d &= e_1 = 1, e_2 = u_2\\
a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, e_2 = u_2 = 1
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) = a + b_1 + b_2 = 1$ 我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1)$$

$$\begin{aligned}
-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) &= -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)\\
&= B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1) = 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)
\end{aligned}$$

27.4.3. 情形 $X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$以及 $\alpha(1_H;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2 = 1$

$$\left[B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right] X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) \\ &-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

27.4.4. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0 \Rightarrow e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 1) = 1$, 可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0 \Rightarrow e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1 + e_2 \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 1) = a + b_1 = 1$

$$\left[B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right])X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H, X_2, g) = 0$$

鉴于该元素的形式，这一点成立。

27.4.5. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。 左侧第一项中没有任何内容。从第二项中我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) &= -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ -B(x_1 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) &= +2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right) \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

27.4.6. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(g \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) = a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

由第二项可得

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) = 1 + 0 + 0 + 1 + 1 \equiv 1$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) = 1 + b_2 = 1 + 1 \equiv 0$, w obt in

$$\left[-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) &= -B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ -B(x_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2 &= +2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2) \quad = \quad -B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)$$

这根据元素的形式成立。

27.5. $B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,\ \ gx_1)$。

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$a=0,b_1=1,b_2=1,d=1,e_1=1,e_2=0$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{l_1=0}^{1}\sum_{l_2=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\\&\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_1+l_2+u_1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2}\\=(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes 1_H\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1\otimes gx_1\otimes gx_2\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1\otimes g\otimes x_1x_2\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1++u_1}x_1^{1+1}=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)1_H\otimes gx_1\otimes x_1x_2\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}\,&B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+l_2+u_1}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\end{aligned}$$

27.5.1. 情形 $X_1X_2\otimes gx_1\otimes 1_H$。 左侧第一项没有任何内容。第二项给出

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\d &= 1,e_1=1,e_2=0\\a &= 0,b_1=1,b_2=1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes 1_H.$$

同时考虑右侧可得

$$B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)=B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1).$$

27.5.2. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, e_1 = u_1 = 1, b_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) = 1 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g \otimes x_1x_2; X_1X_2, g) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, g) = 0$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes x_1x_2; X_1X_2, g) &= \begin{bmatrix} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} \\ +B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) &= \begin{bmatrix} -2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} \\ +B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, g) &= \begin{bmatrix} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这由这些元素的形式可知成立。

27.5.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。 左侧第一项没有产生任何内容。从第二项可得

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) = a + b_1 + b_2 = 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) = 0$，因此可得

$$\left[-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)\right] X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_1) = 0$$

$$\begin{aligned} -B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) &= \begin{bmatrix} +4B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 4B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} \\ +B(x_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) &= + \begin{bmatrix} -2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$-B(x_1\otimes x_1;X_1,gx_1) \quad = \quad [-2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)]$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

27.5.4. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2,\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1)\equiv 1$ 且 $\alpha(x_1;0,1,0,0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0+1+1+1\equiv 1$

$$[-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)]\,X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2,\\ a &= 0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,e_1=u_1=1,b_2=l_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,1)\equiv 1+e_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;0,1,1,0)=e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0+0+1+1+1\equiv 1$,因此可得

$$[B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)]\,X_1\otimes g\otimes x_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)+B(x_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)\\ &-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)-B(x_1\otimes 1_H;X_1,g)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

27.5.5. 情形 $X_2\otimes gx_1\otimes gx_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=1,e_2=0,\\ a &= 0,b_1=0,b_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2=1$ 我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,l_1=1,e_2=0,\\ a &= 0,b_1=l_1=1,b_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)=b_2=1$，我们得到

$$-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g\otimes x_1x_2;X_2,gx_1)-B(x_1\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;X_2,gx_1)=0$$

鉴于该元素的形式，这一结论成立。

27.5.6. 情形 $1_H \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$。 此情形已在 $B(x_1 \otimes x_1x_2;\ X_1,\ gx_1x_2)$中出现。

27.6. $B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1,\ gx_1)$。 我们得到

$$a = 1, b_1 = 1, b_2 = 0, d = 1, e_1 = 1, e_2 = 0$$

然后我们得到

$$\begin{aligned}
&+\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{u_1=0}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_1+u_1}x_1^{l_1+u_1}\\
&=(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes 1_H\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+u_1}x_1^{1+1}=0
\end{aligned}$$

27.6.1. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes 1_H$。 左侧第一项没有给出任何结果。从第二项我们得到

$$\begin{aligned}
&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0,\\
a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1) = B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1)$$

这显然成立。

27.6.2. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0,\\
a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1, g)GX_1 \otimes g \otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0,\\
a &= 1, b_1 = 1, l_1 = 0 \Rightarrow e_1 = u_1 = 1, b_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes g \otimes gx_1$$

因此，同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;GX_1,g)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;GX_1,g)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

27.6.3. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=1,e_2=0,\\ a &= 1,b_1=0,b_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 1$，可得

$$-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=1,u_1=0\Rightarrow b_1=l_1=1,e_2=0,\\ a &= 1,1,b_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)=b_2\equiv 0$ 可得

$$B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1.$$

同时考察右侧，我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_1)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;G,gx_1)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

27.7. $B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,\ gx_1)$。

$$\begin{aligned} a &= 1,b_1=0,b_2=1,\\ d &= 1,e_1=1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &= 1+1+l_2+1+1+u_1\equiv l_2+u_1 \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{l_2=0}^{1}\sum\nolimits_{u_1=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)GX_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_2+u_1}x_1^{u_1}x_2^{l_2}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes 1_H+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes g\otimes gx_1+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)G\otimes g\otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

27.7.1. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes 1_H$。 左侧的第一项没有给出任何结果。左侧的第二项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1=1,e_2=0,\\ a &= 1,b_1=0,b_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0)=0$ 我们得到

$$B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes 1_H$$

再考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) = B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1)$$

因此我们没有得到任何新的结果。

27.7.2. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_2, g)GX_2 \otimes g \otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 1$

$$[B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g)]\, GX_2 \otimes g \otimes gx_1.$$

同时考虑右侧可得

$$\begin{aligned} &B(g \otimes x_1x_2; GX_2, g) + B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) \\ &-B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

27.7.3. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 左侧第一项没有贡献。对于第二项，我们得到

$$\begin{aligned} &+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2, \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) = 0$，我们得到

$$[-B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_1; G, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

27.7.4. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2,\\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)\right]G\otimes g\otimes x_1x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2,\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)=1+e_2\equiv 0$, $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv 1$, $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)\\ +B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g) \end{array}\right]G\otimes g\otimes x_1x_2$$

同时考察右侧，最终得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes x_1x_2;G,gx_2)-B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)+B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)\\ &\quad -B(x_1\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+\\ &\quad +B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g)+-B(x_1\otimes 1_H;G,g)=0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，这一结论成立。

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ & B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ & g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\ & +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ & B(x_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ & g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\ = \;& B^A(x_1\otimes x_1x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\ & B^A(x_1\otimes x_1)\otimes B^H(x_1\otimes x_1)\otimes gx_2\\ & (-1)\,B^A(x_1\otimes x_2)\otimes B^H(x_1\otimes x_2)\otimes gx_1\\ & B^A(x_1\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1\otimes 1_H)\otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

27.8. $B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)$. 我们推导出

$$a=b_1=b_2=d=e_1=e_2=1$$

并得到

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{l_1=0}^{1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{1}\sum\nolimits_{u_1=0}^{1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)\\ &\qquad G^aX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_2}x_2^{1+1} + = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes g^{1+u_2}x_1x_2^{1+1} + = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2^{1-u_2} \otimes g^{1+u_2}x_1^{1+0}x_2^{1+1} + = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,u_2)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2} + = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_2}x_1x_2^{1+1} + = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,u_2)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2} = 0.
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{l_1=0}^{1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{1}\sum\nolimits_{u_1=0}^{1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) \\
&\quad G^aX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\
&= (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2 + \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes g^{u_2}x_1x_2 +
\end{aligned}
$$

27.8.1. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$。 我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)$$

而我们没有得到任何新结果。

27.8.2. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。 左侧第一项没有任何内容。由左侧的第二加项可得

$$
\begin{aligned}
&+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
&B(x_1 \otimes x_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 + u_2 &= 1 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2, \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考察右侧，可得

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

27.8.3. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, e_1 = u_1 = 1, b_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$-B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2,\ gx_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2;\ GX_1X_2,\ gx_2) = 0$，这由元素的形式可知成立。

27.8.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$。从左侧的第一个加项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2, \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{gathered} l_1 + u_1 = 1 \\ l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1 \\ d = 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2, \\ a = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, e_1 = u_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{gathered}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) = 1 + e_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

这由元素的形式可知。

27.8.5. 情形 $GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 0, e_2 = 1, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$+B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

27.8.6. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$l_1 = u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1$$
$$a = 1, b_1 = 1, b_2 = l_2$$
$$d = 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 可得

$$+B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

由左侧第二项可得

$$l_1 + u_1 = 1, l_2 + u_2 = 1$$
$$a = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2$$
$$d = 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 可得

$$-B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

同时考察右侧，可得

$$+B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

这由元素的形式可知。

27.8.7. 情形 $GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。 由左侧的第一个加项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$+B(g \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 \equiv 1$，我们得到

$$+B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$+B(g \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一关系成立。

27.8.8. 情形 $GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$. 从左侧的第一项，我们得到

$$\begin{gathered} l_1 = u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 0 \\ d = 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a = 1, b_1 = 0, \\ b_2 - l_2 = 1 \end{gathered}$$

这没有解。从左侧的第二项，我们得到$GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$

$$\begin{gathered} l_1 + u_1 = 1 \\ l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1 \\ d = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1, \\ a = 1, b_2 - l_2 = 1 \end{gathered}$$

这没有解。

27.8.9. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$。从左侧的第一项可得

$$\begin{gathered} l_1 = u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 1 \\ d = 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a = 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{gathered}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$$

从左侧的第二项可得

$$\begin{gathered} l_1 + u_1 = 1 \\ l_2 + u_2 = 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 \equiv 0 \\ d = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, l_2 = 1 \\ a = 1, b_1 = l_1 = 1, b_2 = l_2 = 1 \end{gathered}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

28. $B(x_1 \otimes gx_1)$

利用（39），我们得到

$$
\begin{aligned}
(409) \qquad & B(x_1 \otimes gx_1) \\
= \; & (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\
& +(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H) \\
& -B(gx_1gx_1 \otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

我们推导得

$$
\begin{aligned}
B\left(x_1 \otimes gx_1\right) = \; & 2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right] 1_A \otimes gx_1 + \\
& +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2)G \otimes gx_1x_2 + \\
& +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 + \\
& +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 + \\
& +2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] GX_1 \otimes gx_1 + \\
& +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_1 +
\end{aligned}
$$

我们写出 $B(x_1 \otimes gx_1)$ 的卡西米尔公式:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{w_1=0}^{1} \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1}; l_1,l_2,u_1,u_2\right)} \\
& B(g^{1+w_1}x_1^{w_1} \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2} \\
= \; & \sum_{\omega_1=0}^{1} B^A(x_1 \otimes gx_1^{1-\omega_1}) \otimes B^H(x_1 \otimes gx_1^{1-\omega_1}) \otimes g^{\omega_1}x_1^{\omega_1}
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
& \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(g \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} \\
& +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1 \otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2} \\
= \; & B^A(x_1 \otimes gx_1) \otimes B^H(x_1 \otimes gx_1) \otimes 1_H + \\
& +B^A(x_1 \otimes g) \otimes B^H(x_1 \otimes g) \otimes gx_1 +
\end{aligned}
$$

28.1. $B(x_1 \otimes gx_1;\ 1_A, gx_1)$**.** 现在我们在上面的等式中寻找 $B(x_1 \otimes gx_1;\ 1_A, gx_1)$ 中的项。我们得到

$$
\begin{aligned}
a &= b_1 = b_2 = 0 \\
d &= e_1 = 1 \\
e_2 &= 0
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
& \sum_{u_1=0}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{u_1}x_1^{u_1} \\
= \; & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H \\
& +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)1_A \otimes g \otimes gx_1
\end{aligned}
$$

因此我们有需要查找所有包含 $1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$ 的项，以及包含 $1_A \otimes g \otimes gx_1$ 的项

28.1.1. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$。我们查找包含 $1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$ 的项

$$\begin{aligned}
& \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2} \\
& + \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad & B^A(x_1 \otimes gx_1) \otimes B^H(x_1 \otimes gx_1) \otimes 1_H \\
& + B^A(x_1 \otimes g) \otimes B^H(x_1 \otimes g) \otimes gx_1 +
\end{aligned}$$

在方程左侧的第一项中不存在这样的项。

考察方程左侧的第二项，我们得到

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &= 0 \\
d &= 1 \\
e_1 &= 1 \\
e_2 &= u_2 = 0 \\
a &= 0 \\
b_1 &= l_1 = 0 \\
b_2 &= l_2 = 0
\end{aligned}$$

并且由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

考察方程的右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1, 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

因此我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) - B(x_1 \otimes gx_1, 1_A, gx_1) = 0$$

这是平凡的。

28.1.2. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1$. 以与上述类似的方式继续，我们得到方程左侧的第一项

$$\begin{aligned}
l_2 &= u_2 = 0 \\
l_1 &= u_1 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\
d &= 1 \\
e_1 &= u_1 = 0 \\
e_2 &= u_2 = 0 \\
a &= 0 \\
b_1 &= u_1 = 0 \\
b_2 &= u_2 = 0
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$B(g \otimes gx_1; 1_A, g) 1_A \otimes g \otimes gx_1$$

方程左侧的第二项

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1\\ e_1 &= u_1\\ e_2 &= u_2=0\\ a &= 0\\ b_1 &= l_1\\ b_2 &= l_2=0 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,0\right) &\equiv 0\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,0\right) &\equiv 0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &+\sum_{\substack{b_1,e_1=0\\ b_1+e_1\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;b_1,0,e_1,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1^{b_1},gx_1^{e_1})1_A\otimes g\otimes gx_1\\ =\;& \left[B(x_1\otimes gx_1;1_A,gx_1)+B(x_1\otimes gx_1;X_1,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1 \end{aligned}$$

在第二边我们得到

$$B(x_1\otimes g;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_1$$

因此我们得到等式

$B(g\otimes gx_1;1_A,\ g)+B(x_1\otimes gx_1;1_A,\ gx_1)+B(x_1\otimes gx_1;\ X_1,\ g)-B(x_1\otimes g;\ 1_A,\ g)=0$ 根据元素的形式，这个等式成立。

28.2. $B(x_1\otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$。现在我们在等式中寻找 $B(x_1\otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$ 中的项

$$\begin{aligned} &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\ &+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\ =\;& B^A(x_1\otimes gx_1)\otimes B^H(x_1\otimes gx_1)\otimes 1_H+\\ &+B^A(x_1\otimes g)\otimes B^H(x_1\otimes g)\otimes gx_1+ \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} a=1,b_1=0=b_2,d=e_1=e_2=1\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2\equiv u_1+u_2 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\ =\;& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_2\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes g\otimes x_1x_2$$

28.2.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$。通过查找等式第一项中的 $G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$ 项，我们发现并不存在这样的项。

通过在等式的第二项中寻找 $G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$ 的项，我们得到

$$\begin{array}{l}+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}l_1&=&u_1=0\\ l_2&=&u_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv&0\\ d&=&1,e_1=1,e_2=1\\ a&=&1,b_1=l_1=0,b_2=l_2=0\end{array}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,0)=0$，我们得到

$$B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$$

对等式右侧作同样处理，我们得到

$$B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H=B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$$

因此我们没有得到任何信息。

28.2.2. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$。按照上述方法，第一项中没有项。在第二项中

$$\begin{array}{l}+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}l_1&=&u_1=0\\ l_2+u_2&=&1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv&0\\ d&=&1,e_1=1,e_2=u_2\\ a&=&1,b_1=l_1=0,b_2=l_2\end{array}$$

因此我们得到

$$\begin{array}{rl}&+\sum_{\substack{b_2,e_2\\ b_2+e_2=1}}^{1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,b_2,0,e_2)}\,B(x_1\otimes gx_1;GX_2^{b_2},gx_1x_2^{e_2})G\otimes gx_1\otimes gx_2\\ =&\left[\begin{array}{c}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)\end{array}\right]G\otimes gx_1\otimes gx_2\end{array}$$

As

$$\begin{array}{l}\alpha(1_H;0,0,0,1)=1\\ \alpha(1_H;0,1,0,0)=0\end{array}$$

我们得到

$$\left[-B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_2$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)=0$$

鉴于该元素的形式，这一结论成立。

28.2.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 第一项

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0 \\ l_1 &= u_1 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 0, e_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = u_1 = 0, b_2 = u_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv (1 + 0 + 0)$$

$$(-1)\, B(g \otimes gx_1; G, gx_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

第二项

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+\sum_{\substack{b_1,e_1=0 \\ b_1+e_1=1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;b_1,0,e_1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_1^{b_1}, gx_1^{e_1} x_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ = \quad &\left[(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) = 1 + (1 + 0 + 0) = 0 \\ &\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 0 \end{aligned}$$

$$[B(x_1 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_2)]\, G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

因此，同时考虑方程的右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) - B(g \otimes gx_1; G, gx_2) - B(x_1 \otimes g; G, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

28.2.4. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。第一项

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}l_2+u_2&=1\\ l_1&=u_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 1\\ d&=1,e_1=u_1=0,e_2=u_2\\ a&=1,b_1=l_1=0,b_2=l_2\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{b_2,e_2=0\\ b_2+e_2=1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,b_2,0,e_2)}B(g\otimes gx_1;GX_2^{b_2},gx_2^{e_2})G\otimes g\otimes x_1x_2$$
$$=\begin{bmatrix}(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)}B(g\otimes gx_1;G,gx_2)\\ +(-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)}B(g\otimes gx_1;GX_2,g)\end{bmatrix}G\otimes g\otimes x_1x_2$$

$$\begin{aligned}\alpha(x_1;0,0,0,1)&\equiv 1\\ \alpha(x_1;0,1,0,0)&=a+b_1+b_2+1\equiv 1+0+1+1\equiv 1\end{aligned}$$
$$[-B(g\otimes gx_1;G,gx_2)-B(g\otimes gx_1;GX_2,g)]\,G\otimes g\otimes x_1x_2$$

第二项

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}l_1+u_1&=1\\ l_2+u_2&=1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 0\\ d&=1\\ e_1&=u_1\\ e_2&=u_2\\ a&=1\\ b_1&=l_1\\ b_2&=l_2\end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{b_1,b_2\ e_1\ e_2=0\ ,,\\ b_1+e_1=1\\ b_2+e_2=1}}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;b_1,b_2,e_1,e_2)}B(x_1\otimes gx_1;\ GX_1^{b_1}X_2^{b_2},gx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes g\otimes x_1x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1\ )}B(x_1\otimes gx_1;\ G,\quad gx_1x_2)G\otimes g\otimes x_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_2)G\otimes g\otimes x_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)G\otimes g\otimes x_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1X_2,g)G\otimes g\otimes x_1x_2$$

$$\begin{aligned}\alpha(1_H;0,0,1,1)&\equiv 1+e_2\equiv 1+1\equiv 0\\ \alpha(1_H;1,0,0,1)&\equiv a+b_1\equiv 1+1\equiv 0\\ \alpha(1_H;0,1,1,0)&\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 0+1+0+1+1\equiv 1\end{aligned}$$

$$\alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)\equiv 1+b_2\equiv 0$$

并得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_2) \\ -B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes gx_1;GX_1X_2,g) \end{array}\right] G\otimes g\otimes x_1x_2$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1;G,gx_2)-B(g\otimes gx_1;GX_2,g)+B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)+$$
$$B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_2)-B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes gx_1;GX_1X_2,g)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

28.3. $B(x_1\otimes gx_1;X_1,\ gx_1x_2)$。我们推 deduce 得到

$$a=0,b_1=1,b_2=0,d=1,e_1=e_2=1.$$
$$a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2\equiv l_1+u_1+u_2$$

并且我们得到

$$\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,u_2)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)$$
$$X_1^{1-l_1}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_1+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{u_2}=$$
$$=(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1\otimes gx_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes g\otimes x_1x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes 0+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes 0+$$

28.3.1. 情形 $X_1\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$。第一项没有内容。第二项

$$+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0 \\ l_2 &= u_2=0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= 1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= l_2=0 \end{aligned}$$

考虑右侧，可得一个显然的等式。

$$B(x_1\otimes gx_1;X_1,\ gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes 1_H=B(x_1\otimes gx_1;\ X_1,\ gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$$

28.3.2. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 第一项没有任何内容。第二项

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{\substack{b_2,e_2=0 \\ b_2+e_2=1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,b_2,0,e_2)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1 X_2^{b_2}, gx_1 x_2^{e_2}) X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
= & \begin{bmatrix} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) \\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) \end{bmatrix} \\
& X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha(1_H;0,0,0,1) &= a + b_1 + b_2 = 0 + 1 + 0 = 1 \\
\alpha(1_H;0,1,0,0) &= 0 \\
-B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) &+ B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0
\end{aligned}
$$

这一点由该元素的形式可知。

28.3.3. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。

$$
\begin{aligned}
& \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

第一项

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\
d &= 1 \\
e_1 &= u_1 = 0 \\
e_2 &= 1 \\
a &= 0 \\
b_1 &= 1 \\
b_2 &= l_2 = 0
\end{aligned}
$$

并得到

$$
\begin{gathered}
(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)} B(g \otimes gx_1; X_1, gx_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\
\alpha(x_1;0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 = 1
\end{gathered}
$$

从而得到

$$
-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1
$$

第二项

$$
\begin{aligned}
& +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\
d &= 1 \\
e_1 &= u_1 = 1 \\
e_2 &= 1 \\
a &= 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \Rightarrow l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 &= l_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\left[(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)\right] X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

$$\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 = 1 + 1 + 0 \equiv 0$$

并且我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

最后，考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2) = 0$$

这由元素的形式可知。

28.3.4. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$. 第一项

$$\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 0 \\ e_2 &= u_2 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= l_2 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_{b_2,e_2=0}^{1} (-1)^{\alpha(x_1;0,b_2,0,e_2)} B(g \otimes gx_1; X_1 X_2^{b_2}, gx_2^{e_2}) X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 \quad b_2+e_2=1 = \left[(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)} B(g \otimes gx_1;\ X_1, gx_2) + (-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)} B(g \otimes gx_1;\ X_1X_2, g)\right] X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

$$\begin{aligned} \alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) &\equiv 1 \\ \alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) &\equiv 0 + 1 + 1 + 1 \equiv 1 \end{aligned}$$

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_2) - B(g \otimes gx_1; X_1X_2, g)$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 &= u_1 = 1 \\ e_2 &= u_2 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 1 \Rightarrow l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 &= l_2 \end{aligned}$$

$$+\sum_{b_2+e_2=1}^{1}_{b_2,e_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;0,b_2,1,e_2)}B(x_1\otimes gx_1;X_1X_2^{b_2},gx_1x_2^{e_2})X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)\end{bmatrix}X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

$$\alpha(1_H;0,0,1,1)\equiv 1+e_2=1+1\equiv 0$$
$$\alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv 0+0+1+1+1\equiv 1$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_1;X_1,gx_2)-B(g\otimes gx_1;X_1X_2,g)$$
$$+B(x_1\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(x_1\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)=0$$

鉴于该元素的形式，这些条件成立。

28.3.5. 情形 $1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$。

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

第一项

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0\\l_2&=u_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 1\\d&=1\\e_1&=1\\e_2&=1\\a&=0\\b_1&=0\\b_2&=0\end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)}B(g\otimes gx_1;1_H,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$$

$$\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2=0$$

因此我们得到

$$B(g\otimes gx_1;1_H,gx_1x_2)$$

第二项

$$+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned}l_1+u_1&=1\\l_2&=u_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 0\\d&=1\\e_1-u_1&=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,l_1=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= 1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= l_1 = 1 \\ b_2 &= l_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 \\ \alpha\left(1_H;1,0,0,0\right) \equiv b_2 = 0 \end{gathered}$$

同时考虑右侧，我们最终得到

$B(g \otimes gx_1;\ 1_H,\ \ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1;\ X_1,\ \ gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g;\ 1_H,\ \ gx_1x_2) = 0$这由该元素的形式可知。

28.3.6. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 第一项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= u_1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= l_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{b_2,e_2=0 \\ b_2+e_2=1}}^{1} (-1)^{\alpha(x_1;0,b_2,0,e_2)} B(g \otimes gx_1; X_2^{b_2}, gx_1x_2^{e_2})1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 \\ = &\left[\begin{array}{l} (-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,1)} B(g \otimes gx_1; 1_A, gx_1x_2) \\ +(-1)^{\alpha(x_1;0,1,0,0)} B(g \otimes gx_1; X_2, gx_1) \end{array} \right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \alpha\left(x_1;0,0,0,1\right) \equiv 1 \\ \alpha\left(x_1;0,1,0,0\right) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 = 0 + 0 + 1 + 1 \equiv 0 \\ -B(g \otimes gx_1; 1_A, gx_1x_2) + B(g \otimes gx_1; X_2, gx_1) \end{gathered}$$

第二项

$$\begin{gathered} +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 &= u_2 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= l_1 = 1 \\ b_2 &= l_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{b_2,e_2=0 \\ b_2+e_2=1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;1,b_2,0,e_2)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1 X_2^{b_2}, gx_1 x_2^{e_2}) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1 x_2 \\ = & \begin{bmatrix} (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1 x_2) \\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1 X_2, gx_1) \end{bmatrix} 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1 x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \alpha(1_H;1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 1 \\ \alpha(1_H;1,1,0,0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0 \\ -B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1 x_2) + B(x_1 \otimes gx_1; X_1 X_2, gx_1) \end{gathered}$$

因此，最终得到

$-B(g\otimes gx_1;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)+B(g\otimes gx_1;\ X_2,\ \ gx_1)-B(x_1\otimes gx_1;\ X_1,\ \ gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1;\ X_1X_2,\ \ gx_1)$ $=0$ 这由元素的形式可知。

28.4. $B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2,\ \ gx_1)$。

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = 1, e_1 = 1, e_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1=0}^{1} \sum_{l_2=0}^{1} \sum_{u_1=0}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) \\ & X_1^{1-l_1} X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+l_2+u_1} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2} \\ = & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,00)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1 + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1 + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1^{1-l_1} X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+l_2+u_1} x_1^{1+1} x_2^{l_2} + = 0 \\ & +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) X_1^{1-l_1} X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+l_2+u_1} x_1^{1+1} x_2^{l_2} + = 0 \end{aligned}$$

28.4.1. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H$. 第一项

$$\begin{aligned} & \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ & g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

这种情况不可能发生。

第二项

$$\begin{aligned} & +\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ & g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$l_1 = u_1 = 0$$

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1-u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1 \\ e_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1\otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes 1_H$$
$$\alpha\,(1_H;0,0,0,0)\equiv 0$$

再考虑右侧，我们最终得到

$$B(x_1\otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = B(x_1\otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)$$

这是显然的。

28.4.2. 情形 $X_1X_2\otimes g\otimes gx_1$. 第一项

$$\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 0 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)}\, B(g\otimes gx_1; X_1X_2, g)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1$$

$$\alpha\,(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2 = 0+1+1\equiv 0$$

于是得到

$$B(g\otimes gx_1; X_1X_2, g)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1$$

第二项

$$+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes gx_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes$$
$$g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 = 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 - l_1 &= 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$$

$$\alpha(1_H;0,0,1,0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 = 0 + 0 + 1 + 1 \equiv 0$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$B(g \otimes gx_1; X_1X_2, g) + B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g) = 0$$

这由元素的形式可知。

28.4.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。已在 $B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$。

28.4.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$。第一项

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} B(g \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(x_1;0,0,0,0)} B(g \otimes gx_1; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

于是我们得到

$$\alpha(x_1;0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0 + 0 + 1 \equiv 1$$

$$-B(g \otimes gx_1; X_2, gx_1)$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= l_1 = 1 \\ b_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

$$\alpha\left(1_H;1,0,0,0\right)\equiv b_2=1$$

同时考虑右侧，我们最终得到

$$-B(g\otimes gx_1;X_2,gx_1)-B(x_1\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)-B(x_1\otimes g;X_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知。

28.4.5. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2$。已在 $B(x_1\otimes gx_1;X_1,\ gx_1x_2)$。

28.4.6. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_1x_2$。已在 $B(x_1\otimes gx_1;X_1,\ gx_1x_2)$。

28.5. $B(x_1\otimes gx_1;GX_1,\ gx_1)$。

$$a=1,b_1=1,b_2=0,d=1,e_1=1,e_2=0.$$

并且我们得到

因此我们得到

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{l_1=0}^{1}\sum\nolimits_{u_1=0}^{1}&(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_1+u_1}x_1^{l_1+u_1}\\&=(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes 1_H+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes g\otimes g^{l_1+u_1}x_1^{1+1}+=0\end{aligned}$$

28.5.1. 情形 $GX_1\otimes gx_1\otimes 1_H$。第一项为零。第二项

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0\\l_2&=u_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 0\\d&=1\\e_1&=1\\e_2&=0\\a&=1\\b_1&=1\\b_2&=0\end{aligned}$$

并得到

$$B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes 1_H$$

从等式的右侧部分我们得到相同的结果，因此没有新的内容。

28.5.2. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1$. 第一项

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\&B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\&g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0\\l_2&=u_2=0\\a+b_1+b_2+d+e_1+e_2&\equiv 1\\d&=1\\e_1&=0\\e_2&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b_1 &= 1 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha\left(x_1;0,0,0,0\right) \equiv 1+1+0 \equiv 0$$

$$B(g \otimes gx_1; GX_1, g) GX_1 \otimes g \otimes gx_1$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 &= u_1 = 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 1 \\ b_1 &= 1 \Rightarrow l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\alpha\left(1_H;0,0,1,0\right) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0+1+1+0 \equiv 0$$

$$B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) GX_1 \otimes g \otimes gx_1$$

同样考虑等式右边，我们得到

$$B(g \otimes gx_1; GX_1, g) + B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) - B(x_1 \otimes g; GX_1, g) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

28.5.3. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1$. 第一项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0, a = 1, b_1 = 0, b_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\alpha\left(x_1;0,0,0,0\right) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1+0+0 = 1$$

$$-B(g \otimes gx_1; G, gx_1) G \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1 \\ e_1 &= 1 \Rightarrow u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 &= 0, a = 1, b_1 = 1, b_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\alpha\left(1_H;1,0,0,0\right) \equiv b_2 = 0$$

$$B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) G \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; G, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) - B(x_1 \otimes g; G, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

28.6. $B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, \ gx_1)$。

$$a = 1, b_1 = 0, b_2 = 1, d = 1, e_1 = 1, e_2 = 0,$$

于是得到

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l_2=0}^{1} \sum_{u_1=0}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) GX_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_2+u_1} x_1^{u_1} x_2^{l_2} \\
= \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) GX_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H + \\
+ \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) GX_2 \otimes g \otimes gx_1 + \\
+ \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) G \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) G \otimes g \otimes x_1 x_2 +
\end{aligned}$$

28.6.1. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H$。 第一项为零。第二项

$$\begin{aligned}
& + \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0, a = 1, b_1 = 0, b_2 = 1. \\
\alpha(1_H; l_1, l_2, u_1, u_2) &\equiv 0
\end{aligned}$$

$$B(x_1 \otimes gx_1; GX_2 \otimes gx_1) GX_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H$$

同时考虑右侧，便可得到一个显然的等式。

28.6.2. $GX_2 \otimes g \otimes gx_1$。 第一项

$$B(g \otimes gx_1; GX_2, g) GX_2 \otimes g \otimes gx_1$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\
d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0, a = 1, b_1 = 0, b_2 = 1.
\end{aligned}$$

$$\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1 + 0 + 1 \equiv 0$$

于是得到

$$B(g \otimes gx_1; GX_2, g) GX_2 \otimes g \otimes gx_1$$

第二项

$$\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\
d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0, a = 1, b_1 = l_1, b_2 = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{b_1,e_1=0 \\ b_1+e_1 \equiv 1}}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;b_1,0,e_1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_1^{b_1} X_2, gx_1^{e_1}) GX_2 \otimes g \otimes gx_1 \\
= \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) GX_2 \otimes g \otimes gx_1 \\
& (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1; GX_1 X_2, g) GX_2 \otimes g \otimes gx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(1_H;0,0,1,0\right) &\equiv e_2+a+b_1+b_2\equiv 1+1\equiv 0\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,0\right) &\equiv b_2=1\end{aligned}$$

$$\left[B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)-B(x_1\otimes gx_1;GX_1X_2,g)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(g\otimes gx_1;GX_2,\ g)+B(x_1\otimes gx_1;GX_2,\ gx_1)-B(x_1\otimes gx_1;\ GX_1X_2,\ g)-B(x_1\otimes g;\ GX_2,\ g)=0$这由元素的形式可知。

28.6.3. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$。已在 $B(x_1\otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$。

28.6.4. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。第一项

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes\\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2,a=1,b_1=0,b_2=l_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(x_1;0,0,0,1\right) &\equiv a+b_1+b_2\equiv 1+0+0\equiv 1\\ \alpha\left(x_1;0,1,0,0\right) &\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1+0+1+1\equiv 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{b_2,e_2=0\\ b_2+u_2\equiv 1}}^{1}(-1)^{\alpha(x_1;0,b_2,0,e_2)}B(g\otimes gx_1;GX_2^{b_2},gx_2^{e_2})G\otimes g\otimes x_1x_2\\ =\ &\left[-B(g\otimes gx_1;G,gx_2)-B(g\otimes gx_1;GX_2,g)\right]G\otimes g\otimes x_1x_2\end{aligned}$$

$$-B(g\otimes gx_1;G,gx_2)-B(g\otimes gx_1;GX_2,g)$$

第二项

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2,a=1,b_1=l_1,b_2=l_2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\alpha\left(1_H;0,0,1,1\right)\equiv 1+1\equiv 0\\ &\alpha\left(1_H;1,0,0,1\right)\equiv b_2+a+b_1+b_2\equiv 1+1\equiv 0\\ &\alpha\left(1_H;0,1,1,0\right)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0+0+1\equiv 1\\ &\alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)\equiv 1+b_2\equiv 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{\substack{b_1,e_1,b_2,e_2\\ b_1+e_1\equiv 1\\ b_2+e_2\equiv 1}}(-1)^{\alpha(1_H;b_1,b_2,e_1,e_2)}B(x_1\otimes gx_1;GX_1^{b_1}X_2^{b_2},gx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes g\otimes x_1x_2\\ &B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes g\otimes x_1x_2+\\ &B(x_1\otimes gx_1;GX_1,gx_2)G\otimes g\otimes x_1x_2+\\ &-B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)G\otimes g\otimes x_1x_2+\\ &B(x_1\otimes gx_1;GX_1X_2,g)G\otimes g\otimes x_1x_2+\end{aligned}$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1;G,gx_2)-B(g\otimes gx_1;GX_2,g)+B(x_1\otimes gx_1;G,gx_1x_2)+$$

$+B(x_1 \otimes gx_1; GX_1,\ \ gx_2) - B(x_1 \otimes gx_1;\ GX_2,\ \ gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1;\ GX_1X_2,\ \ g) = 0$
这正是我们在情形 $G \otimes g \otimes x_1x_2$ of $B(x_1 \otimes gx_1;\ G,\ \ gx_1x_2)$。

29. $B\left(x_1 \otimes gx_2\right)$

利用 (39)，我们得到

$$
\begin{aligned}
& B(x_1 \otimes gx_2) \\
= \ & (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\
& +(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H) \\
& -B(gx_2gx_1 \otimes 1_H)
\end{aligned} \tag{410}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
B(x_1 \otimes gx_2) \ = \ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H)1_A \otimes 1_H + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)1_A \otimes x_1x_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 + \\
& \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right] 1_A \otimes gx_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)G \otimes g + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)G \otimes x_1 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)G \otimes x_2 + \\
& \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1x_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)X_1 \otimes g + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1)X_1 \otimes x_1 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)X_1 \otimes x_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)X_2 \otimes g + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)X_2 \otimes x_1 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)X_2 \otimes x_2 + \\
& +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 + \\
& -\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array}\right] X_1X_2 \otimes 1_H + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \\
& +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)GX_1 \otimes 1_H + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)GX_1 \otimes x_1x_2 \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \\
& \left[\begin{array}{c} -2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] GX_1 \otimes gx_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)GX_2 \otimes 1_H + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2)GX_2 \otimes x_1x_2 + \\
& -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 + \\
& +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_2 + \\
& -\left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] GX_1X_2 \otimes g \\
& +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)GX_1X_2 \otimes x_1 +
\end{aligned}
$$

$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_2$$

我们将 $B(x_1\otimes gx_2)$ 的卡西米尔公式写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\\
&\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\\
&\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\quad & B^A(x_1\otimes gx_2)\otimes B^H(x_1\otimes gx_2)\otimes 1_H+\\
&B^A(x_1\otimes g)\otimes B^H(x_1\otimes g)\otimes gx_2
\end{aligned}$$

29.1. 情形 1_H。 给我们

$$B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1.$$

29.2. 情形 g。

$$\begin{aligned}
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\\
l_1+u_1 &= l_2+u_2=0
\end{aligned}$$

由于

$$B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1.$$

满足卡西米尔条件。

29.3. 情形 x_1。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\quad & B^A(x_1\otimes gx_2)\otimes B^H(x_1\otimes gx_2)\otimes 1_H+\\
&B^A(x_1\otimes g)\otimes B^H(x_1\otimes g)\otimes gx_2
\end{aligned}$$

第一项为零，因为

$$B(1_H\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0$$

第二项也将为零，因为

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1\\
l_2+u_2 &= 0\\
a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1
\end{aligned}$$

而且我们由上文可知，这些都为零。

29.4. 情形 x_2**.** 第一项为零。第二项也为零，因为

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

并且由上文可知，这些都为零。

29.5. 情形 x_1x_2。由第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}$$

由于我们有 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 且 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1$，因此得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;0,l_2,0,u_2)}B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2-u_2}=$$
$$=\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}} -B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}+$$
$$+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}}(-1)^{a+b_1}B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

并得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}}^{e_1}\sum\nolimits_{\substack{u_2=0\\ l_2+u_2=1}}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes x_1x_2$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1)&\equiv 1+e_2\equiv 0\\ \alpha(1_H;0,1,1,0)&\equiv e_2+a+b_1\\ \alpha(1_H;1,0,0,1)&\equiv a+1\\ \alpha(1_H;1,1,0,0)&\equiv 1+1\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\otimes x_1x_2$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1}B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\otimes x_1x_2$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1}B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\otimes x_1x_2$$
$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\otimes x_1x_2$$

最终我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 0}} -B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\
&+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 0}} (-1)^{a+b_1}\,B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}\\
+&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d=0\\ a+b_1+b_2+d\equiv 0}} B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^d\\
+&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_2=0\\ a+b_1+d+e_2\equiv 0}} (-1)^{e_2+a+b_1}\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2,g^dx_1x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_2^{e_2}\\
+&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1=0\\ a+b_2+d+e_1\equiv 0}} (-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}\\
+&\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d,e_1,e_2=0\\ a+d+e_1+e_2\equiv 0}} B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^a\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}=0
\end{aligned}$$

29.5.1. $G^a\otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=0}}\left[\begin{array}{c}
-B(g\otimes gx_2;G^a,g^dx_2)+(-1)^a\,B(g\otimes gx_2;G^aX_2,g^d)\\
+B(x_1\otimes gx_2;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_1)\\
+(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1,g^dx_2)+B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^d)
\end{array}\right]G^a\otimes g^d=0$$

于是我们得到

$$\begin{gathered}
-B(g\otimes gx_2;1_A,x_2)+B(g\otimes gx_2;X_2,1_H)+B(x_1\otimes gx_2;1_A,x_1x_2)+\\
+B(x_1\otimes gx_2;X_2,x_1)-B(x_1\otimes gx_2;X_1,x_2)+B(x_1\otimes gx_2;X_1X_2,1_H)=0
\end{gathered}$$

and

$$\begin{gathered}
-B(g\otimes gx_2;G,gx_2)-B(g\otimes gx_2;GX_2,g)+B(x_1\otimes gx_2;G,gx_1x_2)+\\
-B(x_1\otimes gx_2;GX_2,gx_1)+B(x_1\otimes gx_2;GX_1,gx_2)+B(x_1\otimes gx_2;GX_1X_2,g)=0
\end{gathered}$$

根据这些元素的形式，这些条件均成立。

29.5.2. $G^a\otimes g^dx_2$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=1}}\left[\begin{array}{c}
(-1)^a\,B(g\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_2)+\\
(-1)^{1+a}\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_2)
\end{array}\right]G^a\otimes g^dx_2=0$$

并且我们得到

$$B(g\otimes gx_2;X_2,gx_2)-B(x_1\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)=0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2;GX_2,x_2)+B(x_1\otimes gx_2;GX_2,x_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;GX_1X_2,x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

29.5.3. $G^a\otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=1}}\left[\begin{array}{c}
-B(g\otimes gx_2;G^a,g^dx_1x_2)+(-1)^a\,B(g\otimes gx_2;G^aX_2,g^dx_1)+\\
(-1)^{a+1}\,B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1,g^dx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;G^aX_1X_2,g^dx_1)
\end{array}\right]G^a\otimes g^dx_1=0$$

于是得到

$$\begin{gathered}
-B(g\otimes gx_2;1_A,gx_1x_2)+B(g\otimes gx_2;X_2,gx_1)+\\
-B(x_1\otimes gx_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;X_1X_2,gx_1)=0
\end{gathered}$$

and

$$\begin{gathered}
-B(g\otimes gx_2;G,x_1x_2)-B(g\otimes gx_2;GX_2,x_1)+\\
+B(x_1\otimes gx_2;GX_1,x_1x_2)+B(x_1\otimes gx_2;GX_1X_2,x_1)=0
\end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这些结论成立

29.5.4. $G^aX_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=1}} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \end{array} \right] G^aX_2\otimes g^d = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_2, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该结论成立。

29.5.5. $G^aX_1 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=1}} \left[\begin{array}{c} -B(g\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^d) \\ +B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1) \end{array} \right] G^aX_1\otimes g^d = 0$$

and we get

$$\begin{array}{c} -B(g\otimes gx_2; X_1, gx_2) - B(g\otimes gx_2; X_1X_2, g) \\ +B(x_1\otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0 \end{array}$$

鉴于元素的形式，该结论也成立。

29.5.6. $G^a \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}} \left[(-1)^a\, B(g\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^a\otimes g^dx_1x_2$$

并且我们得到

$$B(g\otimes gx_2; X_2, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

29.5.7. $G^aX_2 \otimes g^dx_2$。 不存在这样的项。

29.5.8. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$。 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) + (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

我们得 t

$$-B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$\begin{array}{c} B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \\ B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0 \end{array}$$

这由元素的形式可知成立。

29.5.9. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum_{\substack{a,d\\ a+d=0}} \left[-B(g\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结果成立。

29.5.10. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=0}} \left[-B(g\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1x_2) + (-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1 \otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1, x_1x_2) - B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2) + B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.5.11. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=0}} \left[-B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2 \otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.5.12. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$. 没有这样的项

29.5.13. $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=1}} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$+B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这由该元素的形式可知成立。

29.5.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_2$. 没有这样的项。

29.5.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d=1}} -B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1 = 0$$

从而得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这正是我们在上述情形 $G^aX_1 \otimes g^dx_1x_2$ 中已经得到的结果。

29.5.16. $G^aX_1X_2 \otimes g^dx_1x_2$。 没有这样的项。

29.6. 情形 gx_1。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2$，我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ \alpha(1_H;0,0,1,0) &\equiv e_2+(a+b_1+b_2) \\ \alpha(1_H;1,0,0,0) &\equiv b_2 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 0}} \sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0} \sum\nolimits^{e_1}_{\substack{u_1=0\\ l_1+u_1=1}} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2} \\ = & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2} + \\ & + \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{b_2}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \end{aligned}$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ & + \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_2=0\\ a+b_1+b_2+d+e_2\equiv 1}} (-1)^{e_2+(a+b_1+b_2)}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1x_2^{e_2}) G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_2^{e_2} + \\ & \sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_2,d,e_1,e_2=0\\ a+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1}} (-1)^{b_2}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) G^aX_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} = 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} (-1)^a\, B(g\otimes gx_2; G^a, g^d) + (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^a, g^dx_1) + \\ + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1, g^d) \end{array} \right] G^a\otimes g^d = 0$$

于是得到

$$B(g\otimes gx_2; 1_A, g) + B(x_1\otimes gx_2; 1_A, gx_1) + B(x_1\otimes gx_2; X_1, g) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; G, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; G, x_1) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, 1_H) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

29.6.1. $G^a\otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^a\, B(g\otimes gx_2; G^a, g^dx_2) \\ + (-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^a, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_2) \end{array} \right] G^a\otimes g^dx_2 = 0$$

于是得到

$$B(g\otimes gx_2; 1_A, x_2) - B(x_1\otimes gx_2; 1_A, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1, x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; G, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.6.2. $G^a \otimes g^d x_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^a B(g\otimes gx_2; G^a, g^d x_1) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a \otimes g^d x_1 = 0$$

因此我们得到

$$B(g\otimes gx_2; 1_A, x_1) + B(x_1\otimes gx_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; G, gx_1) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些结论成立。

29.6.3. $G^a X_2 \otimes g^d$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(g\otimes gx_2; G^a X_2, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1) + \\ -B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d) \end{array}\right] G^a X_2 \otimes g^d = 0$$

因此我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; X_2, x_1) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_2, g) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, gx_1) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些结论成立。

29.6.4. $G^a X_1 \otimes g^d$。 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[(-1)^{a+1} B(g\otimes gx_2; G^a X_1, g^d) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1)\right] G^a X_1 \otimes g^d = 0$$

于是得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; X_1, x_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_1, g) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.6.5. $G^a \otimes g^d x_1x_2$。 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}} \left[(-1)^a B(g\otimes gx_2; G^a, g^d x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_1x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1x_2 = 0$$

于是得到

$$B(g\otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; G, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, x_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.6.6. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}} \left[\begin{array}{c} (-1)^{a+1} B(g\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_2) + (-1)^{a} B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1x_2) + \\ -B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2) \end{array}\right] G^a X_2 \otimes g^d x_2 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_2, x_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.6.7. $G^aX_1 \otimes g^dx_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_2) + (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_2 = 0$$

and we get

$$-B(g\otimes gx_2; X_1, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

and

$$+B(g\otimes gx_2; GX_1, x_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1, x_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，这些等式成立。

29.6.8. $G^aX_2 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1) - B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, gx_1) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0.$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_2, x_1) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

根据元素的形式，这些等式成立。

29.6.9. $G^aX_1 \otimes g^dx_1$. 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1) G^aX_1\otimes g^dx_1 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1, gx_1) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_1, x_1) = 0$$

根据该元素的形式，这些关系成立。

29.6.10. $G^aX_1X_2 \otimes g^d$。 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[(-1)^a\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^d) + (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)\right] G^aX_1X_2\otimes g^d = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes gx_2; X_1X_2, g) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

根据这些元素的形式，这些关系成立。

29.6.11. $G^aX_2 \otimes g^dx_1x_2$。 我们得到

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[(-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_2, g^dx_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_2\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

因此我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_2, x_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.6.12. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$. 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} (-1)^{a+1}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1, g^dx_1x_2)G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

于是我们得到

$$-B(g\otimes gx_2; X_1, x_1x_2) = 0$$

and

$$B(g\otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

29.6.13. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2$。 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} \left[\begin{array}{c} (-1)^a\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_2) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2) \end{array}\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_2 = 0$$

于是我们得到

$$B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_2) - B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.6.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1$。 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} (-1)^{a}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且得到

$$B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

29.6.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2$。 我们得到

$$\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,d\\ a+d\equiv 0}} (-1)^{a}\, B(g\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1)G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

并且得到

$$B(g\otimes gx_2; X_1X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(g\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这些等式成立。

29.7. **情形** gx_2。

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0 \\ \alpha\,(1_H; 0,0,0,1) &\equiv a+b_1+b_2 \\ \alpha\,(1_H; 0,1,0,0) &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,b_2,d,e_1=0\\ a+b_1+b_2+d+e_1\equiv 1}} (-1)^{a+b_1+b_2}\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes g^dx_1^{e_1} + \\ &+\sum\nolimits^{1}_{\substack{a,b_1,d,e_1,e_2=0\\ a+b_1+d+e_1+e_2\equiv 1}} B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1}\otimes g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2} \\ = \;& B^A(x_1\otimes g)\otimes B^H(x_1\otimes g) \end{aligned}$$

29.7.1. $G^a \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} -B(x_1\otimes g; G^a, g^d) + \left[(-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^a, g^d x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d)\right] G^a\otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; 1_A, g) + B(x_1\otimes gx_2; 1_A, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_2, g) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; G, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, 1_H) = 0$$

根据这些元素的形式，它们成立。

29.7.2. $G^a \otimes g^d x_2$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^a, g^d x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_2)\right] G^a\otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; 1_A, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, gx_2) = 0$$

根据这些元素的形式，它们成立。$G^a \otimes g^d x_1$

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(x_1\otimes g; G^a, g^d x_1) + \\ (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_1)\end{array}\right] G^a\otimes g^d x_1 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; 1_A, x_1) + B(x_1\otimes gx_2; 1_A, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_2, x_1) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G, gx_1) - B(x_1\otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

29.7.3. $G^a X_2 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(x_1\otimes g; G^a X_2, g^d) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^a X_2, g^d x_2)\end{array}\right] G^a X_2\otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; X_2, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; X_2, x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; GX_2, g) + B(x_1\otimes gx_2; GX_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

29.7.4. $G^a X_1 \otimes g^d$。

$$\sum\nolimits_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(x_1\otimes g; G^a X_1, g^d) \\ +(-1)^{a+1}\, B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1, g^d x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^a X_1 X_2, g^d)\end{array}\right] G^a X_1\otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; X_1, 1_H) - B(x_1\otimes gx_2; X_1, x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, 1_H) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; GX_1, g) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.7.5. $G^a \otimes g^d x_1 x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^a, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a \otimes g^d x_1 x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; 1_A, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G, x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G X_2, x_1 x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些等式成立。

29.7.6. $G^a X_2 \otimes g^d x_2$。 无

29.7.7. $G^a X_1 \otimes g^d x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^a X_1, g^d x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_1 \otimes g^d x_2 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; X_1, g x_2) + B(x_1\otimes g x_2; X_1 X_2, g x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G X_1, x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G X_1 X_2, x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

29.7.8. $G^a X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^a X_2 \otimes g^d x_1) + (-1)^{a+1} B(x_1\otimes g x_2; G^a X_2, g^d x_1 x_2)\right] G^a X_2 \otimes g^d x_1 = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; X_2, g x_1) - B(x_1\otimes g x_2; X_2, g x_1 x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G X_2, x_1) + B(x_1\otimes g x_2; G X_2 x_1 x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

29.7.9. $G^a X_1 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[\begin{array}{c} -B(x_1\otimes g; G^a X_1, g^d x_1) + \\ (-1)^{a+1} B(x_1\otimes g x_2; G^a X_1, g^d x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_1) \end{array}\right] G^a X_1 \otimes g^d x_1 = 0$$

and we get

$$-B(x_1\otimes g; X_1, g x_1) - B(x_1\otimes g x_2; X_1, g x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; X_1 X_2, g x_1) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G X_1, x_1) + B(x_1\otimes g x_2; G X_1, x_1 x_2) + B(x_1\otimes g x_2; G X_1 X_2, x_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

29.7.10. $G^a X_1 X_2 \otimes g^d$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 1}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^a X_1 X_2, g^d) + (-1)^a B(x_1\otimes g x_2; G^a X_1 X_2, g^d x_2)\right] G^a X_1 X_2 \otimes g^d = 0$$

我们得到

$$-B(x_1\otimes g; X_1 X_2, g) + B(x_1\otimes g x_2; X_1 X_2, g x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; G X_1 X_2, 1_H) - B(x_1\otimes g x_2; G X_1 X_2, x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这些关系成立。

29.7.11. $G^a X_2 \otimes g^d x_1 x_2$. 无

29.7.12. $G^aX_1 \otimes g^d x_1x_2$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^aX_1, g^dx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1\otimes g^dx_1x_2 = 0$$

We get

$$-B(x_1\otimes g; X_1, x_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.7.13. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_2$。 无

29.7.14. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1$。

$$\sum_{\substack{a,d,=0\\ a+d\equiv 0}}^{1} \left[-B(x_1\otimes g; G^aX_1X_2\otimes g^dx_1) + (-1)^a\, B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1X_2, g^dx_1x_2)\right] G^aX_1X_2\otimes g^dx_1 = 0$$

We get

$$-B(x_1\otimes g; X_1X_2, x_1) + B(x_1\otimes gx_2; X_1X_2, x_1x_2) = 0$$

and

$$-B(x_1\otimes g; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这些结论成立。

29.7.15. $G^aX_1X_2 \otimes g^d x_1x_2$. Nothing.

29.8. **情形** gx_1x_2。

$$\begin{array}{l}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\\ \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\end{array}$$

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 1\end{aligned}$$

因为

$$B(x_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) = 0 \text{ whenever } a+b_1+b_2+d+e_1+e_2\equiv 1$$

this is trivial.

30. $B\left(x_1\otimes gx_1x_2\right)$

利用（33），我们有

$B(h\otimes x_1x_2) = B(h\otimes x_2)(1_A\otimes x_1) - (1_A\otimes gx_1)B(h\otimes x_2)(1_A\otimes g) - (1_A\otimes g)B(gx_1h\otimes x_2)(1_A\otimes g)$

因此，对于 $h = gx_1$，我们得到

$B(gx_1\otimes x_1x_2) = B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1) - (1_A\otimes gx_1)B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes g) - (1_A\otimes g)B(gx_1gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$ 即

$$B(gx_1\otimes x_1x_2) = B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1) - (1_A\otimes gx_1)B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

从而

$$\begin{aligned} B(x_1\otimes gx_1x_2) &= (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\ &\quad -(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

因此

$$B(x_1\otimes gx_1x_2) = (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1) + (1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes x_2)$$

i.e.

$$B(x_1\otimes gx_1x_2) = -B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1) + (1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(x_1\otimes gx_2)\overset{(410)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H)$$

$$\begin{aligned}(411)\qquad B(x_1\otimes gx_1x_2) &= (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &\quad -(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &\quad +B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &\quad +(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &\quad +(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned}B\left(x_1\otimes gx_1x_2\right) &= \left[2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+4B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]1_A\otimes gx_1x_2+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)G\otimes gx_1+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)X_1\otimes gx_1+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)X_2\otimes gx_1+\\ &\quad +2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\\ &\quad +\left[\begin{array}{c}-4B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\\ 4B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]GX_1\otimes gx_1x_2+\\ &\quad +2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)GX_2\otimes gx_1x_2+\\ &\quad -2\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes gx_1\end{aligned}$$

$B(x_1\otimes gx_1x_2)$的卡西米尔公式

$$\begin{aligned}&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(g\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes\\ &g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\ &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ &B(x_1\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes\\ &g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\ =\;&B^A(x_1\otimes gx_1x_2)\otimes B^H(x_1\otimes gx_1x_2)\otimes g\\ &+B^A(x_1\otimes gx_1)\otimes B^H(x_1\otimes gx_1)\otimes x_2\\ &-B^A(x_1\otimes gx_2)\otimes B^H(x_1\otimes gx_2)\otimes x_1\\ &+B^A(x_1\otimes g)\otimes B^H(x_1\otimes g)\otimes gx_1x_2\end{aligned}$$

30.1. $B\left(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,\ gx_1x_2\right)$。我们得到

$$\begin{aligned}a &= b_1=b_2=0\\ d &= e_1=e_2=1\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}&\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\ &=(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes g+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_2+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1+\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2\end{aligned}$$

30.1.1. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes g$。 左侧第一项没有任何内容。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

同时考虑右侧，我们得到一个平凡等式。

30.1.2. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$。 左侧第一项没有任何结果。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0 \\ b_2 &= l_2 \\ d &= e_1 = 1 \\ e_2 &= u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$和 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$[B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)]\, 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) = 0.$$

这由元素的形式可知成立。

30.1.3. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1 \\ e_1 &= 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$因此可得

$$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

对于左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1 \\ e_1 &= u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$，可得

$$[-B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2)]\, 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考虑方程右侧，可得

$$+B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_2;\ 1_A, gx_2)\ = 0$$

这由元素的形式可知。

30.1.4. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0 \\ b_2 &= l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0 \\ e_2 &= u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$ 和 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$[-B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_2) + B(g \otimes gx_1x_2; X_2, g)]\, 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= l_1, b_2 = l_2 \\ e_1 &= u_1, e_2 = u_2 \\ d &= 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$, $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv 1$和 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) + \\ -B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) \end{array}\right] 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$\begin{gathered} -B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_2) + B(g \otimes gx_1x_2; X_2, g) \\ B(x_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) + \\ -B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) + \\ -B(x_1 \otimes g; 1_A, g) = 0. \end{gathered}$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

30.2. $B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1)$。 我们得到

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1)G \otimes g \otimes x_1 \end{gathered}$$

30.2.1. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes g$。 左侧第一项没有贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 0) = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes g.$$

同时考察右侧，我们得到一个平凡等式。

30.2.2. 情形 $G \otimes g \otimes x_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; G, g)G \otimes g \otimes x_1.$$

考虑左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, g)\right] G \otimes g \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes gx_1x_2; G, g) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1) \\ &+B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, g) + B(x_1 \otimes gx_2; G, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

30.3. $B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)$。我们得到

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, a = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)X_1 \otimes gx_1 \otimes g + \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)X_1 \otimes g \otimes x_1 + \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1 + \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)1_A \otimes g \otimes gx_1^2 + = 0 \end{aligned}$$

30.3.1. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes g$。我们得到一个平凡等式。

30.3.2. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1, g)X_1 \otimes g \otimes x_1.$$

考察左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv -1$ 我们得到

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)X_1 \otimes g \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1, g) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_2; X_1, g) = 0$$

这由元素的形式可知。

30.3.3. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = b_1 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$, 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

考察左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = b_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,0,0,0) = b_2 = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

同样考察右侧，可得

$$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_2; 1_A, gx_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，结论成立。

30.4. $B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)$。我们得到

$$\begin{aligned} b_2 &= 1, a = b_1 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes g \otimes x_1 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)1_A \otimes g \otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

30.4.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes g$。没有新内容。

30.4.2. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, g)X_2 \otimes g \otimes x_1.$$

通过考察左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) = 1$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 1$ 我们得到

$$\left[-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, g) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) \\ &-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) + B(x_1 \otimes gx_2; X_2, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.4.3. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$。我们已在 $B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ 1_A,\ gx_1x_2)$。30.4.4.

情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$。我们已在 $B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ 1_A,\ gx_1x_2)$。

30.5. $B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ gx_1x_2)$。我们有

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

$$X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u} \otimes \otimes g^{1+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1 +$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2 +$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2+1} = 0$$

$$+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}\, B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{1+1} = 0$$

30.5.1. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

考虑左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 1, l_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$，因此可得

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，可得

$B(g \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ gx_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_2;\ X_1X_2,\ gx_2)$ $= 0$这由元素的形式可知。

30.5.2. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) = a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

考虑左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, l_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) = e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这一结论成立。

30.5.3. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g$。 我们得到一个平凡等式。

30.5.4. 情形 $X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$。 左侧第一项没有贡献。从左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H, 0, 1, 0, 0) = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这根据元素的形式成立。

30.5.5. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$。 从左侧第一项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) = 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,0,0,0) = b_2 = 1$ 我们得到

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

同时考察右侧可得

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

30.5.6. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) = a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 可得

$$B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1 \\ e_2 - u_2 &= 1. \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,1,0,0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 可得

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$$

同时考虑右侧可得

$$B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.5.7. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$。 左侧第一项没有任何结果。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考察右侧可得

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.5.8. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} &\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum_{l_1=0}^{b_1} \sum_{l_2=0}^{b_2} \sum_{u_1=0}^{e_1} \sum_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ &B(g \otimes gx_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes \\ &g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1. \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \end{aligned}$$

$$d = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 = 1$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 = 1$，我们得到

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g; X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

30.5.9. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。由左侧第一项我们得到

$$\sum_{a,\ b_1,\ b_2,\ d,\ e_1,\ e_2=0} \sum_{l_1=0} \sum_{l_2=0} \sum_{u_1=0} \sum_{u_2=0} (-1)^{\alpha(x_1;\ l_1,\ l_2,\ u_1,\ u_2)} B(g \otimes gx_1x_2;\ G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2},$$
$$g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1. \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) = 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) = 1 + e_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

同时考察右侧可得

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

30.6. $B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)$。我们推得

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes g$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_{11}} x_1^{1+1} = 0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{+l_1+1} x_1^{1+1} x_2 = 0$$

30.6.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

考虑左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \\ e_2 &= 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 0$, 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.6.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$, 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

考察左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1, \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考察右侧，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

30.6.3. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$。 左侧第一项没有任何贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) = 0$ 我们得到

$$\left[B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)\right] GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1,\ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1) - B(x_1 \otimes gx_1;\ GX_1,\ gx_1) = 0$ 这由元素的形式可知成立。

30.6.4. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,1) \equiv 1$ 且 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，可得

$$[-B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) - B(g \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$$

考察左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,0,0,1) \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1,1,0,0) \equiv 0$

$$[B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

同样考察右侧，可得

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) - B(g \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1) + \\ &+B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes g;\ G, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知。

30.6.5. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv 1$ 和 $\alpha(x_1; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$[-B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g)]\, GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$$

考虑左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 和 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$[B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)]\, GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g) + \\ &B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes g; GX_1, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

30.7. $B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right)$. 我们有

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1 \otimes g^{l_2} x_2^{1+1} = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B\left(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_2+1} x_1 x_2^{1+1} = 0 \end{gathered}$$

30.7.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$。 左侧第一项没有贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) = 0$ 我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

30.7.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，因此可得

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2) GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

考察左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2 = 1$，因此得到

$$\left[-B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考察右侧可得

$$\begin{gathered} B(g \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) \\ -B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes gx_2; GX_2, gx_2) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

30.7.3. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=0, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$ 我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$$

考虑左侧的第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$\left[B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)\right]G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+\\ &+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)-B(x_1\otimes g;G,gx_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.7.4. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes x_2$。 左侧第一项没有任何贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)=a+b_1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)-B(x_1\otimes gx_1;GX_2,gx_1)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

30.7.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$$

考虑左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$, 我们得到

$$\left[B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+$$
$$+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)-B(x_1\otimes g;GX_2,g)=0$$

这由元素的形式可知。

30.8. $B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)$. 我们得到

$$\begin{aligned} a &= b_1=b_2=1\\ d &= e_1=1,e_2=0\end{aligned}$$

因此我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes g+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1^{1-l_1}X_2\otimes g\otimes g^{l_1}x_1^{1+1}=0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1^{1-l_1}\otimes g\otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$

30.8.1. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes x_1$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=0,b_2=1\\ d &= e_1=1,e_2=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1.$$

考察左侧第二项，得到

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=1\\ d &= 1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1,e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,0,0,0)=b_2=1$, 我们得到

$$-B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1.$$

同时考察右侧，得到

$$B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)-B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)+B(x_1\otimes gx_2;GX_2,gx_1)=0$$

根据这些元素的形式，这一结论成立。

30.8.2. 情形 $GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$。左侧第一项没有贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=1,b_2=l_2\\ d &= 1,e_1=1,e_2=u_2\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)=a+b_1+b_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,1,0,0)=0$, 我们得到

$$\left[B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)\right]GX_1\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1,\ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1) - B(x_1 \otimes gx_1;\ GX_1,\ gx_1) = 0$ 这由元素的形式可知。

30.8.3. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。 已在 $B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1,\ gx_1x_2)$ 中完成。

30.8.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1.$$

考虑左侧第二项，可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g) - B(x_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes gx_2; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

30.8.5. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 已在 $B(x_1 \otimes gx_1x_2;\ GX_1,\ gx_1x_2)$。

31. $B(x_2 \otimes x_1)$

由 (34) 得到

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes x_1) &= B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ &\quad -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned} \tag{412}$$

我们得到

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes x_1) &= -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g)1_A \otimes g + \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1)1_A \otimes x_1 + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2)1_A \otimes x_2 \\ &\quad + \left[-2B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] 1_A \otimes gx_1x_2 \\ &\quad -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H)G \otimes 1_H + \\ &\quad -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)G \otimes x_1x_2 + \\ &\quad + \left[-2B\left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] G \otimes gx_1 + \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)G \otimes gx_2 + \\ &\quad + \left[+B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1)\right] X_1 \otimes 1_H + \\ &\quad +B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)X_1 \otimes x_1x_2 + B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)X_1 \otimes gx_1 + \\ &\quad + \left[-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] X_1 \otimes gx_2 + \\ &\quad + \left[-B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2)\right] X_2 \otimes 1_H \\ &\quad -B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)X_2 \otimes x_1x_2 + \\ &\quad + \begin{bmatrix} +2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_2 \otimes gx_1 + \\ &\quad +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)X_2 \otimes gx_2 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[\begin{array}{c} +B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]X_1X_2\otimes g+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_1+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]X_1X_2\otimes x_2+\\
&+B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_1x_2\\
&-\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]GX_1\otimes g+\\
&+B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)GX_1\otimes x_1+\\
&+\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_1\otimes x_2+\\
&+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2+\\
&-\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]GX_2\otimes g+\\
&+\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]GX_2\otimes x_1+\\
&-B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)GX_2\otimes x_2\\
&+\left[-2B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_2\otimes gx_1x_2+\\
&-\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes 1_H\\
&-B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_1x_2\\
&+\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_1+\\
&+\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_2+
\end{aligned}
$$

我们为 $B(x_2\otimes x_1)$ 写出卡西米尔公式

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
&+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ & B^A(x_2\otimes x_1)\otimes B^H(x_2\otimes x_1)\otimes g+\\
&B^A(x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_2\otimes 1_H)\otimes x_1
\end{aligned}
$$

31.1. $B\left(x_2\otimes x_1;1_A,g\right)$。我们得到

$$B(x_2\otimes x_1;1_A,g)1_A\otimes g\otimes g$$

31.1.1. 情形 $1_A\otimes g\otimes g$。此情形是平凡的

31.1.2. $B\left(x_2\otimes x_1;1_A,x_1\right)$。我们得到

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B\left(x_2\otimes x_1;1_A,x_1\right)1_A\otimes x_1\otimes g+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B\left(x_2\otimes x_1;1_A,x_1\right)1_A\otimes 1_H\otimes x_1
\end{aligned}
$$

31.1.3. 情形 $1_A\otimes x_1\otimes g$。这是平凡的。

31.1.4. 情形 $1_A\otimes 1_H\otimes x_1$。左侧第一项没有贡献。第二项给出

$$
\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1\\
l_2 &= u_2=0\\
a &= b_2=0,b_1=l_1\\
d &= e_2=0,e_1=u_1
\end{aligned}
$$

因为 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2 = 0$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H)]\, 1_A \otimes 1_H \otimes x_1$$

同时考察右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

31.2. $B(x_2 \otimes x_1; 1_A,\ x_2)$。我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) 1_A \otimes x_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) 1_A \otimes 1_H \otimes x_2\end{aligned}$$

31.2.1. 情形 $1_A \otimes x_2 \otimes g$。此情形显然成立。

31.2.2. 情形 $1_A \otimes 1_H \otimes x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, 1_H) 1_A \otimes 1_H \otimes x_2$$

从左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$ 且 $\alpha(1_H;0,1,0,0) \equiv 0$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) - B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H)]\, 1_A \otimes 1_H \otimes x_2.$$

再考虑方程右侧，可得

$$B(g \otimes x_1; 1_A, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

31.3. $B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2)$. 我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2\end{aligned}$$

31.3.1. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes g$。这显然成立。

31.3.2. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 = 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$$

由左侧的第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$ 以及 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

31.3.3. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$。 左侧第一项没有贡献。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

31.3.4. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 = 1$ 我们得到

$$\left[B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1) - B(g \otimes x_1; X_1, g)\right] 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$l_1 + u_1 = 1$$

$$\begin{aligned} l_2+u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

Si因此 $\alpha(1_H;0,0,0,1)\equiv 1+1\equiv 0$,$\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+a+b_2+1\equiv 0$ $_1,\alpha(1_H;1,0,0,1)\equiv a+b_1=1$和$_H,\alpha(1_H;1,1,0,0)\equiv 1+b_2\equiv 0,$我们得到

$$\left[\begin{array}{l} B(x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)+ \\ -B(x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,g) \end{array}\right] 1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} B(g\otimes x_1;1_A,gx_1)-B(g\otimes x_1;X_1,g)+B(x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+ \\ +B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)-B(x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,g)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.4. $B(x_2\otimes x_1;\ G,1_H)$. 我们推得

$$a=1,b_1=b_2=0,d=e_1=e_2=0$$

并且得到

$$B\left(x_2\otimes x_1;G,1_H\right)G\otimes 1_H\otimes g$$

31.4.1. 情形 $G\otimes 1_H\otimes g$. 这显然成立。

31.5. $B(x_2\otimes x_1;\ G,x_1x_2)$.

$$a=1,b_1=b_2=0,d=0,e_1=e_2=1$$

我们推导出

$$\begin{aligned} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)G\otimes x_1x_2\otimes g+ \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)G\otimes x_1\otimes x_2+ \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)G\otimes x_2\otimes x_1+ \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)G\otimes 1_H\otimes gx_1x_2+ \end{aligned}$$

31.5.1. 情形 $G\otimes x_1x_2\otimes g$。 这显然成立。

31.5.2. 情形 $G\otimes x_1\otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0 \\ l_2 &= u_2=0 \\ a &= 1, b_1=b_2=0, \\ d &= 0, e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)=a+b_1+b_2=1$我们得到

$$-B(g\otimes x_1;G,x_1)G\otimes x_1\otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0 \\ l_2+u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2, \\ d &= 0, e_1=1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2=1$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_1)\right]G\otimes x_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;G,x_1)-B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_1)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

31.5.3. 情形 $G\otimes x_2\otimes x_1$。 </style}左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0,\\ d &= 0, e_1=u_1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$\left[B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1,x_2)\right]G\otimes x_2\otimes x_1.$$

同时考察右侧，可得

$$B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1,x_2)-B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

31.5.4. 情形 $G\otimes 1_H\otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_2=0, b_1=l_1\\ d &= 0, e_2=0, e_1=u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$且 $\alpha(x_2;1,0,0,0)\equiv a+b_1=0$，可得

$$\left[B(g\otimes x_1;G,x_1)+B(g\otimes x_1;GX_1,1_H)\right]G\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 0, e_1=u_1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,1)=1+e_2\equiv 1+1\equiv 0, \alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1, \alpha(1_H;1,0,0,1)\equiv a+b_1=0$且 $\alpha(1_H;1,1,0,0)\equiv 1+b_2\equiv 0$,可得

$$\left[\begin{array}{c} B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_1)+\\ -B(x_2\otimes x_1;GX_1,x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,1_H) \end{array}\right]G\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{array}{c} B(g\otimes x_1;G,x_1)+B(g\otimes x_1;GX_1,1_H)\\ +B(x_2\otimes x_1;G,x_1x_2)-B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_1)+\\ +B(x_2\otimes x_1;GX_1,x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,1_H) \end{array}=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.6. $B(x_2\otimes x_1;\ G,\ gx_1)$。 我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes g+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_2\otimes x_1;G,gx_1)G\otimes g\otimes x_1 \end{aligned}$$

31.6.1. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes g$。 这是显然的。

31.6.2. 情形 $G \otimes g \otimes x_1$。 左侧第一项没有给出任何结果。从左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$[-B(x_2 \otimes x_1; G, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, g)]\, G \otimes g \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; G, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, g) - B(x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

31.7. $B(x_2 \otimes x_1;\ G,\ gx_2)$。 我们推得

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2) G \otimes gx_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,u_2)}\, B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2) G \otimes g \otimes x_2 + \end{aligned}$$

31.7.1. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes g$。 这是显然的。

31.7.2. 情形 $G \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; G, g) G \otimes g \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$[-B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g)]\, G \otimes g \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; G, g) - B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g) = 0$$

这由元素的形式可知。

31.8. $B(x_2 \otimes x_1;\ X_1, 1_H)$. 我们推得

$$a = 0, b_1 = 1, b_2 = 0, d = e_1 = e_2 = 0$$

于是我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H) X_1 \otimes 1_H \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H) 1_A \otimes 1_H \otimes x_1$$

31.8.1. 情形 $X_1 \otimes 1_H \otimes g$。 这是显然的。

31.8.2. 情形 $1_A \otimes 1_H \otimes x_1$。 左侧第一项没有贡献。由左侧第二项，我们推出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$和 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$[B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H)]\, 1_A \otimes 1_H \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.9. $B(x_2 \otimes x_1; X_1,\ x_1x_2)$。 我们推得

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 0, e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1 \otimes x_1x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) 1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1 \otimes x_2 \otimes x_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1^{1-l_1} \otimes x_2 \otimes g^{l_1} x_1^{1+1} = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) 1_A \otimes x_1 \otimes gx_1x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) X_1^{1-l_1} \otimes 1_H \otimes g^{l_1+1} x_1^{1+1} x_2 = 0$$

31.9.1. 情形 $X_1 \otimes x_1x_2 \otimes g$。 这是显然的。

31.9.2. 情形 $1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_1$. 左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项，我们可以推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,0,0,0)\equiv b_2=0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)1_A\otimes x_1x_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.9.3. 情形 $X_1\otimes x_2\otimes x_1$. 左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1,b_2=0,\\ d &= 0,e_1=u_1=1,e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)=e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$,因此得到

$$B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)X_1\otimes x_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)=0$$

这由元素的形式可知成立。

31.9.4. 情形 $X_1\otimes x_1\otimes x_2$. 由左侧第一项得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0,b_1=1,b_2=0,\\ d &= 0,e_1=1,e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)=a+b_1+b_2=1$ 我们得到

$$-B(g\otimes x_1;X_1,x_1)X_1\otimes x_1\otimes x_2$$

由左侧第二项得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2,\\ d &= 0,e_1=1,e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)\equiv a+b_1+b_2=1$ 且 $\alpha(1_H;0,1,0,0)\equiv 0$ 我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_1)\right]X_1\otimes x_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;X_1,x_1)-B(x_2\otimes x_1;X_1,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_1)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.9.5. 情形 $1_A \otimes x_1 \otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 0, e_2 = 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$ 我们得到

$$[-B(g \otimes x_1; X_1, x_1)]\, 1_A \otimes x_1 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 = 1$ 以及 $\alpha(1_H;\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$[-B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1)]\, 1_A \otimes x_1 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, x_1) - B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

这正是我们上面刚刚得到的结果。

31.9.6. 情形 $X_1 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 0, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 0$, 可得

$$[B(g \otimes x_1; X_1, x_1)]\, X_1 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 0, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

Sin由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$和 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 可得

$$[B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1)]\, X_1 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，因此得到

$$+B(g \otimes x_1; X_1, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

这是我们刚刚在上面得到的。

31.10. $B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1)$. 我们推得

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) X_1 \otimes g \otimes x_1 + \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1 \end{aligned}$$

31.10.1. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1$. 左侧第一项没有任何贡献。由左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) X_1 \otimes g \otimes x_1.$$

同时考察右侧，可得

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

31.10.2. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$。 左侧第一项中没有任何内容。从左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

31.11. $B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2)$。 我们推得

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) X_1 \otimes g \otimes x_2 + \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1 \end{aligned}$$

31.11.1. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, g) X_1 \otimes g \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g)\right] X_1 \otimes g \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, g) - B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g) = 0$$

这由元素的形式可知。

31.11.2. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_2 = 1 \Rightarrow e_1 - u_1 = 0, . \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) = 1$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$ 我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

31.12. $B(x_2 \otimes x_1;\ X_2,\ 1_H)$。 我们推得

$$a = b_1 = 0, b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 0$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H) X_2 \otimes 1_H \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H) 1_A \otimes 1_H \otimes x_2 \end{aligned}$$

31.12.1. 情形 $X_2 \otimes 1_H \otimes g$。这是显然的。

31.12.2. 情形 $1_A \otimes 1_H \otimes x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 = 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, 1_H) 1_A \otimes 1_H \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 0, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$ 以及 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$ 我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H)\right] 1_A \otimes 1_H \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H) = 0$$

根据这些元素的形式，该式成立。

31.13. $B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2)$. 由此可得

$$\begin{aligned} a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= 0, e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,u_2)} X_2^{1-l_2} \otimes x_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{1+l_2+u_1+u_2} x_1^{u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2 \otimes x_1x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) 1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) 1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2 \otimes x_1 \otimes x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2^{1-l_2} \otimes x_1 \otimes g^{l_2+1} x_2^{1+1} = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2\right) X_2^{1-l_2} \otimes 1_H \otimes g^{l_2+1} x_1 x_2^{1+1} = 0 \end{gathered}$$

31.13.1. 情形 $X_2 \otimes x_1x_2 \otimes g$。显然。

31.13.2. 情形 $1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 = 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, x_1x_2)1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 0, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2)1_A \otimes x_1x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; 1_A, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.13.3. 情形 $X_2 \otimes x_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 0, e_1 = u_1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，并且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 1$，我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2)\right] X_2 \otimes x_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.13.4. 情形 $1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 0, e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) = e_2 = 1$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(g \otimes x_1; 1_A, x_1x_2) - B(g \otimes x_1; X_1, x_2)\right] 1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 0, e_1=u_1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，可得

$$\left[-B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_2)\right]1_A\otimes x_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{gathered} -B(g\otimes x_1;1_A,x_1x_2)-B(g\otimes x_1;X_1,x_2)+\\ -B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_2)=0 \end{gathered}$$

根据元素的形式，这一结论成立。

31.13.5. 情形 $X_2\otimes x_1\otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_1=0, b_2=1,\\ d &= e_2=0, e_1=1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;X_2,x_1)X_2\otimes x_1\otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1,\\ d &= 0, e_1=1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)X_2\otimes x_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;X_2,x_1)-B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.13.6. 情形 $X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_2=1, b_1=l_1\\ d &= 0, e_2=0, e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2=0$ 且 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 1$，我们得到

$$\left[B(g\otimes x_1;X_2,x_1)-B(g\otimes x_1;X_1X_2,1_H)\right]X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$l_1+u_1 = 1$$

$$\begin{aligned} l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1,\\ d &= 0, e_1=u_1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$以及 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 1$，可得

$$\left[B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)-B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_2)\right]X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{aligned} &B(g\otimes x_1;X_2,x_1)-B(g\otimes x_1;X_1X_2,1_H)+\\ &B(x_2\otimes x_1;X_2,x_1x_2)-B(x_2\otimes x_1;X_1X_2,x_2)=0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，这一结论成立。

31.14. $B(x_2\otimes x_1;X_2,\ gx_1)$。我们推得

$$a=b_1=0, b_2=1, d=e_1=1, e_2=0$$

并得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes g+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes x_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)X_2\otimes g\otimes x_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

31.14.1. 情形 $X_2\otimes gx_1\otimes g$。此情形显然成立。

31.14.2. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_1=0, b_2=0,\\ d &= e_1=1, e_2=1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2=0$，可得

$$+B(g\otimes x_1;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= b_1=0, b_2=l_2,\\ d &= e_1=1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，可得

$$\left[B(x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)\right]1_A\otimes gx_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g\otimes x_1;1_A,gx_1)+B(x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知。

31.14.3. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1$。 左侧第一项没有产生任何结果。由左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$, 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) = b_2 = 1$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1.$$

同时考察右侧，可得

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g) - B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.14.4. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$. 从左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) = e_2 = 0$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1) - B(g \otimes x_1; X_1, g)\right] 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) &= 1 + e_2 \equiv 0, \alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) = e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0, \\ \alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) &\equiv a + b_1 = 1 \text{and } \alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

，可得

$$\left[\begin{array}{l} B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) + \\ -B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) \end{array}\right] 1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{array}{l} B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1) - B(g \otimes x_1; X_1, g) + \\ B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) + \\ -B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) \end{array}$$

这正是我们已经得到的结果。

31.15. $B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2)$。 我们推得

$$a = b_1 = 0, b_2 = 1, d = e_2 = 1, e_1 = 0$$

于是得到

$$\begin{array}{l} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) X_2 \otimes g \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2 + \end{array}$$

31.15.1. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 = 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_2, g) X_2 \otimes g \otimes x_2$$

由左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_2, g) - B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.15.2. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 = 0$ 可得

$$+B(g \otimes x_1; 1_A, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$ 可得

$$+B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，可得

$$+B(g \otimes x_1; 1_A, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

31.16. $B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, g)$. 我们推得

$$a=0, b_1=b_2=1, d=1, e_1=e_2=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, g)X_1X_2\otimes g\otimes g\\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, g)X_2\otimes g\otimes x_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, g)X_1\otimes g\otimes x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, g)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2
\end{aligned}$$

31.16.1. 情形 $X_1X_2\otimes g\otimes g$. 此情形是平凡的

31.16.2. 情形 $X_2\otimes g\otimes x_1$. 已在小节 $B(x_2\otimes x_1; X_2, gx_1)$.中讨论过

31.16.3. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_2$. 已在小节 $B(x_2\otimes x_1;\ X_1, gx_2)$.中讨论过

31.16.4. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$. 已在小节 $B(x_2\otimes x_1;\ 1_A, gx_1x_2)$.中讨论过

31.17. $B(x_2\otimes x_1; X_1X_2,\ x_1)$。 由此可得

$$a=0, b_1=b_2=1, d=e_2=0, e_1=1$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes x_1^{1-u_1}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2}\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1X_2\otimes x_1\otimes g\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_2\otimes x_1\otimes x_1\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1\otimes x_1\otimes x_2\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)1_A\otimes x_1\otimes gx_1x_2\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1X_2\otimes 1_H\otimes x_1\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1^{1-l_1}X_2\otimes 1_H\otimes g^{l_1}x_1^{1+1}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1\otimes 1_H\otimes gx_1x_2\\
&++(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}\, B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)1_A\otimes 1_H\otimes x_1^{1+1}x_2=0
\end{aligned}$$

31.17.1. 情形 $X_1X_2\otimes x_1\otimes g$。 这是显然的

31.17.2. 情形 $X_2\otimes x_1\otimes x_1$。 左侧第一项没有贡献。由左侧第二项可得

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1\\
l_2 &= u_2=0\\
a &= 0, b_1=l_1, b_2=1,\\
d &= 0, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)=b_2=1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_2\otimes x_1\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, x_1)-B(x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.17.3. 情形 $X_1\otimes x_1\otimes x_2$。 已在小节 $B(x_2\otimes x_1; X_1,\ x_1x_2$

1.17.4. 情形 $1_A\otimes x_1\otimes gx_1x_2$。 已在小节 $B(x_2\otimes x_1; X_1,\ x_1x_2$).

31.17.5. 情形 $X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_1$。 左侧第一项没有得到任何结果。从左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1, \\ d &= 0, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) = e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1)X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.17.6. 情形 $X_1 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$。 已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ X_1,\ x_1x_2)$。

31.18. $B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2,\ x_2)$。 我们推得

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = 0, e_2 = 1$$

于是我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,0,u_2)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_1^{1-l_1} X_2^{1-l_2} \otimes x_2^{1-u_2} \otimes g^{1+l_1+l_2+u_2} x_1^{l_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_1X_2 \otimes x_2 \otimes g$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_2 \otimes x_2 \otimes x_1$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_1 \otimes x_2 \otimes x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) 1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_2 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) X_1^{1-l_1} \otimes 1_H \otimes g^{l_1} x_1^{l_1} x_2^{1+1} = 0$$

31.18.1. 情形 $X_1X_2 \otimes x_2 \otimes g$。 此情形是平凡的。

31.18.2. 情形 $X_2 \otimes x_2 \otimes x_1$。 已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ X_2, x_1x_2)$。

31.18.3. 情形 $X_1 \otimes x_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, x_2)X_1 \otimes x_2 \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \end{aligned}$$

$$d = e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，可得

$$B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2)X_1 \otimes x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

31.18.4. 情形 $1_A \otimes x_2 \otimes gx_1x_2$。 这一情形已经出现在小节 $B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2)$ 中 .

31.18.5. 情形 $X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\ d &= e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(g \otimes x_1; X_1X_2, 1_H)X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，因此我们得到

$$+B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2)X_1X_2 \otimes 1_H \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) = 0$$

这由这些元素的形式可知成立。

31.18.6. 情形 $X_2 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$。 这已在小节 $B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2)$。中讨论过。

31.19. $B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)$。 我们推导出

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1^{1-l_1}X_2 \otimes gx_2 \otimes g^{l_1}x_1^{1+1} = 0 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) X_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2 \\
+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2 \\
+(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0 \\
+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2 \\
+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1^{1-l_1}X_2 \otimes g \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \\
+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1} = 0
\end{gathered}
$$

31.19.1. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g$. 这种情形很简单。

31.19.2. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项，我们推出

$$
\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\
d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2 = 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

31.19.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项，我们得到

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 &= u_2 = 0 \\
a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\
d &= e_1 = e_2 = 1
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0 \\
l_2 + u_2 &= 1 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.19.4. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.19.5. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

31.19.6. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项，我们得到

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1=1,\\ e_2-u_2 &= 1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0、1、1、0) \equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0,$ 我们得到

$$B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1, gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

31.19.7. 情形 $X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2$。由左侧第一项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_1=b_2=1,\\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0、0、0、0) = a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$+B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1=1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= e_1=1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_2\otimes g\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_1)+B(x_2\otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.19.8. 情形 $X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_2=1, b_1=l_1\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+1+1\equiv 1,$ 我们得到

$$-B(g\otimes x_1; X_1X_2, gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1=l_1,\\ b_2-l_2 &= 1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1\\ e_2 &= u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,0,0,1)\equiv a+b_1\equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;X_1X_2,gx_1)-B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

这与我们在前一种情形中得到的结果相同。

31.19.9. 情形 $X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$, 我们得到

$$B(g\otimes x_1;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1,\\ b_2-l_2 &= 1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,1)\equiv 1+e_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$+B(g\otimes x_1;X_1X_2,gx_1)+B(x_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

这就是前一个等式。

31.20. $B(x_1\otimes x_2;GX_1,g)$。我们推得

$$a=b_1=1, d=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes g+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_1,g)G\otimes g\otimes x_1 \end{aligned}$$

31.20.1. 情形 $GX_1\otimes g\otimes g$。这是显然的。

31.20. 2. 情形 $G\otimes g\otimes x_1$. 这一情形已在小节 $B(x_2\otimes x_1;G,gx$ 中讨论过 $_1)$.

31.21. $B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right)$. 我们推得

$$a = b_1 = 1, e_1 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{gathered}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right) GX_1 \otimes x_1 \otimes g + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right) G \otimes x_1 \otimes x_1 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right) GX_1 \otimes 1_H \otimes x_1 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1\right) GX_1^{1-l_1} \otimes 1_H \otimes g^{l_1} x_1^{1+1} = 0\end{gathered}$$

31.21.1. 情形 $G \otimes x_1 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) = b_2 = 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) G \otimes x_1 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.21.2. 情形 $GX_1 \otimes 1_H \otimes x_1$。 左侧第一项中没有任何内容。从左侧第二项中，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) GX_1 \otimes 1_H \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

31.22. $B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1,\ x_2\right)$。 我们推得

$$a = b_1 = 1, e_2 = 1$$

并且我们得到

$$\begin{gathered}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2\right) GX_1 \otimes x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2\right) G \otimes x_2 \otimes x_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2\right) GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2\right) G \otimes 1_H \otimes g x_1 x_2\end{gathered}$$

31.22.1. 情形 $G \otimes x_2 \otimes x_1$。 这种情形已在小节 $B\left(x_2 \otimes x_1;\ G,\ x_1 x_2\right.$).

31.22.2. 情形 $GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(g \otimes x_1; GX_1, 1_H) GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H)\right] GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

根据这些元素的形式，该式成立。

31.22.3. $Case\ G \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$. 该情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ G,\ x_1x_2)$ 中讨论过。

31.23. $B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1,\ gx_1x_2)$。 由此可得

$$\begin{aligned} a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并且得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{l_1} x_1^{1+1} = 0 \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2 \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2 \\ + (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B\left(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2\right) GX_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{l_1+1} x_1^{1+1} x_2 = 0 \end{gathered}$$

31.23.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$. 左侧第一项中没有任何信息。由左侧第二项可推出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$ 我们得到

$$B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，得到

$$B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0$$

这根据元素的形式成立。

31.23.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，得到

$$-B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0$$

这由元素的形式可知。

31.23.3. 情形 $GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= b_1=1, b_2=0,\\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(g\otimes x_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= b_1=1, b_2=l_2\\ d &= e_1=1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)\right]GX_1\otimes 1_H\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g\otimes x_1;GX_1,gx_1)+B(x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)=0$$

鉴于元素的形式，该结论成立。

31.23.4. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 0$以及 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1)\right] X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

31.23.5. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

Sin由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1)\right] X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

这是我们刚刚在上一种情形中得到的。

31.24. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, \ g)$。 我们推导出

$$a = 1, b_2 = 1, d = 1$$

并且我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g)GX_2 \otimes g \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g)G \otimes g \otimes x_2$$

31.24.1. 情形 $G \otimes g \otimes x_2$. 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ G, gx_2)$ 中考虑过。

31.25. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)$. 我们推得

$$a = 1, b_2 = 1, e_1 = 1$$

并得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)GX_2 \otimes x_1 \otimes g + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)G \otimes x_1 \otimes x_2 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)GX_2 \otimes 1_H \otimes x_1 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)G \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$$

31.25.1. 情形 $G \otimes x_1 \otimes x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ G, x_1x_2)$ 中讨论过).

31.25.2. 情形 $GX_2 \otimes 1_H \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。从左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 0, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 1,0,0,0) \equiv b_2 = 1$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H)]\, GX_2 \otimes 1_H \otimes x_1.$$

同时考察右侧，得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.25.3. 情形 $G \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1;\ G, x_1x_2)$ 中讨论过。

31.26. $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)$。 我们推导出

$$a = b_2 = 1, e_2 = 1$$

我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)GX_2 \otimes x_2 \otimes g + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)G \otimes x_2 \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)GX_2 \otimes 1_H \otimes x_2 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)GX_2^{1-l_2} \otimes 1_H \otimes g^{l_2}x_2^{1+1} = 0.$$

31.26.1. 情形 $G\otimes x_2\otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=0, e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;G,x_2)G\otimes x_2\otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2\\ d &= e_1=0, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_2)G\otimes x_2\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;G,x_2)+B(x_2\otimes x_1;GX_2,x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.27. $B(x_2\otimes x_1;GX_2,\ gx_1x_2)$。 我们推得

$$a=b_2=1, d=e_1=e_2=1$$

于是得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes g\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{l_2}x_2^{1+1}=0\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}B(x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_2+1}x_1x_2^{1+1}=0. \end{gathered}$$

31.27.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 1$ 我们得到

$$-B(g\otimes x_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

由左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

31.27.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有任何内容。由左侧第二项，我们可推出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 1$ 我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同样考察右侧，可得

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

31.27.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 1$ 以及 $\alpha(x_2; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 0,$ 可得

$$\left[-B(g \otimes x_1; G, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

Sin由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0,$ 可得

$$\left[B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)\right] X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; G, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1; GX_1, gx_2) +$$

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.27.4. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这一点成立。

31.27.5. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 0$ and $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv a + b_1 \equiv 0,$ 我们得到

$$[B(g \otimes x_1; GX_2, gx_1) + B(g \otimes x_1; GX_1X_2, g)]\, GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ and $\alpha(1_H; 1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 0,$ 我们得到

$$[B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)]\, X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{aligned} &B(g \otimes x_1; GX_2, gx_1) + B(g \otimes x_1; GX_1X_2, g) + \\ &B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

31.28. $B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1X_2,\ 1_H)$。我们推导出

$$a = b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 0$$

并得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) GX_1X_2 \otimes 1_H \otimes g + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) GX_2 \otimes 1_H \otimes x_1 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) G \otimes 1_H \otimes gx_1x_2
\end{aligned}$$

31.28.1. 情形 $GX_2 \otimes 1_H \otimes x_1$。此情形已在第 $B(x_2 \otimes x_1; GX_2,\ x_1)$节中讨论过。

31.28.2. 情形 $GX_1 \otimes 1_H \otimes x_2$。此情形已在第 $B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1,\ x_2)$节中讨论过。

31.28.3. $Case\ G \otimes 1_H \otimes gx_1x_2$. 此情形已在第 $B(x_2 \otimes x_1;\ G,\ x_1x_2)$ 节中讨论过。

31.29. $B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2,\ x_1x_2)$. 我们推得

$$\begin{aligned}
a &= b_1 = b_2 = 1 \\
d &= 0, e_1 = e_2 = 1
\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes x_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \\
&\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1X_2 \otimes x_1x_2 \otimes g \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_2 \otimes x_1x_2 \otimes x_1 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) G \otimes x_1x_2 \otimes gx_1x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1X_2 \otimes x_2 \otimes x_1 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1}X_2 \otimes x_2 \otimes g^{l_1}x_1^{1+1} = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1 \otimes x_2 \otimes gx_1x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1} \otimes x_2 \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1X_2 \otimes x_1 \otimes x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_2 \otimes x_1 \otimes gx_1x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes x_1 \otimes g^{l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1X_2 \otimes 1_H \otimes gx_1x_2 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1}X_2 \otimes 1_H \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \\
&+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes 1_H \otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1} = 0
\end{aligned}$$

31.29.1. 情形 $GX_2 \otimes x_1x_2 \otimes x_1$。 左侧第一项没有贡献。由左侧第二项可推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 0, e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)GX_2 \otimes x_1x_2 \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.29.2. 情形 $GX_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_2$。 从左侧第一项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, x_1x_2)GX_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 0, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)GX_1 \otimes x_1x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

31.29.3. 情形 $G \otimes x_1x_2 \otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0,$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, x_1x_2)G \otimes x_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 0, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1,\\ e_2-u_2 &= 1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)G\otimes x_1x_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g\otimes x_1; GX_1, x_1x_2)+B(x_2\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)=0$$

这正是我们刚才得到的结果。

31.29.4. 情形 $GX_1X_2\otimes x_2\otimes x_1$。 左侧第一项没有任何项。由左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1,\\ d &= 0, e_2=1, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)GX_1X_2\otimes x_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$+B(x_2\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

31.29.5. 情形 $GX_1\otimes x_2\otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=0,\\ d &= 0, e_1=u_1=1, e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1; GX_1, x_1x_2)GX_1\otimes x_2\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 0, e_1=u_1=1,\\ e_2-u_2 &= 1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2)G\otimes x_1x_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;GX_1,x_1x_2)-B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这是我们刚在情形 $G\otimes x_1x_2\otimes gx_1x_2$. 中得到的

31.29.6. 情形 $GX_1X_2\otimes x_1\otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= b_1=b_2=1,\\ d &= 0,e_1=1,e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)GX_1X_2\otimes x_1\otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1,b_1=1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= 0,e_1=1,e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)GX_1\otimes x_1x_2\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)-B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

根据这些元素的形式，这一结论成立。

31.29.7. 情形 $GX_2\otimes x_1\otimes gx_1x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=1,\\ d &= 0,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1,e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$+B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)GX_2\otimes x_1\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1,\\ d &= 0,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1,\\ e_2 &= u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)GX_2\otimes x_1\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$+B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这正是我们在情形 $GX_1X_2\otimes x_1\otimes x_2$. 中得到的结果

31.29.8. 情形 $GX_1X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得 t

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1,\\ d &= 0, e_1=u_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$, 我们得到

$$B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)GX_1X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1,\\ b_2-l_2 &= 1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 0, e_1=u_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)GX_1X_2\otimes 1_H\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$+B(g\otimes x_1;GX_1X_2,x_1)+B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,x_1x_2)=0$$

这是我们刚刚在情形 $GX_1X_2\otimes x_1\otimes x_2$. 中得到的

31.30. $B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)$. 我们推导得出

$$a=b_1=b_2=1, d=e_1=1$$

并得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes g\\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1\\
(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\,&B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2\\
(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}\,&B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0.
\end{aligned}$$

31.30.1. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1$。 左侧第一项没有得到任何结果。由左侧第二项，我们推导出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

31.30.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$。这种情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)$。中讨论过。

31.30.3. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)$。中讨论过。

31.30.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1$。 左侧第一项没有贡献。由左侧第二项，我们推得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

这正是我们在情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1$. 中已经得到的结果

31.30.5. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 此情形已在情形 $B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)$。

31.31. $B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)$。 我们推得

$$a = b_1 = b_2 = 1, d = e_2 = 1$$

从而得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,0,u_2)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes g^{1+l_1+l_2+u_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes g$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes g \otimes gx_2^{1+1} = 0$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes g^{1+l_1+l_2+u_2}x_1x_2^{1+1} = 0.$$

31.31.1. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2)$。31.31.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(g \otimes x_1; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

这成立，因为元素的形式如此。

31.31.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 这一情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2)$。31.31.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g \otimes x_1; GX_1X_2, g) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

31.31.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。 这一情形已在小节 $B(x_2\otimes x_1;GX_2,\ gx_1x_2)$。

$$32.\ B\left(x_2\otimes x_2\right)$$

由（34）可得

$$B(x_2\otimes x_2)=B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g). \tag{413}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}B\left(x_2\otimes x_2\right) &= 2B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)1_A\otimes gx_1x_2+\\ &-2B\left(x_2\otimes 1_H;G,g\right)G\otimes gx_2\\ &+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)X_1\otimes gx_2+\\ &+2\left[+B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]X_2\otimes gx_2+\\ &+2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_2\otimes gx_1x_2+\\ &+2\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_2+\end{aligned}$$

32.1. $B\left(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2\right)$. 我们推得

$$a=0,d=e_1=e_2=1$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B\left(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2\right)1_A\otimes gx_1x_2\otimes g\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B\left(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2\right)1_A\otimes gx_2\otimes x_1\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B\left(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2\right)1_A\otimes gx_1\otimes x_2\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B\left(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2\right)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2\end{aligned}$$

32.1.1. 情形 $1_A\otimes gx_1x_2\otimes g$. 此情形是平凡的。

32.1.2. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1$。左侧第一项没有任何内容。左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2=0\\ d &= 1,e_2=1,e_1=u_1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)=0$$

鉴于该元素的形式，这一结论成立。

32.1.3. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0\\ d &= 1,e_1=1,e_2=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$l_1 = u_1=0$$

$$\begin{aligned} l_2+u_2 &= 1\\ a &= b_1=0, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,1,0,0)\equiv 0$，因此得到

$$\left[B(x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)+B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)\right]1_A\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考察右侧，可得

$$\begin{aligned} &B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)+B(x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)\\ &+B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知。

32.1.4. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2=0$和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 1$，可得

$$\left[B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)-B(g\otimes x_2;X_1,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &\equiv 1+e_2\equiv 0,\ \alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0,\\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &\equiv a+b_1\equiv 1\text{and }\alpha(1_H;1,1,0,0)\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

,我们得到

$$\left[\begin{array}{l} B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)+\\ -B(x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)+B(x_2\otimes x_2;X_1X_2,g) \end{array}\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{aligned} &B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)-B(g\otimes x_2;X_1,g)+\\ &B(x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)+\\ &-+B(x_2\otimes x_2;X_1X_2,g)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

32.2. $B(x_2\otimes x_2;\ G,gx_2)$。 我们推得

$$a=1, d=e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_2;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes g\\ &+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes x_2;G,gx_2)G\otimes g\otimes x_2. \end{aligned}$$

32.2.1. 情形 $G \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_2; G, g) G \otimes g \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，因此得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_2; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, g)\right] G \otimes g \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes x_2; G, g) - B(x_2 \otimes x_2; G, gx_2) + \\ &+B(x_2 \otimes x_2; GX_2, g) - B(x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

32.3. $B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)$。 由此可得

$$b_1 = 1, d = 1, e_2 = 1$$

于是得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) X_1 \otimes g \otimes x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

32.3.1. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$。 这已在小节 $B(x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2)$。中讨论过。

32.3.2. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_2; X_1, g) X_1 \otimes g \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$且 $\alpha(1_H; 0,1,0,0) \equiv 0$，因此得到

$$[-B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g)]\, X_1 \otimes g \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} -B(g \otimes x_2; X_1, g) - B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) + \\ +B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0 \end{gathered}$$

根据元素的形式，这一结论成立。

32.3.3. *Case* $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$. 这一情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_2;\ 1_A, gx_1x_2)$. 中讨论过

32.4. $B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2)$. 我们推得

$$b_2 = 1, d = e_2 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) X_2 \otimes gx_2 \otimes g + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2 + \\ + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) X_2 \otimes g \otimes x_2 + \\ + + (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_2} x_2^{1+1} = 0 \end{gathered}$$

32.4.1. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_2; 1_A, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 0, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，并得到

$$B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g \otimes x_2; 1_A, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

32.4.2. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes x_2; X_2, g) X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

从左侧第二项我们得到

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 并且我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes x_2; X_2, g) - B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

32.5. $B(x_2 \otimes x_2; GX_2,\ gx_1x_2)$. 由此我们推得

$$a = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

并得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,u_2)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{1+l_2+u_1+u_2} x_1^{u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{+l_2} x_2^{1+1} = 0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) GX_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{+l_2+1} x_1 x_2^{1+1} = 0$$

32.5.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，因此得到

$$B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，该结论成立。

32.5.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。左侧第一项没有任何贡献。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

32.5.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0) = e_2 = 1$ 且 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(g \otimes x_2; G, gx_1x_2) + B(g \otimes x_2; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$ 和 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2)+\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g\otimes x_2;G,gx_1x_2)+B(g\otimes x_2;GX_1,gx_2)+$$
$$B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

32.5.4. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1,b_1=0,b_2=1\\ d &= e_1=1,e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)=a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$+B(g\otimes x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1,b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= 1,e_1=1,e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 并且我们得到

$$B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g\otimes x_2;GX_2,gx_1)+B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知成立。

32.5.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=1,\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)=e_2=0$ 且 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$，可得

$$\left[+B(g\otimes x_2;GX_2,gx_1)+B(g\otimes x_2;GX_1X_2,g)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$，因此我们得到

$$\left[B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)+\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，因此我们得到

$$+B(g\otimes x_2;GX_2,gx_1)+B(g\otimes x_2;GX_1X_2,g)+$$
$$B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0$$

这由元素的形式可知。

32.6. $B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)$。 由此我们推得

$$a=b_1=b_2=1,d=e_2=1$$

并且得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,0,u_2)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes g$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)}B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$

32.6.1. 情形 $GX_2\otimes gx_2\otimes x_1$。 已在小节 $B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)$。32.6.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_2$。 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2 &= u_2=0\\ a &= b_1=1,b_2=0\\ d &= e_2=1,e_1=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)=a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(g\otimes x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0\\ l_2+u_2 &= 1\\ a &= b_1=1,b_2=l_2\\ d &= 1,e_1=0,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g\otimes x_2;GX_1,gx_2)+B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)-B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

32.6.3. $Case\ G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$. 这种情形已在小节 $B(x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)$ 中讨论过 .

32.6.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2$. 由左侧第一项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) = a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_2; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

由左侧第二项可得

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，并且我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_2; GX_1X_2, g) - B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

32.6.5. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$. 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes x_2; GX_2,\ gx_1x_2)$.中讨论过。

33. $B(x_2 \otimes x_1x_2)$

由（37）得

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes x_1x_2) &= B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ &\quad +(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ &\quad -(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &\quad +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) \\ &\quad -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &\quad -(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H). \end{aligned} \tag{414}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &B(x_2 \otimes x_1x_2) = -2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g)1_A \otimes gx_2 + \\ &[4B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)]\, G \otimes gx_1x_2 + \\ &-2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)X_1 \otimes gx_1x_2 + \\ &+\begin{bmatrix} -4B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 4B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_2 \otimes gx_1x_2 + \\ &+\begin{bmatrix} -2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_1X_2 \otimes gx_2 + \\ &+[-2B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)]\, GX_1 \otimes gx_2 + \\ &+[+2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)]\, GX_2 \otimes gx_2 + \\ &[2B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)]\, GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 + \end{aligned}$$

我们将卡西米尔公式写为 $B(x_2 \otimes x_1x_2)$。

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ & B^A(x_2\otimes x_1x_2)\otimes B^H(x_2\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\
&B^A(x_2\otimes x_1)\otimes B^H(x_2\otimes x_1)\otimes gx_2\\
&-B^A(x_2\otimes x_2)\otimes B^H(x_2\otimes x_2)\otimes gx_1\\
&B^A(x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_2\otimes 1_H)\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

33.1. $B(x_2\otimes x_1x_2;1_A,\ gx_2)$。我们推得

$$\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_2=1,e_1=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1x_2;1_A,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes 1_H\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes x_1x_2;1_A,gx_2)1_A\otimes g\otimes gx_2
\end{aligned}$$

33.1.1. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_2$。第一项

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\
a &= b_1=b_2=0,d=1,e_1=e_2=0
\end{aligned}$$

于是得到

$$B(g\otimes x_1x_2;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_2$$

第二项

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\
a &= b_1=0,b_2=l_2\\
d &= 1,e_1=0,e_2=u_2
\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&B(g\otimes x_1x_2;1_A,g)+B(x_2\otimes x_1x_2;1_A,gx_2)\\
&+B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,g)-B(x_2\otimes x_1;1_A,g)=0
\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立

33.2. $B(x_2\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)$。

$$\begin{aligned}
a &= 1,b_1=b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_2\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\\
&\otimes g^{a+1+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_2
\end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes g \otimes x_1x_2$$

33.2.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$。这没有带来任何新内容。

33.2.2. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_2$。等式左侧的第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv 1 + 0 + 0 = 1$ 以及 $\alpha(1_H; 0,1,0,0) \equiv 0,$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} -B(g \otimes x_1x_2; G, gx_1) - B(x_2 \otimes x_1; G, gx_1) - B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) \\ +B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

33.2.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$。左侧第一项没有给出任何结果。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 \equiv 0,$ 我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_2; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

33.2.4. 情形 $G \otimes g \otimes x_1x_2$。等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 0$ 且 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv b_2 + a + b_1 + b_2 + 1 + 1 \equiv 0,$ 我们得到

$$\left[B(g \otimes x_1x_2; G, gx_1) + B(g \otimes x_1x_2; GX_1, g)\right] G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

$$d = 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2$$

由于

$$\begin{aligned}
&\alpha(1_H;0,0,1,1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0\\
&\alpha(1_H;0,1,1,0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 1\\
&\alpha(1_H;1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 0\\
&\alpha(1_H;1,1,0,0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0
\end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) + \\ +B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) \end{array}\right] G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned}
&B(g \otimes x_1x_2; G, gx_1) + B(g \otimes x_1x_2; GX_1, g) - B(x_2 \otimes 1_H; G, g) +\\
&+B(x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2)\\
&-B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) = 0
\end{aligned}$$

根据这些元素的形式，该结论成立。

33.3. $B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)$。我们推得

$$\begin{aligned}
a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 1\\
d &= e_1 = e_2 = 1
\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1} = 0\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1} = 0
\end{aligned}$$

33.3.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H$。没有新内容。

33.3.2. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0\\
a &= b_1 = 0, b_2 = 1\\
d &= e_1 = 1, e_2 = 0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1\\
a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 1\\
d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

考虑右侧可得

$$-B(g\otimes x_1x_2;X_2,gx_1)-B(x_2\otimes x_1,X_2,gx_1)-B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

33.3.3. 情形 $1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0\\ d &= e_1=e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0,b_2=l_2\\ d &= 1,e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,1,0,0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)-B(x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

33.3.4. 情形 $X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$。 左侧第一项，没有内容。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2=1\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=1$, 我们得到

$$\left[B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes gx_2\otimes gx_1=0$$

同时考虑右侧，我们得到

$$+B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;X_2,gx_2)-B(x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

33.3.5. 情形 $X_2\otimes g\otimes x_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2=1\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2+(a+b_1+b_2+1)+1\equiv 1$, 我们得到

$$\left[B(g\otimes x_1x_2;X_2,gx_1)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0\Rightarrow u_2=1\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1=1$, 我们得到

$$\left[B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;X_2,gx_1)-B(g\otimes x_1x_2;X_1X_2,g)-B(x_2\otimes 1_H;X_2,g)$$
$$+B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

33.3.6. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=1. \end{aligned}$$

Since $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=1$ 和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+1+1\equiv a+b_1\equiv 1$, 我们得到 in

$$\left[-B(g\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=l_1,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0\Rightarrow b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 1+0+0+1+1\equiv 1$
且 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1+1\equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)-B(g\otimes x_1x_2;X_1,gx_2)$$
$$-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_2)\ -B(x_2\otimes x_1x_2;\ X_2,\ \ gx_1x_2)\ +B(x_2\otimes x_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_2)\ =0$$

这由元素的形式可知。

33.4. $B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,\ \ gx_2)$。我们推得

$$a=1,b_1=1,b_2=0,d=1,e_1=0,e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes 1_H\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes g\otimes gx_2\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)G\otimes g\otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

33.4.1. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=0, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes gx_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1+0+1\equiv 0$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$[B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g)]\,GX_1\otimes g\otimes gx_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$B(g\otimes x_1x_2;\ GX_1,\ g)-B(x_2\otimes x_1;\ GX_1,\ g)+B(x_2\otimes x_1x_2;\ GX_1,\ gx_2)+B(x_2\otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ g)=0$这由元素的形式可知。

33.4.2. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_1$。 此情形已在小节 $B(x_2\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)$ 中考察过。

33.4.3. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2\otimes x_1x_2;\ G,\ gx_1x_2)$ 中考察过

33.5. $B(x_2\otimes x_1x_2;\ GX_2,\ gx_2)$。 我们推得

$$\begin{aligned}a &= 1,b_1=0,b_2=1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=1\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_2)GX_2\otimes gx_2\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1x_2;G^aX_2,g^dx_2)GX_2^{1-l_2}\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_2}x_2^{1+1}=0\end{aligned}$$

33.5.1. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_2$。 等式左侧的左侧第一项给出 u s

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=0,b_2=1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2,\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)GX_2\otimes g\otimes gx_2$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0\Rightarrow u_2=1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;GX_2,g)-B(x_2\otimes x_1;GX_2,g)+B(x_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

33.5.2. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes x_1x_2; G, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,1,0,0) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes x_1x_2; G, gx_2) - B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

33.6. $B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, \ gx_1x_2)$。我们推导出

$$a = b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2 \otimes gx_2 \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1} = 0 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{l_1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2 \otimes g \otimes g^{l_1+}x_1^{1+1}x_2 = 0 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)} B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_1+l_2+}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1} = 0
\end{aligned}$$

33.6.1. 情形 $GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，该结论成立。

33.6.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2..$$

同时考虑右侧，得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

33.6.3. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + 1 + 1 \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

33.6.4. 情形 $GX_1X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

33.6.5. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0\Rightarrow b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)-B(x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)-B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

33.6.6. 情形 $GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$。 等式左侧的左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=1\\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(g\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$-B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2,\ \ gx_1) - B(x_2 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1X_2,\ gx_1) = 0$鉴于元素的形式，这一结论成立。

33.6.7. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0, \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=1, \\ d &= 1, e_1-u_1=1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+1+1 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2-l_2=1 \Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1 \\ d &= 1, e_1-u_1=1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a+b_1 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(g \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1) + B(x_2 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1) = 0$ 鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

33.6.8. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0, \\ a &= 1, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1, \\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由 $\alpha(x_2;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+b_2+1 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1 \\ b_2-l_2 &= 1 \Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1 \\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1+e_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(g \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1) + B(x_2 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1x_2) - B(x_2 \otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ \ g) = 0$ 这由元素的形式可知。

34. $B\left(x_2 \otimes gx_1\right)$

利用（39），我们得到

$$
\begin{aligned}
(415) \qquad & B(x_2 \otimes gx_1) \\
= \; & (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H) \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H).
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
B(x_2 \otimes gx_1) \; = \; & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H)1_A \otimes 1_H + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)1_A \otimes x_1x_2 + \\
& + \left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right] 1_A \otimes gx_1 \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_2 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)G \otimes g + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)G \otimes x_1 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)G \otimes x_2 + \\
& + \left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_1x_2 \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)X_1 \otimes g + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1)X_1 \otimes x_1 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)X_1 \otimes x_2 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)X_2 \otimes g + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)X_2 \otimes x_1 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)X_2 \otimes x_2 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 + \\
& + \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array}\right] X_1X_2 \otimes 1_H + \\
& - 3B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)GX_1 \otimes 1_H + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)GX_1 \otimes x_1x_2 \\
& - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)GX_2 \otimes 1_H + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2)GX_2 \otimes x_1x_2 + \\
& + \left[\begin{array}{c} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - \\ 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] GX_2 \otimes gx_1 + \\
& + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_2 + \\
& + \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] GX_1X_2 \otimes g \\
& - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)GX_1X_2 \otimes x_1 + \\
& - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2)GX_1X_2 \otimes x_2
\end{aligned}
$$

我们定义

$$
\begin{aligned}
C = & \left[-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right] 1_A \otimes gx_1 + \\
& + \left[-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_1x_2 +
\end{aligned}
$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2+$$
$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1+$$
$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1+$$
$$+\left[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]GX_2\otimes gx_1$$

Then

$$B(x_2\otimes gx_1)=C+B(x_1x_2\otimes 1_H).$$
$$B(x_2\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})=$$
$$=C(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})+B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$

使得

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_2\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$\left[\begin{array}{c}C(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\end{array}\right]$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}=$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}C(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

现在我们考虑 $B(x_2\otimes gx_1)$ 的卡西米尔公式

$$\begin{aligned}&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\&B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\&+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\&B(x_2\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\=\;&B^A(x_2\otimes gx_1)\otimes B^H(x_2\otimes gx_1)\otimes 1_H+\\&B^A(x_2\otimes g)\otimes B^H(x_2\otimes g)\otimes gx_1+\end{aligned}$$

我们可以将其改写为

$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}C(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+$$
$$\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$

$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$
$$= C\otimes 1_H + B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H$$
$$B^A(x_2\otimes g)\otimes B^H(x_2\otimes g)\otimes gx_1+$$

根据公式 296，我们现在有

$$+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$
$$= B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes 1_H$$

因此，我们需要考虑的是

$$\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}$$
$$B(g\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+$$
$$\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}C(G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})$$
$$G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+$$
$$= C\otimes 1_H$$
$$B^A(x_2\otimes g)\otimes B^H(x_2\otimes g)\otimes gx_1$$

Now

$$C=[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)]\,1_A\otimes gx_1+$$
$$+[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)]\,G\otimes gx_1x_2+$$
$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2+$$
$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1+$$
$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1+$$
$$+[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)]\,GX_2\otimes gx_1$$

我们按照通常方法继续。

34.1. $B(x_2\otimes gx_1;1_A,\ gx_1)$。

$$\begin{aligned}a &= b_1=b_2=0\\ d &= e_1=1,e_2=0\end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes gx_1;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes 1_H+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_2\otimes gx_1;1_A,gx_1)1_A\otimes g\otimes gx_1+$$

34.1.1. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1$。左侧第一项为空。左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2=0\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)=0$和 $\alpha(1_H;1,0,0,0)\equiv b_2=0$，我们得到

$$[B(x_2\otimes gx_1;1_A,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1;X_1,g)]\,1_A\otimes g\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_1;1_A,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1;X_1,g)-B(x_2\otimes g;1_A,g)=0$$

这根据元素的形式成立。

34.2. $B(x_2 \otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$。

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) G \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) G \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) G \otimes g \otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

34.2.1. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$。 左侧第一项为空。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) = 0$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2)]\, G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$$B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) - B(x_2 \otimes g; G, gx_2) = 0$$

根据元素的形式，这一等式成立。

34.2.2. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; G, gx_1) G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$[-B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; G, gx_1) - B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

34.2.3. 情形 $G \otimes g \otimes x_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

$\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 和 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) + 1 \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到 n

$$[B(g \otimes gx_1; G, gx_1) + B(g \otimes gx_1; GX_1, g)]\, G \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) &= 1 + e_2 \equiv 0,\ \alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) = e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1, \\ \alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) &\equiv a + b_1 \equiv 0 \text{and } \alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{l} B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) + \\ B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, g) \end{array} \right] G \otimes g \otimes x_1x_2$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{gathered} B(g \otimes gx_1; G, gx_1) + B(g \otimes gx_1; GX_1, g) \\ B(x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) + \\ B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, g) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

34.3. $B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$。

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, a = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_1+1} x_1^{1+1} + = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) X_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{+l_1+} x_1^{1+1} x_2 = 0 \end{gathered}$$

34.3.1. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

34.3.2. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

34.3.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_1)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)\right] X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_1) - B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

34.3.4. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv b_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) + 1 \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1; X_1, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 1$且 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)\right]1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1;X_1,gx_1)-B(x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)=0$$

这正是我们在情形 $X_1\otimes gx_1\otimes gx_2$. 中已经得到的结果

34.3.5. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_1x_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$，我们得到

$$B(g\otimes gx_1;X_1,gx_1)X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=u_2 \end{aligned}$$

Since $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$我们得到

$$\left[B(x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

由于右侧没有内容，我们得到

$$+B(g\otimes gx_1;X_1,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)=0$$

这正是我们在情形 $X_1\otimes gx_1\otimes gx_2$. 中已经得到的

34.4. $B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,\ \ gx_1)$。

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1=b_2=1\\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes 1_H+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1^{1-l_1}X_2\otimes g\otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}=0\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1\otimes g\otimes x_1x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_1^{1-l_1}\otimes g\otimes g^{l_1+}x_1^{1+1}x_2=0 \end{gathered}$$

34.4.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$。左侧第一项，什么也没有。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes g; X_2, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

34.4.2. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。这一情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1; X_1, \ gx_1x_2)$。中讨论过。

34.4.3. 情形 1 $_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$。此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1; X_1, \ gx_1x_2)$ 中讨论过 .

34.4.4. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$。左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, \ 0, \ 1, \ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，得到

$$B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

34.4.5. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$. 这一情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$. 中讨论过。

34.5. $B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)$. 由此可得

$$\begin{aligned} a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \otimes 1_H + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes g \otimes gx_1 + \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1)GX_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1} = 0. \end{gathered}$$

34.5.1. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$+B(x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)-B(x_2\otimes g;G,gx_1)=0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

34.5.2. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1$。 左侧第一项为空。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=0\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)-B(x_2\otimes g;GX_1,g)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

34.6. $B(x_2\otimes gx_1;GX_2,\ gx_1)$。

$$\begin{aligned} a &= b_2=1, b_1=0\\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)GX_2\otimes g\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)G\otimes g\otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

34.6.1. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$。 此情形已在小节 $B(x_2\otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

34.6.2. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 1$, 我们得到

$$[+B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)-B(x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,g)]\,GX_2\otimes g\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)-B(x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,g)-B(x_2\otimes g;GX_2,g)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

34.6.3. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$. 这种情形已在小节 $B(x_2\otimes gx_1;\ \ G,gx_1x_2)$ 中讨论过。

35. $B\left(x_2\otimes gx_2\right)$

利用（39）可得

$$
\begin{aligned}
(416)\qquad & B(x_2\otimes gx_2)\\
= \;& (1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$
\begin{aligned}
B(x_2\otimes gx_2) \;=\; & \left[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]1_A\otimes gx_2+\\
& +2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1x_2+\\
& -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2+\\
& -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2+\\
& -2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_2+\\
& +\left[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]GX_2\otimes gx_2+
\end{aligned}
$$

我们将 $B(x_2\otimes gx_2)$ 的卡西米尔条件记为

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(g\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
& B(x_2\otimes gx_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
= \;& B^A(x_2\otimes gx_2)\otimes B^H(x_2\otimes gx_2)\otimes 1_H+\\
& B^A(x_2\otimes g)\otimes B^H(x_2\otimes g)\otimes gx_2+
\end{aligned}
$$

35.1. $B(x_2\otimes gx_2;1_A,\ gx_2)$。

$$
\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_2=1,e_1=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_2\otimes gx_2;1_A,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes 1_H+\\
& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_2\otimes gx_2;1_A,gx_2)1_A\otimes g\otimes gx_2
\end{aligned}
$$

35.1.1. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_2$。等式左侧的左侧第一项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\
a &= b_1=b_2=0\\
d &= 1,e_1=e_2=0.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(g\otimes gx_2;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\
a &= 0,b_1=0,b_2=l_2\\
d &= 1,e_1=0,e_2=u_2.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_2\otimes gx_2;1_A,gx_2)+B(x_2\otimes gx_2;X_2,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_2.$$

同时考虑右侧后，我们得到，我们得到

$B(x_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2; X_2, g) - B(x_2 \otimes g; 1_A, g) = 0$, 这根据元素的形式成立。

35.2. $B(x_2 \otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2)$。我们推得

$$a = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B\left(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B\left(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2\right) G \otimes gx_2 \otimes gx_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B\left(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1 \otimes gx_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B\left(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2\right) G \otimes g \otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

35.2.1. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$。左侧第一项，没有。左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0\\
a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0\\
d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$和 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 \equiv 0$，我们得到

$$\left[+B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0$$

根据元素的形式，这成立。

35.2.2. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0\\
a &= 1, b_1 = b_2 = 0\\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; G, gx_1) G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1\\
a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2\\
d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$且 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，得到

$$-B(g \otimes gx_2;\ G, gx_1)\ - B(x_2 \otimes gx_2;\ G, gx_1x_2)\ + B(x_2 \otimes gx_2;\ GX_2, gx_1)\ - B(x_2 \otimes g;\ G, gx_1)\ = 0$$

$$\begin{aligned}
-B(g \otimes gx_2; G, gx_1) &= B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\
-B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) &= -2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\
+B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1) &= 0\\
-B(x_2 \otimes g; G, gx_1) &= B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)
\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

35.2.3. 情形 $G \otimes g \otimes x_1 x_2$。 等式左侧的第一项为

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 和 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 + a + b_1 + b_2 + 1 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$[B(g \otimes gx_2; G, gx_1) + B(g \otimes gx_2; GX_1, g)]\, G \otimes g \otimes x_1 x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0 \\ &\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 1 \\ &\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 0 \\ &\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{l} B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1) + \\ +B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, g) \end{array} \right] G \otimes g \otimes x_1 x_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g \otimes gx_2; G, gx_1) + B(g \otimes gx_2; GX_1, g) +$$

$+B(x_2 \otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2;\ GX_1,\ gx_2) - B(x_2 \otimes gx_2;\ GX_2,\ gx_1) + B(x_2 \otimes gx_2;$ $GX_1X_2,\ g) = 0$这根据元素的形式成立。

35.3. $B(x_2 \otimes gx_2;\ X_2,\ gx_1x_2)$。 我们推得

$$b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

从而得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,u_2)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} x_2^{1-u_2} \otimes g^{l_2+u_1+u_2} x_1^{u_1} x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_A \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2^{1-l_2} \otimes gx_1 \otimes g^{+l_2+1} x_2^{1+1} = 0 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{+l_2} x_1 x_2^{1+1} = 0 \end{aligned}$$

35.3.1. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这成立。

35.3.2. 情形 $X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。 左侧第一项为零。左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 1$，我们得到

$$\left[+B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)\right] X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这一结论成立。

35.3.3. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 1$和 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv b_2 + a + b_1 + b_2 + 1 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(g \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) - B(g \otimes gx_2; X_1, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,1,1,0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 1$和 $\alpha(1_H; 1,1,0,0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$我们得到 in

$$\left[-B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)\right] G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由于右侧为空，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) - B(g \otimes gx_2; X_1, gx_2) +$$

$$-B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

35.3.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; X_2, gx_1) - B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes g; X_2, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，这一点成立。

35.3.5. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 0$ 且 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv b_2 + a + b_1 + b_2 + 1 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[B(g \otimes gx_2; X_2, gx_1) - B(g \otimes gx_2; X_1X_2, g)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 1$ 我们得到

$$\left[+B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由于右侧为空，我们得到

$$\begin{aligned} B(g \otimes gx_2; X_2, gx_1) - B(g \otimes gx_2; X_1X_2, g) + \\ +B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

这依据元素的形式成立。

35.4. $B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2,\ gx_2)$。 我们有

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_2 = 1$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes 1_A + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_2 + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2 + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2 + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0 \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1} = 0.
\end{aligned}$$

35.4.1. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_2$. 等式左侧的左侧第一项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0 \\
d &= e_2 = 1, e_1 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_2.$$

左侧的第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\
d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(g \otimes gx_2; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结果成立。

35.4.2. 情形 $X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。已在小节 $B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)$。35.4.3. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。已在小节 $B(x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)$。35.4.4. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\
d &= 1, e_1 = e_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\
a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1
\end{aligned}$$

$$d = 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，可得

$$B(g \otimes gx_2; X_1X_2, g) + B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

35.4.5. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$. 这一情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_2;\ X_2,\ gx_1x_2)$中讨论过。

35.5. $B(x_2 \otimes gx_2; GX_1,\ gx_2)$. 我们推得

$$a = b_1 = 1, d = 1, e_2 = 1$$

并且可得

$$GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes g^{l_1+u_2}x_1^{l_1}x_2^{+u_2}$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes 1_H + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)GX_1 \otimes g \otimes gx_2 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2)G \otimes g \otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

35.5.1. $Case\ G \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 这种情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2)$。

35.5.2. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_2$. 等式左侧第一项给出 u s

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\
d &= 1, e_1 = e_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; GX_1, g)GX_1 \otimes g \otimes gx_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\
a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\
d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[+B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, g)\right] GX_1 \otimes g \otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(g \otimes gx_2; GX_1, g) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2;\ GX_1X_2, g) - B(x_2 \otimes g;\ GX_1, g)$ $= 0$这由元素的形式可知成立。

35.5.3. $Case\ G \otimes g \otimes x_1x_2$. 这种情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_2;\ G, gx_1x_2)$.中讨论过。

35.6. $B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2)$. 我们有

$$a = 1, b_2 = 1, b_1 = 0, d = e_2 = 1, e_1 = 0$$
$$GX_2^{1-l_2} \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes g^{l_2+u_2} x_2^{l_2+u_2}$$
$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_2 \otimes 1_A +$$
$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_2 +$$
$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes g \otimes gx_2 +$$
$$+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B(x_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)GX_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{+l_2} x_2^{1+1} = 0$$

35.6.1. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; G, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_2..$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g \otimes gx_2; G, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2) - B(x_2 \otimes g; G, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

35.6.2. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; GX_2, g)GX_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

再考虑右侧，我们得到

$$B(g \otimes gx_2; GX_2, g) + B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2) - B(x_2 \otimes g; GX_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

36. $B\left(x_2\otimes gx_1x_2\right)$

利用 40，我们得到

$$
\begin{aligned}
B(x_2\otimes gx_1x_2) &= (1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&\quad -(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&\quad +(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&\quad +(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&\quad +B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&\quad -(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
\tag{417}
$$

因此我们得到

$$
\begin{gathered}
B(x_2\otimes gx_1x_2)=\\
\left[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-4B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]1_A\otimes gx_1x_2\\
-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)G\otimes gx_2+\\
-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)X_1\otimes gx_2+\\
-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)X_2\otimes gx_2+\\
-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\\
-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1x_2\\
\left[-4B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -4B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,gx_2)\ +2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,gx_1)\right]GX_2\otimes gx_1x_2+\\
+\left[+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,gx_1)\ +2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,gx_2)\right.\\
\left.\right]GX_1X_2\otimes gx_2
\end{gathered}
$$

我们写出 $B(x_2\otimes gx_1x_2)$ 的卡西米尔公式

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(g\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
&+\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_2\otimes gx_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ &B^A(x_2\otimes gx_1x_2)\otimes B^H(x_2\otimes gx_1x_2)\otimes g+\\
&B^A(x_2\otimes gx_1)\otimes B^H(x_2\otimes gx_1)\otimes x_2\\
&-B^A(x_2\otimes gx_2)\otimes B^H(x_2\otimes gx_2)\otimes x_1\\
&B^A(x_2\otimes g)\otimes B^H(x_2\otimes g)\otimes gx_1x_2
\end{aligned}
$$

36.1. $B\left(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2\right)$. 我们推得

$$
\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1\\
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv u_1+u_2+1
\end{aligned}
$$

并得到

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes\\
&\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2+1}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes g+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_2+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1+
\end{aligned}
$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes g \otimes gx_1x_2 +$$

36.1.1. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$。 等式左侧的左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$\left[B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1) - B(x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) = 0$.鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

36.1.2. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$. 等式左侧的第一项没有给出任何结果。等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$以及 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_2) + -B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

36.1.3. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 以及 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 = 1$, 我们得到

$$\left[B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1) - B(g \otimes gx_1x_2; X_1, g)\right] 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) &\equiv a + b_1 = 1 \\ \alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) &\equiv 1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &\equiv 1+e_2\equiv 0\\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right) &\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 0\end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{l}-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,g)\\ +B(x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑等式的右侧，我们得到

$$\begin{aligned}&B(g\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1)-B(g\otimes gx_1x_2;X_1,g)-B(x_2\otimes g;1_A,g)-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)\\ &+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,g)+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)=0\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

36.2. $B\left(x_2\otimes gx_1x_2;\ G,\ gx_2\right)$。我们推 deduce 得

$$a=1,b_1=b_2=0,d=1,e_1=0,e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,u_2)}B(x_2\otimes gx_1x_2;G,gx_2)G\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{u_2+1}x_2^{u_2}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes g+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;G,gx_2)G\otimes g\otimes x_2\end{aligned}$$

36.2.1. 情形 $G\otimes g\otimes x_2$。等式左侧的左侧第一项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=b_2=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(x_2;0,0,0,0\right)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;G,g)G\otimes g\otimes x_2.$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2.\end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(1_H;0,0,0,1\right)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$ 且 $\alpha\left(1_H;0,1,0,0\right)\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_2\otimes gx_1x_2;G,gx_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,g)\right]G\otimes g\otimes x_2$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;G,g)-B(x_2\otimes gx_1;G,g)-B(x_2\otimes gx_1x_2;G,gx_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,g)=0$$

which holds in view of the form of the elements.

36.3. $B\left(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2\right)$. 我们推得

$$b_1=1,d=e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_{l_1=0}^{1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,0,u_2)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)X_1^{1-l_1}\otimes\\ &gx_2^{1-u_2}\otimes g^{l_1+u_2+1}x_1^{l_1}x_2^{u_2}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes g+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)X_1\otimes g\otimes x_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1\end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2)1_A \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

36.3.1. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1, g)X_1 \otimes g \otimes x_2$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 以及 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g)\right] X_1 \otimes g \otimes x_2$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes gx_1x_2; X_1, g) - B(x_2 \otimes gx_1; X_1, g) \\ &-B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

36.3.2. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2)$ 中讨论过。

36.3.3. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2)$中讨论过。

36.4. $B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_2)$。 由此可得

$$b_2 = 1, d = e_2 = 1$$

并得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, X_2 \otimes gx_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, 1_A \otimes gx_2 \otimes x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, X_2 \otimes g \otimes x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, X_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_2}x_2^{1+1} = 0 \end{aligned}$$

36.4.1. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$。 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(g\otimes gx_1x_2;1_A,gx_2)-B(x_2\otimes gx_1;1_A,gx_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_2)=0.$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

36.4.2. $X_2\otimes g\otimes x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= b_1=0,b_2=1\\ d &= 1,e_1=e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;X_2,g)X_2\otimes g\otimes x_2$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_2)X_2\otimes g\otimes x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;X_2,g)-B(x_2\otimes gx_1;X_2,g)-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_2)=0.$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

36.5. $B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,\ gx_1x_2)$。我们推导出

$$a=0,b_1=b_2=1,d=e_1=e_2=1$$

$$X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes g+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1}=0\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1+1}x_2^{l_2+1}=0
\end{aligned}$$

$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{1+1}=0$$

36.5.1. 情形 $X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1$. 等式左侧的左侧第一项没有给出任何结果。等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=1\\ d &= e_2=1, e_1=u_1=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)-B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

36.5.2. 情形 $X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1=1$，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,x_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

同时考察等式右侧，可得

$$-B(x_2\otimes g;X_1,gx_2)-B(g\otimes gx_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,x_1x_2)=0$$

这由这些元素的形式可知成立。

36.5.3. 情形 $X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 and $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$我们得到

$$+B(x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2$$

同时考虑等式右边，我们得到

$-B(x_2 \otimes gx_1; X_1,\ gx_1x_2) - B(g \otimes gx_1x_2;\ X_1,\ gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ gx_1x_2)$
$= 0$ 这由元素的形式可知成立。

36.5.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$。等式左侧的第一项对我们没有提供任何信息。等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

36.5.5. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 = 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1 \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑等式的右侧，我们得到

$-B(x_2 \otimes g;1_A,\ gx_1x_2) - B(g \otimes gx_1x_2;\ X_1,\ gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ gx_1x_2)$
$= 0$这根据元素的形式成立。

36.5.6. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = b_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于且 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1; X_1X_2,\ \ gx_1) + B(g \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_1) + B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_1x_2) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

36.5.7. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,\ 0,\ \ 0,\ \ 0) \equiv a + b_1 = 1$ 我们得到

$$-B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

同时考察等式右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes g; X_2,\ \ gx_1) - B(g \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_1) - B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

36.5.8. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 0$ 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

再考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(g \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

36.6. $B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)$. 我们推导出

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes g \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_{11}}x_1^{1+1} = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)} B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{+l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \end{gathered}$$

36.6.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$。 等式左侧的左侧第一项没有给出任何结果。等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

36.6.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 等式左侧的第一项对我们没有帮助。等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$B(x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$$

这根据元素的形式成立。

36.6.3. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于且 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$且 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$我们得到

$$[+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)]\, GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1) \\ &+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

36.6.4. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 \equiv 0$以及 $\alpha(1_H; 1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_2 \otimes g; G, gx_1) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1) \\ &+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

这根据元素的形式成立。

36.6.5. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$和 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$，我们得到$[B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1,\ gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1)]\, GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2.$

再考虑等式右边，我们得到

$$\begin{array}{c} -B(x_2\otimes g;GX_1,g)+B(g\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1)\\ +B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)=0 \end{array}$$

这正是我们上面已经得到的结果。

36.7. $B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,\ gx_1x_2)$。我们有

$$\begin{array}{rcl} a & = & 1,b_1=0,b_2=1\\ d & = & e_1=e_2=1 \end{array}$$

于是我们得到

$$\begin{array}{c} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes g+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_1\otimes g^{l_2}x_2^{1+1}=0\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}B\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_2+1}x_1x_2^{1+1}=0 \end{array}$$

36.7.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_2$。等式左侧的第一项给出 u s

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & u_1=0,l_2=u_2=0\\ a & = & 1,b_1=b_2=0\\ d & = & e_1=e_2=1 \end{array}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$ 我们得到

$$-B(g\otimes gx_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & u_1=0,l_2+u_2=1\\ a & = & 1,b_1=0,b_2=l_2\\ d & = & 1,e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{array}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

同样考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_2\otimes gx_1;G,gx_1x_2)-B(g\otimes gx_1x_2;G,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

36.7.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。等式左侧的第一项没有给出任何结果。等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$ 我们得到

$$[-B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)]\, GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$B(x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$ 根据这些元素的形式，这一等式成立。

36.7.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 1$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$ 我们得到

$$[-B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2)]\, G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到

$$[B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)]\, G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑等式的右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_2 \otimes g; G, gx_2) - B(g \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) \\ &+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

36.7.4. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)+B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一结果成立。

36.7.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$ 且 $\alpha(x_2;1,0,0,0)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$\left[+B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)+B(g\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,g)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,1,1,1)\equiv 1+e_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;1,1,0,1)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考察等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} -B(x_2\otimes g;GX_2,g)+B(g\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)+B(g\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,g)+\\ +B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

36.8. $B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,\ gx_2)$。我们得到

$$\begin{aligned} a &= b_1=b_2=1\\ d &= e_2=1, e_1=0 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$GX_1^{1_1-l_1}X_2^{1_2-l_2}\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_2}x_1^{l_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$\begin{aligned} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes g+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2+\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2+vB\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2\right)\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes g\otimes x_2+vB\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_2\right)\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2vB\left(x_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1x_2\right)\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2^{1+1}=0\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}B(x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1)G\otimes g\otimes x_1x_2^{1+1}=0 \end{aligned}$$

36.8.1. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_2$。这种情形已在小节 $B(x_2\otimes gx_1x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)$中予以讨论。

36.8.2. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$-B(x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(g \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该结论成立。

36.8.3. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ GX_1,\ gx_1x_2)$。36.8.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_2)$。36.8.5. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 此情形已在小节 $B(x_2 \otimes gx_1x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)$。

37. $B(x_1x_2 \otimes x_1)$

由 (34) 可得

$$B(x_1x_2 \otimes x_1) = B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \tag{418}$$

于是得到

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2 \otimes x_1) = \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_1x_2 + \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)G \otimes gx_1 + \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)X_1 \otimes gx_1 + \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)X_2 \otimes gx_1 + \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 + \\ &-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 + \\ &+2[+B(1_H;\ gx_1x_2\ G\ x_1x_2)\ B(1_H;\ GX_2,\ gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)]\, GX_1X_2 \otimes gx_1 \end{aligned}$$

我们将 $B(x_1x_2 \otimes x_1)$ 称为卡西米尔条件

$$\begin{aligned} &\sum_{w_1=0}^{1}\sum_{w_2=0}^{1}(-1)^{(1+w_2)}\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2} \\ &(-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1}x_2^{1-w_2};l_1,l_2,u_1,u_2\right)}B(g^{w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2} \otimes x_1; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ &G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2} \otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2} \otimes \\ &g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2+1-w_2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\omega_1=0}^{1} B^A(x_1x_2\otimes x_1^{1-\omega_1})\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_1^{1-\omega_1})\otimes g^{1+\omega_1}x_1^{\omega_1}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes\\
&g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&-\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\\
&\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&\quad+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes\\
&g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
&4+\sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{l_2=0}^{b_2}\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1x_2\otimes x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\\
&\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+\\
=\;& B^A(x_1x_2\otimes x_1)\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_1)\otimes g+\\
&B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes x_1
\end{aligned}$$

37.1. $B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,\ gx_1x_2)$。由此我们推得

$$\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1
\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{u_1=0}^{e_1}\sum_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2+1}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\;&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes g+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_2+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2+
\end{aligned}$$

37.1.1. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\
a &= b_1=b_2=0,\\
d &= e_1=1,e_2=0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=0$ 我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_1;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\
a &= b_1=0,b_2=l_2\\
d &= e_1=1,e_2=l_2
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)\right]1_A\otimes gx_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

37.1.2. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1$. 我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2=0$, 我们得到

$$B(gx_2\otimes x_1;1_A,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=l_1,\\ d &= e_2=1,e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)=1$ 和 $\alpha(1_H;1,0,0,0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)\right].$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(gx_2\otimes x_1;1_A,gx_2)-B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)$$
$$B(x_1x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

37.1.3. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。 等式左侧的第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1)\equiv 1$ 和 $\alpha(x_1;0,1,0,0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes x_1;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes x_1;X_2,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2=0,l_1+u_1=1\\ a &= b_2=0,b_1=l_1,\\ d &= 1,e_2=0,e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$ 和 $\alpha(x_2;1,0,0,0)\equiv a+b_1=1$, 我们得到

$$\left[-B(gx_1\otimes x_1;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=b_2=0,\\ d &= 1,e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H\otimes x_1;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\alpha\left(1_H;0,0,1,1\right)\equiv 1+e_2\equiv 0 \\ &\alpha\left(1_H;0,1,1,0\right)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0 \\ &\alpha\left(1_H;1,0,0,1\right)\equiv a+b_1\equiv 1 \\ &\alpha\left(1_H;1,1,0,0\right)\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &[B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)+ \\ &-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,1_H)]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2. \end{aligned}$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_2\otimes x_1;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes x_1;X_2,g)+ \\ &-B(gx_1\otimes x_1;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,g)+ \\ &+B(1_H\otimes x_1;1_A,g)+B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)+ \\ &-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,1_H)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

37.2. $B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ G,\ gx_1\right)$。我们推得

$$a=1, d=e_1=1$$

于是得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes g+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1;G,gx_1)G\otimes g\otimes x_1. \end{aligned}$$

37.2.1. 情形 $G\otimes g\otimes x_1$. 我们只需考虑等式左侧的第一项和第四项

第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0, \\ a &= 1, b_1=b_2=0, \\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0\right)\equiv a+b_1+b_2=1$，于是得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;G,g)G\otimes g\otimes x_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0\right)\equiv e_2+\left(a+b_1+b_2\right)\equiv 1$ 以及 $\alpha\left(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0\right)\equiv b_2\equiv 0$，于是得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_1;G,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,g)\right]G\otimes g\otimes x_1$$

同时考虑右侧可得

$-B\left(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ g\right)-B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ G,\ gx_1\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_1,\ g\right)-B\left(gx_2\otimes x_1;\ G,\ g\right)=0$鉴于元素的形式，该结论成立。

37.3. $B(x_1x_2 \otimes x_1;\ X_1,\ gx_1)$。我们推 deduce 得

$$b_1 = 1, d = e_1 = 1$$

于是得到

$$\begin{aligned} & + \sum_{l_1=0}^{1} \sum_{u_1=0}^{1} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)} B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) X_1^{1-l_1} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+u_1+1} x_1^{l_1+u_1} \\ = \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) X_1 \otimes g \otimes x_1 + \\ & (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1 \end{aligned}$$

37.3.1. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第一项和第四项。

第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_1, g) X_1 \otimes g \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, e_1 = u_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) X_1 \otimes g \otimes x_1.$$

同时考察右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1; X_1, g) - B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) - B(gx_2 \otimes x_1; X_1, g) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

37.3.2. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第一项和第四项。

第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

同样考察右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，该结论成立。

37.4. $B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_2,\ gx_1\right)$。我们推得

$$b_2=1,d=e_1=1$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1\right)X_2\otimes gx_1\otimes g+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1\right)1_A\otimes gx_1\otimes x_2+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1\right)X_2\otimes g\otimes x_1+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1\right)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2\end{aligned}$$

37.4.1. 情形 $1_A\otimes gx_1\otimes x_2$。此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1;\ 1_A,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

37.4.2. 情形 $X_2\otimes g\otimes x_1$。我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=l_2=u_2=0\\a&=b_1=0,b_2=1\\d&=1,e_1=e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;X_2,g)X_2\otimes g\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1&=1,l_2=u_2=0,\\a&=0,b_1=l_1,b_2=1,\\d&=1,e_1=u_1,e_2=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)=1$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=1$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,g)\right]X_2\otimes g\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned}&-B(gx_2\otimes x_1;X_2,g)-B(x_1x_2\otimes x_1;X_2,gx_1)\\&-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,g)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

37.4.3. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。这一情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1;1_A,\ gx_1x_2)$中讨论过。

37.5. $B\left(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,\ gx_1x_2\right)$。我们推得

$$a=0,b_1=b_2=1,d=e_1=e_2=1$$

$$X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes g+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1+\\&+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2+\end{aligned}$$

$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{1+1}=0$$

37.5.1. 情形 $X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1$。我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_1=b_2=1\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(gx_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= 0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1,b_2=1,\\ d &= 1,e_1=u_1=1,e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$+B(gx_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_2)-B(x_1x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

37.5.2. 情形 $X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2=0,l_1+u_1=1\\ a &= b_2=0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1\\ d &= 1,e_2=1,e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=1$，我们得到

$$+B(gx_1\otimes x_1;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=1 \end{aligned}$$

$$d = e_2 = 1, e_1 = 0.$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$ 我们得到

$$B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{aligned} -B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) + \\ +B(1_H \otimes x_1; X_1, gx_2) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

37.5.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

37.5.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$. 我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

37.5.5. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 1 \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0,$ 我们得到

$$+B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0, l_1 + u_1 = 1 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, . \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv a + b_1 = 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0,$ 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,1,0,0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{aligned} &+B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) + \\ &B(1_H \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) = 0 \end{aligned}$$

这一点根据元素的形式成立。

37.5.6. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四个加项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

由于右侧为空，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

37.5.7. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0, l_1 + u_1 = 1 \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, . \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$我们得到

$$-B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1)+$$
$$+B(1_H \otimes x_1; X_2, gx_1) - B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) = 0$$

这由元素的形式可知。

37.5.8. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 等式左侧第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0, l_1 + u_1 = 1 \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; X_1X_2 \otimes g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2..$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1)+$$
$$+B(1_H \otimes x_1; X_1X_2 \otimes g) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2\right) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

37.6. $B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1,\ gx_1x_2)$。我们推 deduce that

$$\begin{aligned} a &= b_1 = 1, \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes g$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_2\otimes g^{+l_{11}}x_1^{1+1}=0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes g\otimes g^{+l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$

37.6.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_1$. 我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1; G, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1,0,0,0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

37.6.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$。我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0,$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes x_1; GX_1, gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2+(a+b_1+b_2) \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

37.6.3. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四个加项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0) \equiv a+b_1+b_2 = 0$ 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2+u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 0$ 和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1)\right] GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

37.6.4. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2+u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv 1$ 和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+b_2+1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(gx_2 \otimes x_1; G, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0, l_1+u_1 = 1 \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1-u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, . \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,0,0,0) \equiv a+b_1 = 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$\left[B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1\right)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧为空，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_2\otimes x_1;G,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_1;GX_2,gx_1)-B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_1) \\ &+B(1_H\otimes x_1;\ G,\ \ gx_1)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_1,\ \ gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_1X_2,\ \ gx_1\right) \end{aligned}$$

$=0$鉴于元素的形式，这一结论成立。

$$-B(gx_2\otimes x_1;\ G,gx_1x_2)=[+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,gx_2)]$$

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_2,gx_1)=\left[\begin{array}{c}+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\\ -2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]$$

$$-B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_1)=[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]$$

$$+B(1_H\otimes x_1;G,gx_1)=+[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]$$

$$+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2\right)=-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)$$

$$+B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ \ GX_1X_2,\ \ gx_1\right)=+\left[\begin{array}{c}+2B\left(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2\right)\left(;\ \ GX_2,\ \ gx_1\right)\\ -2B\ x_1x_2\otimes 1_H\\ +2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ gx_2)\end{array}\right]$$

37.6.5. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$以及 $\alpha(x_1;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes x_1;GX_1,gx_2)+B(gx_2\otimes x_1;GX_1X_2,g)\right]GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2=0, l_1+u_1=1 \\ a &= 1, b_2=0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1 \\ d &= 1, e_2=0, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0, \\ a &= b_1=1, b_2=0, \\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes x_1;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项为

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$[B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1\right)]\,GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_1,gx_2)+B(gx_2\otimes x_1;GX_1X_2,g)-B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_1)+$$
$$+B(1_H\otimes x_1;GX_1,g)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1\right)=0$$

这由元素的形式可知成立。

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_1,gx_2)=B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)$$
$$+B(gx_2\otimes x_1;GX_1X_2,g)=\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]$$
$$-B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_1)=[-2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]$$
$$+B(1_H\otimes x_1;GX_1,g)=[+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]$$
$$+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,gx_1x_2\right)=-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)$$
$$+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1\right)=\left[\begin{array}{c}+2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ -2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]$$

37.7. $B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)$**.** 我们推得

$$\begin{aligned}a &= b_2=1,\\ d &= e_1=e_2=1\end{aligned}$$

于是我们得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes g+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2+$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)G\otimes gx_1\otimes g^{l_2}x_2^{1+1}=0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\,B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)GX_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_2+1}x_1x_2^{1+1}=0$$

37.7.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_2$**.** 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=1$我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=0,b_2=l_2\\ d &= e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0,$ 我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

37.7.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$. 我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 1, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$，并且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

同时考察右侧，可得

$$\begin{aligned} &B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) \\ &-B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

37.7.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_2 &= u_2 = 0, l_1 + u_1 = 1 \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$，我们得到

$$\left[+B(gx_1 \otimes x_1; G, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; G \otimes gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2-u_2=1 \Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

Since $\alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,1,0,0)\equiv 1+b_2\equiv 0$我们得到

$$\left[+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_2\right)\right]G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$-B(gx_2\otimes x_1;\ GX_2,gx_2)\ +B(gx_1\otimes x_1;\ G,gx_1x_2)\ -B(gx_1\otimes x_1;\ GX_1,gx_2)+B(1_H\otimes x_1;\ G\otimes gx_2)\ +B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_2,gx_1x_2\right)\ +B\left(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_1X_2,gx_2\right)\ =0$这根据这些元素的形式成立。

$$\begin{gathered} B(gx_2\otimes x_1;GX_2,gx_2)=+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2) \\ +B(gx_1\otimes x_1;G,gx_1x_2)=+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2) \\ -B(gx_1\otimes x_1;GX_1,gx_2)= \\ +B(1_H\otimes x_1;G\otimes gx_2)=-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2) \\ +B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2\right)=-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2) \\ +B\left(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_2\right)=0 \end{gathered}$$

37.7.4. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0, \\ a &= b_2=1, b_1=0, \\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2=0$我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_1;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1 \\ d &= e_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,0,1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0,$我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_1;GX_2,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_1;GX_2,gx_1x_2)=0$$

这由元素的形式可知成立。

37.7.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1 \\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1,$ 我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$l_2 = u_2=0, l_1+u_1=1$$

$$\begin{aligned} a &= b_2 = 1, 0, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 \equiv 0$ 和 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1; GX_2 \otimes g)GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 0$ 我们得到

$$\left[+B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2\right) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2\right)\right] GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) \\ &+B(1_H \otimes x_1; GX_2 \otimes g) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2\right) + B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2\right) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知。

37.8. $B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2,\ gx_1\right)$. 我们得到

$$\begin{aligned} a &= b_1 = b_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes g+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1^{1-l_1}X_2 \otimes g \otimes g^{l_1}x_1^{1+1} = 0 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1 \otimes g \otimes gx_1x_2+ \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1\right) GX_1^{1-l_1} \otimes g \otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2 = 0 \end{aligned}$$

37.8.1. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1$. 我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_2=1, b_1=l_1\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1.$$

同时考察右侧，我们得到

$$B(gx_2\otimes x_1;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)=0$$
$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知成立。

37.8.2. 情形 $GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$。这种情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,\ gx_1x_2)$ 中讨论过 .

37.8.3. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$。此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1,\ gx_1x_2$ 中讨论过).

37.8.4. 情形 $GX_1X_2\otimes g\otimes x_1$。我们只需考虑方程左侧的第一项和第四项。第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=1,\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_1X_2,g)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_2=1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= 1, e_2=0, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1.$$

同时考察右侧，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1;GX_1X_2,g)-B(x_1x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

37.8.5. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$。这一情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1;\ GX_1,gx_1x_2)$。中讨论过。

38. $B(x_1x_2\otimes x_2)$

由（34）可得

$$B(x_1x_2\otimes x_2)=B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g) \tag{419}$$

and we get

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes x_2) &= +2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)1_A\otimes gx_1x_2+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)G\otimes gx_2+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)X_1\otimes gx_2+\\ &\quad -2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)X_2\otimes gx_2+\\ &\quad +2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\\ &\quad +2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1x_2+$$
$$+\left[\begin{array}{c}2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\\ +2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]GX_1X_2\otimes gx_2$$

我们将 $B(x_1x_2\otimes x_2)$ 的卡西米尔条件写为。

$$\begin{aligned}
&1\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&2\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}\\
&3\ (-1)\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}\\
&4\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1x_2\otimes x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\ & B^A(x_1x_2\otimes x_2)\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_2)\otimes g+\\
&B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes x_2+
\end{aligned}$$

38.1. $B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,\ gx_1x_2)$。我们推得

$$\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1\\
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &\equiv u_1+u_2+1
\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;1_H,gx_1x_2)1_H\otimes gx_1x_2\otimes g\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;1_H,gx_1x_2)1_H\otimes gx_1\otimes x_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;1_H,gx_1x_2)1_H\otimes gx_2\otimes x_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;1_H,gx_1x_2)1_H\otimes g\otimes gx_1x_2\ .
\end{aligned}$$

38.1.1. 情形 $1_H\otimes gx_1\otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0,\\
a &= b_1=b_2=0,\\
d &= e_1=1,e_2=0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=0$, 我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;1_H,gx_1)1_A\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\
a &= b_1=0,b_2=l_2\\
d &= e_1=1,e_2=u_2.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 0$，我们得到

$$[B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)]\,1_H\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考察右侧，我们得到

$-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_H,\ \ gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;\ X_2,\ \ gx_1)-B(gx_1\otimes x_2;\ 1_H,\ gx_1)\ =0$这由元素的形式可知成立。

38.1.2. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1$。我们只需考察等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=0$我们得到

$$B(gx_2\otimes x_2;1_A,gx_2)1_H\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0,b_1=l_1,\\ d &= e_2=1,e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$，我们得到

$$[-B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)]\,1_H\otimes gx_2\otimes x_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)+B(gx_2\otimes x_2;1_A,gx_2)=0$$

这由这些元素的形式可知成立。

38.1.3. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0\\ d &= 1,e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$，我们得到

$$[-B(gx_2\otimes x_2;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes x_2;X_2,g)]\,1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=l_1,\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1=1$，我们得到

$$[-B(gx_1\otimes x_2;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes x_2;X_1,g]\,1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1, \\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha\left(1_H;0,0,1,1\right) &\equiv 1+e_2\equiv 0 \\ \alpha\left(1_H;0,1,1,0\right) &\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 0 \\ \alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &\equiv a+b_1\equiv 1 \\ \alpha\left(1_H;1,1,0,0\right) &\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{l} B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_2,gx_1) \\ -B(x_1x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,g) \end{array}\right] 1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H\otimes x_2;1_A,g)+ \\ -B(gx_2\otimes x_2;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes x_2;X_2,g) \\ -B(gx_1\otimes x_2;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes x_2;X_1,g) \\ B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_2,gx_1)+ \\ -B(x_1x_2\otimes x_2;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,g)=0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

38.2. $B\left(x_1x_2\otimes x_2;\ G,\ gx_2\right)$。我们推 deduce 得

$$a=1, d=e_2=1$$

并得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes g+ \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1;G,gx_2)G\otimes g\otimes x_2\ . \end{gathered}$$

38.2.1. 情形 $G\otimes g\otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0 \\ a &= 1, b_1=b_2=0, \\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$B(gx_1\otimes x_2;G,g)G\otimes g\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2 \\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right)\equiv a+b_1+b_2\equiv -1$ 以及 $\alpha\left(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\right)\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_2;G,g_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,g)\right]G\otimes g\otimes x_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)-B(x_1x_2\otimes x_2;G,g_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,g) \\ +B(gx_1\otimes x_2;G,g)=0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

38.3. $B\left(x_1x_2\otimes x_2; X_1,\ gx_2\right)$。 我们推导出

$$b_1=1, d=e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes g+\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)X_1\otimes g\otimes x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2\ .
\end{aligned}$$

38.3.1. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_2$。 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\
a &= b_2=0, b_1=1,\\
d &= 1, e_1=e_2=0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha\left(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right)\equiv a+b_1+b_2=1,$ 我们得到

$$B(gx_1\otimes x_2; X_1, g)X_1\otimes g\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\
a &= 0, b_1=1, b_2=l_2,\\
d &= 1, e_1=0, e_2=u_2.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2=1$ 且 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0,$ 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_2; X_1X_2, g)\right]X_1\otimes g\otimes x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned}
&-B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g)-B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)\\
&+B(x_1x_2\otimes x_2; X_1X_2, g)+B(gx_1\otimes x_2; X_1, g)=0
\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该式成立。

38.3.2. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1$。 该情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_2; 1_A,\ gx_1x_2)$中处理过 .

38.3.3. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。 该情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_2; 1_A,\ gx_1x_2$中处理过).

38.4. $B\left(x_1x_2\otimes x_2; X_2, gx_2\right)$. 我们由此推得

$$b_2=1, d=e_2=1$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_2, gx_2)X_2\otimes gx_2\otimes g+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_2, gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_2, gx_2)X_2\otimes g\otimes x_2+\\
&++(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_2; X_2, gx_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_2}x_2^{1+1}=0.
\end{aligned}$$

38.4.1. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_2$。 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_2; 1_H, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2)1_H \otimes gx_2 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧可得

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_H, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_2; 1_H, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

38.4.2. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_2$。 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_2; X_2, g)X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2)X_2 \otimes g \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

38.5. $B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)$。 我们推导得出

$$a = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = e_2 = 1$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) X_1X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2 \\ &+ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1 \end{aligned}$$

$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B\left(x_2\otimes x_1;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1^{1-l_1}X_2\otimes gx_2\otimes g^{l_1}x_1^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1^{1-l_1}\otimes gx_2\otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1^{1-l_1}X_2\otimes g\otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}B\left(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2\right)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1}=0.$$

38.5.1. 情形 $X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=0,b_2=1,\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_2=1,b_1=l_1,\\ d &= e_2=1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)=0$$

这由元素的形式可知。

38.5.2. 情形 $X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=1\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2=1$,我们得到

$$B(gx_1\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)+B(gx_1\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该结论成立。

38.5.3. 情形 $1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$ 我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0,$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=l_1,\\ d &= e_2=1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1=1,$ 我们得到

$$+B(gx_1\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2$$

左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1,\\ a &= 0,b_1=l_1,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1,\\ e_2-u_2 &= 1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{aligned} &B(1_H\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)\\ &+B(gx_1\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

38.5.4. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$，我们得到

$$+B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$,我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

38.5.5. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 1$, 我们得到

$$+B(gx_1 \otimes x_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_2 = l_2, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2+a+b_1+b_2+1 \equiv 0$ 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;X_1,gx_2))-B(gx_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_2)$$
$$+B(gx_1\otimes x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

38.5.6. 情形 $X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2$。 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_1=b_2=1,\\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0) \equiv a+b_1+b_2=0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\ a &= 0, b_1=1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= e_1=1,0, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)-B(gx_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知成立。

38.5.7. 情形 $X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=0, b_2=1\\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= e_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=1,\\ d &= 1, e_2=0, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 = 1$, 我们得到

$$+B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$$

左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 &= u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$$

由于右侧没有任何项, 我们得到

$B(1_H \otimes x_2;\ X_2,\ gx_1) - B(gx_2 \otimes x_2;\ X_2,\ gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2;\ X_1X_2,\ gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2;\ X_1X_2,\ gx_1x_2) = 0$这由元素的形式可知成立。

38.5.8. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$$

左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$$

由于右侧没有任何内容, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; X_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2)$$

$$-B(gx_1\otimes x_2;X_1X_2,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1x_2)=0$$

这根据元素的形式成立。

38.6. $B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,\ gx_1x_2)$。我们推导出

$$\begin{aligned}a &= 1,b_1=1,b_2=0\\ d &= e_1=e_2=1\end{aligned}$$

并且得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes g$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_2\otimes g^{+l_{11}}x_1^{1+1}=0$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes g\otimes g^{+l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$

38.6.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=1$ 我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_2;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)=0$$

这由元素的形式可知成立。

38.6.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=1,b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四个加项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0 \\ a &= 1, b_2=0, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, \\ d &= e_2=1, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$B(gx_2\otimes x_2;GX_1,gx_2)-B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

38.6.3. 情形 $GX_1\otimes gx_1\otimes x_2$。我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0, \\ a &= b_1=1, b_2=0, \\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1, \\ a &= b_1=1, b_2=l_2, \\ d &= e_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)\right]GX_1\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)+ \\ &B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

38.6.4. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0 \\ a &= 1, b_1=b_2=0, \\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1, \\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2 \\ d &= e_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 和 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes x_2;G,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_2;GX_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0,\\ d &= 1, e_2=0, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_1=l_1=1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_2=u_2, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{aligned} &B(1_H\otimes x_2;G,gx_1)-B(gx_2\otimes x_2;G,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_2;GX_2,gx_1)\\ &-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

38.6.5. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$。 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$ 我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 且 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$ 我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes x_2;GX_1,gx_2)+B(gx_2\otimes x_2;GX_1X_2,g)\right]GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_2=0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1,\\ d &= 1, e_2=0, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于$\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e\equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_2=l_2, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= 1, e_2=u_2, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$且 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$我们得到

$$[B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)]\,GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{gathered}B(1_H\otimes x_2;GX_1,g)-B(gx_2\otimes x_2;GX_1,gx_2)+B(gx_2\otimes x_2;GX_1X_2,g)+\\-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1x_2)\\+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_1)=0\end{gathered}$$

这由元素的形式可知成立。

38.7. $B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,\ \ gx_1x_2\,)$。 我们有

$$\begin{aligned}a&=1,b_1=0,b_2=1\\d&=e_1=e_2=1\end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{gathered}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,GX_2\otimes gx_1x_2\otimes g+\\(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,G\otimes gx_1x_2\otimes x_2+\\(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,GX_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2+\\(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,GX_2\otimes gx_1\otimes x_2+\\(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,G\otimes gx_1\otimes g^{l_2}x_2^{1+1}=0\\(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2\\(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\,B\,(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2\,)\,GX_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_2+1}x_1x_2^{1+1}=0.\end{gathered}$$

38.7.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_2$。 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2=u_2=0,\\a&=1,b_1=b_2=0,\\d&=e_1=e_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha\,(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$B(gx_1\otimes x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2+u_2=1,\\a&=1,b_1=0,b_2=l_2,\\d&=e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(gx_1\otimes x_2;G,gx_1x_2)=0$$

这由元素的形式可知。

38.7.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2) GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = l_1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

由于右侧没有项，因此我们得到

$B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$这由元素的形式可知成立。

38.7.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$. 左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$我们得到

$$B(1_H \otimes x_2; G, gx_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2) G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, 0, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 1$ 且 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[+B(gx_1 \otimes x_2; G, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$[B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)]\,G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何项，我们得到

$$\begin{gathered}B(1_H\otimes x_2;G,gx_2)-B(gx_2\otimes x_2;GX_2,gx_2)+\\+B(gx_1\otimes x_2;G,gx_1x_2)-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_2)\\+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0\end{gathered}$$

这由元素的形式可知成立。

38.7.4. 情形 $GX_2\otimes gx_1\otimes x_2$. 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=1,b_1=0,\\ d &= e_1=1,e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$,我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\ a &= 1,b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= e_1=1,e_2=u_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_2.$$

同样考察右侧，我们得到

$-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2;\ GX_2,\ \ gx_1x_2)-B(gx_1\otimes x_2;\ GX_2,\ \ gx_1)$ $=0$鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

38.7.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。左侧第一项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=l_2=u_2=0\\ a &= b_2=1,b_1=0,\\ d &= 1,e_1=e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$我们得到

$$B(1_H\otimes x_2;GX_2,g)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1,\\ a &= 1,b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1)\equiv 1$我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=1,b_1=l_1,\\ d &= 1,e_2=0,e_1=u_1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$ 以及 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$, 我们得到

$$[-B(gx_1\otimes x_2;GX_2,gx_1)-B(gx_1\otimes x_2;GX_1X_2,g)]\,GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,1,0,0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$[B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)]\,G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2.$$

由于右侧没有任何内容，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H\otimes x_2;GX_2,g)-B(gx_2\otimes x_2;GX_2,gx_2)+\\ -B(gx_1\otimes x_2;GX_2,gx_1)-B(gx_1\otimes x_2;GX_1X_2,g)\\ +B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)=0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

38.8. $B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)$. 我们推得

$$a=b_1=b_2=1, d=e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes g\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_2\otimes gx_2\otimes x_1\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_2)GX_1\otimes g\otimes gx_2^{1+1}=0\\ (-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\,B(x_2\otimes x_1;GX_1X_2,gx_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{1+l_1+l_2+u_2}x_1x_2^{1+1}=0. \end{gathered}$$

38.8.1. 情形 $GX_2\otimes gx_2\otimes x_1$。 此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

38.8.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_2$。 我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=1, b_2=0,\\ d &= e_2=1, e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0,$ 我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=1, 0, b_2=l_2\\ d &= 1, e_1=0, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)-B(gx_1\otimes x_2;GX_1,gx_2)=0$$

这由元素的形式可知。

38.8.3. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_1x_2$。此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

38.8.4. 情形 $GX_1X_2\otimes g\otimes x_2$。我们只需考虑左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=b_2=1,\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$+B(gx_1\otimes x_2;GX_1X_2,g)GX_1X_2\otimes g\otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1,\\ a &= b_1=1,0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes 1;GX_1X_2,g)-B(x_1x_2\otimes x_2;GX_1X_2,gx_2)+B(gx_1\otimes x_2;GX_1X_2,g)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

38.8.5. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1x_2$。此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

39. $B(x_1x_2\otimes x_1x_2)$

对 $h=x_1x_2,\ h'=x_2,\ i=1$ 使用公式（21），我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_1x_2)=B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes g).$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes x_2)=B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ (419)$$

我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes x_1x_2) &= B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ &\quad -\begin{bmatrix} (1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{bmatrix} \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} (420)\ B(x_1x_2\otimes x_1x_2) &= B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &\quad -(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ &\quad +(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes x_1x_2) &= +4B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)G\otimes gx_1x_2+\\ &\quad +4B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)X_1\otimes gx_1x_2+\\ &\quad +4B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)X_2\otimes gx_1x_2+\\ &\quad +\begin{bmatrix} -4B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\\ 4B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-4B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{bmatrix}GX_1X_2\otimes gx_1x_2 \end{aligned}$$

我们将 $B(x_1x_2\otimes x_1x_2)$ 的卡西米尔条件等式写为。

$$\begin{aligned}
&1\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(1_H\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
&2+\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}+\\
&3\,(-1)\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(gx_1\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+\\
&4\sum\nolimits^{1}_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}\sum\nolimits^{b_1}_{l_1=0}\sum\nolimits^{b_2}_{l_2=0}\sum\nolimits^{e_1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{e_2}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\
&B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}\\
=\;& B^A(x_1x_2\otimes x_1x_2)\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_1x_2)\otimes 1_H\\
&B^A(x_1x_2\otimes x_1)\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_1)\otimes gx_2\\
&-B^A(x_1x_2\otimes x_2)\otimes B^H(x_1x_2\otimes x_2)\otimes gx_1\\
&B^A(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes B^H(x_1x_2\otimes 1_H)\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

39.1. $B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G\otimes gx_1x_2)$**.** 由此我们推得

$$\begin{aligned}
a &= 1\\
b_1 &= b_2=0\\
d &= e_1=e_2=1\\
a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &= u_1+u_2
\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{1}_{u_1=0}\sum\nolimits^{1}_{u_2=0}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})\\
&G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\;&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes gx_1\otimes gx_2\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes gx_2\otimes gx_1\\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2})G\otimes g\otimes x_1x_2.
\end{aligned}$$

39.1.1. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$**.** 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。

第三项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\
a &= 1, b_1=b_2=0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1x_2;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$[-B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx)]\, G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考察右侧，可得

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2 \otimes x_1; G, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) \\ &+B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_2, gx) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; G, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，这一结论成立。

39.1.2. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 我们只需考察等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; G, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$, 我们得到

$$[B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2)]\, G \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2 \otimes x_2; G, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; G, gx_1x_2) \\ &+B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; G, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

这由这些元素的形式可知成立。

39.1.3. 情形 $G \otimes g \otimes x_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; G, g)G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,1) \equiv 1$ 和 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$[-B(gx_2 \otimes x_1x_2; G, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_2, g)]\, G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$ 和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$, 我们得到

$$[-B(gx_1\otimes x_1x_2;G,gx_1)-B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,g)]\,G\otimes g\otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &\equiv 1+e_2\equiv 0\\ \alpha(1_H;0,1,1,0) &\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 1\\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &\equiv a+b_1\equiv 0\\ \alpha(1_H;1,1,0,0) &\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g) \end{array}\right] G\otimes g\otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1)+\\ +B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g)-B(gx_1\otimes x_1x_2;G,gx_1)\\ -B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,g)-B(gx_2\otimes x_1x_2;G,gx_2)-B(gx_2\otimes x_1x_2;GX_2,g)+\\ B(1_H\otimes x_1x_2;G,g)=0 \end{gathered}$$

鉴于这些元素的形式，这一点成立。

39.2. $B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)$. 我们推得

$$\begin{aligned} d &= e_1=e_2=1\\ a &= b_2=0\\ b_1 &= 1\\ a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2 &= l_1+u_1+u_2 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{l_1=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,u_2)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)\\ &X_1^{1-l_1}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_1+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{u_2}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}Bx_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)X_1\otimes g\otimes x_1x_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes x_1^{1+1}x_2^{u_2}+ \end{aligned}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes gx_1^{1+1}x_2^{u_2}.$$

39.2.1. 情形 $X_1\otimes gx_1\otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1=1\\ d &= e_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$, 我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1x_2; X_1, gx_1)X_1\otimes gx_1\otimes gx_2$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=1, b_2=l_2\\ d &= e_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2=1$和 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)\right]X_1\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2\otimes x_1; X_1, gx_1)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)\\ &+B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1)+B(gx_1\otimes x_1x_2; X_1, gx_1)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

39.2.2. 情形 $X_1\otimes gx_2\otimes gx_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1=1\\ d &= e_2=1, e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= e_2=1, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes x_2; X_1, gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_1x_2; X_1, gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

39.2.3. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, g)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$ 以及 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[-B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, g)\right] X_1 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_2 = 0, b_1 - 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1).$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, \\ e_1 &= u_1 \\ e_2 &= u_2 \\ a &= 0 \\ b_1 - 1 &\Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, e_1 = u_1 = 1 \\ b_2 &= l_2 \\ \alpha(1_H; 0, b_2, 1, e_2) &\equiv \\ \alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) &\equiv 1 + e_2 \equiv 0 \\ \alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) &\equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 1 \end{aligned}$$

$$\left[B(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\ X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\ X_1X_2, gx_1)+\right] X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) \\ &+B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, g) \end{aligned}$$

$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, g) = \quad 0$

由于

$$\begin{aligned} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) &= B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) &= -4B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ -B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$+B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1) = 0$$
$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_2) = 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)$$
$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, g) = 0$$
$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_1, g) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)$$

我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

已经得到了。

39.2.4. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。 左侧第一项没有任何内容。第二项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= 1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ \alpha\,(x_1; 0, 0, 0, 0) &\equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

$$B(gx_2 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$$

第三项没有任何内容。第四项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 &= 1 \\ a &= 0 \\ b_1 &= l_1 = 1 \\ b_2 &= 0 \\ \alpha\,(1_H; 1, 0, 0, 0) &\equiv b_2 = 0 \end{aligned}$$

$$B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2\ )1_A \ \otimes gx_1x_2\ \ \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

Since

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) &= 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1x_2) &= -4B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +B(gx_2 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) &= 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \end{aligned}$$

我们得不到任何新结果。

39.2.5. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 左侧第一项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 0 \\ d &= 1, \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \\ \alpha\left(x_1x_2; 0, 0, 0, 0\right) &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

第二项

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0 \\ l_2 + u_2 &= 1 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= u_2 \\ a &= 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= l_2 \\ \alpha\left(x_1; 0, b_2, 0, e_2\right) &\equiv \\ \alpha\left(x_1; 0, 0, 0, 1\right) &\equiv 1 \\ \alpha\left(x_1; 0, 1, 0, 0\right) &\equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\left[-B(gx_2 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1x_2; x_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

第三项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 &= u_2 = 0 \\ a + b_1 + b_2 + d + e_1 + e_2 &\equiv 1 \\ d &= 1, \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, l_1 = 1 \\ e_2 &= 0 \\ a &= 0 \\ b_1 &= l_1 = 1 \\ b_2 &= 0 \\ \alpha\left(x_2; 1, 0, 0, 0\right) &\equiv a + b_1 = 1 \end{aligned}$$

$$B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

第四项

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1 \\ l_2 + u_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+b_1+b_2+d+e_1+e_2 &\equiv 0\\ d &= 1,\\ e_1-u_1 &= 1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, l_1=1\\ e_2 &= u_2\\ a &= 0\\ b_1 &= l_1=1\\ b_2 &= l_2\\ \alpha\left(1_H;1,b_2,0,e_2\right) &\equiv\\ \alpha\left(1_H;1,0,0,1\right) &\equiv a+b_1=1\\ \alpha\left(1_H;1,1,0,0\right) &\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

$[-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;\ X_1,\ \ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;\ X_1X_2,\ \ gx_1)+]\,1_A\otimes gx_1\otimes x_1x_2$同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)\\ B(gx_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1)-B(gx_2\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes x_1x_2;x_2,gx_1)\\ +B(1_H\otimes x_1x_2;1_A,gx_1)=0 \end{gathered}$$

由于

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ -B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1,gx_1x_2)=4B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_1X_2,gx_1)=0\\ B(gx_1\otimes x_1x_2;X_1,gx_1)=0\\ -B(gx_2\otimes x_1x_2;1_A,gx_1x_2)=-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +B(gx_2\otimes x_1x_2;x_2,gx_1)=0\\ +B(1_H\otimes x_1x_2;1_A,gx_1)=B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_2\otimes 1_H;1_A,g) \end{gathered}$$

由于我们知道 $B(gx_2\otimes 1_H;\ 1_A,g)=0$，因此得到

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

已得到。

39.3. $B(x_1x_2\otimes x_1x_2;\ \ X_2,\ \ gx_1x_2)$。

$$a=0,b_1=0,b_2=1,d=1,e_1=1,e_2=1$$

于是我们得到

$$\begin{gathered} \sum_{l_2=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)\\ X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{l_2+u_2}=\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}+=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,11,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}=0 \end{gathered}$$

39.3.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

39.3.2. 情形 $X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right] X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) \\ &-B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

39.3.3. 情形 $X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, g)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 以及 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[-B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, g)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[+B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right] X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右边，可得

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) \\ -B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) + \\ +B(1_H \otimes x_1x_2; X_2, g) = 0 \end{gathered}$$

鉴于这些元素的形式，这一结果成立。

39.3.4. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \end{aligned}$$

$$d = e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1.$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考察右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

39.3.5. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 1$, 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[+B(gx_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 且 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$\begin{gathered} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; X_1X_2, gx_2) \\ +B(gx_1 \otimes x_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1x_2; X_1, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1x_2; X_2, gx_2) + \\ +B(1_H \otimes x_1x_2; 1_A, gx_2) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

39.4. $B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)$. 由此可推得

$$a = b_1 = b_2 = d = e_1 = e_2 = 1$$

并且我们得到

$$\sum_{l_1=0}^{1}\sum_{l_2=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)}\,B(x_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)$$
$$G^aX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_1+l_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_2}x_2^{1+1}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_2}x_1x_2^{1+1}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_2}x_1^{1+0}x_2^{1+1}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_2}x_1x_2^{1+1}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2}=0.$$

39.4.1. 情形 $GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0\\ a &= b_1 = b_2 = 1,\\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1\\ a &= b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1\\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$-B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2,\ gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1) = 0$鉴于元素的形式，该等式成立。

39.4.2. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0$鉴于这些元素的形式，该等式成立。

39.4.3. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$。等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &-B(gx_1 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2) \\ &+B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

39.4.4. 情形 $GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考察右侧，我们得到

$-B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_1x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0$，这根据这些元素的形式成立。

39.4.5. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出 s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes x_1x_2; GX_1X_2, g)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes x_1x_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=1$, 我们得到

$$B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0)=e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)\\ &+B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_2)\\ &+B(1_H\otimes x_1x_2;GX_1X_2,g)=0 \end{aligned}$$

这正是我们在情形 $GX_1X_2\otimes g\otimes x_1x_2$. 中已经得到的结果

39.4.6. 情形 $GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=1, b_1=0\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=1, b_1=l_1,\\ d &= e_2=1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2\equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$B(x_1x_2\otimes x_2;GX_2,\ \ gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2;\ GX_1X_2,\ \ gx_1x_2)+B(gx_2\otimes x_1x_2;\ GX_2,\ gx_1x_2)=0$这由元素的形式可知成立。

39.4.7. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出 s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=b_2=0\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,0,0,0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2,\\ d &= e_1=1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1\equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1,\\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1,\\ e_2-u_2 &= 1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)\\ &-B(gx_1\otimes x_1x_2;GX_1,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_1x_2;GX_2,gx_1x_2)\\ &\qquad +B(1_H\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

40. $B(x_1x_2\otimes gx_1)$

利用（39），我们得到

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2\otimes gx_1)\\ = \ & (1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & +(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\\ & -B(gx_1gx_1x_2\otimes 1_H) \end{aligned} \tag{421}$$

从而得到

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes gx_1) = \ & 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes gx_1+\\ & -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)G\otimes gx_1x_2+\\ & +\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]X_1\otimes gx_1x_2+\\ & -2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)X_2\otimes gx_1x_2+\\ & +\begin{bmatrix} 2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix}X_1X_2\otimes gx_1\\ & +\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]GX_1\otimes gx_1+\\ & +\left[-2B(x_1\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]GX_2\otimes gx_1+\\ & +\left[-2B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]GX_1X_2\otimes gx_1x_2+ \end{aligned}$$

我们将 $B(x_1x_2\otimes gx_1)$ 写作卡西米尔公式

$$\begin{aligned} & 1\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)}\\ & B(1_H\otimes gx_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2+1} + \\
& 2 + \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_2 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1+1} x_2^{l_2+u_2} + \\
& 3\,(-1) \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2+1} + \\
& 4 \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1x_2 \otimes gx_1; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} \\
= \quad & B^A(x_1x_2 \otimes gx_1) \otimes B^H(x_1x_2 \otimes gx_1) \otimes 1_H + \\
& B^A(x_1x_2 \otimes g) \otimes B^H(x_1x_2 \otimes g) \otimes gx_1
\end{aligned}
$$

40.1. $B(x_1x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1)$**.** 我们推导得出

$$
\begin{aligned}
a &= b_1 = b_2 = 0 \\
d &= e_1 = 1, e_2 = 0
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$
\begin{aligned}
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes 1_H \\
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) 1_A \otimes g \otimes gx_1
\end{aligned}
$$

40.1.1. 情形 $1_A \otimes g \otimes gx_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= b_1 = b_2 = 0 \\
d &= 1, e_1 = e_2 = 0.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$
+ B(gx_2 \otimes gx_1; 1_A, g) 1_A \otimes g \otimes gx_1.
$$

第四项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= b_2 = 0, b_1 = l_1, \\
d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$
\left[B(x_1x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, g) \right] 1_A \otimes g \otimes gx_1.
$$

同样考虑右侧，我们得到

$$
\begin{aligned}
& B(x_1x_2 \otimes gx_1; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, g) \\
& - B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + B(gx_2 \otimes gx_1; 1_A, g) = 0
\end{aligned}
$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

40.2. $B(x_1x_2 \otimes gx_1;\ G,\ gx_1x_2)$。我们推 deduce that

$$a = 1, b_1 = b_2 = 0, d = e_1 = e_2 = 1$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2} \\ = \quad & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)G \otimes g \otimes x_1x_2. \end{aligned}$$

40.2.1. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 以及 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes gx_1; G, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

40.2.2. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; G_1, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H;\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 = 0$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2)$$

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_1; G_1, gx_2) = 0$$

根据这些元素的形式，该式成立。

40.2.3. 情形 $G \otimes g \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; G, g)G \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,1) \equiv 1$ 和 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$[-B(gx_2 \otimes gx_1; G, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_1; GX_2, g)]\, G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 且 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$[-B(gx_1 \otimes gx_1; G, gx_1) - B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1, g]\, G \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H; 0,0,1,1) &\equiv 1 + e_2 \equiv 0 \\ \alpha(1_H; 0,1,1,0) &\equiv e_2 + (a + b_1 + b_2 + 1) \equiv 1 \\ \alpha(1_H; 1,0,0,1) &\equiv a + b_1 \equiv 0 \\ \alpha(1_H; 1,1,0,0) &\equiv 1 + b_2 \equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, g) \end{array}\right] G \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H \otimes gx_1; G, g) - B(gx_2 \otimes gx_1; G, gx_2) \\ -B(gx_2 \otimes gx_1; GX_2, g) - B(gx_1 \otimes gx_1; G, gx_1) \\ -B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1, g)B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_2) \\ +B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, g) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

40.3. $B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)$. 我们推得

$$\begin{aligned} a &= b_2 = 0 \\ b_1 &= d = e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} & \sum_{u_1=0}^{1}\sum_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2} \\ = \;& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ & (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 \end{aligned}$$

40.3.1. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; X_1, gx_1)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)\right] X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes gx_1; x_1, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

40.3.2. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(gx_2\otimes gx_1;X_1,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

40.3.3. 情形 $X_1\otimes g\otimes x_1x_2$。 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1=1,\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;X_1,g)X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 且 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$, 我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes gx_1;X_1,gx_2)-B(gx_2\otimes gx_1;X_1X_2,g)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_2=0, b_1=l_1, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$, 我们得到

$$\left[-B(gx_1\otimes gx_1;X_1,gx_1)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_2=l_2,\\ b_1-l_1 &= 1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

Since $\alpha(1_H;0,0,1,1)\equiv 1+e_2\equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2+1)\equiv 1$ 我们得到 t

$$\left[B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)\right]X_1\otimes g\otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_1\otimes gx_1;X_1,gx_1)-B(gx_2\otimes gx_1;X_1,gx_2)-B(gx_2\otimes gx_1;X_1X_2,g)\\ &B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)+B(1_H\otimes gx_1;X_1,g)\\ =\ & 0 \end{aligned}$$

这一点由元素的形式可知。

40.4. $B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)$。 我们推得

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1} = 0 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes g \otimes x_1x_2 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1} = 0
\end{aligned}$$

40.4.1. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$ 我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; X_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这由元素的形式可知成立。

40.4.2. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$ 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_1;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

40.4.3. 情形 $X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= b_1=0,b_2=1\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 0,b_2=1,b_1=l_1\\ d &= e_2=1,e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)=b_2=1$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$-B(x_1x_2\otimes g;X_2,\ gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;\ X_2,\ gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;\ X_1X_2,\ gx_2)-B(gx_2\otimes gx_1;\ X_2,\ gx_2)$ $=0$ 这由这些元素的形式可知成立。

40.4.4. 情形 $X_2\otimes g\otimes x_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= b_1=0,b_2=1,\\ d &= 1,e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;X_2,g)X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0,1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= 0,b_2=1,b_1=l_1\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$和 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1\equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(gx_1\otimes gx_1;X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_1;X_1X_2,g)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 0, b_1=l_1, \\ b_2-l_2 &= 1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1, \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 1,\ 1) = 1+e_2\equiv 0$以及 $\alpha(1_H;\ 1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1=1$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_1\otimes gx_1;X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_1;X_1X_2,g)-B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_2) \\ &+B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)+B(1_H\otimes gx_1;X_2,g) \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

40.4.5. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$。 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0 \\ a &= b_1=b_2=0, \\ d &= e_2=1, e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;1_A,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= b_1=0, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=0, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0, \\ a &= b_2=0, b_1=l_1 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=1$以及 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1\equiv 1$，我们得到

$$\left[+B(gx_1\otimes gx_1;1_A,gx_1x_2)++B(gx_1\otimes gx_1;X_1,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 0, b_1=l_1, b_2-l_2=0 \\ d &= 1, e_1=u_1, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

Sin由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0) = e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1$以及 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &+B(gx_1\otimes gx_1;1_A,gx_1x_2)++B(gx_1\otimes gx_1;X_1,gx_2)+B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_2) \\ &-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_2)+B(1_H\otimes gx_1;1_A,gx_2) \end{aligned}$$

$$= \quad 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

40.5. $B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, \ gx_1)$。我们推导出

$$a = e_2 = 0, b_1 = b_2 = 1, d = e_1 = 1.$$

并得到

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes 1_H + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)1_H \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 + \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+l_2+u_1}x_1^{1+1}x_2^{l_2} + = 0 \\
&(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_2^{1-l_2} \otimes gx_1^{1-u_1} \otimes g^{l_1+l_2+u_1}x_1^{1+1}x_2^{l_2} = 0
\end{aligned}$$

40.5.1. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= 0, b_1 = b_2 = 1
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, \ 0, \ 0, \ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_1; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\
d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = 0.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1$$

同时考察右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes gx_1; X_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

40.5.2. *Case* $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 这一情形已在小节 $B(x_1x_2 \otimes gx_1; \ X_1, gx_1x_2)$.中讨论过。

40.5.3. *Case* $X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$。这种情形已在小节 $B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, \ gx_1x_2$ 中讨论过)

40.5.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\
a &= b_1 = 0, b_2 = 1, \\
d &= e_1 = 1, e_2 = 0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 0, b_2=1, b_1=l_1\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1\\ e_2 &= 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,0,0,0)\equiv b_2=1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1$$

同样考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;X_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes gx_1;X_1X_2,gx_1)-B(gx_2\otimes gx_1;X_2,gx_1)=0$$

这由元素的形式可知成立。

40.5.5. 情形 1 $_H\otimes gx_1\otimes x_1x_2$. 这一情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes x_1x_2;\ X_1,gx_1x$ 中讨论过 $_2)$.

40.6. $B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)$. 由此可得

$$a=b_1=1, b_2=0, d=e_1=1, e_2=0$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &\sum_{l_1=0}^{b_1}\sum_{u_1=0}^{e_1}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,0,u_1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_1+u_1}x_1^{l_1+u_1}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes gx_1\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{1+u_1}x_1^{1+1}=0 \end{aligned}$$

40.6.1. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_1=1, b_2=0,\\ d &= 1, e_1=e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2\otimes gx_1;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes gx_1.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_2=0, b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1\\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，可得

$$-B(x_1x_2\otimes g;GX_1,g)+B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)+B(gx_2\otimes gx_1;GX_1,g)=0$$

这是根据这些元素的形式成立的。

40.6.2. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_1;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 1, b_2=0, b_1=l_1\\ d &= 1, e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$, 我们得到

$$B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;G,gx_1)+B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1,gx_1)-B(gx_2\otimes gx_1;G,gx_1)=0$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

40.7. $B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,\ gx_1)$。我们推得

$$a=b_2=1, b_1=0, d=e_1=1, e_2=0$$

于是得到

$$\begin{aligned} &\sum_{l_2=0}^{1}\sum_{u_1=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,l_2,u_1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)GX_2^{1-l_2}\otimes gx_1^{1-u_1}\otimes g^{l_2+u_1}x_1^{u_1}x_2^{l_2}\\ =\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)GX_2\otimes gx_1\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)GX_2\otimes g\otimes gx_1+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1) \end{aligned}$$

40.7.1. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=1, b_1=0,\\ d &= 1, e_1=e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_2\otimes gx_1;GX_2,g)GX_2\otimes g\otimes gx_1.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=1, 0, b_1=l_1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=1$, 我们得到

$$\left[+B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,g)\right]GX_2\otimes g\otimes gx_1.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;GX_2,g)+B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1)$$
$$-B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,g)+B(gx_2\otimes gx_1;GX_2,g)=0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

40.7.2. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$. 此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes gx_1;\ G,gx_1x_2)$.中讨论过。

40.7.3. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$. 此情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes gx_1;\ G,gx_1x_2)$.中讨论过。

40.8. $B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)$**.** 由此可推得

$$a=b_1=b_2=1,d=e_1=e_2=1$$

于是得到

$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2\otimes gx_2\otimes g^{l_1+1}x_1^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes gx_2\otimes g^{l_1}x_1^{1+1}x_2=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1\otimes x_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;l_1,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1x_2$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2\otimes g\otimes g^{l_1+}x_1^{1+1}x_2=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_1+l_2+}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1}=0$$

40.8.1. 情形 $GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2=u_2=0\\a&=b_2=1,b_1=0\\d&=e_1=e_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(gx_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1&=1,l_2=u_2=0\\a&=b_2=1,b_1=l_1\\d&=e_2=1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)=b_2=1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1$$

同时考虑右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;GX_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1x_2)=0$$

这由元素的形式可知。

40.8.2. 情形 $GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$。 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=1,b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1, \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2=0$ 我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=1,b_2=l_2\\ d &= e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1;GX_1X_2,gx_1x_2)=0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

40.8.3. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= e_1=1,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_1;GX_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_2=0,b_1=l_1\\ d &= 1,e_2=1.\\ e_1-u_1 &= 1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,0,\ 0,\ 0)=a+b_1\equiv 0$ 我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_1;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$l_1+u_1 = 1,l_2+u_2=1$$

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} & -B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1x_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; G, gx_1x_2) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

40.8.4. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

同时考察右侧，可得

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

40.8.5. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$. 等式左侧的左侧第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

等式左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0, \\ a &= 1, b_2=0, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1 \\ d &= 1, e_2=1, e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 \equiv 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2 \\ d &= 1, e_1=u_1=1, \\ e_2-u_2 &= 1 \Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2+a+b_1+b_2+1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} & +B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一点成立。

40.8.6. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0, \\ a &= b_1=b_2=1, \\ d &= e_1=1, e_2=0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 1$，我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= b_1=1, b_2-l_2=1 \Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1, \\ d &= e_1=1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,0,1) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

40.8.7. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) = a + b_1 \equiv 0$ 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 &= u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} & -B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1x_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_2, gx_1) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

40.8.8. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$。等式左侧第一项给出 s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \end{aligned}$$

$$d = 1, e_2 = u_2 = 1, e_1 = 0.$$

由于 $\alpha(x_1; 0,0,0,1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, \\ e_2 &= u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} & -B(gx_1 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1X_2, g) \\ = \ & 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

41. $B(x_1x_2 \otimes gx_2)$

利用（39），我们得到

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes gx_2) \\ = \ & (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & +(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned} \tag{422}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes gx_2) = \ & 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g)1_A \otimes gx_2 + \\ & +2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)G \otimes gx_1x_2 + \\ & -2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)X_1 \otimes gx_1x_2 + \\ & + [2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)] X_2 \otimes gx_1x_2 + \\ & + \begin{bmatrix} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{bmatrix} X_1X_2 \otimes gx_2 + \\ & + [2B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)] GX_1 \otimes gx_2 + \\ & + [-2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)] GX_2 \otimes gx_2 + \\ & + [2B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)] GX_1X_2 \otimes gx_1x_2. \end{aligned}$$

我们将卡西米尔等式写为 $B(x_1x_2 \otimes gx_2)$。

$$\sum\nolimits_{w_1=0}^{1} \sum\nolimits_{w_2=0}^{1} (-1)^{(1+w_2)w_1} \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}$$

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{\alpha\left(x_1^{1-w_1}x_2^{1-w_2};l_1,l_2,u_1,u_2\right)} B(g^{w_1+w_2}x_1^{w_1}x_2^{w_2}\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes \\
& g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1-w_1}x_2^{l_2+u_2+1-w_2} \\
= & \sum\nolimits_{\omega_2=0}^{1} B(x_1x_2\otimes gx_2^{1-\omega_2})\otimes g^{\omega_2}x_2^{\omega_2}
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
& \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(1_H\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1}+ \\
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_2\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2}+ \\
& +(-1)\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(gx_1\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2+1}+ \\
& +\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1x_2\otimes gx_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\
& G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1}x_2^{l_2+u_2}+ \\
= & B(x_1x_2\otimes gx_2)\otimes 1_H + B(x_1x_2\otimes g)\otimes gx_2.
\end{aligned}
$$

41.1. $B\left(x_1x_2\otimes gx_2; 1_A,\ gx_2\right)$。我们推导出

$$
\begin{aligned}
a &= b_1=b_2=0 \\
d &= e_2=1, e_1=0
\end{aligned}
$$

并且我们得到

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2\otimes gx_2; 1_A, gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes 1_H \\
& +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1x_2\otimes gx_2; 1_A, gx_2)1_A\otimes g\otimes gx_2.
\end{aligned}
$$

41.1.1. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1=l_2=u_2=0, \\
a &= b_1=b_2=0, \\
d &= 1, e_1=e_2=0
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha\left(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0\right)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$
-B(gx_1\otimes gx_2; 1_A, g)1_A\otimes g\otimes gx_2.
$$

第四项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\
a &= b_1=0, b_2=l_2, \\
d &= 1, e_1=0, e_2=u_2.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha\left(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1\right)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 且 $\alpha\left(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0\right)\equiv 0$，我们得到

$$
\left[B(x_1x_2\otimes gx_2; 1_A, gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2; X_2, g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_2.
$$

同时考虑等式右边，我们得到

$-B(x_1x_2\otimes g;1_A,\ g)-B(gx_1\otimes gx_2;\ 1_A,\ g)+B(x_1x_2\otimes gx_2;\ 1_A,\ gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;\ X_2,\ g)=0$鉴于元素的形式，这成立。

41.2. $B(x_1x_2\otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2)$。由此可得

$$a=1,b_1=b_2=0,d=e_1=e_2=1$$

于是得到

$$\begin{aligned}
&+\sum\nolimits_{u_1=0}^{1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{1}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,u_1,u_2)}B(x_1\otimes x_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{u_2}\\
=\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_2+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1+\\
&+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)G\otimes g\otimes x_1x_2
\end{aligned}$$

41.2.1. 情形 $G\otimes gx_1\otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\
a &= 1,b_1=b_2=0,\\
d &= e_1=1,e_2=0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$B(gx_1\otimes gx_2;G,gx_1)G\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\
a &= 1,b_1=0,b_2=l_2,\\
d &= e_1=1,0,e_2=u_2.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_1)\right]G\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考察等式右边，我们得到

$-B(x_1x_2\otimes g;\ G,\ gx_1)+B(gx_1\otimes gx_2;\ G,\ gx_1)-B(x_1x_2\otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;\ GX_2,\ gx_1)=0$这由元素的形式可知成立。

41.2.2. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\
a &= 1,b_1=b_2=0,\\
d &= e_2=1,e_1=0
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_2;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned}
l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\
a &= 1,b_2=0,b_1=l_1\\
d &= e_2=1,e_1=u_1.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)=0$，我们得到

$$[B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)]\,G\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_2;G,gx_2)+$$
$$B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该等式成立。

41.2.3. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=b_2=0,\\ d &= 1,e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$， 我们得到

$$B(1_H\otimes gx_2;G,g)G\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=0,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$且 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 1$，我们得到

$$[-B(gx_2\otimes gx_2;G,gx_2)-B(gx_2\otimes gx_2;GX_2,g)]\,G\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_2=0,b_1=l_1\\ d &= 1,e_2=0,e_1=u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$且 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)=a+b_1\equiv 0$我们得到

$$[-B(gx_1\otimes gx_2;G,gx_1)-B(gx_1\otimes gx_2;GX_1,g)]\,G\otimes g\otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=l_2\\ d &= 1,e_1=u_1,e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &\equiv 1+e_2\equiv 0,\\ \alpha(1_H;0,1,1,0) &\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 1,\\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &\equiv a+b_1\equiv 0\\ \text{and }\alpha(1_H;1,1,0,0) &\equiv 1+b_2\equiv 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_1)\\ +B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,g) \end{array}\right]G\otimes g\otimes x_1x_2$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_2;G,gx_1)-B(gx_1\otimes gx_2;GX_1,g)-B(gx_2\otimes gx_2;G,gx_2)-B(gx_2\otimes gx_2;GX_2,g)$$
$$B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_1)+B(1_H\otimes gx_2;G,g)+$$
$$+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,g)=0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

41.3. $B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1,\ gx_1x_2)$。由此我们推得

$$\begin{aligned} a &= 0, b_1 = 1, b_2 = 0, d = 1, e_1 = e_2 = 1. \\ a + b_1 + b_2 + l_1 + l_2 + d + e_1 + e_2 + u_1 + u_2 &\equiv l_1 + u_1 + u_2 \end{aligned}$$

并且我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes 1_H + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, Bx_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_2^{1-u_2} \otimes 0 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2} \otimes 0 + \end{aligned}$$

41.3.1. 情形 $X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_1)X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1)\right] X_1 \otimes gx_1 \otimes gx_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$\begin{aligned} -B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1) + B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_1) \\ -B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

41.3.2. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

左侧的第四项给出

$$l_1 + u_1 = 1, l_2 = u_2 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

根据这些元素的形式，这一结论成立。

41.3.3. 情形 $X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; X_1, g)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$ 且 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[-B(gx_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_2; X_1X_2, g)\right] X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_1)X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$\left[B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1)\right] X_1 \otimes g \otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_1) - B(gx_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_2; X_1X_2, g) \\ &B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1) + B(1_H \otimes gx_2; X_1, g) + \end{aligned}$$

这由元素的形式可知。

41.3.4. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = b_1 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

由于右侧没有对应的项，我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

41.3.5. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; 1_A, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

等式左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$ 且 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(gx_2 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

等式左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$ 我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_1)1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_1x_2$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$B(gx_1\otimes gx_2;X_1,gx_1)-B(gx_2\otimes gx_2;1_A,gx_1x_2)+B(gx_2\otimes gx_2;X_2,gx_1)$$
$$-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_1)+B(1_H\otimes gx_2;1_A,gx_1)=0$$

which holds in view of the form of the elements.

41.4. $B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,\ gx_1x_2)$。我们推得

$$a=0,b_1=0,b_2=1,d=1,e_1=1,e_2=1$$

于是得到

$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}+=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,11,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_1+u_2}x_1^{u_1}x_2^{1+1}=0$$

41.4.1. 情形 $X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三个和第四个加项。第三项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=l_2=u_2=0,\\a&=b_1=0,b_2=1,\\d&=e_1=1,e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$ 我们得到

$$B(gx_1\otimes gx_2;X_2,gx_1)X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2+u_2=1\\a&=b_1=0,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1,\\d&=e_1=1,e_2=u_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_2;X_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

41.4.2. 情形 $X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2=u_2=0\\a&=b_1=0,b_2=1,\\d&=e_2=1,e_1=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_2;X_2,gx_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=1\\ d &= e_2=1, e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 0$且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2\equiv 1$，我们得到

$$\left[+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes gx_2\otimes gx_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$-B(gx_2\otimes gx_2;X_2,\ gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;\ X_2,\ gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;\ X_1X_2,\ gx_2)=0$这根据元素的形式成立。

41.4.3. 情形 $X_2\otimes g\otimes x_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_1=0, b_2=1\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,0,0,0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H\otimes gx_2;X_2,g)X_2\otimes g\otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1,\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1)\equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_2;X_2,gx_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= 0, b_2=1, b_1=l_1,\\ d &= 1, e_2=0, e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2=0$ $\alpha(x_2;1,0,0,0)\equiv a+b_1\equiv 1$ 我们得到

$$\left[-B(gx_1\otimes gx_2;X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_2;X_1X_2,g)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2.$$

左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1)\equiv 1+e_2\equiv 0$以及 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 1$，我们得到

$$\left[+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)\right]X_2\otimes g\otimes x_1x_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_1\otimes gx_2;X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_2;X_1X_2,g)-B(gx_2\otimes gx_2;X_2,gx_2)+\\ &+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)+B(1_H\otimes gx_2;X_2,g)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

41.4.4. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四个加项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,1,0,0) \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这根据元素的形式成立。

41.4.5. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; 1_A, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_2; X_2, gx_2)1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 1$ 且 $\alpha(x_2; 1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[+B(gx_1 \otimes gx_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes gx_2; X_1, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = u_1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$ 且 $\alpha(1_H; 1,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2;\ X_1X_2, gx_2)\right] 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$+B(gx_1\otimes gx_2;1_A,gx_1x_2)+B(gx_1\otimes gx_2;X_1,gx_2)+B(gx_2\otimes gx_2;X_2,gx_2)+$$
$$-B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)+B(1_H\otimes gx_2;1_A,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

41.5. $B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,\ gx_2)$。我们有

$$a=0,b_1=b_2=1,d=e_2=1$$

于是得到

$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes 1_A+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1X_2\otimes g\otimes gx_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_2\otimes g\otimes x_1x_2+$$
$$+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0.$$

41.5.1. 情形 $X_1\otimes gx_2\otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0,b_1=1,\\ d &= e_1=1,e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$ 我们得到

$$+B(gx_1\otimes gx_2;X_1,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= 0,b_1=1,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1,u_2=0,b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0,$ 我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;X_1,gx_2)+B(gx_1\otimes gx_2;X_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;X_1X_2,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，该式成立。

41.5.2. $Case\ X_2\otimes gx_2\otimes gx_1$。这种情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes gx_2;\ X_2,\ gx_1x_2)$。中讨论过。

41.5.3. 情形 $1_A\otimes gx_2\otimes x_1x_2$。这一情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes gx_2;X_2,\ gx_1x_2)$ 中讨论过 .

41.5.4. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2$。 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) - B(gx_1 \otimes gx_2; X_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这成立。

41.5.5. *Case* $X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$. </style>此情形已在小节 (;, gx_1x_2 中讨论过).

41.6. $B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2)$. 我们推得

$$a = b_1 = 1, d = 1, e_2 = 1$$

于是得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes 1_H + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2)GX_1 \otimes g \otimes gx_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1, gx_2)G \otimes g \otimes x_1x_2. \end{aligned}$$

41.6.1. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 此情形已在小节 $B(x_1x_2 \otimes gx_2; G, gx_1x_2)$.

41.6.2. 情形 $GX_1 \otimes g \otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, g)GX_1 \otimes g \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$\left[+B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, g)\right] GX_1 \otimes g \otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) - B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, g)$$

$$+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,g)=0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

41.6.3. 情形 $G\otimes g\otimes x_1x_2$。这一情形已在小节 $B(x_1x_2\otimes gx_2;\ G,\ gx_1x_2)$ 中考虑过。

41.7. $B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,\ gx_2)$。我们推得

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1=0, b_2=1\\ d &= 1, e_1=0, e_2=1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes gx_2\otimes 1_H+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,Bx_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_2+\\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)GX_2^{1-l_2}\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{l_2+u_2}x_2^{1+1}=0 \end{aligned}$$

41.7.1. 情形 $GX_2\otimes g\otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=1, b_1=0,\\ d &= 1, e_1=e_2=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_2;GX_2,g)GX_2\otimes g\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1, l_2=0, u_2=1,\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)GX_2\otimes g\otimes gx_2.$$

同时考虑等式右侧，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;GX_2,g)-B(gx_1\otimes gx_2;GX_2,g)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)=0$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

41.7.2. 情形 $G\otimes gx_2\otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三个和第四个加项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= 1, b_1=b_2=0,\\ d &= e_2=1, e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$+B(gx_1\otimes gx_2;G,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=0, e_2-u_2=1\Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)G\otimes gx_2\otimes gx_2.$$

同时考察等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;G,gx_2)+B(gx_1\otimes gx_2;G,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_2,gx_2)=0$$

这由元素的形式可知。

41.8. $B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)$**.** 我们推得

$$a=b_1=b_2=d=e_1=e_2=1$$

并且我们得到

$$\begin{gathered}(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes 1_H+\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_2\otimes gx_1+\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes x_1x_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes g\otimes x_1x_2+\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2\otimes gx_2+\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_2}x_2^{1+1}=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1x_2+\\+(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_2}x_1x_2^{1+1}=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2\otimes gx_1+\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_2}x_1^{1+0}x_2^{1+1}=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_2\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{1+u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2}=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2+\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_2}x_1x_2^{1+1}+=0\\+(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,u_2)}\,B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)G\otimes gx_1^{1-u_1}x_2^{1-u_2}\otimes g^{u_1+u_2}x_1^{1+1}x_2^{1+u_2}=0.\end{gathered}$$

41.8.1. 情形 $GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=l_2=u_2=0,\\a&=b_1=b_2=1,\\d&=e_1=1,e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$ 我们得到

$$+B(gx_1\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned}l_1&=u_1=0,l_2+u_2=1\\a&=b_1=1,b_2-l_2=1\Rightarrow b_2=1,l_2=0,u_2=1\\d&=e_1=1,0,e_2=u_2=1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)GX_1X_2\otimes gx_1\otimes gx_2.$$

同时考虑等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1X_2,gx_1x_2)=0$$

which holds in view of the form of the elements.

41.8.2. 情形 $GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, b_2 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$, 我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes gx_2 \otimes gx_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这根据元素的形式成立。

41.8.3. 情形 $GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, g)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 = 0$ 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 1) \equiv 1+e_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1X_2 \otimes g \otimes x_1x_2.$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2)+$$
$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

41.8.4. 情形 $GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_2.$$

同时考察等式右边，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

which holds in view of the form of the elements.

41.8.5. 情形 $GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2$。等式左侧第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

等式左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$+B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0) \equiv e_2 = 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1-l_1=1 \Rightarrow b_1=1, l_1=0, u_1=1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1=u_1=1, e_2-u_2=1 \Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 1,\ 1,\ 0) \equiv e_2+a+b_1+b_2+1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1x_2.$$

由于等式右侧没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &+B(gx_1 \otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_2)+ \\ &-B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该结论成立。

41.8.6. 情形 $GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0 \\ a &= b_2=1, b_1=0, \\ d &= e_2=e_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+b_2 \equiv 0$，我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0 \\ a &= b_2=1, b_1=l_1, \\ d &= e_2=1, e_1-u_1=1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv b_2 \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1.$$

由于右侧没有项，我们得到

$$B(gx_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

这由这些元素的形式可知成立。

41.8.7. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2$。等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0 \\ a &= 1, b_1=b_2=0, \\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=0, b_2=l_2, \\ d &= e_1=1, e_2-u_2=1 \Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv a+b_1+b_2+1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1x_2.$$

左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0, \\ a &= 1, b_2=0, b_1=l_1, \\ d &= e_2=1, e_1-u_1=1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,0,0,0) \equiv a+b_1 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

等式左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1 \\ a &= 1, b_1=l_1, b_2=l_2, \\ d &= 1, e_1-u_1=1 \Rightarrow e_1=1, u_1=0, b_1=l_1=1 \\ e_2-u_2 &= 1 \Rightarrow e_2=1, u_2=0, b_2=l_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,1,0,0) \equiv 1+b_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1x_2.$$

由于等式右边没有需要考虑的项，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(gx_1\otimes gx_2; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_2\otimes gx_2; GX_2, gx_1x_2)+ \\ &+B(x_1x_2\otimes gx_2; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_2; G, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

42. $B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2\right)$

利用 40

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes gx_1x_2) &= (1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2) \\ &\quad -(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1) \\ &\quad +(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2) \\ &\quad +(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g) \end{aligned} \tag{423}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2\otimes gx_1x_2) \\ = \;& 4B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes gx_1x_2 + \\ & + \begin{bmatrix} 4B(g\otimes 1_H;1_A,g)+4B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+ \\ 4B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+4B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{bmatrix} X_1X_2\otimes gx_1x_2 + \\ & + \left[4B(x_2\otimes 1_H;G,g) - 4B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] GX_1\otimes gx_1x_2 + \\ & + \left[-4B(x_1\otimes 1_H;G,g) - 4B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] GX_2\otimes gx_1x_2 + \end{aligned}$$

我们将 $B(x_1x_2\otimes gx_1x_2).1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$ 的卡西米尔条件写为

$$\begin{aligned} & \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(1_H\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2+1} + \\ & + \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_1;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(gx_2\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \\ & G^aX_1^{b_1-l_1}X_2^{b_2-l_2}\otimes g^dx_1^{e_1-u_1}x_2^{e_2-u_2}\otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2}x_1^{l_1+u_1+1}x_2^{l_2+u_2} + \\ & + (-1)\sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1}\sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1}\sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2}\sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1}\sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2}(-1)^{\alpha(x_2;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\ & B(gx_1\otimes gx_1x_2; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, g^dx_1^{e_1}x_2^{e_2}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2+1} + \\
& + \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} \sum\nolimits_{l_1=0}^{b_1} \sum\nolimits_{l_2=0}^{b_2} \sum\nolimits_{u_1=0}^{e_1} \sum\nolimits_{u_2=0}^{e_2} (-1)^{\alpha(1_H;l_1,l_2,u_1,u_2)} \\
& B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, g^d x_1^{e_1} x_2^{e_2}) \\
& G^a X_1^{b_1-l_1} X_2^{b_2-l_2} \otimes g^d x_1^{e_1-u_1} x_2^{e_2-u_2} \otimes g^{a+b_1+b_2+l_1+l_2+d+e_1+e_2+u_1+u_2} x_1^{l_1+u_1} x_2^{l_2+u_2} + \\
= \quad & B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) \otimes g \\
& + B(x_1x_2 \otimes gx_1) \otimes x_2 \\
& - B(x_1x_2 \otimes gx_2) \otimes x_1 \\
& + B(x_1x_2 \otimes g) \otimes gx_1x_2
\end{aligned}
$$

42.1. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A,\ gx_1x_2)$。我们得到

$$
\begin{aligned}
a &= b_1 = b_2 = 0 \\
d &= e_1 = e_2 = 1
\end{aligned}
$$

并得到

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes g + \\
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2 + \\
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes gx_2 \otimes x_1 + \\
& + (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) 1_A \otimes g \otimes gx_1x_2
\end{aligned}
$$

42.1.1. 情形 $1_A \otimes gx_1 \otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\
a &= b_1 = b_2 = 0, \\
d &= e_1 = 1, e_2 = 0.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_2;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$, 可得

$$
-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1) 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2.
$$

第四项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\
a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\
d &= e_1 = 1, e_2 = u_2.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(1_H;\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 且 $\alpha(1_H;\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$ 可得

$$
\left[B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)\right] 1_A \otimes gx_1 \otimes x_2.
$$

同时考察右侧，我们得到

$$
\begin{aligned}
& B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) \\
& - B(x_1x_2 \otimes gx_1 1_A, gx_1) - B(gx_1 \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1) = 0
\end{aligned}
$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

42.1.2. 情形 $1_A \otimes gx_2 \otimes x_1$。我们只需考察等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$
\begin{aligned}
l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\
a &= b_1 = b_2 = 0, \\
d &= e_2 = 1, e_1 = 0.
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_2)1_A\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0\\ a &= b_2=0, b_1=l_1,\\ d &= e_2=1, e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$ 且 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2=0$，我们得到

$$\left[-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)\right]1_A\otimes gx_2\otimes x_1.$$

考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2)+\\ &+B(gx_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes gx_2;1_A,gx_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

42.1.3. 情形 $1_A\otimes g\otimes gx_1x_2$。 等式左侧的第一项给出 u s

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2=u_2=0\\ a &= b_1=b_2=0,\\ d &= 1, e_1=e_2=0,. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$，我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1x_2;1_A,g)1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=0, l_2+u_2=1\\ a &= b_1=0, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=0, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv 1$ 且 $\alpha(x_1;0,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$，我们得到

$$\left[-B(gx_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes gx_1x_2;X_2,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2=u_2=0,\\ a &= b_2=0, b_1=l_1\\ d &= 1, e_2=0, e_1=u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,\ 0,\ 1,\ 0)\equiv e_2=0$ 且 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1=1$，我们得到

$$\left[-B(gx_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_1x_2;X_1,g)\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1, l_2+u_2=1\\ a &= 0, b_1=l_1, b_2=l_2,\\ d &= 1, e_1=u_1, e_2=u_2. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \alpha(1_H;0,0,1,1) &= 1+e_2,\\ \alpha(1_H;0,1,1,0) &= e_2+a+b_1+b_2+1,\\ \alpha(1_H;1,0,0,1) &\equiv a+b_1\text{and}\\ \alpha(1_H;1,1,0,0) &\equiv 1+b_2 \end{aligned}$$

我们得到

$$\left[\begin{array}{c} B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_1\right)+\\ -B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,g\right)\end{array}\right]1_A\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H\otimes gx_1x_2;1_A,g)-B(gx_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_2)+B(gx_2\otimes gx_1x_2;X_2,g)\\ -B(gx_1\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1)+B(gx_1\otimes gx_1x_2;X_1,g)+\\ B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;1_A,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_2,gx_1\right)+\\ -B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1,gx_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,g\right)-B(x_1x_2\otimes g;1_A,g)=0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结果成立。

42.2. $B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,\ gx_1x_2)$。我们有

$$a=0,b_1=b_2=1,d=e_1=e_2=1$$

由此我们推得

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1+\\ (-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_2\otimes gx_1x_2\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_2\otimes g^{+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1x_2\otimes g+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1\otimes gx_1x_2\otimes x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1x_2\otimes x_1+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,0)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)1_A\otimes gx_1x_2\otimes gx_1x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes gx_1\otimes x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2\otimes gx_1\otimes gx_1x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,0,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1^{1-l_1}X_2^{1-l_2}\otimes gx_1\otimes g^{1+l_1+l_2+1}x_1^{l_1}x_2^{1+1}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_1X_2\otimes g\otimes gx_1x_2+\\ +(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{l_1+1}x_2^{1+1}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{l_2+1}=0\\ +(-1)^{\alpha(1_H;1,1,1,1)}B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_1x_2)X_2^{1-l_2}\otimes g\otimes g^{1+l_1+l_2}x_1^{1+1}x_2^{1+1}=0 \end{gathered}$$

42.2.1. $X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= 0,b_1=b_2=1\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$ 我们得到

$$B(gx_2\otimes gx_1x_2;X_1X_2,gx_2)X_1X_2\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四个加项给出

$$l_1+u_1 = 1,l_2=u_2=0$$

$$\begin{aligned} a &= 0, b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_1, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

考察右侧可得,

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_1, gx_1x_2) + \\ + B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

42.2.2. 情形 $X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0, . \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_2 = 1, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,0,1,0) \equiv e_2 = 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_2 = l_2, \\ b_1 - l_1 &= 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,1,1,0) = e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$，我们得到

$$B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_1 \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2) + \\ + B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) \\ - B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

42.2.3. 情形 $X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$, 我们得到

$$B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1 \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

同时考察右侧可得

$$\begin{aligned} +B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - \ B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2)+ \\ +B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

42.2.4. 情形 $X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 = 1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1x_2 \otimes x_1.$$

考虑右侧，我们得到,

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)+ \\ -B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

42.2.5. 情形 $1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0,0,0,0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 - u_2 = 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,1,0,0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$, 我们得到

$$+B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 0, b_1 = l_1 = 1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1,0,0,0) \equiv a + b_1 \equiv 1$, 我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2)1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_2 = l_2, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) 1_A \otimes gx_1x_2 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H \otimes gx_1x_2; 1_A, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2) + \\ + B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1, gx_1x_2) + B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) \\ -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这成立。

42.2.6. 情形 $X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$。我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2)X_1X_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考察右侧可得

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)+$$
$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，这一结论成立。

42.2.7. 情形 $X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_1 = 0, b_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= b_1 = 0, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;1,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = l_1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 - u_1 = 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1, \\ e_2 &= u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1) \equiv a + b_1 \equiv 1$，我们得到

$$-B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) X_2 \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_2, gx_1x_2)+$$
$$+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1) - B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

42.2.8. 情形 $X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 0, b_1 = b_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$，我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 = 1, b_2 - l_2 = 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 0, b_2 = 1, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 0$，我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 0, b_1 - l_1 = 1 \Rightarrow b_1 = 1, l_1 = 0, u_1 = 1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1, \\ d &= 1, e_1 = u_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 1) = 1 + e_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right)X_1X_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H \otimes gx_1x_2; X_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_2) + \\ -B(gx_1 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1) + B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; X_1X_2, gx_1x_2\right) \\ -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

42.3. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)$。我们推得

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{gathered} (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1x_2 \otimes g \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_2 \otimes x_1 \\ (-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,0)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1^{1-l_1} \otimes gx_2 \otimes g^{+l_{11}}x_1^{1+1} = 0 \\ (-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2 \end{gathered}$$

$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,0,1)}\, B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)}\, B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$$
$$(-1)^{\alpha(1_H;1,0,1,1)}\, B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1^{1-l_1}\otimes g\otimes g^{+l_1+1}x_1^{1+1}x_2=0$$

42.3.1. 情形 $G\otimes gx_1x_2\otimes x_1$。我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_1=b_2=0,\\ d &= e_1=e_2=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 1$，我们得到

$$-B(gx_2\otimes gx_1x_2;G,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1=l_1,b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1-u_1=1\Rightarrow e_1=1,u_1=0,b_1=l_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)G\otimes gx_1x_2\otimes x_1.$$

考虑右侧，我们得到，

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes gx_2;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)+\\ -B(gx_2\otimes gx_1x_2;G,gx_1x_2)=0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知。

42.3.2. 情形 $GX_1\otimes gx_2\otimes x_1$. 我们只需考虑等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1=l_2=u_2=0,\\ a &= b_1=1,b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1=0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,0)\equiv a+b_1+b_2\equiv 0$，我们得到

$$+B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0\\ a &= 1,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1,b_2=0,\\ d &= e_2=1,e_1=u_1=1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,0)\equiv e_2+(a+b_1+b_2)\equiv 1$,我们得到

$$-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)GX_1\otimes gx_2\otimes x_1.$$

考虑右侧可得，

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes gx_2;GX_1,gx_2)-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2)+\\ +B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_2)=0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，这一结论成立。

42.3.3. 情形 $GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_1 = 1, b_2 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1)GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = 1, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 0, 1, 0, 0) \equiv 0$ 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1)\right] GX_1 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

考虑右侧后，我们得到

$$\begin{aligned} -B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1x_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，该式成立。

42.3.4. 情形 $G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2$. 等式左侧的第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; G, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, 0, e_2 = u_2. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$ 且 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$\left[-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1)\right] G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 = l_1, \\ d &= 1, e_2 = 0, \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_1)G \otimes gx_1 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, b_2 = l_2, , \\ d &= 1, e_2 = u_2, \\ e_1 - u_1 &= 1 \Rightarrow e_1 = 1, u_1 = 0, b_1 = l_1 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;1,\ 0,\ 0,\ 1)\equiv a+b_1\equiv 0$和 $\alpha(1_H;1,\ 1,\ 0,\ 0)\equiv 1+b_2\equiv 0$, 我们得到

$$[+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,\ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2;\ GX_1X_2,\ gx_1)$$
$$]\,G\otimes gx_1\otimes gx_1x_2.$$同时考察右侧，可得

$$\begin{gathered}B(1_H\otimes gx_1x_2;G,gx_1)-B(gx_2\otimes gx_1x_2;G,gx_1x_2)\\ -B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_2,gx_1)-B(gx_1\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1)+\\ +B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1\right)\\ -B(x_1x_2\otimes g;G,gx_1)=0\end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一等式成立。

42.3.5. 情形 $GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2$. 等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2=u_2=0\\ a &= b_1=1,b_2=0,\\ d &= 1,e_1=e_2=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2;0,\ 0,\ 0,\ 0)\equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H\otimes gx_1x_2;GX_1,g)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned}l_1 &= u_1=0,l_2+u_2=1\\ a &= b_1=1,b_2=l_2,\\ d &= 1,e_1=0,e_2=u_2.\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1;0,0,0,1)\equiv 1$和 $\alpha(x_1;0,1,0,0)\equiv a+b_1+b_2+1\equiv 0$,我们得到

$$[-B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_2)+B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,g)]\,GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第三项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2=u_2=0,\\ a &= 1,b_2=0,b_1-l_1=1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1\\ d &= 1,e_2=0,e_1=u_1=1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2;0,0,1,0)\equiv e_2\equiv 0$,我们得到

$$-B(gx_1\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1)GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned}l_1+u_1 &= 1,l_2+u_2=1\\ a &= 1,b_2=l_2,\\ b_1-l_1 &= 1\Rightarrow b_1=1,l_1=0,u_1=1\\ d &= 1,e_2=u_2,e_1=u_1=1\end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H;0,0,1,1)\equiv 1+e_2\equiv 0$和 $\alpha(1_H;0,1,1,0)\equiv e_2+a+b_1+b_2+1\equiv 0$,我们得到

$$[+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1\right)]\,GX_1\otimes g\otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered}B(1_H\otimes gx_1x_2;GX_1,g)-B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_2)+\\ +B(gx_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,g)-B(gx_1\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1)+\\ +B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1,gx_1x_2\right)+B\left(x_1x_2\otimes gx_1x_2;GX_1X_2,gx_1\right)\\ -B(x_1x_2\otimes g;GX_1,g)=0\end{gathered}$$

这由元素的形式可知。

42.4. $B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2,\ gx_1x_2)$。我们有

$$\begin{aligned} a &= 1, b_1 = 0, b_2 = 1 \\ d &= e_1 = e_2 = 1 \end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_1x_2 \otimes g + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,0)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,0)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,0,1)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2 + \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,0,1)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) G \otimes gx_1 \otimes g^{l_2}x_2^{1+1} = 0 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,0,1,1)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2 \\ &(-1)^{\alpha(1_H;0,1,1,1)} B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) GX_2^{1-l_2} \otimes g \otimes g^{l_2+1}x_1x_2^{1+1} = 0. \end{aligned}$$

42.4.1. 情形 $G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0 \\ d &= e_1 = e_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 = 1$，我们得到

$$+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= e_1 = 1, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0,\ 1,\ 0,\ 0) \equiv 0$，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2)G \otimes gx_1x_2 \otimes x_2.$$

同时考察右侧，我们得到

$$\begin{aligned} -B(x_1x_2 \otimes gx_1; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + \\ +B(gx_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

这由元素的形式可知成立。

42.4.2. 情形 $GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1$. 我们只需考察等式左侧的第二项和第四项。

第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0,\ 0,\ 0,\ 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$，我们得到

$$+B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

第四个加项给出

$$l_1 + u_1 = 1, l_2 = u_2 = 0$$

$$\begin{aligned} a &= b_2 = 1, b_1 = l_1, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 + (a + b_1 + b_2) \equiv 1$ 和 $\alpha(1_H; 1, 0, 0, 0) \equiv b_2 = 1$, 我们得到

$$\left[-B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)\right] GX_2 \otimes gx_2 \otimes x_1.$$

考察右侧，可得,

$$\begin{gathered} B(x_1x_2 \otimes gx_2; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2) = 0 \end{gathered}$$

根据元素的形式，该等式成立。

42.4.3. 情形 $G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2$。 等式左侧的左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= 1, b_1 = b_2 = 0, \\ d &= e_2 = 1, e_1 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; G, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, b_2 = l_2, \\ d &= 1, e_1 = 0, \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 1, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2)G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= 1, b_2 = 0, b_1 = l_1 \\ d &= e_2 = 1, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 1\ \alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$ 以及，我们得到

$$\left[+B(gx_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_2 = l_2, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_1 = u_1 \\ e_2 - u_2 &= 1 \Rightarrow e_2 = 1, u_2 = 0, b_2 = l_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 1, 1, 0) \equiv e_2 + a + b_1 + b_2 + 1 \equiv 0$ 以及 $\alpha(1_H; 1, 1, 0, 0) \equiv 1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$\left[+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2)\right] G \otimes gx_2 \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H \otimes gx_1x_2; G, gx_2) + B(gx_1 \otimes gx_1x_2; G, gx_1x_2) \\ -B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2) + \\ +B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，该等式成立。

42.4.4. 情形 $GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2$. 我们只需考虑等式左侧的第三项和第四项。第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$, 我们得到

$$-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1, \\ a &= 1, b_1 = 0, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= e_1 = 1, e_2 = u_2 = 1. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(1_H; 0, 0, 0, 1) \equiv a + b_1 + b_2 \equiv 0$ 我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2)GX_2 \otimes gx_1 \otimes x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{aligned} -B(x_1x_2 \otimes gx_1; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2) + \\ -B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

42.4.5. 情形 $GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2$。等式左侧第一项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 = u_2 = 0 \\ a &= b_2 = 1, b_1 = 0, \\ d &= 1, e_1 = e_2 = 0. \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1x_2; 0, 0, 0, 0) \equiv 0$, 我们得到

$$B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_2, g)GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第二项给出

$$\begin{aligned} l_1 &= u_1 = 0, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = 0, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \\ d &= 1, e_1 = 0, e_2 = u_2 = 1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_1; 0, 0, 0, 1) \equiv 1$, 我们得到

$$-B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2)GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧第三项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 = u_2 = 0, \\ a &= b_2 = 1, b_1 = l_1 \\ d &= 1, e_2 = 0, e_1 = u_1 \end{aligned}$$

由于 $\alpha(x_2; 0, 0, 1, 0) \equiv e_2 \equiv 0$ $\alpha(x_2; 1, 0, 0, 0) \equiv a + b_1 \equiv 0$ 且, 我们得到

$$\left[-B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g)\right] GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

方程左侧的第四项给出

$$\begin{aligned} l_1 + u_1 &= 1, l_2 + u_2 = 1 \\ a &= 1, b_1 = l_1, \\ b_2 - l_2 &= 1 \Rightarrow b_2 = 1, l_2 = 0, u_2 = 1 \end{aligned}$$

$$d = 1, e_1 = u_1, e_2 = u_2 = 1$$

由于 $\alpha(1_H; 0,0,1,1) \equiv 1 + e_2 \equiv 0$且 $\alpha(1_H; 1,0,0,1) \equiv a + b_1 \equiv 0$,因此我们得到

$$\left[+B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) + B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2\right)\right] GX_2 \otimes g \otimes gx_1x_2.$$

同时考虑右侧，我们得到

$$\begin{gathered} B(1_H \otimes gx_1x_2; GX_2, g) - B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1) \\ -B(gx_1 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_2) + \\ +B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_2, gx_1x_2\right) + B\left(x_1x_2 \otimes gx_1x_2; GX_1X_2, gx_2\right) \\ -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) = 0 \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，这一结论成立。

第3. 部分：条件（13）和条件（12）

在本部分中，我们将探讨条件（13）和条件（12）。最后，我们将具备证明基本结果定理（47。1）所需的全部材料

43. 方程（13）

在本节中，我们将证明，鉴于我们选择用 $B(h \otimes 1_H)$ 来表示所有的 $B(h \otimes h')$，其中 $h \otimes 1_H$ 遍历七个元素，这个条件 (13) 将自动满足。

正如我们在第（5）节中所指出的，我们只需对 $1_A \otimes g$、 $1_A \otimes x_1$ 和 $1_A \otimes x_2$ 计算等式 (13)。

43.1. 情形 $1_A \otimes g$。 我们知道，在 $1_A \otimes g$ 的情形下，(13) 具有 (2 4)

$$B(gh \otimes gh') = (1_A \otimes g)B(h \otimes h')(1_A \otimes g).$$

现在，我们利用这个等式，在卡西米尔条件下用列表中的 34 个元素来定义其余的 $B(h \otimes h')$。因此，这个等式自动满足。

43.2. 情形 $1_A \otimes x_1$。

命题 43.1。 假设方程 (13) 对 $1_A \otimes x_1$ 和 $h \otimes h'$ 成立

$$B(h \otimes h')(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes x_1)B(gh \otimes gh') + B(x_1h \otimes gh') + B(h \otimes x_1h') \tag{424}$$

那么它对 $gh \otimes gh'$ 成立，即

$$B(gh \otimes gh')(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes x_1)B(ggh \otimes ggh') + B(x_1gh \otimes ggh') + B(gh \otimes x_1gh')$$

证明。 我们在等式 (424) 两边分别用 $(1_A \otimes g)$ 进行共轭，得到

$$\begin{gathered} -\left(1_A \otimes g\right) B(h \otimes h') \left(1_A \otimes g\right) \left(1_A \otimes x_1\right) = -(1_A \otimes x_1) \left(1_A \otimes g\right) B(gh \otimes gh') \left(1_A \otimes g\right) \\ + \left(1_A \otimes g\right) B(x_1h \otimes gh') \left(1_A \otimes g\right) + \left(1_A \otimes g\right) B(h \otimes x_1h') \left(1_A \otimes g\right). \end{gathered}$$

由此我们推得

$$\begin{gathered} B(gh \otimes gh')(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes x_1)B(h \otimes h') \\ -B(gx_1h \otimes h') - B(gh \otimes gx_1h') \end{gathered}$$

□

43.2.1. $g \otimes 1_H$。

$$B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gg \otimes g) + B(x_1 g \otimes g) + B(g \otimes x_1)$$

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1_A \otimes g) \qquad & B(1_H \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ & \stackrel{(398)}{=} B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & + (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1)B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)\,B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ = \quad & B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

43.2.2. $x_1 \otimes 1_H$。

$$B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes g) + B(x_1 x_1 \otimes g) + B(x_1 \otimes x_1)$$

我们有

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes g) + B(x_1 x_1 \otimes g) + B(x_1 \otimes x_1) \\ = \quad & (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1 \otimes x_1) \end{aligned}$$

由于

$$B(x_1 \otimes x_1) \stackrel{(404)}{=} B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1 \otimes x_1) \\ = & (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) = B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.3. $x_2 \otimes 1_H$。

$$B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes gx_1)\,B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1 x_2 \otimes g) + B(x_2 \otimes x_1)$$

由于

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes gx_1)\,B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1 x_2 \otimes g) + B(x_2 \otimes x_1) \\ = & (1_A \otimes gx_1)\,B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(gx_1 x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_2 \otimes x_1) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes x_1) \stackrel{(412)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1 x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{right side} \quad & (1_A \otimes gx_1)\,B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(gx_1 x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & + B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1 x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ = \quad & B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.4. $x_1x_2 \otimes 1_H$。

$B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \overset{?}{=} (1_A \otimes gx_1)\ B(x_1x_2 \otimes 1_H)\ (1_A \otimes g)\ + B(x_1x_1x_2 \otimes g)\ + B(x_1x_2 \otimes x_1)$ 我们得到

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes gx_1)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + B(x_1x_1x_2 \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.5. $gx_1 \otimes 1_H$。

$B\,(gx_1 \otimes 1_H)\ (1_A \otimes x_1) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(ggx_1 \otimes g)\ + B(x_1gx_1 \otimes g)\ + B(gx_1 \otimes x_1)$

我们考虑右侧

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)B(x_1 \otimes g) + B(gx_1 \otimes x_1) \\ = \quad & (1_A \otimes x_1)\, (1_A \otimes g)\, B(gx_1 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\, B(x_1 \otimes gx_1)\, (1_A \otimes g) \\ & \overset{(409)}{=} (1_A \otimes x_1)\, (1_A \otimes g)\, B(gx_1 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + \\ & (1_A \otimes g)\, (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\, (1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\, (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)\, B(gx_1 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + \\ & + + B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(gx_1 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ = \quad & B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.6. $gx_2 \otimes 1_H$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(ggx_2 \otimes g) + B(x_1gx_2 \otimes g) + B(gx_2 \otimes x_1)$$

我们考察右侧

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)B(ggx_2 \otimes g) + B(x_1gx_2 \otimes g) + B(gx_2 \otimes x_1) \\ = \quad & (1_A \otimes x_1)\, (1_A \otimes g)\, B(gx_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) - \\ & (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\, B(x_2 \otimes gx_1)\, (1_A \otimes g) \\ & \overset{(415)}{=} (1_A \otimes x_1)\, (1_A \otimes g)\, B(gx_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ & - (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\, (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\, (1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\, (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)\, B(gx_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ & - (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + \\ & +B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(gx_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ = \quad & - (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) + B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & + (1_A \otimes g)\, B(x_1x_2 \otimes 1_H)\, (1_A \otimes g) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

因此，我们完成了。

43.2.7. $gx_1x_2 \otimes 1_H$。

$B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(ggx_1x_2 \otimes g) + B(x_1gx_1x_2 \otimes g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1)$
我们考虑右侧。

$$\begin{aligned}
& (1_A \otimes x_1)B(ggx_1x_2 \otimes g) + B(x_1gx_1x_2 \otimes g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1) \\
= \;& (1_A \otimes x_1)B(x_1x_2 \otimes g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1) \\
= \;& (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\
& + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\
& \stackrel{(421)}{=} (1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\
& + (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\
& + (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\
= \;& (1_A \otimes gx_1)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\
& B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\
& - (1_A \otimes gx_1)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g)
\end{aligned}$$

至此，证明完毕。

$$\begin{aligned}
& B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(421) \\
= \;& (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\
& + (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)
\end{aligned}$$

43.2.8. $1_H \otimes x_1$。

$$B(1_H \otimes x_1)(1_H \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_H \otimes x_1)B(g \otimes gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1) + B(1_H \otimes x_1x_1)$$

我们考虑右侧

$$\begin{aligned}
& (1_H \otimes x_1)B(g \otimes gx_1) + B(x_1 \otimes gx_1) + B(1_H \otimes x_1x_1) \\
= \;& (1_H \otimes x_1)(1_H \otimes g)B(1_H \otimes x_1)(1_H \otimes g) + B(x_1 \otimes gx_1) \\
& \stackrel{(409),(397))}{=} -(1_H \otimes x_1)(1_H \otimes g)(1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes g)(1_H \otimes g) + \\
& (1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes gx_1) + (1_H \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H) \\
= \;& -(1_H \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H) + (1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes gx_1) + (1_H \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H) \\
= \;& (1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes gx_1)
\end{aligned}$$

我们考虑左侧

$$B(1_H \otimes x_1)(1_H \otimes x_1) \stackrel{(397)}{=} +(1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes gx_1)$$

并得出结论。

43.2.9. $1_H \otimes x_2$。

$$B(1_H \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(g \otimes gx_2) + B(x_1 \otimes gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2)$$

我们考虑左侧

$$B(1_H \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{(397)}{=} -(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)$$

我们考虑右侧

$$(1_A \otimes x_1)B(g \otimes gx_2) + B(x_1 \otimes gx_2) + B(1_H \otimes x_1x_2)$$

$$\begin{aligned}
(1_A \otimes x_1)B(g \otimes gx_2) &= (1_A \otimes x_1)(1_H \otimes g)B(1_A \otimes x_2)(1_H \otimes g) \\
&\stackrel{(397)}{=} -(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g) \\
&= -(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B(x_1\otimes gx_2)\,(410)\\ = \;& (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & +(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)\\ & -B(gx_2gx_1\otimes 1_H)\end{aligned}$$

$$B(x_1\otimes gx_2)\overset{(410)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H)$$

$$\begin{aligned} & B(1_H\otimes x_1x_2)\overset{(402)}{=}\\ = \;& -(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ & +(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)B(gx_1\otimes 1_H)\\ & +B(x_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} & (1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_2)+B(x_1\otimes gx_2)+B(1_H\otimes x_1x_2)\overset{(397),(410)(402)}{=}\\ & -(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)+\\ & (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H)+\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)+\\ & +(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)+\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)B(gx_1\otimes 1_H)+B(x_1x_2\otimes 1_H)\\ = \;& -(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.10. $1_H\otimes x_1x_2$。

$$B(1_H\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1x_1x_2)$$

我们将左侧记作

$$\begin{aligned} \text{left side}\quad & B(1_H\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{(402)}{=}\\ = \;& +(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\\ & +(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)\\ & -(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ & +B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned} \text{left side}\quad & B(1_H\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)=\\ & +(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ & -(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ & +B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

我们将右侧写作

$$\text{right side } (1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2)$$

$$\text{first summand of the right side}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_1x_2)$$

$$(1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_1x_2)\quad=\quad\overset{\text{first summand of the right side}}{(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(1_H\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)}$$

右侧的第一项

$(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(1_H \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g)$ (402)$==$ $+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)((1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)-(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g)-(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$

Clean first summand of the right side

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(1_H \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g) \overset{(402)}{=} \\ = \; & -(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

右侧的第二项

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2) \overset{(411)}{=} -B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)$$

first summand of the second summand of the right side

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \overset{(410)}{=} \\ = \; & -(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

second summand of second summand of the right side

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \overset{(410)}{=} \\ = \; & (1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(gx_2gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

second summand of second summand of the right side

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \overset{(410)}{=} \\ = \; & (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

second summand of the right side

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes gx_1x_2) \; = \; & -(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\ & (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) + \\ & +(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) + \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

因此右侧变为

$$\begin{aligned} & \text{right side} (1_A \otimes x_1)B(g \otimes gx_1x_2) + B(x_1 \otimes gx_1x_2) \\ = \; & -(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
&(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{simplifying right side}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes gx_1x_2)+B(x_1\otimes gx_1x_2)\\
=\;&+(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+
\end{aligned}
$$

并得出结论。

43.2.11. $1_H\otimes gx_1$。

$$B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes ggx_1)+B(x_1\otimes ggx_1)+B(1_H\otimes x_1gx_1)$$

i.e.

$$B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1)+B(x_1\otimes x_1)$$

我们考虑左侧

$$\text{left side } B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)$$

$$
\begin{aligned}
\text{left side}\quad &B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\stackrel{(398)}{=}\\
=\;&(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$\text{left side } B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)=B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$$

现在我们考虑右侧

$$
\begin{aligned}
&\text{right side }(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1)+B(x_1\otimes x_1)\\
=\;&(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes g)+B(x_1\otimes x_1)\\
=\;&(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes g)+B(x_1\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\stackrel{(398)}{=}\\
=\;&(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
&(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\stackrel{(398)}{=}\\
=\;&(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$B(x_1\otimes x_1)\stackrel{(404)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{right side}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1)+B(x_1\otimes x_1)\quad=\quad&(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\
&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$= \quad B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)$$

并得出结论。

$$B(h \otimes h')(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gh \otimes gh') + B(x_1h \otimes gh') + B(h \otimes x_1h')$$

43.2.12. $1_H \otimes gx_2$。

$$B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(g \otimes x_2) + B(x_1 \otimes x_2) - B(1_H \otimes gx_1x_2)$$

我们考虑左侧

$$\begin{aligned} \text{left side} \qquad & B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{(400)}{=} \\ = \quad & -(1_A \otimes g)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ & +(1_A \otimes x_2)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & +B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$$\text{right side } (1_A \otimes x_1)B(g \otimes x_2) + B(x_1 \otimes x_2) - B(1_H \otimes gx_1x_2)$$

$$\begin{aligned} (1_A \otimes x_1)B(g \otimes x_2) \quad &= \quad (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \\ &= \quad (1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)B(g \otimes x_2) = (1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \stackrel{(400)}{=} \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_1)B(g \otimes x_2) = (1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \stackrel{(400)}{=} \\ = \quad & (1_A \otimes x_1)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1x_2)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -B(1_H \otimes gx_1x_2) \stackrel{(407)}{=} -(1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ & -B(x_1 \otimes x_2) + B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1_A \otimes gx_1) \qquad & B(1_H \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ & \stackrel{(400)}{=} -(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ & + - (1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2)B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + - (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(1_A \otimes gx_1) \qquad & B(1_H \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ & \stackrel{(400)}{=} -(1_A \otimes x_1)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_1x_2)B(g \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B(1_H \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ & \stackrel{(400)}{=} -(1_A \otimes g)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ + \qquad & (1_A \otimes x_2)B(g \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & +B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$$-B(1_H \otimes gx_1x_2) \stackrel{(407)}{=} -(1_A \otimes gx_1)B(1_H \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)$$

$$
\begin{aligned}
& -B(x_1\otimes x_2)+B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)\\
= \;& -(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
& -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
& -B(x_1\otimes x_2)+\\
& -(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\
& +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
& +B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

右侧 $(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_2)\ +B(x_1\otimes x_2)\ -B(1_H\otimes gx_1x_2)=(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\ ++(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ ++B(x_1\otimes x_2)\ +-(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)-B(x_1\otimes x_2)\ +-(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ ++(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\ ++B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$ 化简后的右侧 $(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_2)\ +B(x_1\otimes x_2)\ -B(1_H\otimes gx_1x_2)=\ \ -(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ ++(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\ ++B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$

并得出结论。

43.2.13. $1_H\otimes gx_1x_2$。

$$B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes ggx_1x_2)+B(x_1\otimes ggx_1x_2)+B(1_H\otimes x_1gx_1x_2)$$

$$B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_2)$$

$$
\begin{aligned}
& \text{left side } B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{(407)}{=}\\
& (1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)\\
& -B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\\
= \;& -(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes gx_1)+B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{left side}\quad & B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{(407)}{=}\\
& (1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)\\
& +B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\\
= \;& +(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_1)\\
& +B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)+
\end{aligned}
$$

$$B(g\otimes x_1x_2)=(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\overset{(407)}{=}$$
$$=+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$-(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+$$
$$-(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)$$

$$(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1x_2)=(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\overset{(407)}{=}$$
$$=+(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$+(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$-(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+$$
$$-(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)$$

$$(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1x_2)=(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\overset{(407)}{=}$$
$$+(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

$$B(x_1\otimes x_1x_2)\overset{(408)}{=}\ B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\ -(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

$$\text{右侧 }(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1x_2)\ +B(x_1\otimes x_1x_2)$$
$$=+(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\ +$$
$$+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$+B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\ -(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

$$\text{化简后的右侧 }(1_A\otimes x_1)B(g\otimes x_1x_2)\ +B(x_1\otimes x_1x_2)$$
$$=+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$+B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)$$

因此得出结论。

43.2.14. $x_1\otimes x_1$。

$$B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_1)+B(x_1x_1\otimes gx_1)+B(x_1\otimes x_1x_1)$$
$$B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes g)+$$
$$B(x_1\otimes x_1)\overset{(404)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\\ = \;& B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)\\ = \;& (1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\ = \;& (1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\ & -(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\ = \;& (1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)=(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.15. $x_1\otimes x_2$.

$$B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_2)+B(x_1x_1\otimes gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2)$$

$$B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2)$$

$$B(x_1\otimes x_1x_2)\overset{(408)}{=}B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

$B(x_1\otimes x_1x_2)=B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_2)+B(x_1\otimes x_1x_2)\overset{(408)}{=}\\ & (1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)+\\ + \;& B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ = \;& B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.16. $x_1\otimes x_1x_2$。

$$B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_1x_2)+B(x_1x_1\otimes gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_1x_1x_2)$$

$$B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes gx_1x_2)$$

$$B(x_1\otimes x_1x_2)\overset{(408)}{=}B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$

左侧 $B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)=B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)$，因此我们得到

$$\text{left side } B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)=(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)$$

$$\begin{gathered}\text{right side } B(gx_1\otimes gx_1x_2)=(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)=\\ =(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\ -(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)=\\ =(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes gx_1)\end{gathered}$$

并得出结论。

43.2.17. $x_1 \otimes gx_1$。

$$B(x_1 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes ggx_1) + B(x_1x_1 \otimes ggx_1) + B(x_1 \otimes x_1gx_1)$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_1)$$

$$B(x_1 \otimes gx_1) \stackrel{(409)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)$$

左侧 $B(x_1 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)$ 即

$$\text{left side } B(x_1 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)$$

$$B(x_1 \otimes gx_1) \stackrel{(409)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)$$

$$\begin{aligned} \text{right side } (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_1) &= (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1 \otimes gx_1)(1_A \otimes g) \\ &= (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g) \\ &\quad +(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ &= (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.18. $x_1 \otimes gx_2$。

$$B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes ggx_2) + B(x_1x_1 \otimes gh') + B(x_1 \otimes x_1gx_2)$$

$$B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2)$$

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(411)}{=} -B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)$$

右侧 $(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2)$

$= (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_2) + B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)$

$= (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) + B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)$

$$\begin{aligned} \text{clean} \quad & \text{the right side}(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_2) - B(x_1 \otimes gx_1x_2) \\ &= (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes x_2) + B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \\ &= +B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论

43.2.19. $x_1 \otimes gx_1x_2$。

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes ggx_1x_2) + B(x_1x_1 \otimes ggx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1gx_1x_2)$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g)$$

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(411)}{=} -B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)$$

左侧 $B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1)$

$$\begin{aligned} &= -B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1) \\ &= -(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{the right side} &= (1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g) \\ &= -(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g) \\ &\quad +(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$= \quad -(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes gx_2)(1_A \otimes gx_1)$$

并得出结论。

43.2.20. $x_2 \otimes x_1$。

$$B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1) + B(x_2 \otimes x_1x_1)$$

$$B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1)$$

$B(x_2 \otimes x_1) \stackrel{(412)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) - (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$

$$\begin{aligned} & \text{the right side } B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) \\ = \quad & B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \text{clean} \qquad & \text{right side } B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

$$(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_1) = (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes g)$$

$$\stackrel{(412)}{=} (1_A \otimes gx_1)\begin{bmatrix} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{bmatrix}(1_A \otimes g)$$

$$\begin{bmatrix} (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g) \\ -(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g) \\ -(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix}$$

$$= (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) - (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1)$$

$$\stackrel{(421)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) +$$

$$\begin{aligned} & \text{right side}(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_1) + B(x_1x_2 \otimes gx_1) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) - (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) + \\ & +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \\ = \quad & (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.21. $x_2 \otimes x_2$。

$$B(x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2)$$

$$B(x_2 \otimes x_2) \stackrel{(413)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g).$$

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{(413)}{=} \\ & B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{(413)}{=} \\ & B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) + (1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \end{aligned}$$

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2)$$

$$\overset{(422)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes x_1x_2) &\overset{(414)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ &+(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) \\ &-(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_2) &= (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes g) \\ &= (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)\begin{bmatrix} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ -(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{bmatrix}(1_A \otimes g) \\ &= \begin{bmatrix} (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g) \\ -(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g) \end{bmatrix} \\ &= (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) - (1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

右侧 $(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2)$

$$\begin{aligned} &= (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) - (1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) + \\ &(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) + \\ &+B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) + \\ &+(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + \\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + \\ &+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) + \\ &-(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + \\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

clean right side $(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_2) + B(x_2 \otimes x_1x_2)$

$$= B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) + (1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)$$

并得出结论。

43.2.22. $x_2 \otimes x_1x_2$。

$B(x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_1) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1x_1x_2)$ 即

$$B(x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_1) \overset{?}{=} (1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)$$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes x_1x_2) &\overset{(414)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ &+(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H) \\ &-(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{left side} \quad B(x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_1) &\overset{(414)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_1) \\ &+(1_A \otimes gx_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ &+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$$-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)$$
$$-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$$

i.e.

$$\begin{aligned}\text{left side}\qquad & B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{(414)}{=}\\ &+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

$(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)$ (414)$=(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)$
$+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_1)B($
$x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes gx_1)$
$(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)($
$1_A\otimes g)$

i.e.

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)\overset{(414)}{=}(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\overset{(423)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{右侧 }(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)++B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\ =\\ &(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ +\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\ +\\ &-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\ +\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\ +\\ &(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ +\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\ +\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\ +\\ &+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\end{aligned}$$

干净的

$$\begin{aligned}&\text{右侧 }(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\ =\\ &(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ +\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\ +\\ &(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ +\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.23. $x_2 \otimes gx_1$。

$$B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes ggx_1) + B(x_1x_2 \otimes ggx_1) + B(x_2 \otimes x_1gx_1)$$

即

$$B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1)$$

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes gx_1) \\ & \stackrel{(415)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H) + B(x_1x_2 \otimes 1_H). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \\ = \; & (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & + B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_1) \\ = \; & (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

由于

$$B(x_1x_2 \otimes x_1) \stackrel{(418)}{=} B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{right side} \quad & (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1) \\ = \; & (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) + \\ & B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) - (1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \text{right side} \quad & (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1) \\ = \; & (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.24. $x_2 \otimes gx_2$。

$$B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes ggx_2) + B(x_1x_2 \otimes ggx_2) + B(x_2 \otimes x_1gx_2)$$

i.e.

$$B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_2) - B(x_2 \otimes gx_1x_2)$$

$$B(x_2 \otimes gx_2) \stackrel{(416)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)$$

$$\begin{aligned} \text{left side } B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \quad = \quad & (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ & + (1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)\ (1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \text{left side } B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \quad = \quad & -(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ & + (1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)\ (1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) = (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g) + (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$

i.e.

$$(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \quad = \quad (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

$$+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes x_2)\overset{(419)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_2)\\ =\ &(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&-B(x_2\otimes gx_1x_2)\overset{(417)}{=}-(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{right side }(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_2)-B(x_2\otimes gx_1x_2)\\ =\ &(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\ &+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &-(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}&\text{化简后的右侧 }(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes g)\ +B(x_1x_2\otimes x_2)\ -B(x_2\otimes gx_1x_2)\\ =\ &-(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\ +(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.25. $x_2\otimes gx_1x_2$。

$B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes ggx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes ggx_1x_2)+B(x_2\otimes x_1gx_1x_2)$ 即

$B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)$

由于

$$\begin{aligned}&B(x_2\otimes gx_1x_2)\overset{(417)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&-(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{left side } B(x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1)\\
&-(1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_1)\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes x_1)\\
&+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes x_1)\\
&-(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
&\text{left side } B(x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) =\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)\\
&-(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)\\
&+(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)
\end{aligned}
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g) \overset{(417)}{=}\\
&(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g)\\
&-(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes g)\\
&-(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
&(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g) \overset{(417)}{=}\\
&(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1 \otimes x_1x_2)\\
&-(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A\otimes)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\\
&+(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\\
&-(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) \overset{(420)}{=}\\
&B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) +\\
&+(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\\
&-(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) +\\
&+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)+
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{right side}\quad &(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) =\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1 \otimes x_1x_2) +\\
&-(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) +\\
&+(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{clean right side}\quad &(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)=\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1\otimes x_1x_2)+\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+
\end{aligned}
$$

并得出结论。

43.2.26. $x_1x_2\otimes x_1$。

$$B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes gx_1)+B(x_1x_1x_2\otimes gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_1x_1)$$

即

$$B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes x_1)\stackrel{(418)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{left side } B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\quad=\quad & B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\text{left side } B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_1)=(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

and

$$
\begin{aligned}
&\text{right side } B(x_1x_2\otimes x_1)\\
=\quad&(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\text{right side } B(x_1x_2\otimes x_1)=(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

并得出结论。

43.2.27. $x_1x_2\otimes x_2$。

$$B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes gx_2)+B(x_1x_1x_2\otimes gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)$$

Since

$$B(x_1x_2\otimes x_2)\stackrel{(419)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{right side } B(x_1x_2\otimes x_2)\\
=\quad&B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\text{right side } B(x_1x_2\otimes x_2)$$

$$\begin{aligned} &= B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ &\quad +(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} &(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_2)\\ =\ &(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} &(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\ =\ &(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &-(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2\otimes x_1x_2)\\ &\overset{(420)}{=} B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\text{right side } (1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)\\ =\ &(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &-(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} &\text{clean right side } (1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_2)\\ =\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.28. $x_1x_2\otimes x_1x_2$。

$$B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes gx_1x_2)+B(x_1x_1x_2\otimes gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_1x_1x_2)$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g).$$

由于

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2\otimes x_1x_2)\overset{(420)}{=}\\ &B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\end{aligned}$$

我们得到

$$\text{left side } B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)=$$

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)\\&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\\&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)+\\&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_1)=\\&+(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)\\&=(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\\&-(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes g)+\\&+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes g)\\=\;&(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.2.29. $x_1x_2\otimes gx_1$。

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\\&\overset{?}{=}(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes ggx_1)+B(x_1x_1x_2\otimes ggx_1)\\&+B(x_1x_2\otimes x_1gx_1)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\overset{?}{=}(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes gx_1)\overset{(421)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{left side } B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\;&=\;(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)\\&\quad+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\end{aligned}$$

i.e.

$$\text{left side } B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)=(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$$

and

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\\=\;&(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

右侧 $(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes g)=(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$，得出结论。

43.2.30. $x_1x_2 \otimes gx_2$。

$B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes ggx_2) + B(x_1x_1x_2 \otimes ggx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1gx_2)$ 即

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)$$

Since

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2) \stackrel{(422)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\text{left side } B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_1) \\ &\stackrel{(422)}{=} -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) &\stackrel{(423)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) + \\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ &+(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ &+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\text{right side } (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) \\ = \;& (1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g) \\ &+(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) + \\ &-(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) + \\ &+(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\ &-(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) + \\ &-(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

化简后的右侧 $(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes x_2)(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)$

$$= \; -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)$$

并得出结论。

43.2.31. $x_1x_2 \otimes gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} &B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) \\ &\stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes ggx_1x_2) \\ &+B(x_1x_1x_2 \otimes ggx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1gx_1x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes g)$$

由于

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) &\stackrel{(423)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ &+(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ &+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{left side} \quad & B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) = (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_1) \end{aligned}$$

$$+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_1)$$
$$+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)$$

i.e.

$$\text{left side}\qquad B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_1)=$$
$$+(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)$$
$$-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

and

$$\text{right side}(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)=$$
$$(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)$$
$$-(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$\text{right side}(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)=$$
$$(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)$$
$$-(1_A\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

并得出结论。

43.3. 情形 $1_A\otimes x_2$。

命题 43.2。 假设方程 (13) 对 $1_A\otimes x_2$ 和 $h\otimes h'$成立

(425) $$B(h\otimes h')(1_A\otimes x_2)=(1_A\otimes x_2)B(gh\otimes gh')+B(x_2h\otimes gh')+B(h\otimes x_2h')$$

那么它对 $gh\otimes gh'$ 也成立，即

$$B(gh\otimes gh')(1_A\otimes x_2)=(1_A\otimes x_2)B(ggh\otimes ggh')+B(x_2gh\otimes ggh')+B(gh\otimes x_2gh')$$

证明。 我们在等式（425）的两边分别用 $(1_A\otimes g)$ 进行共轭，得到

$$\begin{aligned}-(1_A\otimes g)B(h\otimes h')(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2) &= -(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(gh\otimes gh')(1_A\otimes g)\\ &\quad +(1_A\otimes g)B(x_2h\otimes gh')(1_A\otimes g)\\ &\quad +(1_A\otimes g)B(h\otimes x_2h')(1_A\otimes g).\end{aligned}$$

由此我们推得

$$\begin{aligned}B(gh\otimes gh')(1_A\otimes x_2) &= (1_A\otimes x_2)B(h\otimes h')\\ &\quad -B(gx_2h\otimes h')-B(gh\otimes gx_2h').\end{aligned}$$

□

43.3.1. $g\otimes 1_H$。

$$B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)B(gg\otimes g)-B(gx_2\otimes g)+B(g\otimes x_2)$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$
$$+(1_A\otimes g)B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(1_H\otimes gx_2)\overset{(400)}{=}(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$
$$+(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)+B(x_2\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\text{right side }(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+$$

$$+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)+$$
$$+(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$\text{clean right side } B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)$$

并得出结论。

43.3.2. $x_1\otimes 1_H$。 。

$$B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes g)+B(x_2x_1\otimes g)+B(x_1\otimes x_2)$$

i.e

$$B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)$$
$$-(1_A\otimes g)\,B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+B(x_1\otimes x_2)$$

由于

$$B(x_1\otimes x_2)\overset{(406)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)\,B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&+B(x_2\otimes x_2)\\=\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)-(1_A\otimes g)\,B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+\\&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{clean right side } (1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&-(1_A\otimes g)\,B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_2)\\=\;&B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.3. $x_2\otimes 1_H$。

$$B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes g)+B(x_2x_2\otimes g)+B(x_2\otimes x_2)$$

i.e.

$$B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_2)$$

由于

$$B(x_2\otimes x_2)\overset{(413)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_2)\\=\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+\\&B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\=\;&B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.4. $x_1x_2 \otimes 1_H$。

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes g) + B(x_2x_1x_2 \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_2)$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_2).$$

Since

$$B(x_1x_2 \otimes x_2) \stackrel{(419)}{=} B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes x_2) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - (1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ = \;& B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.5. $gx_1 \otimes 1_H$。

$$B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_2gx_1 \otimes g) + B(gx_1 \otimes x_2)$$

i.e.

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes gx_2)1_A \otimes g \end{aligned}$$

由于

$$B(x_1 \otimes gx_2) \stackrel{(410)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H) - B(x_1x_2 \otimes 1_H)$$

we get

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & +(1_A \otimes g)(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes g) + \\ & +(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) + \\ & -(1_A \otimes g)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\text{right side } B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

并得出结论。

43.3.6. $gx_2 \otimes 1_H$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + B(x_2gx_2 \otimes g) + B(gx_2 \otimes x_2)$$

i.e.

$$B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)$$

由于

$$B(x_2 \otimes gx_2) \stackrel{(416)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ & + (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{clean right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + (1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.7. $gx_1x_2 \otimes 1_H$。

$B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+B(x_2gx_1x_2\otimes g)+B(gx_1x_2\otimes x_2)$
即

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\,. \end{aligned}$$

由于

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2) \stackrel{(422)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) + \\ & (1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \\ & + (1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.8. $1_H \otimes x_1$。

$$B(1 \otimes x_1)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) + B(x_2 \otimes gx_1) - B(1_H \otimes x_1x_2)$$

We consider the left side

$$B(1_H \otimes x_1)(1_H \otimes x_2) \stackrel{(397)}{=} (1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes gx_2)$$

我们有

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \stackrel{(397)}{=} \\ = \;& -(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_H \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_H \otimes g)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& -(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H). \end{aligned}$$

由于

$$B(x_2 \otimes gx_1) \stackrel{(415)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) + (1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H) + B(x_1x_2 \otimes 1_H).$$

and

$$\begin{aligned} & B(1_H \otimes x_1x_2) \\ & \stackrel{(402)}{=} +(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & -(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
& \text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1)-B(1_H\otimes x_1x_2)\\
= \;& -(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)+\\
& +(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\
& +(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)\\
& +B(x_1x_2\otimes 1_H)+\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\
& -(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)+\\
& +(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
& +(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)+\\
& -B(x_1x_2\otimes 1_H)
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
& \text{clean right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1)-B(1_H\otimes x_1x_2)\\
= \;& (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}$$

由此得出结论。

43.3.9. $1_H\otimes x_2$。

$B(1_H\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(1_H\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;+B(x_2\otimes gx_2)\;+B(1_H\otimes x_2x_2)$ 即

$$B(1_H\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_2)$$

由于

$$B(1_H\otimes x_2)\overset{(397)}{=}-(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}
& \text{left side } B(1_H\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{(397)}{=}\\
= \;& -(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\\
= \;& (1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\overset{(397)}{=}\\
= \;& -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\
= \;& -(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)
\end{aligned}$$

由于

$$B(x_2\otimes gx_2)\overset{(416)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}
& \text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_2)\\
= \;& -(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)+(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)\\
= \;& (1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.10. $1_H \otimes x_1x_2$。

$B(1_H\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(1_H\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1x_2)+B(1_H\otimes x_2x_1x_2)$
即

$$B(1_H \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) + B(x_2 \otimes gx_1x_2).$$

由于

$$\begin{aligned}
&B(1_H \otimes x_1x_2)\\
&\stackrel{(402)}{=} +(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)\\
&-(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\\
&-(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\text{left side } B(1_H \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\
&\stackrel{(402)}{=} +(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2)\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&-(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2)\\
&-(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&\text{left side } B(1_H \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\
&= +(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&-(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&B(x_2 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(417)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A \otimes x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\\
&+(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\\
&+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\
&-(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)
\end{aligned}$$

我们得到

$$\text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) + B(x_2 \otimes gx_1x_2)$$

$$\begin{aligned}
&\text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(1_H \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) + B(x_2 \otimes gx_1x_2) =\\
&+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1)B(gx_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g)\\
&-(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\\
&-(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g)\\
&+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g)\\
&(1_A \otimes g)B(gx_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)+
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{c}
-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\
+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\text{clean right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1x_2)=\\
-(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\
+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\
+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+
\end{array}
$$

并得出结论。

43.3.11. $1_H\otimes gx_1$。

$B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(1_H\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\;+B(x_2\otimes x_1)\;+B(1_H\otimes gx_1x_2)$
由于

$$
\begin{array}{l}
B(1_H\otimes gx_1)\\
\stackrel{(398)}{=}(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\
+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)+B(x_1\otimes 1_H)
\end{array}
$$

我们得到

$$
\begin{array}{rl}
& \text{left side } B(1_H\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\\
= & (1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
& +(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
& +B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{array}
$$

并且我们有

$$
\begin{array}{rl}
& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\
= & (1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1x_2)\,B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
& +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.
\end{array}
$$

由于

$$
\begin{array}{l}
B(x_2\otimes x_1)\stackrel{(412)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{array}
$$

and

$$
\begin{array}{rl}
& B(1_H\otimes gx_1x_2)\stackrel{(407)}{=}(1_A\otimes gx_1)B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\
& +B(x_1\otimes x_2)-B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_1)\\
= & +(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
& +(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
& +(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
& +B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
& -(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
& +(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\
&-(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
&-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{right side}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_1)+B(1_H\otimes gx_1x_2)\\
=\;&(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)\,B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.\\
&B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\
&-(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\
&-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\text{clean}\qquad&\text{right side}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_1)+B(1_H\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+
\end{aligned}
$$

由此得出结论。

43.3.12. $1_H\otimes gx_2$。

$B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\;+B(x_2\otimes x_2)\;+B(1_H\otimes x_2gx_2)$
即

$$B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_2).$$

由于

$$
\begin{aligned}
&B(1_H\otimes gx_2)\\
&\stackrel{(400)}{=}(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)\\
&+B(x_2\otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{left side }B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\
&=(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(1_H\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\&=(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&+B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\=\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\=\;&(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

由于

$$B(x_2\otimes x_2)\overset{(413)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g).$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_2)\\=\;&(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{clean right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_2)\\=\;&(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

由此得出结论。

43.3.13. $1_H\otimes gx_1x_2$.

$$\begin{aligned}&B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\&+B(x_2\otimes ggx_1x_2)+B(1_H\otimes x_2gx_1x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_1x_2)。$$

由于

$$\begin{aligned}&B(1_H\otimes gx_1x_2)\overset{(407)}{=}\\=\;&+(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\&+B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\&-(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\end{aligned}$$

$$-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{left side}\quad & B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)=\\ = \;& +(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\ & +(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)\\ & +(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)\\ & +B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\ & -(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\\ & +(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\\ & +(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)+\\ & -(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)+\\ & -B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\text{left side}\quad & B(1_H\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)=\\ & -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ & -(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes gx_2)\\ & +(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & -(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & +B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ = \;& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+\\ & -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+\\ & -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+\\ & -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ = \;& -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ & -(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)+\\ & +(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes)+\\ & +(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\\ & +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\ & -(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}& B(x_2\otimes x_1x_2)\overset{(414)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & +(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H).
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{right side}\quad & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_1x_2)\\
= \quad & -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
& -(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)+\\
& +(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
& +(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\\
& +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\
& -(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\
& +B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& +B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& +(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
& +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& +(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
& -(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

因此我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{clean right side}\quad & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(1_H\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes x_1x_2)\\
= \quad & -(1_A\otimes gx_1x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
& +(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\
& +(1_A\otimes x_2)B(g\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\
& +B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
& -(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}
$$

由此得出结论。

43.3.14. $x_1\otimes x_1$。

$B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(x_1\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\;+B(x_2x_1\otimes gx_1)\;+B($
$x_1\otimes x_2x_1)$ 即

$$
B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_1)-B(x_1\otimes x_1x_2)
$$

Since

$$
B(x_1\otimes x_1)\overset{(404)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{left side } B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\quad = \quad & B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\\
& -(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

左侧 $\mathsf{e}\;B(x_1\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\;=-B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\;+(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$

and

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes gx_2)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1 \otimes 1_H). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & -B(x_1x_2 \otimes gx_1) \\ & \overset{(421)}{=} -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & -(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} - \quad & B(x_1 \otimes x_1x_2) \overset{(408)}{=} -B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_2)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & -(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1 \otimes 1_H) \\ & +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{right side } & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes gx_1) - B(x_1 \otimes x_1x_2) \\ & = (1_A \otimes gx_2)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & \quad (1_A \otimes x_1x_2)B(x_1 \otimes 1_H) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & \quad -(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \\ & \quad -B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_2)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & \quad -(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1 \otimes 1_H) \\ & \quad +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

clean 右侧 $(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\;B(x_1 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\; - B(x_1x_2 \otimes gx_1)\; - B(x_1 \otimes x_1x_2 \qquad)$

$$\begin{aligned} & = -B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.15. $x_1 \otimes x_2$。

$$B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes x_2) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) + B(x_2x_1 \otimes gx_2) + B(x_1 \otimes x_2x_2)$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes x_2)(1_A \otimes x_2) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes gx_2)$$

由于

$$B(x_1\otimes x_2)\overset{(406)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\=\;&B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\\&+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;=\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\\&-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\\&+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\&+(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

由于

$$-B(x_1x_2\otimes gx_2)\overset{(422)}{=}-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_2)\\=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\&+(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\\&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{clean right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_2)\\=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.16. $x_1\otimes x_1x_2$。

$B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(x_1\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)+B(x_2x_1\otimes gx_1x_2)+B(x_1\otimes x_2x_1x_2)$
即

$$B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2).$$

Since

$$B(x_1\otimes x_1x_2)\overset{(408)}{=}B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\+(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$

$$
\begin{aligned}
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)\\
&-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\text{left side } B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)=B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
&\text{left side } B(x_1\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)=\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\
=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
-\quad &B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\overset{(423)}{=}-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{right side}\quad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\\
=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{clean right side}\quad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\\
=\;&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

$$-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)$$
$$-(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)$$

并得出结论。

43.3.17. $x_1\otimes gx_1$。

$$B(x_1\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)$$
$$+B(x_2x_1\otimes ggx_1)+B(x_1\otimes x_2gx_1)$$

i.e.

$$B(x_1\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)$$
$$-B(x_1x_2\otimes x_1)+B(x_1\otimes gx_1x_2)$$

由于

$$B(x_1\otimes gx_1)\overset{(409)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\\ =\;&(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ =\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ =\;&(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.\end{aligned}$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes x_1)\overset{(418)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

and

$$\begin{aligned}&B(x_1\otimes gx_1x_2)\overset{(411)}{=}+(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{right side}\quad&(1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_1)+B(x_1\otimes gx_1x_2)=\\ &(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+\\ &-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &+(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+\\ &+(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\end{aligned}$$

$$+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes g)+$$
$$-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$\begin{array}{l}\text{clean right side}\\ (1_A\otimes gx_2)B(x_1\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_1x_2\otimes x_1)+B(x_1\otimes gx_1x_2)=\\ (1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ +(1_A\otimes x_1)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{array}$$

并得出结论。

43.3.18. $x_1\otimes gx_2$。

$$\begin{array}{l}B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\ +B(x_2x_1\otimes ggx_2)+B(x_1\otimes x_2gx_2)\end{array}$$

i.e.

$$B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_2).$$

由于

$$B(x_1\otimes gx_2)\overset{(410)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)-B(x_1x_2\otimes 1_H)$$

we get

$$\begin{array}{rl}&\text{left side } B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\ =&(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{array}$$

i.e.

$$\begin{array}{rl}&\text{left side } B(x_1\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\ =&(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{array}$$

and

$$\begin{array}{rl}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\ =&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{array}$$

i.e.

$$\begin{array}{rl}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\ =&(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.\end{array}$$

由于

$$-B(x_1x_2\otimes x_2)\overset{(419)}{=}-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{array}{rl}&\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_2)\\ =&(1_A\otimes x_2)B(gx_1\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+\\ &-B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\end{array}$$

i.e.

$$\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_2)$$

$$= (1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

并得出结论。

43.3.19. $x_1 \otimes gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}&B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\ &\stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g) + B(x_2x_1 \otimes ggx_1x_2)\\ &+B(x_1 \otimes x_2gx_1x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2).$$

Since

$$\begin{aligned}&B(x_1 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(411)}{=} +(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)\\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) +\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) +\\ &+(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) +\\ &+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) +\\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)+\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\ = \;&(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) +\\ &-(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_2) +\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_2) +\\ &+(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes x_2) +\\ &+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2) +\\ &-(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)+\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\ = \;&(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) +\\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) +\\ &-(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) +\\ &+(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)+\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g)\\ &= (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g)\\ &-(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\\ &+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)\\ &+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\\ &+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)\\ &-(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g)\\ = \;&+(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)\\ &+(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\end{aligned}$$

$$-(1_A \otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes)\,(1_A\otimes)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)$$
$$+(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H).$$

由于

$$\begin{aligned} - \quad & B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) \overset{(420)}{=} \\ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + \\ & -(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) \quad & B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) = \\ & +(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H) \\ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + \\ & -(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \text{clean right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) \quad & B(x_1 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g) - B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) = \\ & +(1_A \otimes x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & -(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)+ \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.20. $x_2 \otimes x_1$。

$$B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_2) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g)$$
$$+B(x_2x_2 \otimes gx_1) + B(x_2 \otimes x_2x_1)$$

i.e.

$$B(x_2 \otimes x_1)(1_A \otimes x_2) \overset{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) - B(x_2 \otimes x_1x_2).$$

由于

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes x_1) \overset{(412)}{=} B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \text{left side} \quad & B(x_2 \otimes x_1)(1_A\otimes) = -B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_1)B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \\ & +(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \quad & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

$$-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$
$$-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$\begin{array}{rl} & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\\ = & (1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & +(1_A\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes)\,(1_A\otimes)B(x_2\otimes 1_H)\\ & -(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H).\end{array}$$

由于

$$\begin{array}{rl} - & B(x_2\otimes x_1x_2)\overset{(414)}{=}\\ & -B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & -(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & +(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & -(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)\\ & +(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ & +(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H).\end{array}$$

我们得到

$$\text{right side }(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_2\otimes x_1x_2)=$$
$$(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$
$$+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)$$
$$-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)$$
$$-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)$$
$$-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)$$
$$+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$
$$-(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)$$
$$+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$
$$+(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H).$$

i.e.

$$\text{clean right side }(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_2\otimes x_1x_2)=$$
$$-B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)$$
$$+(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$
$$+(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$

并得出结论。

43.3.21. $x_2\otimes x_{2\circ}$

$$B(x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)$$
$$+B(x_2x_2\otimes gx_2)+B(x_2\otimes x_2x_2)$$

i.e.

$$B(x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,.$$

由于

$$B(x_2\otimes x_2)\overset{(413)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g).$$

我们得到

$$\text{left side }B(x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)$$

$$\begin{aligned} &= B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)+\\ &\quad -(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\text{left side } B(x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)=+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$

and

$$\begin{aligned} &\text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\\ =\;&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

右侧 $(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;=(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes xg_2)$，得出结论。

43.3.22. $x_2\otimes x_1x_2$。

$$\begin{aligned} &B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ &+B(x_2x_2\otimes gx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2x_1x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)$$

由于

$$\begin{aligned} &B(x_2\otimes x_1x_2)\overset{(414)}{=}B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H).\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\text{left side } B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)=B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} &\text{left side } B(x_2\otimes x_1x_2)(1_A\otimes x_2)=\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \text{right side}\quad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)=\\ &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ &-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

$$-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)$$
$$-(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)$$

i.e.

$$\begin{aligned}\text{right side}\qquad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes x_1x_2)\,(1_A\otimes g)=\\ &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\ &+(1_A\otimes x_1x_2)B(x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &-(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.23. $x_2\otimes gx_1$。

$$B(x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+$$
$$+B(x_2x_2\otimes ggx_1)+B(x_2\otimes x_2gx_1)$$

i.e

$$B(x_2\otimes gx_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1x_2).$$

Since

$$B(x_2\otimes gx_1)\overset{(415)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+$$
$$+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)+B(x_1x_2\otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{left side } B(x_2\otimes gx_1)\quad=\quad&(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)+\\ &+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)+\\ &+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ =\quad&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)+\\ &+(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)\\ =\quad&(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\ &+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,.\end{aligned}$$

由于

$$B(x_2\otimes gx_1x_2)\overset{(417)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)$$
$$-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)$$
$$+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)$$
$$+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)$$
$$-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{right side}\qquad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1x_2)=\\ &(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)+\\ &-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\
&(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\text{clean right side}\qquad &(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1)\,(1_A\otimes g)+B(x_2\otimes gx_1x_2)=\\
&(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

并得出结论。

43.3.24. $x_2\otimes gx_2$。

$$
\begin{aligned}
&B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)+\\
&+B(x_2x_2\otimes ggx_2)+B(x_2\otimes x_2gx_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)
$$

由于

$$
B(x_2\otimes gx_2)\stackrel{(416)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{left side } B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\quad &=\quad (1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)\\
&\quad +(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\text{left side } B(x_2\otimes gx_2)(1_A\otimes x_2)=(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
$$

and

$$
\begin{aligned}
\text{right side}\quad &=\quad (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\
&=\quad (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\\
&\quad +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

i.e.

右侧 $=(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\;B(x_2\otimes gx_2)\,(1_A\otimes g)\;=(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)$，得出结论。

43.3.25. $x_2\otimes gx_1x_2$。

$$
\begin{aligned}
&B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+\\
&+B(x_2x_2\otimes ggx_1x_2)+B(x_2\otimes x_2gx_1x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)\stackrel{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_2\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&B(x_2\otimes gx_1x_2)\stackrel{(417)}{=}(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\text{left side}\quad & B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)=(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\
&+(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\\
&+B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
\text{left side}\quad & B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes x_2)=\\
&+(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\text{right side }(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)=\\
&(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_1)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)\\
&+(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)\\
&-(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes g)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\begin{aligned}
&\text{right side }(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(x_2\otimes gx_1x_2)(1_A\otimes g)=\\
&(1_A\otimes x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\\
&+(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)
\end{aligned}
$$

并得出结论。

43.3.26. $x_1x_2\otimes x_1$。

$$
\begin{aligned}
&B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes g)+\\
&+B(x_2x_1x_2\otimes gx_1)+B(x_1x_2\otimes x_2x_1)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes g)B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2)
$$

由于

$$
B(x_1x_2\otimes x_1)\overset{(418)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\text{left side }B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\\
=\;&B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\\
&-(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)
\end{aligned}
$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_1x_2\otimes x_1)(1_A\otimes x_2)\\ = \;& -B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\\ = \;& (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+\\ & -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)\\ = \;& (1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\ & +(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2\otimes x_1x_2)\overset{(420)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & +(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & -(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ & +(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2)=\\ & (1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)+\\ & +(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)\\ & -B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)\\ & -(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1)\\ & +(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)+\\ & -(1_A\otimes x_1x_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)+\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{clean right side } (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)-B(x_1x_2\otimes x_1x_2)=\\ = \;& B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+(1_A\otimes gx_1)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.27. $x_1x_2\otimes x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\\ & +B(x_2x_1x_2\otimes gx_2)+B(x_1x_2\otimes x_2x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\overset{?}{=}(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)$$

由于

$$B(x_1x_2\otimes x_2)\overset{(419)}{=}B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)\\ = \;& B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)-(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)(1_A\otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\text{left side } B(x_1x_2\otimes x_2)(1_A\otimes x_2)=(1_A\otimes gx_2)B(x_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)$$

and

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) + \\ & -(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

右侧 $(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\;B(x_1x_2 \otimes x_2)\,(1_A \otimes g) = (1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)$，得出结论。

43.3.28. $x_1x_2 \otimes x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) \\ & +B(x_2x_1x_2 \otimes gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2x_1x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g)$$

由于

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes x_1x_2) \stackrel{(420)}{=} B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)+ \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) = B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) \\ & +(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2) + \\ & -(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2) + \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{left side } B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)(1_A \otimes x_2) = \\ & +(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) + \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) \\ & +(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ & -(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes gx_1)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g) + \\ & +(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1x_2)B(x_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) + \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes g) \\ = \;& (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ & +(1_A \otimes x_1x_2)\,(1_A \otimes gg)\,(1_A \otimes)B(x_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.29. $x_1x_2 \otimes gx_1$。

$$B((x_1x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ +B(x_2x_1x_2 \otimes ggx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_2gx_1)$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\;B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g)\; + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)$$

由于

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1) \quad \stackrel{(421)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1) \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

我们得到

$$\text{left side } B(x_1x_2 \otimes gx_1) \quad (1_A \otimes x_2) = (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)(1_A \otimes x_2) \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

i.e

$$\text{left side } B(x_1x_2 \otimes gx_1) \quad (1_A \otimes x_2) = (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

and

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \; & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) + \\ & +(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) \\ = \; & (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\ & -(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \end{aligned}$$

由于

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(423)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ -(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) + \\ +(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)+$$

我们得到

$$\text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) = \\ (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) + \\ -(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g) \\ (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ -(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1) \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2) \\ +(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)$$

并且我们得到

$$\text{clean right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1)\,(1_A \otimes g) + B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) = \\ (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2) \\ +(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

并得出结论。

43.3.30. $x_1x_2 \otimes gx_2$。

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\\&+B(x_2x_1x_2 \otimes ggx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2gx_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\,.$$

由于

$$B(x_1x_2 \otimes gx_2) \stackrel{(422)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2) + (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\text{left side } B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2)\\=\;&(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2)\\&+(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\text{left side } B(x_1x_2 \otimes gx_2)(1_A \otimes x_2) = (1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)$$

and

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\\=\;&(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\\&+(1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)\,(1_A \otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}&\text{right side } (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_2)\,(1_A \otimes g)\\=\;&(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

43.3.31. $x_1x_2 \otimes gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g) +\\&+B(x_2x_1x_2 \otimes ggx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2gx_1x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) \stackrel{?}{=} (1_A \otimes x_2)\,(1_A \otimes g)\,B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)\,(1_A \otimes g)$$

由于

$$\begin{aligned}&B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2) \stackrel{(423)}{=} (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)\\&-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)\\&+(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)\\&+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\text{left side}\quad&B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) = (1_A \otimes g)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2)\\&-(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1)(1_A \otimes x_2)\\&+(1_A \otimes x_1)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_2)(1_A \otimes x_2)\\&+(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes g)(1_A \otimes x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\text{left side}\quad&B(x_1x_2 \otimes gx_1x_2)(1_A \otimes x_2) =\\&+(1_A \otimes x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes x_1x_2)\\&-(1_A \otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2 \otimes 1_H)(1_A \otimes gx_2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\text{right side} \quad & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ = \quad & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)+\\ & -(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes x_1)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)+\\ & +(1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes g)\,(1_A\otimes g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\text{clean right side} \quad & (1_A\otimes x_2)\,(1_A\otimes g)\,B(x_1x_2\otimes gx_1x_2)\,(1_A\otimes g)\\ = \quad & (1_A\otimes x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes x_1x_2)+\\ & -(1_A\otimes gx_1x_2)B(gx_1x_2\otimes 1_H)(1_A\otimes gx_2)\end{aligned}$$

并得出结论。

44. 方程（12）

本节将探讨要使（12）成立，必须满足哪些条件。我们得到的条件，加上 h 遍历我们的七个元素时 $B(h\otimes 1_H)$ 的形式，以及显而易见的条件 $B(1_H\otimes 1_H)=1_A\otimes 1_H$，将构成最终主要定理定理47.1中的条件。

回顾（12）

$$B(h\otimes h')(d\otimes 1_H)=(d_0\otimes 1_H)B(hd_1\otimes h'd_2).$$

正如我们在第（5）节中指出的，我们只需对 $G\otimes 1_H$、 $X_1\otimes 1_H$ 和 $X_2\otimes 1_H$ 计算等式（12）。此外，正如我们在（10），中证明的，假设方程（13）成立，那么如果方程（12）对 $h\otimes 1_H$ 成立，它就对任意 $h\otimes h'$. 成立

44.1. $d=G$。

$$B(h\otimes h')(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g). \tag{426}$$

对于 $h'=1_H$，我们得到

$$B(h\otimes 1_H)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes g). \tag{427}$$

对于 $h'=g$，我们得到

$$B(h\otimes g)(G\otimes 1_H)=(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H) \tag{428}$$

假设式（427）和式（24）成立，下面证明式（428）成立。

$$\begin{aligned} & B(h\otimes g)(G\otimes 1_H)\overset{(24)}{=}(1_A\otimes g)\,B(gh\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,(G\otimes 1_H)\\ = \quad & (1_A\otimes g)\,B(gh\otimes 1_H)(G\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\\ & \overset{(427)}{=}(1_A\otimes g)\,(G\otimes 1_H)B(ghg\otimes g)\,(1_A\otimes g)\\ = \quad & (G\otimes 1_H)\,(1_A\otimes g)\,B(ghg\otimes g)\,(1_A\otimes g)\\ & \overset{(24)}{=}(G\otimes 1_H)B(hg\otimes 1_H)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B(h\otimes h') \quad = \quad & \sum\nolimits^1_{a,b_1,b_2=0,f}B(h\otimes h';G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},f)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes f\\ = \quad & \sum\nolimits^1_{a,d,e_1,e_2=0}B(h\otimes h';G^a,f)G^a\otimes f\\ & +\sum\nolimits^1_{a,d,e_1,e_2=0}B(h\otimes h';G^aX_1,f)G^aX_1\otimes f\\ & +\sum\nolimits^1_{a,d,e_1,e_2=0}B(h\otimes h';G^aX_2,f)G^aX_2\otimes f\\ & +\sum\nolimits^1_{a,d,e_1,e_2=0}B(h\otimes h';G^aX_1X_2,f)G^aX_1X_2\otimes f\end{aligned}$$

$$X_iG + GX_i = \gamma_i$$

and

$$X_iG = \gamma_i - GX_i$$
$$X_2G = \gamma_2 - GX_2$$
$$X_1G = \gamma_1 - GX_1$$

$$X_1X_2G = \gamma_2X_1 - X_1GX_2 = \gamma_2X_1 - \gamma_1X_2 + GX_1X_2$$
$$X_1X_2 + X_2X_1 = \lambda$$

我们计算左侧

$$\begin{aligned}
& B(h\otimes h')\,(G\otimes 1_H)\\
= \;& \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^a, f)G^{a+1}\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_1, f)G^a\,(\gamma_1 - GX_1)\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_2, f)G^a\,(\gamma_2 - GX_2)\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_1X_2, f)G^a\,(\gamma_2X_1 - \gamma_1X_2 + GX_1X_2)\otimes f
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& B(h\otimes h')\,(G\otimes 1_H)\\
= \;& \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} \left[\begin{array}{c} B(h\otimes h'; G^a, f)G^{a+1}\\ [+\gamma_1 B(h\otimes h'; G^aX_1, f) + \gamma_2 B(h\otimes h'; G^aX_2, f)]\,G^a \end{array}\right]\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_1, f)\left[\gamma_2G^a - G^{a+1}\right]X_1\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_2, f)\left[-\gamma_1G^a - G^{a+1}\right]X_2\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{a,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; G^aX_1X_2, f)G^{a+1}X_1X_2\otimes f
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& B(h\otimes h')\,(G\otimes 1_H)\\
= \;& \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} \left[\begin{array}{c} B(h\otimes h'; 1_A, f)G\\ [+\gamma_1 B(h\otimes h'; X_1, f) + \gamma_2 B(h\otimes h'; X_2, f)]\,1_A \end{array}\right]\otimes f\\
& \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} \left[\begin{array}{c} \alpha B(h\otimes h'; G, f)1_A +\\ [+\gamma_1 B(h\otimes h'; GX_1, f) + \gamma_2 B(h\otimes h'; GX_2, f)]\,G \end{array}\right]\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; X_1, f)\,[\gamma_2 - G]\,X_1\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; GX_1, f)\,[\gamma_2G - \alpha]\,X_1\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; X_2, f)\,[-\gamma_1 - G]\,X_2\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; GX_2, f)\,[-\gamma_1G - \alpha]\,X_2\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; X_1X_2, f)GX_1X_2\otimes f\\
& + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; GX_1X_2, f)\alpha X_1X_2\otimes f
\end{aligned}$$

我们计算右侧

$$\begin{aligned}(G\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g) &= \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}, f)G^{a+1}X_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes f\\ &= \sum_{b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; X_1^{b_1}X_2^{b_2}, f)GX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes f +\\ &\quad \sum_{b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_1^{b_1}X_2^{b_2}, f)\alpha X_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes f\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}(G\otimes 1_H)B(hg\otimes h'g) &= \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; 1_A, f)G\otimes f\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; X_1, f)GX_1\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; X_2, f)GX_2\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; X_1X_2, f)GX_1X_2\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; G, f)\alpha\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_1, f)\alpha X_1\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_2, f)\alpha X_2\otimes f +\\ &\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_1X_2, f)\alpha X_1X_2\otimes f\end{aligned}$$

比较方程右侧和左侧，可得

$$\begin{aligned}&1\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1}\begin{bmatrix}\alpha B(h\otimes h'; G, f)\\ +\gamma_1 B(h\otimes h'; X_1, f)+\gamma_2 B(h\otimes h'; X_2, f)\end{bmatrix}1_A\otimes f\\ =\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; G, f)\alpha 1_A\otimes f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1}\begin{bmatrix}B(h\otimes h'; 1_A, f)\\ +\gamma_1 B(h\otimes h'; GX_1, f)+\gamma_2 B(h\otimes h'; GX_2, f)\end{bmatrix}G\otimes f\\ =\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; 1_A, f)G\otimes f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&3\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1}\left[\gamma_2 B(h\otimes h'; X_1X_2, f)-\alpha B(h\otimes h'; GX_1, f)\right]X_1\otimes f\\ =\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_1, f)\alpha X_1\otimes f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&4\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1}\left[(-\gamma_1)\,B(h\otimes h'; X_1X_2, f)+(-\alpha)\,B(h\otimes h'; GX_2, f)\right]X_2\otimes f\\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_2, f)\alpha X_2\otimes f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&5\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'; GX_1X_2, f)\alpha X_1X_2\otimes f\\ =\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; GX_1X_2, f)\alpha X_1X_2\otimes f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6\qquad &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1}\left[-B(h\otimes h'; X_1, f)+\gamma_2 B(h\otimes h'; GX_1X_2, f)\right]GX_1\otimes f\\ =\ &\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; X_1, f)GX_1\otimes f\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
7 \qquad & +\sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1}\left[-B(h\otimes h';X_2,f)-\gamma_1 B(h\otimes h';GX_1X_2,f)\right]GX_2\otimes f \\
= \quad & \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g;X_2,f)GX_2\otimes f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 8\sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h';X_1X_2,f)GX_1X_2\otimes f \\
= \quad & \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f)GX_1X_2\otimes f
\end{aligned}
$$

因此，对于 $d=G$，(12) 等价于以下等式对每个 $f\in H$ 都成立。

$$
\begin{aligned}
(429) \quad & 1 \ \alpha B(h\otimes h';G,f)+ \\
& \quad +\gamma_1 B(h\otimes h';X_1,f)+\gamma_2 B(h\otimes h';X_2,f) && = \alpha B(hg\otimes h'g;G,f) \\
(430) \quad & 2 \ B(h\otimes h';1_A,f) \\
& \quad +\gamma_1 B(h\otimes h';GX_1,f)+\gamma_2 B(h\otimes h';GX_2,f) && = B(hg\otimes h'g;1_A,f) \\
(431) \quad & 3\gamma_2 B(h\otimes h';X_1X_2,f)-\alpha B(h\otimes h';GX_1,f) && = \alpha B(hg\otimes h'g;GX_1,f) \\
(432) \quad & 4-\gamma_1 B(h\otimes h';X_1X_2,f)-\alpha B(h\otimes h';GX_2,f) && = \alpha B(hg\otimes h'g;GX_2,f) \\
(433) \quad & 5\alpha B(h\otimes h';GX_1X_2,f) && = \alpha B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f) \\
(434) \quad & 6-B(h\otimes h';X_1,f)+\gamma_2 B(h\otimes h';GX_1X_2,f) && = B(hg\otimes h'g;X_1,f) \\
(435) \quad & 7-B(h\otimes h';X_2,f)-\gamma_1 B(h\otimes h';GX_1X_2,f) && = B(hg\otimes h'g;X_2,f) \\
(436) \quad & 8B(h\otimes h';X_1X_2,f) && = B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f)
\end{aligned}
$$

44.1.1. 情形 $g\otimes 1_H$。
等式 (429) 可改写为

$$
\begin{aligned}
& \alpha B(g\otimes 1_H;G,f)+ \\
& +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,f)
\end{aligned}
= \alpha B(1_H\otimes g;G,f).
$$

情形 $f=1_H$。我们得到

$$
\begin{aligned}
& \alpha B(g\otimes 1_H;G,1_H)+ \\
& +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)
\end{aligned}
= \alpha B(1_H\otimes g;G,1_H).
$$

考虑到 (24)，可改写为

$$
\begin{aligned}
& \alpha B(g\otimes 1_H;G,1_H)+ \\
& +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)
\end{aligned}
= \alpha B(g\otimes 1_H;G,1_H).
$$

i.e.

$$
\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=0.
$$

根据元素的形式，我们得到

$$
\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0. \tag{437}
$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$
\begin{aligned}
& \alpha B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+ \\
& +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)
\end{aligned}
= \alpha B(1_H\otimes g;G,x_1x_2).
$$

考虑到（24），这可改写为

$$
\begin{aligned}
& \alpha B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+ \\
& +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)
\end{aligned}
= \alpha B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2).
$$

i.e.

$$
\gamma_1 B(g\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)=0.
$$

考虑该元素的形式，我们得到一个平凡等式。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{matrix} \alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1)+ \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) \end{matrix} = \alpha B(1_H\otimes g; G, gx_1).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{matrix} 2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1)+ \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1, gx_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_1) \end{matrix} = 0$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \tag{438}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{matrix} \alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) \end{matrix} = \alpha B(1_H\otimes g; G, gx_2).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{matrix} 2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) \end{matrix} = 0.$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - \gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \tag{439}$$

等式 (430)。改写为

$$\begin{matrix} B(g\otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, f) \end{matrix} = B(1_H\otimes g; 1_A, f)$$

情形 $f = g$

$$\begin{matrix} B(g\otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, g) \end{matrix} = B(1_H\otimes g; 1_A, g)$$

。应用 (24) 后，改写为

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, g) = 0.$$

考虑到该元素的形式，可得

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0. \tag{440}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{matrix} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{matrix} = B(1_H\otimes g; 1_A, x_1)$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{matrix} 2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{matrix} = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) - \gamma_2 B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \tag{441}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{matrix} B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{matrix} = B(1_H\otimes g; 1_A, x_2)$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{matrix} 2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{matrix} = 0.$$

考虑该元素的形式，我们得到

$$2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) + \gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \tag{442}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{matrix} B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{matrix} = B(1_H\otimes g; 1_A, gx_1x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到一个平凡等式。

等式 (431)。改写为

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_1, f)$$

情形 $f = g$。

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_1, g) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_1, g)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - 2\alpha B(g\otimes 1_H; GX_1, g) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; 1_H, gx_1x_2) + 2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1) = 0.$$

这已在情形 gx_1 之 429 中得到。

情形 $f = x_2$。

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_1, x_2)$$

应用 (24)，可改写为

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得不到任何新结果。

等式 (432)。可改写为

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_2, f)$$

情形 $f = g$。

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_2, g) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_2, g)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) - 2\alpha B(g\otimes 1_H; GX_2, g) = 0$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; 1_H, gx_1x_2) + 2\alpha B(g\otimes 1_H; g, GX_2) = 0$$

即 (439)。

情形 $f = x_1$。

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_2, x_1) - \alpha B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_2, x_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

由于 $B(g\otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ x_1) = 0$，因此我们没有得到任何新结果。

等式(433) 可改写为

$$\alpha B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$

$$\alpha B(g\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = \alpha B(1_H\otimes g; GX_1X_2, 1_H).$$

。应用 (24) 后，这个等式显然成立。

等式 (434) 。可改写为

$$-B(g\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(1_H\otimes g;X_1,f)$$

情形 $f=1_H$

$$-B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(1_H\otimes g;X_1,1_H)$$

。应用（24）可将其改写为

$$-2B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-2B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0$$

这就是（441）。

情形 $f=gx_2$。

$$-B(g\otimes 1_H;X_1,gx_2)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=B(1_H\otimes g;X_1,gx_2)$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0$$

考虑到该元素的形式，我们没有得到新的结果。

等式 (435)可改写为

$$-B(g\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(1_H\otimes g;X_2,f)$$

情形 $f=1_H$。

$$-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(1_H\otimes g;X_2,1_H)$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$-2B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-2B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.$$

这是（442）。

情形 $f=gx_1$。

$$-B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=B(1_H\otimes g;X_2,gx_1)$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_1B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0$$

考虑元素的形式后，我们没有得到任何新结果。

等式（436）。

$$B(g\otimes 1_H;X_1X_2,f)=B(1_H\otimes g;X_1X_2,f)$$

考虑元素的形式后，我们得到

$$B(g\otimes 1_H;X_1X_2,g)=B(1_H\otimes g;X_1X_2,g)$$

应用 (24) 后，我们没有得到任何新结果。

44.1.2. 情形 $x_1\otimes 1_H$。

等式 (429)。可改写为

$$\begin{gathered}\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;X_2,f)\end{gathered}=\alpha B(x_1g\otimes g;G,f)$$

i.e.

$$\begin{gathered}\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;X_2,f)\end{gathered}=-\alpha B(gx_1\otimes g;G,f)$$

情形 $f = g$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = -\alpha B(gx_1 \otimes g; G, g).$$

。应用（24）可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = -\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g).$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g)+ \\ +\gamma_1 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2)\end{array} = 0. \tag{443}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = -\alpha B(gx_1 \otimes g; G, x_1)$$

应用（24）可改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) = 0.$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \tag{444}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = -\alpha B(gx_1 \otimes g; G, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1[-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] = 0. \tag{445}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = \alpha B(x_1g \otimes g; G, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{446}$$

等式 (430). 可重写为

$$\begin{array}{c}B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f)\end{array} = B(x_1g \otimes g; 1_A, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f)\end{array} = -B(gx_1 \otimes g; 1_A, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{array}{c} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \end{array} = -B(gx_1 \otimes g; 1_A, 1_H).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{array}{c} 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \end{array} = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \\ +\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) \end{array} = 0. \tag{447}$$

情形 $f = x_1 x_2$。

$$\begin{array}{c} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \end{array} = -B(gx_1 \otimes g; 1_A, x_1x_2).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{array}{c} 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \tag{448}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{array}{c} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \end{array} = -B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_1)$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0.$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{449}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{array}{c} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \end{array} = -B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0.$$

考虑到元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 [B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \tag{450}$$

等式 (431)。

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(x_1 g \otimes g; GX_1, f)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H).$$

应用 (24) 后可改写为

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = -\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H).$$

考虑元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0 \tag{451}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2).$$

应用（24）可将其改写为

$$\gamma_2 B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得不到新的结果。情形 $f = gx_1$。

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1).$$

应用（24）可将其改写为

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \tag{452}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0.$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$\alpha\left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \tag{453}$$

等式（432）。

$$-\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(x_1g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] = 0. \tag{454}$$

情形 $f = gx_1$。

$$-\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_1).$$

应用（24）可将其改写为

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0.$$

考虑该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{455}$$

等式（433）可改写为

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(x_1g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g).$$

应用 (24) 后可改写为

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g)$$

i.e.

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$\alpha[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \tag{456}$$

情形 $f = x_1$。应用 (24) 后可改写为

$$\alpha B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -\alpha B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1).$$

应用 (24) 后没有得到新的结果。

等式 (434)。改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_{x_1}; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(x_1g \otimes g; X_1, f)$$

i.e.

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -B(gx_1 \otimes g; X_1, f).$$

情形 $f = g$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -B(gx_1 \otimes g; X_1, g).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -B(x_1 \otimes g; X_1, g)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0.$$

这是 456

情形 $f = x_1$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -B(gx_1 \otimes g; X_1, x_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1).$$

考虑到该元素的形式，可得

$$2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \tag{457}$$

情形 $f = x_2$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -B(gx_1 \otimes g; X_1, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2).$$

考虑到该元素的形式，我们得到

$$-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \tag{458}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(gx_1 \otimes g; X_1, gx_1x_2$$

。应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)$$

考虑元素的形式后，我们得不到任何新结果。

等式 (435)。可改写为

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=-B(gx_1\otimes g;X_2,f).$$

情形 $f=g$。

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(gx_1\otimes g;X_2,g).$$

应用 (24) 可将其改写为

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(x_1\otimes 1_H;X_2,g)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1[-B(g\otimes 1_H,g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.$$

这就是 450。

情形 $f=x_1$

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=-B(gx_1\otimes g;X_2,x_1).$$

。应用 (24) 后可改写为

$$-B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_2,x_1)=+B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)$$

i.e.

$$2B(x_1\otimes 1_H;X_2,x_1)+\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.$$

这是 (448)。

等式 (436)。可改写为

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,f)=-B(gx_1\otimes g;X_1X_2,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H)=-B(gx_1\otimes g;X_1X_2,1_H).$$

应用 (24) 后可改写为

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H)=-B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,1_H).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0$$

这就是（458）。

情形 $f=gx_1$。

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=-B(gx_1\otimes g;X_1X_2,gx_1).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=B(x_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1).$$

这样我们便没有得到新的结果。

44.1.3. 情形 $x_2\otimes 1_H$。

等式 (429)。改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;X_2,f)\end{array}=\alpha B(x_2g\otimes g;G,f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;X_2,f)\end{array}=-\alpha B(gx_2\otimes g;G,f).$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, g)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes g; G, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, g)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, g).$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, g)+\\ -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right]\end{array} = 0. \tag{459}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes g; G, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = \alpha B(gx_2 \otimes g; G, x_1).$$

并得到

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0 \tag{460}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes g; G, x_2).$$

应用（24）后，改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = \alpha B(gx_2 \otimes g; G, x_2).$$

并得到

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0 \tag{461}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes g; G, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \tag{462}$$

等式 (430) 可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,f) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,f) \end{array} = B(x_2g\otimes g;1_A,f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,f) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,f) \end{array} = -B(gx_2\otimes g;1_A,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H) \end{array} = -B(gx_2\otimes g;1_A,1_H).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H) \end{array} = -B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H) \end{array} = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right] \end{array} = 0. \tag{463}$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2) \end{array} = -B(gx_2\otimes g;1_A,x_1x_2).$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2) \end{array} = -B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2) \end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0 \tag{464}$$

情形 $f=gx_1$。

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1) \end{array} = -B(gx_2\otimes g;1_A,gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1) \end{array} = B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1).$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{465}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{array}{c} B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \end{array} = -B(gx_2 \otimes g; 1_A, gx_2).$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \end{array} = B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2).$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \tag{466}$$

等式（431）可改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(x_2g \otimes g; GX_1, f)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1, 1_H).$$

应用（24）后可改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H).$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2[B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1)] = 0 \tag{467}$$

这是 460

情形 $f = gx_2$。

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2).$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{468}$$

等式 (432)。可改写为

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(x_2g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)$$

i.e.

$$\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \tag{469}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2).$$

应用（24）可将其改写为

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们没有得到新的结果。

情形 $f = gx_1$。

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_1).$$

应用（24）可将其改写为

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1).$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{470}$$

情形 $f = gx_2$。

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2).$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \tag{471}$$

等式 (433). 可改写为

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(x_2g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g)$$

i.e.

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{472}$$

情形 $f = x_2$。

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -\alpha B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = \alpha B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2)$$

这是显然的。

等式 (434)。改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(x_2g\otimes g;X_1,f)$$

i.e.

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,f)=-B(gx_2\otimes g;X_1,f).$$

情形 $f=g$。

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(gx_2\otimes g;X_1,g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(x_2\otimes 1_H;X_1,g)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1,g)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2[B(g\otimes 1_H,G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0. \tag{473}$$

情形 $f=x_2$。

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)=-B(gx_2\otimes g;X_1,x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)=B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)$$

i.e.

$$-2B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_2)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0. \tag{474}$$

等式 (435). 改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(x_2g\otimes g;X_2,f)$$

i.e.

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=-B(gx_2\otimes g;X_2,f).$$

情形 $f=g$。

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(gx_2\otimes g;X_2,g).$$

应用 (24) 后可改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=-B(x_2\otimes 1_H;X_2,g)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,g)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0. \tag{475}$$

情形 $f=x_1$。

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=-B(gx_2\otimes g;X_2,x_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)$$

i.e.

$$-2B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \tag{476}$$

情形 $f = x_2$。

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -B(gx_2 \otimes g; X_2, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)$$

i.e.

$$2B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

这就是 (442)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(gx_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得不到任何新内容。

等式 (436). 改写为

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = B(x_2g \otimes g; X_1X_2, f)$$

i.e.

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = -B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = -B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = -B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)$$

i.e.

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0.$$

这就是 (476)。

情形 $f = gx_2$。

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = -B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2).$$

这显然成立。

44.1.4. 情形 $x_1x_2 \otimes 1_H$。

等式 (429). 改写为

$$\begin{array}{c} \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) \end{array} = \alpha B(x_1x_2g \otimes g; G, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) \end{array} = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; G, f).$$

情形 $f = g$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; G, g).$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\end{array} = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g).$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \tag{477}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1).$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\end{array} = 0. \tag{478}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)\end{array} = 0. \tag{479}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)\end{array} = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{480}$$

等式 (430)可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,f)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,f)\end{array}=B(x_1x_2g\otimes g;1_A,f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,f)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,f)\end{array}=B(gx_1x_2\otimes g;1_A,f)$$

情形 $f=1_H$.

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\end{array}=B(gx_1x_2\otimes g;1_A,1_H)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\end{array}=B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)$$

i.e.

$$\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0 \tag{481}$$

情形 $f=x_1x_2$.

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)\end{array}=B(gx_1x_2\otimes g;1_A,x_1x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)\end{array}=B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0 \tag{482}$$

情形 $f=gx_1$.

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}=B(gx_1x_2\otimes g;1_A,gx_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}=-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1).$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}=0. \tag{483}$$

情形 $f=gx_2$。

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)\end{array}=B(gx_1x_2\otimes g;1_A,gx_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{array}{c} B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)\end{array}=-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)\\ +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)\end{array}=0 \tag{484}$$

等式 (431). 可改写为

$$\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,f)-\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)=\alpha B(x_1x_2g\otimes g;GX_1,f)$$

i.e.

$$\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,f)-\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)=\alpha B(gx_1x_2\otimes g;GX_1,f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H).$$

By applying (24) this rewrites as

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H).$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) - 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0. \tag{485}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2).$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \tag{486}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_1) = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_1)$$

即。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{487}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ gx_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ \ gx_2) = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)$$

即。

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{488}$$

等式（432）. 改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(x_1x_2g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H).$$

应用 (24) 可改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}(489)\qquad &-\gamma_1[+1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)] - 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2).$$

应用 (24) 可改写为

$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ x_1x_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ x_1x_2) = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ x_1x_2)$ 即

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$(490)\qquad \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

情形 $f = gx_1$。

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1).$$

应用 (24) 后可改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1).$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$(491)\qquad \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

情形 $f = gx_2$。

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2).$$

应用 (24) 后可改写为

$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ gx_2) - \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_2) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes g;\ GX_2,\ gx_2)$。即

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$(492)\qquad \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

等式（433）. 可改写为

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(x_1x_2g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = \alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g).$$

这显然成立。

情形 $f = x_1$。

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1)$$

i.e.

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为 (486)。

情形 $f = x_2$。

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_{21}).$$

应用 (24) 后可改写为

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2)$$

i.e.

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为 (490)。

等式 434. 可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(x_1x_2g \otimes g; X_1, f)$$

i.e.

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f).$$

情形 $f = g$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g).$$

应用 (24) 后可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)$$

i.e.

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0.$$

根据该元素的形式可得

(493)
$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) +$$
$$+\gamma_2[-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ g, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2, gx_1)$$
$$] = 0$$情形 $f = x_1$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1)$$

i.e.

(494)
$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

情形 $f = x_2$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \tag{495}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ gx_1x_2) = B(gx_1x_2 \otimes g;\ X_1,\ gx_1x_2)$。应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)$$

i.e.

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \tag{496}$$

等式 435。可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(x_1x_2g \otimes g; X_2, f)$$

i.e.

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)$$

i.e.

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) + \tag{497}$$
$$-\gamma_1[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; g, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)] = 0$$

情形 $f = x_1$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{498}$$

情形 $f = x_2$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_2).$$

应用（24）可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{499}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2,\ gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ gx_1x_2) = B(gx_1x_2 \otimes g;\ X_2,\ gx_1x_2)$。应用（24）可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)$$

i.e.

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \tag{500}$$

等式（436）可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = B(x_1x_2g \otimes g; X_1X_2, f)$$

i.e.

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f)$$

情形 $f = 1_H$。

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H).$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1)$$

i.e.

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即 (496)。

情形 $f = gx_2$。

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2)$$

i.e.

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

即 (500)。

44.1.5. 情形 $gx_1 \otimes 1_H$.

等式 (429)可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,f)\end{array}=\alpha B(gx_1g\otimes g;G,f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,f)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,f)\end{array}=-\alpha B(x_1\otimes g;G,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,1_H)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,1_H)\end{array}=-\alpha B(x_1\otimes g;G,1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,1_H)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,1_H)\end{array}=-\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,1_H)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,1_H)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,1_H)\end{array}=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

(501)

$$\begin{array}{c}2\alpha\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right]+\\ +\gamma_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}=0.$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)\end{array}=-\alpha B(x_1\otimes g;G,x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)\end{array}=-\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2).$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)\end{array}=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0$$

i.e

$$\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0$$

这就是 (490)。

情形 $f=gx_1$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,gx_1)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,gx_1)\end{array}=-\alpha B(x_1\otimes g;G,gx_1).$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)+\\ +\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,gx_1)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,gx_1)\end{array}=\alpha B(gx_1\otimes 1_H;G,gx_1)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1\otimes 1_H;X_1,gx_1)+\gamma_2 B(gx_1\otimes 1_H;X_2,gx_1)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)=0$$

由 (488)。 得出。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) \end{array} = -\alpha B(x_1 \otimes g; G, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) \end{array} = \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这可由 (492). 得出
等式 (430). 可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) \end{array} = B(gx_1g \otimes g; 1_A, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) \end{array} = -B(x_1 \otimes g; 1_A, f).$$

情形 $f = g$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) \end{array} = -B(x_1 \otimes g; 1_A, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) \end{array} = -B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g)$$

即。鉴于该元素的形式，我们得到
(502)

$$\begin{array}{c} 2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right] \\ \gamma_1\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \end{array} = 0$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{array} = -B(x_1 \otimes g; 1_A, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{array} = B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

由式 (495)。可得

情形 $f = x_2$。

$$\begin{matrix} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{matrix} = -B(x_1 \otimes g; 1_A, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{matrix} B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{matrix} = B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

这可由 (499) 得出。

等式 (431) 可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(gx_1g \otimes g; GX_1, f)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1, f).$$

情形 $f = g$。

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1, g).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) = -\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这就是（488）

情形 $f = x_2$。

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1, x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - 2\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

这是（490）

情形 $f = gx_2$。

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1, gx_2).$$

应用（24）后可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - 2\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得不到任何新结果。

等式（432）。可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(gx_1g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_2, f)$$

情形 $f = g$

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_2, g).$$

。应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) = -\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这就是 (492)

情形 $f = x_1$

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_2, x_1).$$

。应用（24）后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = +\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - 2\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这就是（490）。

等式（433）。可改写为

$$\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(gx_1g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -\alpha B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)$$

i.e.

$$2\alpha B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这由 (490)。得出

等式 (434). 可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_1g \otimes g; X_1, f)$$

i.e.

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -B(x_1 \otimes g; X_1, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(x_1 \otimes g; X_1, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

根据该元素的形式，可得

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

这就是（495）。

情形 $f = gx_2$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = -B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = +B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2)$$

i.e.

$$-2B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

即 (500)。

等式 (435). 可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_1g \otimes g; X_2, f)$$

i.e.

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -B(x_1 \otimes g; X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(x_1 \otimes g; X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

这就是（499）。

情形 $f = gx_1$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = -B(x_1 \otimes g; X_2, gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1)$$

i.e.

$$-2B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

由 (500). 可得

等式 (436). 可改写为

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = B(gx_1g \otimes g; X_1X_2, f)$$

i.e.

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = -B(x_1 \otimes g; X_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = -B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

即 (500)。

44.1.6. 情形 $gx_2 \otimes 1_H$。
等式 (429). 可改写为

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) \end{array} = \alpha B(gx_2g \otimes g; G, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) \end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes g; G, f)$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) \end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes g; G, 1_H)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) \end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H)$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2\alpha \left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)\right] + \\ -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) \\ +\gamma_2 \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)\right] \end{array} = 0 \tag{503}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes g; G, x_1x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \end{array} = -\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为（486）。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1)+ \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1)\end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes g; G, gx_1)$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1)+ \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1)\end{array} = \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0.$$

这就是 (487)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2)\end{array} = -\alpha B(x_2 \otimes g; G, gx_2)$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2)+ \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2)\end{array} = \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这由(491)。得出

等式 (430)可改写为

$$\begin{array}{c}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f)\end{array} = B(gx_2g \otimes g; 1_A, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, f) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f)\end{array} = -B(x_2 \otimes g; 1_A, f).$$

情形 $f = g$。

$$\begin{array}{c}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\end{array} = -B(x_2 \otimes g; 1_A, g).$$

应用(24)后，可改写为

$$\begin{array}{c}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\end{array} = -B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right] \\ -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) \\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right]\end{array} = 0. \tag{504}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{array} = -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \end{array} = B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (494)

情形 $f = x_2$。

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{array} = -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{array} = B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{505}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{array} = -B(x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{array} = -B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2).$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{array} = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即 (496)。

等式 (431) 可改写为

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(gx_2g \otimes g; GX_1, f)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_1, f).$$

情形 $f = g$。

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_1, g).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = -\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即（487）

情形 $f = x_2$。

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_1, x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - 2\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这就是 (486)。

等式 (432) 改写为

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(gx_2g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_2, g).$$

应用 (24) 后，这改写为

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = -\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这由（496）可得。

情形 $f = x_1$。

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_2, x_1).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = \alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - 2\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（486）。

等式 (433)。可改写为

$$\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(gx_2g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -\alpha B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)$$

i.e.

$$2\alpha B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (486)。

等式 (434)。可改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_2g \otimes g; X_1, f)$$

i.e.

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -B(x_2 \otimes g; X_1, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(x_2 \otimes g; X_1, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（494）。

情形 $f = gx_2$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = -B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2)$$

i.e.

$$-2B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即（496）。

等式 (435)。改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = B(gx_2g \otimes g; X_2, f)$$

i.e.

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = -B(x_2 \otimes g; X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(x_2 \otimes g; X_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H)$$

i.e.

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（498）。

情形 $f = gx_1$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = -B(x_2 \otimes g; X_2, gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1)$$

i.e.

$$-2B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即 (496)。

等式 (436). 可改写为

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = B(gx_2g \otimes g; X_1X_2, f)$$

i.e.

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = -B(x_2 \otimes g; X_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = -B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = -B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g)$$

i.e.

$$2B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即为 (496)。

44.1.7. 情形 $gx_1x_2 \otimes 1_H$。

等式 (429)。改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2g \otimes g; G, f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f)\end{array} = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; G, f).$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, 1_H)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, 1_H)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, 1_H)\end{array} = \alpha B(x_1x_2\otimes g; G, 1_H).$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, 1_H)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, 1_H)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, 1_H)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, 1_H)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, 1_H)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, 1_H) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1)\right]\\ +\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H; 1_A, 1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_2)\right] = 0.\end{array} \tag{506}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2)\end{array} = \alpha B(x_1x_2\otimes g; G, x_1x_2).$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2)\end{array} = \alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \tag{507}$$

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)\end{array} = \alpha B(x_1x_2\otimes g; G, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)\end{array} = -\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1)\end{array} = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1)+\\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1)+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right]\end{array} = 0. \tag{508}$$

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2)\end{array} = \alpha B(x_1x_2\otimes g; G, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{c}\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2)\end{array} = -\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)+\\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_2)\end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)+\\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right]+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_2)\end{array} = 0. \tag{509}$$

等式 (430)。可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,f) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,f) \end{array} = B(gx_1x_2g\otimes g;1_A,f)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,f) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,f)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,f) \end{array} = B(x_1x_2\otimes g;1_A,f).$$

情形 $f=g$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,g)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,g) \end{array} = B(x_1x_2\otimes g;1_A,g).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,g)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,g) \end{array} = B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,g)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,g)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} \gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] \\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0. \end{array} \tag{510}$$

情形 $f=x_1$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1) \end{array} = B(x_1x_2\otimes g;1_A,x_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1) \end{array} = -B(gx_1x_2\otimes 1_h;1_A,x_1)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1) \end{array} = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right] \end{array} = 0. \tag{511}$$

情形 $f=x_2$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_2) \end{array} = B(x_1x_2\otimes g;1_A,x_2).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_2) \end{array} = -B(gx_1x_2\otimes 1_h;1_A,x_2)$$

i.e.

$$\begin{array}{c} 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_2) \end{array} = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2) \\ +\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_2) \end{array} = 0. \tag{512}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{array} = B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{array}{c} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{array} = B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)$$

i.e.

$$\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{513}$$

等式（431）可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(gx_1x_2g \otimes g; GX_1, f)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f).$$

情形 $f = g$。

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - 2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} \gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] + \\ 2\alpha \left[-B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0. \end{array} \tag{514}$$

情形 $f = x_1$。

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1).$$

应用 (24) 可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ x_1) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ \ x_1) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ x_1)$$ 即

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \tag{515}$$

情形 $f = x_2$。

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2)$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0 \tag{516}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) \\ = \quad & \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) \\ = \quad & \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - 2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{517}$$

等式 (432). 可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(gx_1x_2g \otimes g; GX_2, f)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g).$$

应用 (24) 后可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g)$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - 2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] + \\ & -2\alpha \left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) \right] = 0 \end{aligned} \tag{518}$$

情形 $f = x_1$

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1).$$

。应用 (24) 可改写为

$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1X_2,\ \ x_1)\ - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ x_1)\ = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ x_1)$ 即

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2) \right] = 0 \tag{519}$$

情形 $f = x_2$

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ W \quad = \quad & \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2). \end{aligned}$$

。应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ = \quad & -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \end{aligned}$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \right] = 0. \tag{520}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - 2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{521}$$

等式 (433). 可改写为

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(gx_1x_2g \otimes g; GX_1X_2, f)$$

i.e.

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)$$

这是显然的。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = \alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2)$$

这是显然的。

情形 $f = gx_1$。

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1)$$

i.e.

$$2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0.$$

这就是（472）。

情形 $f = gx_2$。

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = \alpha B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2).$$

应用（24）后，这可改写为

$$\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = -\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2)$$

i.e.

$$2\alpha B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\alpha\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \tag{522}$$

等式 (434) 可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(gx_1x_2g\otimes g;X_1,f)$$

i.e.

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,f)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(x_1x_2\otimes g;X_1,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(x_1x_2\otimes g;X_1,1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)$$

i.e.

$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}(523)\qquad &-2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+\\ &\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ 1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ x_2)+B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ \ x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ x_1x_2\ )\right]\\ &=0\end{aligned}$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=B(x_1x_2\otimes g;X_1,x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)$$

i.e.

$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0$$

即（464）。

情形 $f=gx_1$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=B(x_1x_2\otimes g;X_1,gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1)$$

i.e.

$$\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$(524)\qquad \gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.$$

.

情形 $f=gx_2$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_2)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=B(x_1x_2\otimes g;X_1,gx_2).$$

By applying (24) this rewrites as

$-B\left(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ gx_2\right)+\gamma_2B\left(gx_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ gx_2\right)=-B\left(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ gx_2\right)$，即

$$\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$(525)\qquad \gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.$$

.

等式 (435) 可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(gx_1x_2g\otimes g;X_2,f)$$

i.e.

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,f)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=B(x_1x_2\otimes g;X_2,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(x_1x_2\otimes g;X_2,1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,1_H)$$

i.e.

$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

(526)

$$-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]$$
$$-2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]=0$$

情形 $f=x_1x_2$。

$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1x_2)\ -\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ \ x_1x_2)\ =B(x_1x_2\otimes g;\ X_2,$ $x_1x_2)$。应用 (24) 后可改写为

$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1x_2)\ -\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ \ x_1x_2)\ =B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,$ $x_1x_2)$ 即

$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \tag{527}$$

情形 $f=gx_1$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=B(x_1x_2\otimes g;X_2,gx_1).$$

应用 (24) 后可改写为

$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ \ gx_1)\ -\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ \ gx_1)\ =-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,$ $gx_1)$ 即

$$\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{528}$$

情形 $f=gx_2$。

$$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_2)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=B(x_1x_2\otimes g;X_2,gx_2).$$

应用 (24) 后可改写为

$-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,gx_2)\ -\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2,gx_2)\ =-B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,gx_2)$ 即。

$$\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{529}$$

等式 (436) 可改写为

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,f)=B(gx_1x_2g\otimes g;X_1X_2,f)$$

i.e.

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1X_2,f)=B(x_1x_2\otimes g;X_1X_2,f).$$

情形 $f = g$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g).$$

应用（24）可将其改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g)$$

这显然成立。

情形 $f = x_1$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1).$$

应用（24）可将其改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = 0.$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0$$

即为 (476)。

情形 $f = x_2$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \tag{530}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，这显然成立。

44.2. $d = X_i$. 我们将（12）记作 $d = X_i$

$$X_i \otimes g \otimes g + 1_A \otimes x_i \otimes g + 1_A \otimes 1_H \otimes x_i$$

$$\begin{aligned} B(h \otimes h')(X_i \otimes 1_H) &= (X_i \otimes 1_H)B(hg \otimes h'g) + \\ &+(1_A \otimes 1_H)B(hx_i \otimes h'g) + \\ &+(1_A \otimes 1_H)B(h \otimes h'x_i) \end{aligned}$$

44.3. $d = X_1$. 我们记作

$$\begin{aligned} B(h \otimes h') &= \sum\nolimits_f [B(h \otimes h'; 1_A, f)1_A \otimes f + B(h \otimes h'; G, f)G \otimes f + \\ &B(h \otimes h'; X_1, f)X_1 \otimes f + B(h \otimes h'; X_2, f)X_2 \otimes f. \\ &+B(h \otimes h'; X_1X_2, f)X_1X_2 \otimes f + B(h \otimes h'; GX_1, f)GX_1 \otimes f + \\ &B(h \otimes h'; GX_2, f)GX_2 \otimes f + B(h \otimes h'; GX_1X_2, f)GX_1X_2 \otimes]f. \end{aligned}$$

我们回顾一下

$$\begin{aligned} 1_AX_1 &= X_1 \\ GX_1 &= GX_1 \\ X_1X_1 &= \beta_1 \\ X_2X_1 &= \lambda - X_1X_2 \\ X_1X_2X_1 &= X_1(\lambda - X_1X_2) = \lambda X_1 - \beta_1X_2 \\ GX_1X_1 &= \beta_1G \\ GX_2X_1 &= G(\lambda - X_1X_2) = \lambda G - GX_1X_2 \\ GX_1X_2X_1 &= G(\lambda X_1 - \beta_1X_2) = \lambda GX_1 - \beta_1GX_2 \end{aligned}$$

我们将左侧记作

$$\begin{aligned}
B(h\otimes h')\left(X_1\otimes 1_H\right) = \quad & \sum\nolimits_f \left[\beta_1 B(h\otimes h'; X_1, f) + \lambda B(h\otimes h'; X_2, f)\right] 1_A\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f \left[\beta_1 B(h\otimes h'; GX_1, f) + \lambda B(h\otimes h'; GX_2, f)\right] G\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f \left[B(h\otimes h'; 1_A, f) + \lambda B(h\otimes h'; X_1X_2, f)\right] X_1\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f -\beta_1 B(h\otimes h'; X_1X_2, f) X_2\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f -B(h\otimes h'; X_2, f) X_1X_2\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f \left[B(h\otimes h'; G, f) + \lambda B(h\otimes h'; GX_1X_2, f)\right] GX_1\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f -\beta_1 B(h\otimes h'; GX_1X_2, f) GX_2\otimes f \\
& \sum\nolimits_f -B(h\otimes h'; GX_2, f) GX_1X_2\otimes f +
\end{aligned}$$

我们回顾一下

$$\begin{aligned}
X_1 1_A &= X_1 \\
X_1 G &= -GX_1 + \gamma_1 \\
X_1X_1 &= \beta_1 \\
X_1X_2 &= X_1X_2 \\
X_1X_1X_2 &= \beta_1 X_2 \\
X_1GX_1 &= -\beta_1 G + \gamma_1 X_1 \\
X_1GX_2 &= -GX_1X_2 + \gamma_1 X_2 \\
X_1GX_1X_2 &. = -\beta_1 GX_2 + \gamma_1 X_1X_2
\end{aligned}$$

我们将右侧写为

$$\begin{aligned}
& 1\left(X_1\otimes 1_H\right) B(hg\otimes h'g) = \\
& [\gamma_1 B(hg\otimes h'g; G, f) + \beta_1 \sum\nolimits_f B(hg\otimes h'g; X_1, f)] 1_A\otimes f + \\
& -\beta_1 \sum\nolimits_f B(hg\otimes h'g; GX_1, f) G\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f [B(hg\otimes h'g; 1_A, f) + B(hg\otimes h'g; GX_1, f)] X_1\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f [\beta_1 B(hg\otimes h'g; X_1X_2, f) + \gamma_1 B(hg\otimes h'g; GX_2, f)] X_2\otimes f + \\
& \sum\nolimits_f [B(hg\otimes h'g; X_2, f) + \gamma_1 B(hg\otimes h'g; GX_1X_2, f) X_1X_2\otimes f + \\
& -\sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hg\otimes h'g; G, f) GX_1\otimes f + \\
& -\beta_1 \sum\nolimits_f B(hg\otimes h'g; GX_1X_2, f) GX_2\otimes f \\
& -\sum\nolimits_f B(hg\otimes h'g; GX_2, f) GX_1X_2\otimes f +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2B(hx_1\otimes h'g) &= \sum\nolimits_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g; G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}, f) G^a X_1^{b_1} X_2^{b_2}\otimes f \\
&= \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g; 1_A, f) 1_A\otimes f \\
&\quad \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g; G, f) G\otimes f \\
&\quad + \sum\nolimits_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g; X_1, f) X_1\otimes f
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g;GX_1,f)GX_1\otimes f\\
&+\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g;X_2,f)X_2\otimes f\\
&+\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g;GX_2,f)GX_2\otimes f\\
&+\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g;X_1X_2,f)X_1X_2\otimes f\\
&+\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(hx_1\otimes h'g;GX_1X_2,f)GX_1X_2\otimes f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3B(h\otimes h'x_1) &= \sum_{a,b_1,b_2,d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2},f)G^aX_1^{b_1}X_2^{b_2}\otimes f\\
&= \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;1_A,f)1_A\otimes f\\
&\quad \sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;G,f)G\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;X_1,f)X_1\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;GX_1,f)GX_1\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;X_2,f)X_2\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;GX_2,f)GX_2\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;X_1X_2,f)X_1X_2\otimes f\\
&\quad +\sum_{d,e_1,e_2=0}^{1} B(h\otimes h'x_1;GX_1X_2,f)GX_1X_2\otimes f
\end{aligned}
$$

从而推得

$$
\begin{aligned}
&\beta_1B(h\otimes h';X_1,f)+\lambda B(h\otimes h';X_2,f)=\gamma_1B(hg\otimes h'g;G,f)\\
&+\beta_1B(hg\otimes h'g;X_1,f)+B(hx_1\otimes h'g;1_A,f)+B(h\otimes h'x_1;1_A,f) \qquad (531)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_1B(h\otimes h';GX_1,f)+\lambda B(h\otimes h';GX_2,f) \qquad (532)\\
&= -\beta_1B(hg\otimes h'g;\ GX_1,\ \ f)+B(hx_1\otimes h'g;\ G,\ \ f)+B(h\otimes h'x_1;\ G,\ \ f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B(h\otimes h';1_A,f)+\lambda B(h\otimes h';X_1X_2,f)=\\
&B(hg\otimes h'g;1_A,f)+\gamma_1B(hg\otimes h'g;GX_1,f) \qquad (533)\\
&+B(hx_1\otimes h'g;X_1,f)+B(h\otimes h'x_1;X_1,f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta_1B(h\otimes h';X_1X_2,f)=\beta_1B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f) \qquad (534)\\
&+\gamma_1B(hg\otimes h'g;GX_2,f)+B(hx_1\otimes h'g;X_2,f)+B(h\otimes h'x_1;X_2,f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-B(h\otimes h';X_2,f) &= B(hg\otimes h'g;X_2,f)+\gamma_1B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f) \qquad (535)\\
&\quad +B(hx_1\otimes h'g;X_1X_2,f)+B(h\otimes h'x_1;X_1X_2,f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B(h\otimes h';G,f)+\lambda B(h\otimes h';GX_1X_2,f) \qquad (536)\\
&= -B(hg\otimes h'g;G,f)+B(hx_1\otimes h'g;GX_1,f)+B(h\otimes h'x_1;GX_1,f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta_1B(h\otimes h';GX_1X_2,f)=-\beta_1B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f) \qquad (537)\\
&+B(hx_1\otimes h'g;GX_2,f)+B(h\otimes h'x_1;GX_2,f)
\end{aligned}
$$

$$-B(h\otimes h';GX_2,f)=-B(hg\otimes h'g;GX_2,f) \tag{538}$$
$$+B(hx_1\otimes h'g;GX_1X_2,f)+B(h\otimes h'x_1;GX_1X_2,f)$$

44.3.1. 情形 $g\otimes 1_H$。
等式 (531) 可改写为

$$\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,f)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,f)=\gamma_1B(1_H\otimes g;G,f)$$
$$+\beta_1B(1_H\otimes g;X_1,f)+B(gx_1\otimes g;1_A,f)+B(g\otimes x_1;1_A,f)$$

情形 $f=1_H$。

$$\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=\gamma_1B(1_H\otimes g;G,1_H)$$
$$\beta_1B(1_H\otimes g;X_1,1_H)+B(gx_1\otimes g;1_A,1_H)+B(g\otimes x_1;1_A,1_H).$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)$$
$$-\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)-B(1_H\otimes gx_1;1_A,1_H)=0.$$

i.e.

$$\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)-B(1_H\otimes gx_1;1_A,1_H)=0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0. \tag{539}$$

情形 $f=g$。

$$\begin{aligned}&\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,g)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,g)\\ =\ &\gamma_1B(1_H\otimes g;G,g)+\beta_1B(1_H\otimes g;X_1,g)+B(gx_1\otimes g;1_A,g)+B(g\otimes x_1;1_A,g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,g)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,g)\\ =\ &\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,g)+\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,g)+B(1_H\otimes gx_1;1_A,g)\end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,g)-B(1_H\otimes gx_1;1_A,g)=0.$$

鉴于元素的形式，这显而易见。
情形 $f=x_1x_2$。

$$\begin{aligned}&\beta_1B(g\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)\\ =\ &\beta_1B(1_H\otimes g;X_1,x_1x_2)+B(gx_1\otimes g;1_A,x_1x_2)+B(g\otimes x_1;1_A,x_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,x_1x_2)\\ =\ &\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(1_H\otimes gx_1;1_A,x_1x_2).\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0.$$

即为 (448)。

情形 $f = gx_1$

$$\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) = \gamma_1 B(1_H \otimes g; G, gx_1)$$
$$+\beta_1 B(1_H \otimes g; X_1, gx_1) + B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_1) + B(g \otimes x_1; 1_A, gx_1)$$

。应用（24）后，可改写为

$$\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) = -\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_1)$$
$$-\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_1) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(1_H \otimes gx_1; 1_A, gx_1)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$+\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \tag{540}$$
$$+2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, g\right) = 0$$

情形 $f = gx_2$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_2) \\ = \; & \gamma_1 B(1_H \otimes g; G, gx_2) + \beta_1 B(1_H \otimes g; X_1, gx_2) + \\ & + B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_2) + B(g \otimes x_1; 1_A, gx_2). \end{aligned}$$

。应用（24）后，可改写为。鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_2) =$$
$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1, gx_2)$$
$$-B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(1_H \otimes gx_1; 1_A, gx_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \tag{541}$$

等式 (532) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \; & -\beta_1 B(1_H \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1 \otimes g; G, f) + B(g \otimes x_1; G, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \; & -\beta_1 B(1_H \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1 \otimes g; G, g) + B(g \otimes x_1; G, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \; & -\beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(1_H \otimes gx_1; G, g). \end{aligned}$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) = 0. \tag{542}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \; & -\beta_1 B(1_H \otimes g; GX_1, x_1) + B(gx_1 \otimes g; G, x_1) + B(g \otimes x_1; G, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \; & \beta_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, x_1) - B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - B(1 \otimes gx_1; G, x_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-\lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) = 0. \tag{543}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(1_H\otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_1\otimes g; G, x_2) + B(g\otimes x_1; G, x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ = \quad & \beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, x_2) - B(1\otimes gx_1; G, x_2). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H; G, x_2) = 0. \tag{544}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(1_H\otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1\otimes g; G, gx_1x_2) + B(g\otimes x_1; G, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(1_H\otimes gx_1; G, gx_1x_2). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right) - B\left(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2\right) = 0. \tag{545}$$

等式 (533) 可改写为

$$\begin{aligned} & B(g\otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \quad & B(1_H\otimes g; 1_A, f) + \gamma_1 B(1_H\otimes g; GX_1, f) + \\ & + B(gx_1\otimes g; X_1, f) + B(g\otimes x_1; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g_{\circ}$

$$\begin{aligned} & B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ = \quad & B(1_H\otimes g; 1_A, g) + B(gx_1\otimes g; X_1, g) + B(g\otimes x_1; X_1, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ = \quad & B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + \gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, g) \\ & + B(x_1\otimes 1_H; X_1, g) + B(1_H\otimes gx_1; X_1, g). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & +\lambda B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right) + \\ & + 2B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \end{aligned} \tag{546}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} & B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ = \quad & B(1_H\otimes g; 1_A, x_1) + \gamma_1 B(1_H\otimes g; GX_1, x_1) \\ & + B(gx_1\otimes g; X_1, x_1) + B(g\otimes x_1; X_1, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ = \quad & -B(x_1\otimes 1_H; X_1, x_1) - \gamma_1 B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) \\ & - B(1_H\otimes gx_1; X_1, x_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) = 2B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1)$$

这显然成立。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \\ = \; & B(1_H \otimes g; 1_A, x_2) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_1, x_2) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_1, x_2) + B(g \otimes x_1; X_1, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \\ = \; & -B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) - \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(1_H \otimes gx_1; X_1, x_2). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0.$$

即 (442)。
情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \\ = \; & B(1_H \otimes g; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_1, gx_1x_2) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + B(g \otimes x_1; X_1, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \\ = \; & B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) \\ & + B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; X_1, gx_1x_2). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$-B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0.$$

这是显然的。
等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \; & \beta_1 B(1_H \otimes g; X_1X_2, f) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_2, f) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_2, f) + B(g \otimes x_1; X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ = \; & \beta_1 B(1_H \otimes g; X_1X_2, g) + \\ & + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_2, g) + \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_2, g) + B(g \otimes x_1; X_2, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ = \; & B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_2, g) + B(1_H \otimes gx_1; X_2, g). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0. \tag{547}$$

.

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ = \;& \beta_1 B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_2, x_1) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_2, x_1) + B(g \otimes x_1; X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = -B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) - \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(1_H \otimes gx_1; X_2, x_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \tag{548}$$

等式 (535) 改写为

$$\begin{aligned} & -B(g \otimes 1_H; X_2, f) \\ = \;& B(1_H \otimes g; X_2, f) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, f) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, f) + B(g \otimes x_1; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & -B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) \\ = \;& B(1_H \otimes g; X_2, 1_H) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, 1_H) + B(g \otimes x_1; X_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) \\ = \;& \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + \\ & + B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) + B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) \\ = \;& \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - 2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2). \end{aligned} \tag{549}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & -B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) \\ = \;& B(1_H \otimes g; X_2, gx_1) + \gamma_1 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ & + B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1) + B(g \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) \\ = \;& -B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ & -B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$0 = +B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) + B(1_H \otimes gx_1; X_1X_2, gx_1)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = -B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)$$

这显然成立。

等式 (536) 可改写为

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \;& -B(1_H \otimes g; G, f) + B(gx_1 \otimes g; GX_1, f) + B(g \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \quad & -B(1_H \otimes g; G, 1_H) + B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(g \otimes x_1; GX_1, 1_H). \end{aligned}$$

。应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \quad & B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1, 1_H). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) \\ = \quad & 2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)$$

这就是（543）。

情形 $f = x_1x_2$

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & -B(1_H \otimes g; G, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2) \\ & +B(g \otimes x_1; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

。应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(1_H \otimes gx_1; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 2B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right).$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & -B(1_H \otimes g; G, gx_1) + B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(g \otimes x_1; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & B(g \otimes 1_H; G, gx_1) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) - B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = -B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) - B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_1)$$

鉴于 w of the form of the elements we get

$$0 = -B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right).$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & -B(1_H \otimes g; G, gx_2) + B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(g \otimes x_1; GX_1, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = -B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(1_H \otimes gx_1; GX_1, gx_2)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & -\left[-B(g \otimes 1_H; GX_2, g) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] \end{aligned}$$

$$-\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]$$

$$\begin{aligned}0 &= B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ &\quad -B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= -B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ &\quad -B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0. \tag{550}$$

等式（537）改写为

$$\begin{aligned}&-\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,f)\\ =\;&-\beta_1 B(1_H\otimes g;GX_1X_2,f)+\\ &+B(gx_1\otimes g;GX_2,f)+B(g\otimes x_1;GX_2,f).\end{aligned}$$

情形 $f=1_H$。

$$\begin{aligned}&-\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)\\ =\;&-\beta_1 B(1_H\otimes g;GX_1X_2,1_H)+\\ &+B(gx_1\otimes g;GX_2,1_H)+B(g\otimes x_1;GX_2,1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)\\ =\;&-\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)+\\ &+B(x_1\otimes 1_H;GX_2,1_H)+B(1_H\otimes gx_1;GX_2,1_H)\end{aligned}$$

i.e.

$$0=B(x_1\otimes 1_H;GX_2,1_H)+B(1_H\otimes gx_1;GX_2,1_H)$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$0=B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)$$

即 (544)。

情形 $f=gx_1$。

$$\begin{aligned}&-\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)\\ =\;&-\beta_1 B(1_H\otimes g;GX_1X_2,gx_1)+\\ &+B(gx_1\otimes g;GX_2,gx_1)+B(g\otimes x_1;GX_2,gx_1).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_1 B(g\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)\\ =\;&B(x_1\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+B(1_H\otimes gx_1;GX_2,gx_1).\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}0=B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\\ +\left[-2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]\end{aligned}$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0$$

即为 (545)。

等式 (538) 改写为

$$\begin{aligned} & -B(g\otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \; & -B(1_H\otimes g; GX_2, f) + \\ & +B(gx_1\otimes g; GX_1X_2, f) + B(g\otimes x_1; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & -B(g\otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \; & -B(1_H\otimes g; GX_2, g) + B(gx_1\otimes g; GX_1X_2, g) + \\ & +B(g\otimes x_1; GX_1X_2, g). \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & -B(g\otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \; & -B(g\otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, g) + \\ & +B(1_H\otimes gx_1; GX_1X_2, g) \end{aligned}$$

i.e.

$$0 = B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(1_H\otimes gx_1; GX_1X_2, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \; = \; & [-B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)] \\ & +[-B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)] \end{aligned}$$

i.e.

$$B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

这就是（545）。
情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \; & -B(1_H\otimes g; GX_2, x_1) + B(gx_1\otimes g; GX_1X_2, x_1) \\ & +B(g\otimes x_1; GX_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \; & B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(x_1\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -2B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right) \\ = \; & -B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) - B\left(g\otimes 1_H; G, x_1x_2\right). \end{aligned}$$

44.3.2. 情形 $x_1\otimes 1_H$。
等式 (531) 改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1\otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(x_1\otimes 1_H; X_2, f) \\ = \; & \gamma_1 B(x_1g\otimes g; G, f) + \beta_1 B(x_1g\otimes g; X_1, f) + \\ & +B(x_1x_1\otimes g; 1_A, f) + B(x_1\otimes x_1; 1_A, f) \end{aligned}$$

i.e,

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1\otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(x_1\otimes 1_H; X_2, f) \\ = \; & \gamma_1 B(x_1g\otimes g; G, f) - \beta_1 B(gx_1\otimes g; X_1, f) + \\ & +B(x_1\otimes x_1; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 g \otimes g; G, g) - \beta_1 B(g x_1 \otimes g; X_1, g) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(x_1 \otimes x_1; 1_H, g). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, g x_1) \right] + \\ & - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, g x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \end{aligned} \tag{551}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 g \otimes g; G, x_1) - \beta_1 B(g x_1 \otimes g; X_1, x_1) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_1).$$

根据元素的形式，我们得到

$$-\lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) + \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) = 0. \tag{552}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 g \otimes g; G, x_2) - \beta_1 B(g x_1 \otimes g; X_1, x_2) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) = +B(x_1 \otimes x_1; 1_A, x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2). \tag{553}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & B(x_1 \otimes x_1; 1_H, gx_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right). \end{aligned} \tag{554}$$

等式（532）可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, f) + B(x_1x_1 \otimes h'g; G, f) \\ & + B(x_1 \otimes x_1; G, f) \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, f) + B(x_1 \otimes x_1; G, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_1 \otimes x_1; G, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = B(x_1 \otimes x_1; G, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0.$$

由（544）可得

$$\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] = 0 \tag{555}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_1 \otimes x_1; G, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1; G, x_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \tag{556}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1 g \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; G, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; G, gx_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = B(x_1 \otimes x_1; G, gx_1).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = -2B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right). \tag{557}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1 g \otimes g; GX_1, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1; G, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1; G, gx_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = B(x_1 \otimes x_1; G, gx_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得不到新的结果。
等式 (533) 可改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 g \otimes g; GX_1, f) + B(x_1 g \otimes g; 1_A, f) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \quad & \gamma_1 B(x_1 g \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_1 g \otimes g; 1_A, 1_H) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, 1_H). \end{aligned}$$

。应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(x_1 \otimes x_1; X_1, 1_H). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \\ & + \lambda \left[-B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] \\ & + \gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] = 0. \end{aligned} \tag{558}$$

情形 $f = x_1x_2$

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = \ & \gamma_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(x_1g \otimes g; 1_A, x_1x_2) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

。应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = \ & -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1; X_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2\right) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0 \tag{559}$$

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \ & \gamma_1 B(x_1g \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_1g \otimes g; 1_A, gx_1) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \ & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_1) \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = -\gamma_1 B(g \otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-\lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, g) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) - B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_1) = 0$$

$$\begin{aligned} & -\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) \\ & -2\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] = 0 \end{aligned} \tag{560}$$

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ = \ & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1g \otimes g; 1_A, gx_2) \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + \\ & -\gamma_1 B\left(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2\right) \\ = \ & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$+\lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \gamma_1 B\left(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2\right) = +B(x_1 \otimes x_1; X_1, gx_2)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1\left[-B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{561}$$

等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \ & -\beta_1 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, f) + \\ & -\gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_2, f) + B(x_1 \otimes x_1; X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H}$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \; & -\beta_1 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, 1_H) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_2, 1_H) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_2, 1_H) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) + B(x_1 \otimes x_1; X_2, 1_H).$$

根据元素的形式，我们得到

$$0 = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2). \tag{562}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \; & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \tag{563}$$

等式 (535) 改写为

$$\begin{aligned} & -B(x_1 \otimes 1_H; X_2, f) \\ = \; & -B(gx_1 \otimes g; X_2, f) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, f) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & -B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \; & -B(gx_1 \otimes g; X_2, g) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g) + \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, g) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0.$$

这由 (545)。得出

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & -B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \\ = \; & -B(gx_1 \otimes g; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ & + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & -2B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \\ = \; & \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得不到任何新结果。

等式 (536) 改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f \\ = \; & B(gx_1 \otimes g; G, f) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ = \quad & B(gx_1 \otimes g; G, g) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(x_1 \otimes x_1; GX_1, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

这由 (545)。得出

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ = \quad & B(gx_1 \otimes g; G, x_1) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = B(x_1 \otimes x_1; GX_1, x_1).$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - \lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即 (543)。

情形 $f = x_2$。

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(gx_1 \otimes g; G, x_2) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = B(x_1 \otimes x_1; GX_1, x_2).$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

即 (544)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$B(x_1 \otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ gx_1x_2) = B(gx_1 \otimes g;\ G,\ gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_1;\ GX_1,\ gx_1x_2)$。应用（24）可将其改写为

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = B(x_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$0 = -B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2).$$

这就是（545）。

等式（537）改写为

$$-\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(x_1 \otimes x_1; GX_2, f)$$

情形 $f = g$。

$$-\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(x_1 \otimes x_1; GX_2, g)$$

应用（24）后，可将其改写为

$$-2\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(x_1 \otimes x_1; GX_2, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0.$$

这由 (545)。得出

情形 $f = x_1$。

$$-\beta_1 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(x_1 \otimes x_1; GX_2, x_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = B(x_1 \otimes x_1; GX_2, x_1)$$

这已是已知结果。
等式 (538)。可改写为

$$-B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = B(gx_1 \otimes g; GX_2, f) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = B(gx_1 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-2B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

即 (544)。
情形 $f = gx_1$。

$$-B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)$$

即 (545)。

44.3.3. 情形 $x_2 \otimes 1_H$。
等式 (531) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, f) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; G, f) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1, f) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; G, g) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1, g) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, g). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g). \end{aligned} \tag{564}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; G, x_1) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1, x_1) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) = \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1).$$

根据元素的形式，我们得到

(565)
$$\lambda\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1).$$

Case $f = x_2$.

$$\begin{aligned} \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \quad = \quad & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; G, x_2) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1, x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) = \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2).$$

根据元素的形式，我们得到

(566)
$$-\lambda B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2).$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; G, gx_1x_2) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，这可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

(567)
$$\begin{aligned} & \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ & -2B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

等式（532）可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \; & \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1, f) - B(x_1x_2 \otimes g; G, f) + B(x_2 \otimes x_1; G, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ = \; & \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; G, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后，这可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; G, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

(568)
$$\lambda\left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, x_2\right] = -2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H).$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \\ = \; & \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2) + \\ & + B(x_2 \otimes x_1; G, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; G, x_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \tag{569}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \\ = \; & \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; G, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ \ gx_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1) = +B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1) + B(x_2 \otimes x_1;\ G,\ \ gx_1)。$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - 2B\left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right). \tag{570}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \; & \beta_1 B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \; & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; G, gx_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \tag{571}$$

等式 (533) 改写为

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1, f) - B(gx_2 \otimes g; 1_A, f) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1, g) - B(gx_2 \otimes g; 1_A, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes g; X_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & \lambda\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) \end{aligned}$$

即为（565）。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) - B(gx_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_1) - B(gx_2 \otimes g; 1_A, gx_1) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \; & \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = -B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)$$

这显然成立。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes g; 1_A, gx_2) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2). \end{aligned} \tag{572}$$

等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \; & -\beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, f) - \gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_2, f) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_2, f) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$0 = -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes g; X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} 0 \; = \; & -\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes \; 1_H; G, x_2\right] + \\ & -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2). \end{aligned} \tag{573}$$

情形 $f = x_1x_2$

$$\begin{array}{c} -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) - \beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes g; X_2, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2). \end{array}$$

。应用（24）后可改写为

$$0 = -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, x_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = -\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2). \tag{574}$$

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$2\beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) = -B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1).$$

应用（24）后可改写为

$$-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ +B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \end{array} \tag{575}$$

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$\begin{array}{rl} & 2\beta_1 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) \\ = & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2). \end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{rl} & -2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ = & \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2). \end{array}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2). \tag{576}$$

等式 (535)。改写为

$$\begin{array}{rcl} -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, f) & = & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f) - B(gx_2 \otimes g; X_2, f) + \\ & & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, f). \end{array}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{array}{rl} & -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes g; X_2, g) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g). \end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$0 = -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] \\ & & + \left[\begin{array}{c} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array}\right] \end{array} \tag{577}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) - B(gx_2 \otimes g; X_2, x_1) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \; & \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2) = B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2)$$

这显然成立。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) - B(gx_2 \otimes g; X_2, x_2) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \; & \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = -\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2).$$

$$0 = \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2). \tag{578}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \; & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} 0 \; = \; & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = -B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right).$$

这显然成立。
等式 (536) 可改写为

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \; & B(gx_2 \otimes g; G, f) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; G, g) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, g). \end{aligned}$$

。应用（24）后可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & \lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) \right] \\ = \quad & -2 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) \right]. \end{aligned} \tag{579}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; G, x_1) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ = \quad & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1)$$

这显然成立。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; G, x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ = \quad & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2). \end{aligned}$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) \\ = \quad & 2\left[B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] \end{aligned}$$

i.e.

$$\lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即 (569)。

情形 $f = gx_1x_2$

$$\begin{aligned} & B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$0 = -B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)$$

这是显然的。

等式（537）改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \quad & \beta_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ = \ & \beta_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] \\ = \ & \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, g) \end{aligned}$$

$$\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{580}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ = \ & \beta_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & +\left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] \\ & +\left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] = 0. \end{aligned}$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{581}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ = \ & \beta_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

这就是 (544)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ = \ & \beta_1 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + \\ & +B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \left[-2B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0$$

即（545）。

等式 (538) 改写为

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \ & B(gx_2 \otimes g; GX_2, f) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & -2B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, x_2) = B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + \\ & + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) \end{aligned}$$

i.e.

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即（581）。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$-2B(x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ x_1x_2) = -B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1X_2,\ \ x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_1;\ GX_1X_2,\ x_1x_2)$$

。鉴于这些元素的形式，我们得到

$$-2B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = -2B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2)$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & [B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)] \\ & + [-B(g \otimes 1_H; G, gx_1) - B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)] = 0 \end{aligned}$$

这显然成立。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & -B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \quad & B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可将其改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即（550）。

44.3.4. 情形 $x_1x_2 \otimes 1_H$。

等式 (531) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) + \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g_{\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) + \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, g).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0 \tag{582}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) = \\ & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) + \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0. \tag{583}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) + \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2) \\ & + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \tag{584}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2) + \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2).$$

由式（500）可得

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \tag{585}$$

等式 (532) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; G, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes x_1; G, 1_H). \end{aligned}$$

。应用（24）后可改写为

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = B(x_1x_2 \otimes x_1; G, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0. \tag{586}$$

情形 $f = gx_{1}$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; G, gx_1). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = B(x_1x_2 \otimes x_1; G, gx_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0. \tag{587}$$

情形 $f = gx_{2}$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; G, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = B(x_1x_2 \otimes x_1; G, gx_2).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \tag{588}$$

等式（533）改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + \\ & + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H}$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, 1_H) + \\ & + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H) \end{aligned}$$

应用（24）后，改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, 1_H)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & \lambda \begin{bmatrix} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{bmatrix} + \\ & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0 \end{aligned} \tag{589}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_1x_2)$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{590}$$

.

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g). \end{aligned}$$

由（496）可得

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1, g) = 0 \tag{591}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ = \quad & \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_2) + \\ & + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2) \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，可得

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_2). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，可得

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ & + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

由（500）可得

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \tag{592}$$

等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + \\ + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$-\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) = \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H)+ \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) \\ +B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0. \tag{593}$$

情形 $f = gx_1$。

$$-\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) = \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \tag{594}$$

情形 $f = gx_2$。

$$-\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) = \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \tag{595}$$

等式 (535) 改写为

$$\begin{array}{rl} & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) \\ = & B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, f) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, f) \end{array}$$

情形 $f = g$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, g)+ \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)+ \\ +\gamma_1 \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+ \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)+ \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0 \tag{596}$$

情形 $f = x_1$

$$\begin{aligned} & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ = \quad & B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_1) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1) \end{aligned}$$

。应用（24）可将其改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（590）。

情形 $f = x_2$

$$\begin{aligned} & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ = \quad & B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_2) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) \end{aligned}$$

。应用（24）可将其改写为

$$-\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这就是 (499)。

等式 (536) 改写为

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，这改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) = B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, g)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda \begin{bmatrix} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{bmatrix} = 0 \tag{597}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \tag{598}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = +B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_2)$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{599}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1x_2) \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \tag{600}$$

等式（537）可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g_{\circ}$

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, g) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, g) = 0.$$

鉴于该元素的形式，这显然成立。
情形 $f = x_{1\circ}$

$$-\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) = -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1)$$

应用（24）后，可改写为

$$+2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \tag{601}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$-\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) = -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \tag{602}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \tag{603}$$

等式（538）可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

鉴于该元素的形式，这显然成立。

情形 $f = x_1x_2$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \tag{604}$$

情形 $f = gx_2$。

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即 (603)。

44.3.5. 情形 $gx_1 \otimes 1_H$。等式 (531) 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, f) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes g; G, f) \\ -\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1, f) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes g; G, 1_H)$$
$$-\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, 1_H)$$

应用（24）后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) + \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; G, 1_H)$$
$$-B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, 1_H) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}(605)\qquad & 2\beta_1 \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\right] + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \\ & = -\gamma_1 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)\right] + \\ & -2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right].\end{aligned}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes g; G, x_1x_2)$$
$$-\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = -\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2)$$
$$-\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为 (499)。

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes g; G, gx_1)$$
$$-\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, gx_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, gx_1) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}(606)\qquad & \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 \left[\begin{array}{c} B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \end{array}\right] \\ & +2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right] = 0.\end{aligned}$$

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = -\gamma_1 B(x_1 \otimes g; G, gx_2)$$
$$-\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, gx_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_1; 1_A, gx_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即（595）。

等式 (532) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1 \otimes x_1; G, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1 \otimes x_1; G, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0)$$

即 (588)。

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, x_1) + B(gx_1 \otimes x_1; G, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \quad & B(gx_1 \otimes x_1; G, x_1). \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (599)。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; G, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (602)。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & \beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; G, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$+\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_1; G, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即（603）。

等式（533）可改写为

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = \\ & -B(x_1 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ & -B(x_1 \otimes g; 1_A, g) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1, g). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ & -\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1, g). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

(607) $$2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right] +$$

$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

情形 $f=x_1$。

$$B(gx_1\otimes 1_H;1_A,x_1)+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)=$$
$$-B(x_1\otimes g;1_A,x_1)-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,x_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,x_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_1)=$$
$$-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,x_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,x_1).$$

鉴于这些元素的形式，这显然成立。
情形 $f=x_2$。

$$B(gx_1\otimes 1_H;1_A,x_2)+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=$$
$$-B(x_1\otimes g;1_A,x_2)-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,x_2)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,x_2)=$$
$$-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,x_2)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,x_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0$$

即为 (499)。
情形 $f=gx_1$。

$$B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=$$
$$-B(x_1\otimes g;1_A,gx_1)-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,gx_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1)=$$
$$-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,gx_1)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,gx_1).$$

鉴于这些元素的形式，这显而易见。
情形 $f=gx_1x_2$。

$$B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=$$
$$-B(x_1\otimes g;1_A,gx_1x_2)-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,gx_1x_2)+B(gx_1\otimes x_1;X_1,gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\lambda B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,gx_1x_2)=$$
$$-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_1,gx_1x_2)+.$$

鉴于这些元素的形式，这显而易见。
等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned}&-\beta_1B(gx_1\otimes 1_H;X_1X_2,f)\\ =\;&-\beta_1B(x_1\otimes g;X_1X_2,f)-\gamma_1B(x_1\otimes g;GX_2,f)+B(gx_1\otimes x_1;X_2,f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_2, g) + B(gx_1 \otimes x_1; X_2, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H, GX_2, g) + B(gx_1 \otimes x_1; X_2, g) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即 (595)。

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, x_1) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_2, x_1) + B(gx_1 \otimes x_1; X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-2\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(gx_1 \otimes x_1; X_2, x_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (499)。

等式 (535) 可改写为

$$\begin{aligned} -B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, f) \quad = \quad & -B(x_1 \otimes g; X_2, f) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ & +B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} -B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) \quad = \quad & -B(x_1 \otimes g; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ & +B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24)，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为 (499)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} -B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \quad = \quad & -B(x_1 \otimes g; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ & +B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$2B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + \gamma_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (536) 改写为

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \quad & B(x_1 \otimes g; G, f) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \quad & B(x_1 \otimes g; G, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (599)。
情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & B(x_1 \otimes g; G, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，这显而易见。
情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & B(x_1 \otimes g; G, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & +B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & -[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)] \\ & +[+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)] = 0 \end{aligned}$$

这显而易见。
情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & B(x_1 \otimes g; G, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & +B(gx_1 \otimes x_1; GX_1, gx_2). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即为（603）。

等式（537）改写为

$$-\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = +\beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, f).$$

情形 $f = 1_H$

$$-\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = +\beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, 1_H).$$

应用（24）可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, 1_H) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这就是（602）。
情形 $f = gx_1$。

$$-\beta_1 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = +\beta_1 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1 \otimes x_1; GX_2, gx_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即 (603)。
等式 (538). 可改写为

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) = +B(x_1 \otimes g; GX_2, f) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, f)$$

情形 $f = g$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) = +B(x_1 \otimes g; GX_2, g) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, g)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) + B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, g) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

即 (603)。
情形 $f = x_1$。

$$-B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = +B(x_1 \otimes g; GX_2, x_1) \\ +B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1) = 0$$

鉴于该元素的形式，这显然成立。

44.3.6. 情形 $gx_2 \otimes 1_H$。

等式 (531) 可改写为

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, f)$$
$$-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, f) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, f).$$

情形 $f = 1_H$。

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, 1_H)$$
$$-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) = -\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, 1_H).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} -2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda\left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)\right] \\ +\gamma_1\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)\right] = 0. \end{aligned} \tag{608}$$

情形 $f = g$。

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, g) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, g)$$
$$-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, g) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, g) = -\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; G, g)$$
$$-\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, g) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, g).$$

鉴于元素的形式，我们得到一个平凡等式。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, x_1x_2)$$
$$-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = -\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这就是 (498)。

情形 $f = gx_1$。

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, gx_1)$$
$$-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1)$$
$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \end{aligned} \tag{609}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}&\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes g; G, gx_2)\\ &-\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$+\gamma_1 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0 \tag{610}$$

等式（532）可改写为

$$\begin{aligned}&\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f)\\ =\ &+\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, f) - B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) + B(gx_2 \otimes x_1; G, f)\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}&\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\\ =\ &\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, g) - B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) + B(gx_2 \otimes x_1; G, g)\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\\ =\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_2 \otimes x_1; G, g).\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0$$

这由（604）推出。

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}&\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1)\\ =\ &\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; G, x_1)\end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1)\\ =\ &B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; G, x_1)\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这就是（598）。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}&\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2)\\ =\ &\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; G, x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2)\\ =\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; G, x_2)\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（601）。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & \beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; G, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$-\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; G, gx_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

这就是（604）。
等式（533）可改写为

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = \\ & -B(x_2 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, f) - B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ & -B(x_2 \otimes g; 1_A, g) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, g) - B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, g) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ & -\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, g) \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right] \\ & +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \end{aligned} \tag{611}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = \\ & -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_1) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, x_1) \end{aligned}$$

应用（24）改写后，根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$

这是显然的。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = \\ & -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，这可改写为

$$\begin{aligned} & \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = \\ & +\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, x_2) \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为 (498)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = \\ -B(x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + \\ -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = \\ -\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2)$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即 (496).

等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, f) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_2, f) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, f) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - B(gx_2 \otimes x_1; X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 \left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0 \tag{612}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_2, x_1) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) + \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (498)。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_2, x_2) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可将其改写为

$$2\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) + \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, x_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

这是显然的。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \\ = \; & -\beta_1 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式可得

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.$$

这显然成立。

等式 (535)。改写为

$$\begin{aligned} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) \; = \; & -B(x_2 \otimes g; X_2, f) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) \; = \; & -B(x_2 \otimes g; X_2, 1_H) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (498)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \; = \; & -B(x_2 \otimes g; X_2, gx_1) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + \gamma_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

即为 (496)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} -B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) \; = \; & -B(x_2 \otimes g; X_2, gx_2) - \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) + \gamma_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (536) 可改写为

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \; & +B(x_2 \otimes g; G, f) - B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \quad & +B(x_2 \otimes g; G, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, 1_H)$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即（598）。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & +B(x_2 \otimes g; G, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & +\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这显然成立

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & +B(x_2 \otimes g; G, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & +\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & -2B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

这显然成立

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & +B(x_2 \otimes g; G, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(gx_2 \otimes x_1; GX_1, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

即 (604)。

等式（537）改写为

$$\begin{aligned} -\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) = & +\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$-\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = +\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, 1_H)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, 1_H).$$

根据元素的形式，我们得到

$$\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0. \tag{613}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$-\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) = +\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, x_1x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。
情形 $f = gx_1$

$$-\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) = +\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1)$$

。应用 (24) 后可改写为

$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1)$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0.$$

即 (604)。
情形 $f = gx_2$。

$$-\beta_1 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) = +\beta_1 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2)$$

应用 (24) 后可将其改写；考虑到这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0.$$

这是显然的。
等式 (538) 改写为

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = B(x_2 \otimes g; GX_2, f)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = B(x_2 \otimes g; GX_2, g)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, g).$$

应用 (24) 可将其改写为

$$2B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, g).$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0$$

即 (604)。
情形 $f = x_1$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = B(x_2 \otimes g; GX_2, x_1)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1).$$

应用 (24) 可将其改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。
情形 $f = x_2$。

$$-B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = B(x_2 \otimes g; GX_2, x_2)$$
$$-B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。

44.3.7. 情形 $gx_1x_2 \otimes 1_H$。
等式 (531) 可改写为

$$\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; G, f)$$
$$+\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, f).$$

情形 $f = 1_H$

$$\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H)$$
$$+\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, 1_H).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) = \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H)$$
$$+B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, 1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$+\lambda\left[B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2)\right] - \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \tag{614}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2) \\ +\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) = \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, x_1x_2).$$

根据元素的形式，我们得到

$$+\lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{615}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1) \\ +\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) \\ = B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_1).$$

根据元素的形式，我们得到

$$-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda \left[B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0. \tag{616}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) = \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) \\ +\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_1; 1_A, gx_2).$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 \left[-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] \\ +\lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \tag{617}$$

等式 (532) 可改写为

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) \\ = \quad & +B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, g) \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] \\ +\lambda \left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] = 0 \tag{618}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, x_1) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, x_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$+\lambda \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) \right] = 0$$

这可由 (581) 得出

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(x_1x_2 \otimes g; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

这由 (544)。得出

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & +B(gx_1x_2 \otimes x_1; G, gx_1x_2) \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \tag{619}$$

等式 (533) 可改写为

$$\begin{gathered} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) = \\ B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, f) \end{gathered}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{gathered} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, g) \end{gathered}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{gathered} +\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, g) \end{gathered}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{gathered} +\lambda \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) + \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] \\ -\gamma_1 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) \right] = 0 \end{gathered} \tag{620}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) =$$
$$B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_1)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) =$$
$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_1)$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \lambda \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] \tag{621}$$
$$+\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) =$$
$$B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_2)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) +$$
$$+\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, x_2) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \lambda \left[B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] + \tag{622}$$
$$+\gamma_1 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] = 0$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) =$$
$$B(x_1x_2 \otimes g; 1_A,\ gx_1x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g;\ GX_1,\ gx_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1;\ X_1,$$
gx_1x_2) 应用 (24) 后可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) +$$
$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1, gx_1x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$+\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \tag{623}$$
$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \left[+2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] = 0$$

等式 (534) 可改写为

$$\begin{aligned} -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \quad &= \quad \beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) \\ &\quad +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$-\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) = \beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g)$$
$$+\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_2, g)$$

应用 (24) 后可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g)$$
$$+\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] \tag{624}$$
$$-\gamma_1 \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] = 0$$

情形 $f = x_1$。

$$-\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) = \beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_2, x_1)$$

应用（24）后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_2, x_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$+\gamma_1 \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] = 0$$

这由（581）推出

情形 $f = x_2$。

$$-\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) = \beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, x_2)$$

应用（24）后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

这由 (544) 得出

情形 $f = gx_1x_2$。

$$-\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) = \beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2)$$

应用 (24)，可将其改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) + \\ +\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_1; X_2, gx_1x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ -\gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0 \tag{625}$$

等式 (535) 可改写为

$$\begin{aligned} -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) &= B(x_1x_2 \otimes g; X_2, f) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) &= B(x_1x_2 \otimes g; X_2, 1_H) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$+2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\left[B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2)\right] \\ +\gamma_1 \begin{bmatrix} B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, x_2) + \\ +B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) \end{bmatrix} = 0 \tag{626}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \\ = \;& B(x_1x_2 \otimes g; X_2, x_1x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) \\ & + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + \gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ & + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, x_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即 (448)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \;=\; & B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ & + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & + \gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \; 1_H; G, gx_1x_2) \right] \\ & - \left[\begin{array}{c} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_2 \otimes \; 1_H; 1_A, gx_2) + \\ + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0 \end{aligned} \tag{627}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) \;=\; & B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ & + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \right] = 0$$

即 (529)。

等式 (536)。可改写为

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, f) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \;& -B(x_1x_2 \otimes g; G, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \;& -B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, 1_H) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, 1_H) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \\ & + \lambda \left[B(\; g \otimes 1_H;\; G, 1_H) \; + B(x_2 \otimes \; 1_H;\; G, x_2) \; + B(x_1 \otimes 1_H;\; G, x_1) \; + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\; G, x_1x_2) \right] = \quad 0 \end{aligned} \tag{628}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ & -B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, x_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{629}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & \lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] + \\ & + \left[2B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0 \end{aligned} \tag{630}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$+\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

这由 (545)。得出
等式（537）可改写为

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, 1_H) = 0$$

这已是已知结果。
情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这已经是已知的。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & \beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] \\ & +B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \end{aligned} \tag{631}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & -\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ = \quad & -\beta_1 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_1 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_2, gx_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0.$$

这由 (545)。得出
等式 (538) 可改写为

$$\begin{aligned} & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, g).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, g) = 0$$

这已是已知结果。
情形 $f = x_1$。

$$-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

这就是 (581)。
情形 $f = x_2$。

$$-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

即（544）。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \quad & -B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_1; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即 (545)。

44.4. $d = X_2$。

$$B(h \otimes h')(X_2 \otimes 1_H) = (X_2 \otimes 1_H)B(hg \otimes h'g) + B(hx_2 \otimes h'g) + B(h \otimes h'x_2)$$

$$\begin{aligned} B(h \otimes h') \quad = \quad & \sum\nolimits_f [B(h \otimes h'; 1_A, f)1_A \otimes f + B(h \otimes h'; G, f)G \otimes f + \\ & B(h \otimes h'; X_1, f)X_1 \otimes f + B(h \otimes h'; X_2, f)X_2 \otimes f. \\ & + B(h \otimes h'; X_1X_2, f)X_1X_2 \otimes f + B(h \otimes h'; GX_1, f)GX_1 \otimes f + \\ & B(h \otimes h'; GX_2, f)GX_2 \otimes f + B(h \otimes h'; GX_1X_2, f)GX_1X_2 \otimes]f \end{aligned}$$

回顾一下，

$$\begin{aligned} 1_AX_2 &= X_2 \\ GX_2 &= GX_2 \\ X_1X_2 &= X_1X_2 \\ X_2X_2 &= \beta_2 \\ X_1X_2X_2 &= \beta_2X_1 \\ GX_1X_2 &= GX_1X_2 \\ GX_2X_2 &= \beta_2G \\ GX_1X_2X_2 &= \beta_2GX_1 \end{aligned}$$

我们将左侧记为

$$\begin{aligned} B(h \otimes h')\,(X_2 \otimes 1_H) \quad = \quad & \sum\nolimits_f \beta_2 B(h \otimes h'; X_2, f)1_A \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f \beta_2 B(h \otimes h'; GX_2, f)G \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f \beta_2 B(h \otimes h'; X_1X_2, f)X_1 \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f B(h \otimes h'; 1_H, f)X_2 \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f B(h \otimes h'; X_1, f)X_1X_2 \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f \beta_2 B(h \otimes h'; GX_1X_2, f)GX_1 \otimes f + \\ & + \sum\nolimits_f B(h \otimes h'; G, f)GX_2 \otimes f \\ & + \sum\nolimits_f B(h \otimes h'; GX_1, f)GX_1X_2 \otimes f \end{aligned}$$

我们将右侧记为

$G^2 = \alpha$、$X_i^2 = \beta_i$ 和 $X_iG + GX_i = \gamma_i$ 和 $X_1X_2 + X_2X_1 = \lambda$。

$$\begin{aligned} X_21_A &= X_2 \\ X_2G &= -GX_2 + \gamma_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2X_1 &= -X_1X_2+\lambda\\
X_2X_2 &= \beta_2\\
X_2X_1X_2 &= -\beta_2X_1+\lambda X_2\\
X_2GX_1 &= -GX_2X_1+\gamma_2X_1=GX_1X_2-\lambda G+\gamma_2X_1\\
X_2GX_2 &= -\beta_2G+\gamma_2X_2\\
X_2GX_1X_2 &.= \beta_2GX_1-\lambda GX_2+\gamma_2X_1X_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(X_2\otimes 1_H)\,B(hg\otimes h'g)=\\
&\sum\nolimits_f [\gamma_2B(hg\otimes h'g;G,f)+\lambda B(hg\otimes h'g;X_1,f)+\beta_2B(hg\otimes h'g;X_2,f)]1_A\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f [-\beta_2B(hg\otimes h'g;GX_2,f)-\lambda B(hg\otimes h'g;GX_1,f)]G\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f [-\beta_2B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;GX_1,f)]X_1\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f [B(hg\otimes h'g;1_A,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;GX_2,f)+\lambda B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f)]X_2\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f [-B(hg\otimes h'g;X_1,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)]X_1X_2\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f +\beta_2B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)GX_1\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f [-B(hg\otimes h'g;G,f)-\lambda B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)]GX_2\otimes f\\
+&\sum\nolimits_f B(hg\otimes h'g;GX_1,f)GX_1X_2\otimes f
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
\beta_2B(h\otimes h';X_2,f) &= \gamma_2B(hg\otimes h'g;G,f)+\lambda B(hg\otimes h'g;X_1,f)+\beta_2B(hg\otimes h'g;X_2,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;1_A,f)+B(h\otimes h'x_2;1_A,f). \qquad (632)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2B(h\otimes h';GX_2,f) &= -\beta_2B(hg\otimes h'g;GX_2,f)-\lambda B(hg\otimes h'g;GX_1,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;G,f)+B(h\otimes h'x_2;G,f). \qquad (633)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2B(h\otimes h';X_1X_2,f) &= -\beta_2B(hg\otimes h'g;X_1X_2,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;GX_1,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;X_1,f)+B(h\otimes h'x_2;X_1,f). \qquad (634)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(h\otimes h';\,1_A,f) &= B(hg\otimes h'g;\,1_A,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;\,GX_2,f)+\lambda B(hg\otimes h'g;\,X_1X_2,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;\,X_2,f)+B(h\otimes h'x_2;\,X_2,f). \qquad (635)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(h\otimes h';X_1,f) &= -B(hg\otimes h'g;X_1,f)+\gamma_2B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;X_1X_2,f)+B(h\otimes h'x_2;X_1X_2,f) \qquad (636)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2B(h\otimes h';GX_1X_2,f) &= +\beta_2B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;GX_1,f)+B(h\otimes h'x_2;GX_1,f). \qquad (637)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(h\otimes h';G,f) &= -B(hg\otimes h'g;G,f)-\lambda B(hg\otimes h'g;GX_1X_2,f)\\
&\quad +B(hx_2\otimes h'g;GX_2,f)+B(h\otimes h'x_2;GX_2,f). \qquad (638)
\end{aligned}$$

$$B(h\otimes h';GX_1,f)=B(hg\otimes h'g;GX_1,f) \tag{639}$$
$$+B(hx_2\otimes h'g;GX_1X_2,f)+B(h\otimes h'x_2;GX_1X_2,f).$$

44.4.1. 情形 $g\otimes 1_H$。
等式(632). 改写为

$$\beta_2B(g\otimes 1_H);X_2,f)=\gamma_2B(1_H\otimes g;G,f)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1,f)$$
$$+\beta_2B(1_H\otimes g;X_2,f)+B(gx_2\otimes g;1_A,f)+B(g\otimes x_2;1_A,f)$$

情形 $f=1_H$。

$$\beta_2B(g\otimes 1_H);X_2,1_H)=\gamma_2B(1_H\otimes g;G,1_H)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1,1_H)$$
$$+\beta_2B(1_H\otimes g;X_2,1_H)+B(gx_2\otimes g;1_A,1_H)+B(g\otimes x_2;1_A,1_H)$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_1,1_H)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(1_H\otimes gx_2;1_A,1_H)=0$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_1) \tag{640}$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$\beta_2B(g\otimes 1_H);X_2,x_1x_2)=\gamma_2B(1_H\otimes g;G,x_1x_2)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1,x_1x_2)$$
$$+\beta_2B(1_H\otimes g;X_2,x_1x_2)+B(gx_2\otimes g;1_A,x_1x_2)+B(g\otimes x_2;1_A,x_1x_2)$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(1_H\otimes gx_2;1_A,x_1x_2)=0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0$$

即（464）。
情形 $f=gx_1$。

$$\beta_2B(g\otimes 1_H);X_2,gx_1)=\gamma_2B(1_H\otimes g;G,gx_1)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1,gx_1)$$
$$+\beta_2B(1_H\otimes g;X_2,gx_1)+B(gx_2\otimes g;1_A,gx_1)+B(g\otimes x_2;1_A,gx_1)$$

应用（24）后，可改写为

$$2\beta_2B(g\otimes 1_H);X_2,gx_1)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_1,gx_1)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(1_H\otimes gx_2;1_A,gx_1)=0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,gx_1) \tag{641}$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

情形 $f = gx_2$。

$$\beta_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) = \gamma_2 B(1_H\otimes g; G, gx_2) + \lambda B(1_H\otimes g; X_1, gx_2)$$
$$+\beta_2 B(1_H\otimes g; X_2, gx_2) + B(gx_2\otimes g; 1_A, gx_2) + B(g\otimes x_2; 1_A, gx_2)$$

应用（24）后，可改写为

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H; X_2, gx_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; X_1, gx_2)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(1_H\otimes gx_2; 1_A, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \tag{642}$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(g\otimes 1_H; 1_A, g) = 0.$$

等式（633）改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, f) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g; GX_2, f) - \lambda B(1_H\otimes g; GX_1, f)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g; G, f) + B(g\otimes x_2; G, f)\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, g) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g; GX_2, g) - \lambda B(1_H\otimes g; GX_1, g)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g; G, g) + B(g\otimes x_2; G, g)\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}2\beta_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, g) &= -\lambda B(g\otimes 1_H; GX_1, g)\\ &\quad +B(x_2\otimes 1_H; G, g) + B(1_H\otimes gx_2; G, g)\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2\otimes 1_H; G, g) = 0 \tag{643}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_1) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g; GX_2, x_1) - \lambda B(1_H\otimes g; GX_1, x_1)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g; G, x_1) + B(g\otimes x_2; G, x_1)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\lambda B(g\otimes 1_H; GX_1, x_1) - B(x_2\otimes 1_H; G, x_1) - B(1_H\otimes gx_2; G, x_1) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H; G, x_1) = 0 \tag{644}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H; GX_2, x_2) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g; GX_2, x_2) - \lambda B(1_H\otimes g; GX_1, x_2)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g; G, x_2) + B(g\otimes x_2; G, x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\lambda B(g\otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(x_2\otimes 1_H; G, x_2) - B(1_H\otimes gx_2; G, x_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) - 2B(x_2\otimes 1_H; G, x_2) = 0 \tag{645}$$

等式 (634) 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H;X_1X_2,f) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g;X_1X_2,f)+\gamma_2 B(1_H\otimes g;GX_1,f)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g;X_1,f)+B(g\otimes x_2;X_1,f)\end{aligned}$$

情形 $f=g$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(g\otimes 1_H;X_1X_2,g) &= -\beta_2 B(1_H\otimes g;X_1X_2,g)+\gamma_2 B(1_H\otimes g;GX_1,g)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g;X_1,g)+B(g\otimes x_2;X_1,g)\end{aligned}$$

应用（24）可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(g\otimes 1_H;X_1X_2,g)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;GX_1,g)\\ &-B(x_2\otimes 1_H;X_1,g)-B(1_H\otimes gx_2;X_1,g)=0\end{aligned}$$

根据该元素的形式，我们得到

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_H,gx_1)=0. \tag{646}$$

情形 $f=x_2$。

$$+\gamma_2 B(1_H\otimes g;GX_1,x_2)+B(gx_2\otimes g;X_1,x_2)+B(g\otimes x_2;X_1,x_2) = 0$$

应用（24）后，可改写为

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;GX_1,x_2)-B(x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(1_H\otimes gx_2;X_1,x_2)=0$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0 \tag{647}$$

等式（635）可改写为

$$\begin{aligned}B(g\otimes 1_H;1_A,f) &= B(1_H\otimes g;1_A,f)+\gamma_2 B(1_H\otimes g;GX_2,f)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1X_2,f)\\ &\quad +B(gx_2\otimes g;X_2,f)+B(g\otimes x_2;X_2,f)\end{aligned}$$

情形 $f=g$。

$$\begin{aligned}&\gamma_2 B(1_H\otimes g;GX_2,g)+\lambda B(1_H\otimes g;X_1X_2,g)+B(gx_2\otimes g;X_2,g)\\ &\qquad +B(g\otimes x_2;X_2,g) = 0\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&\gamma_2 B(g\otimes 1_H;GX_2,g)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_1X_2,g)+B(x_2\otimes 1_H;X_2,g)\\ &\qquad +B(1\otimes gx_2;X_2,g) = 0\end{aligned}$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\\ &\quad -2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2) = 0\end{aligned}$$

这是 (642)。

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) &= B(1_H \otimes g; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_2, x_1) \\ &+\lambda B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes g; X_2, x_1) + B(g \otimes x_2; X_2, x_1) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; GX_2, x_1) - \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \\ +B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) - B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_1) &= 0 \end{aligned}$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} 3B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) \\ +B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2\right) &= 0 \end{aligned} \tag{648}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) &= B(1_H \otimes g; 1_A, x_2) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_2, x_2) \\ &+\lambda B(1_H \otimes g; X_1X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes g; X_2, x_2) + B(g \otimes x_2; X_2, x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; GX_2, x_2) - \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \\ +B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_2, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们没有得到新的结果。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) &= B(1_H \otimes g; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_2, gx_1x_2) \\ &+\lambda B(1_H \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2) + B(g \otimes x_2; X_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - \lambda B(g \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) \\ +B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_2, gx_1x_2) &= 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得不到新的结果

等式 (636)。可改写为

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; X_1, f) &= -B(1_H \otimes g; X_1, f) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &+B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(g \otimes x_2; X_1X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; X_1, 1_H) &= -B(1_H \otimes g; X_1, 1_H) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &+B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) + B(g \otimes x_2; X_1X_2, 1_H) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} 2B(g \otimes 1_H; X_1, 1_H) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ -B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, 1_H) = 0 \end{aligned}$$

鉴于该元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) + 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0$$

即为 (464)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; X_1, gx_2) &= -B(1_H \otimes g; X_1, gx_2) + \gamma_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) + B(g \otimes x_2; X_1X_2, gx_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - B(1_H \otimes gx_2; X_1X_2, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，这显然成立。
等式（637）改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, f) &= +\beta_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_1, f) + B(g \otimes x_2; GX_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) &= +\beta_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(g \otimes x_2; GX_1, 1_H) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, 1_H) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

即 (644)。
情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) &= +\beta_2 B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(g \otimes x_2; GX_1, gx_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$+B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1, gx_2) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$-B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - 2B(g \otimes 1_H, G, gx_1) - B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

thus

$$B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + B(g \otimes 1_H, G, gx_1) = 0 \tag{649}$$

等式 (638) 改写为

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; G, f) &= -B(1_H \otimes g; G, f) - \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_2, f) + B(g \otimes x_2; GX_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; G, 1_H) &= -B(1_H \otimes g; G, 1_H) - \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(g \otimes x_2; GX_2, 1_H) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) - \lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ &+ B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, 1_H) = 0 \end{aligned}$$

根据该元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) - \lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) \\ &+ 2B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + 2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) = 0 \end{aligned} \tag{650}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) &= -B(1_H \otimes g; G, x_1x_2) - \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) + B(g \otimes x_2; GX_2, x_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) \\ &- B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(1_H \otimes gx_2; GX_2, x_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) - B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0$$

这是平凡的。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; G, gx_1) &= -B(1_H \otimes g; G, gx_1) - \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(g \otimes x_2; GX_2, gx_1) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_1) = 0$$

根据该元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \tag{651}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; G, gx_2) &= -B(1_H \otimes g; G, gx_2) - \lambda B(1_H \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2) + B(g \otimes x_2; GX_2, gx_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(g \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + B(1_H \otimes gx_2; GX_2, gx_2) = 0$$

鉴于这些元素的形式，这个等式显然成立。

等式 (639) 改写为

$$\begin{aligned} &B(g \otimes 1_H; GX_1, f) = B(1_H \otimes g; GX_1, f) \\ &+ B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(g \otimes x_2; GX_1X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; GX_1, g) &= B(1_H \otimes g; GX_1, g) \\ &\quad + B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(g \otimes x_2; GX_1X_2, g) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + B(1_H \otimes gx_2; GX_1X_2, g) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即（651）。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; GX_1, x_2) &= B(1_H \otimes g; GX_1, x_2) \\ + B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) &+ B(g \otimes x_2; GX_1X_2, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$2B(g \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) - B(g \otimes x_2; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) - B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0$$

这显然成立。

44.4.2. 情形 $x_1 \otimes 1_H$。

等式 (632) 改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, f) &= -\gamma_2 B(gx_1 \otimes g; G, f) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1, f) - \beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_2, f) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) &= -\gamma_2 B(gx_1 \otimes g; G, g) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1, g) - \beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_2, g) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} 2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, g) &= -\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g)) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, g) \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &-2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \\ &-\lambda\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0 \end{aligned} \tag{652}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_1) &= -\gamma_2 B(gx_1 \otimes g; G, x_1) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1, x_1) - \beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_2, x_1) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, x_1) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &+\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, x_1) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - \lambda B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0 \tag{653}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, x_2) &= -\gamma_2 B(gx_1 \otimes g; G, x_2) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1, x_2) - \beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_2, x_2) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&+\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) \\ &- B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, x_2) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] \\ &+2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0.\end{aligned} \tag{654}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) &= -\gamma_2 B(gx_1 \otimes g; G, gx_1x_2) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1, gx_1x_2) - \beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_2, gx_1x_2) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) \\ &- B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) = 0\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&+\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \\ &-2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0.\end{aligned} \tag{655}$$

等式 (633) 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, f) &= \beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, f) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; G, f) + B(x_1 \otimes x_2; G, f)\end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, 1_H) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H) + B(x_1 \otimes x_2; G, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$+\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes x_2; G, 1_H) = 0.$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \tag{656}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, x_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; G, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; G, x_1x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0.$$

即为 (569)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_1) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; G, gx_1).\end{aligned}$$

应用（24）可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - B(x_1 \otimes x_2; G, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \tag{657}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_2) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; G, gx_2).\end{aligned}$$

应用（24）可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes x_2; G, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&+\lambda\left[B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right]\\ &+2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right) = 0.\end{aligned} \tag{658}$$

等式 (634) 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, f) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1, f)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(x_1 \otimes x_2; X_1, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, 1_H) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1, 1_H) + B(x_1 \otimes x_2; X_1, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) - B(x_1 \otimes x_2; X_1, 1_H) = 0.$$

根据这些元素的形式，可得

$$\begin{aligned}&\gamma_2\left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right]\\ &+2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0.\end{aligned} \tag{659}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) + 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0.$$

即为 (464)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; X_1, gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) - B(x_1 \otimes x_2; X_1, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$2\beta_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

即 (641)

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) &= +\beta_2 B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_1, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&\gamma_2\left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] +\\ &-2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\\ &-2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.\end{aligned} \tag{660}$$

等式 (635) 改写为

$$\begin{aligned}B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, f) &= -B(gx_1 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, f) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, f)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_2, f) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, f)\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) &= -B(gx_1 \otimes g; 1_A, 1_H) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, 1_H) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, 1_H)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_2, 1_H) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, 1_H)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes x_2; X_2, 1_H) = 0\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&+\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2)\\ &+\lambda\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right]\\ &-2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0\end{aligned} \tag{661}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}&B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\\ =\ &-B(gx_1 \otimes g; 1_A, x_1x_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, x_1x_2) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2)\\ &+B(x_1x_2 \otimes g; X_2, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, x_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_2, x_1x_2) = 0\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0$$

这很平凡。
情形 $f = gx_1$。

$$\begin{array}{rl} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ = & -B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_1) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_1) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1) + \\ & +B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, gx_1) \end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{l} -\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; ; GX_2, gx_1) - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; ; X_1X_2, gx_1) + \\ +B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_2; X_2, gx_1) = 0. \end{array}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{l} -\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \\ +2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0. \end{array} \tag{662}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{array}{rl} & B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ = & -B(gx_1 \otimes g; 1_A, gx_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_2, gx_2) - \lambda B(gx_1 \otimes g; X_1X_2, gx_2) + \\ & +B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_2, gx_2) \end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{l} -\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) + \\ +B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_2, gx_2) = 0. \end{array}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0$$

这显然成立。
等式 (636) 可改写为

$$\begin{array}{rl} B(x_1 \otimes 1_H; X_1, f) & = B(fx_1 \otimes f; X_1, f) - \gamma_2 B(fx_1 \otimes f; GX_1X_2, f) \\ & +B(x_1x_2 \otimes f; X_1X_2, f) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, f) \end{array}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{array}{rl} B(x_1 \otimes 1_H; X_1, g) & = B(gx_1 \otimes g; X_1, g) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g) \\ & +B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, g) \end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{l} +\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ -B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, g) = 0 \end{array}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} +\gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] \\ -2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) \\ -2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \end{array}$$

这是（660）。

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) &= +B(gx_1 \otimes g; X_1, x_1) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_1) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_1) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$2B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即（474）。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) &= +B(gx_1 \otimes g; X_1, x_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; X_1, x_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ &+B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) &= +B(gx_1 \otimes g; X_1, gx_1x_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} &\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0$$

这显然成立。

等式 (637) 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) &= -\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) &= -\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &\beta_2 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] \\ &-B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0 \end{aligned} \tag{663}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) &= -\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, x_1)\end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, x_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

这就是（644）。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) &= -\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, x_2)\end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{664}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) &= -\beta_2 B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即 (651)。

等式 (638)。可改写为

$$\begin{aligned}&B(x_1 \otimes 1_H; G, f)\\ =\ &B(gx_1 \otimes g; G, f) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, f)\\ &+B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}B(x_1 \otimes 1_H; G, g) &= B(gx_1 \otimes g; G, g) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, g)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&-\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, g)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) - B(x_1 \otimes x_2; GX_2, g).\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&\lambda\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right]\\ &+2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

由 (545)，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \tag{665}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) &= +B(gx_1 \otimes g; G, x_1) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) - B(x_1 \otimes x_2; GX_2, x_1) = 0. \end{aligned}$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即 (629)。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) &= +B(gx_1 \otimes g; G, x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ &+B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_2, x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

这是显然的。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) &= +B(gx_1 \otimes g; G, gx_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &-\lambda B(x_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

这是显然的。

等式(639)可改写为

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, f) &= -B(gx_1 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) &= -B(gx_1 \otimes g; GX_1, 1_H) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes\ 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{666}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) &= -B(gx_1 \otimes g; GX_1, x_1x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) \\ &-B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) - B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

这是平凡的
情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) &= -B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_1) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0.$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) &= -B(gx_1 \otimes g; GX_1, gx_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) + B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(x_1 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ &-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

这显然成立。

44.4.3. 情形 $x_2 \otimes 1_H$。
等式 (632) 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, f) &= -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; G, f) - \lambda B(gx_2 \otimes g; X_1, f) \\ &\quad -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_2, f) + B(x_2 \otimes x_2; 1_A, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) &= -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; G, g) - \lambda B(gx_2 \otimes g; X_1, g) \\ &\quad -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_2, g) + B(x_2 \otimes x_2; 1_A, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, g) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) \\ &\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) - B(x_2 \otimes x_2; 1_A, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2\beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] \\ &\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \end{aligned} \tag{667}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) &= -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; G, x_1) - \lambda B(gx_2 \otimes g; X_1, x_1) \\ &\quad -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_2, x_1) + B(x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1)\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) \\ &-B(x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1) = 0\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

这由（644）得出。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(v; X_2, x_2) &= -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; G, x_2) - \lambda B(gx_2 \otimes g; X_1, x_2) \\ &\quad -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_2; 1_A, x_2)\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \\ &-B(x_2 \otimes x_2; 1_A, x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1 x_2) = 0. \tag{668}$$

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) &= -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; G, gx_1x_2) - \lambda B(gx_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) \\ &\quad -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ &+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1x_2) = 0\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&+ \quad 2\beta_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ &+2B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0\end{aligned} \tag{669}$$

等式 (633)。可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, f) \\ &\quad +\lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_2 \otimes x_2; G, f)\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H) \\ &\quad +\lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_2; G, 1_H)\end{aligned}$$

应用（24）后，可将其改写为

$$+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_2; G, 1_H) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

鉴于（644），该式成立。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2)\\ &\quad +\lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; G, x_1x_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_2; G, x_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_2; G, x_1x_2) = 0$$

这已是已知结果。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_1)\\ &\quad +\lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_2 \otimes x_2; G, gx_1)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\ &-B(x_2 \otimes x_2; G, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{670}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2)\\ &\quad +\lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; G, gx_2)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\\ &-B(x_2 \otimes x_2; G, gx_2) = 0\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\\ &+2B\left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right) = 0\end{aligned} \tag{671}$$

等式 (634)。可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, f)\\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_2 \otimes x_2; X_1, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H)\\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_2 \otimes x_2; X_1, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(x_2 \otimes x_2; X_1, 1_H) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

这可由 (644)。 推出

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2)\\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_1, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0$$

这已经是已知结果。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1)\\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\ &\quad -B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1)\\ &\quad -B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

这已是已知结果。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) &= +\beta_2 B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2)\\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\\ &-B(x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}-\quad &2\beta_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\\ &-2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

这就是 (669)。

等式 (635) 改写为

$$\begin{aligned}B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) &= -B(gx_2 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, f)\\ &\quad -\lambda B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) &= -B(gx_2 \otimes g; 1_A, 1_H) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, 1_H)\\ &\quad -\lambda B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，这可改写为

$$\begin{aligned}&2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)\\ &+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - B(x_2 \otimes x_2; X_2, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, x_2\right]\\ &+\lambda \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0.\end{aligned} \tag{672}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) &= -B(gx_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) \\ &\quad -\lambda B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) \\ &+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - B(x_2 \otimes x_2; X_2, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即 (474)。

情形 $f = gx_1$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) &= -B(gx_2 \otimes g; 1_A, gx_1) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_1) \\ &\quad -\lambda B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1). \end{aligned}$$

。应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ &-B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

即（465）。

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) &= -B(gx_2 \otimes g; 1_A, gx_2) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_2, gx_2) \\ &\quad -\lambda B(gx_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) \\ &-B(x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &\gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ &+2\left[+B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] = 0. \end{aligned} \tag{673}$$

等式（636）可改写为

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; X_1, g) &= B(gx_2 \otimes g; X_1, g) \\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) - B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g) = 0$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

即为 (470)。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) &= +B(gx_2 \otimes g; X_1, x_2) \\ &\quad -\gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ &\quad -B(x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0$$

即（464）。

等式（637）可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) &= -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_1, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) &= -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_1, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \\ &\quad -B(x_2 \otimes x_2; GX_1, g) = 0 \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right]$$

即 (670)。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) &= -\beta_2 B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_1, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$B(x_2 \otimes x_2; GX_1, x_2) = 0$$

这已是已知结果。

等式 (638)可改写为

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; G, f) &= B(gx_2 \otimes g; G, f) + \lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; G, g) &= B(gx_2 \otimes g; G, g) + \lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, g) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_2, g) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) - B(x_2 \otimes x_2; GX_2, g) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{674}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) &= B(gx_2 \otimes g; G, x_1) + \lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) \\ &\quad + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1) \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \\ &- B(x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1) = 0 \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

这就是（644）。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) &= B(gx_2 \otimes g; G, x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ &\quad + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, x_2). \end{aligned}$$

应用（24）可将其改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \\ &+ B(x_2 \otimes x_2; GX_2, x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) - 2B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) = 0$$

即 (645)。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) &= B(gx_2 \otimes g; G, gx_1x_2) + \lambda B(gx_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &\quad + B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) - B(x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即 (651)。

等式 (639) 可改写为

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1, f) &= -B(gx_2 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad + B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, f) \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1, 1_H) &= -B(gx_2 \otimes g; GX_1, 1_H) \\ &\quad + B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(x_2 \otimes\ 1_H; GX_1, 1_H) - B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

即为（644）。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(x_2 \otimes \ 1_H; GX_1, gx_2) &= -B(gx_2 \otimes g; GX_1, gx_2) \\ &\quad +B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$B(x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

根据元素的形式，可得

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即（651）。

44.4.4. 情形 $x_1x_2 \otimes 1_H$。
等式 (632)。可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) &= \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f) + \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, f) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) &= \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g) + \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, g) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \\ &-B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \tag{675}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) &= \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1) + \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_1) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) \\ &+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) \\ &\qquad +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0. \end{aligned} \tag{676}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) &= \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2) + \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_2) \\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \\ &+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \\ &\qquad +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{677}$$

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2) &= \gamma_2B(gx_1x_2\otimes g;G,gx_1x_2)+\lambda B(gx_1x_2\otimes g;X_1,gx_1x_2)+\\ &\quad+\beta_2B(gx_1x_2\otimes g;X_2,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)\\ &+B(x_1x_2\otimes x_2;1_A,gx_1x_2)=0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)\\ &+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.\end{aligned}\tag{678}$$

等式 (633). 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,f) &= -\beta_2B(gx_1x_2\otimes g;GX_2,f)+\\ &\quad-\lambda B(gx_1x_2\otimes g;GX_1,f)+B(x_1x_2\otimes x_2;G,f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H) &= -\beta_2B(gx_1x_2\otimes g;GX_2,1_H)+\\ &\quad-\lambda B(gx_1x_2\otimes g;GX_1,1_H)+B(x_1x_2\otimes x_2;G,1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)\\ &-B(x_1x_2\otimes x_2;G,1_H)=0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)=0.\tag{679}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}&\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)\\ =\;&-\beta_2B(gx_1x_2\otimes g;GX_2,x_1x_2)-\lambda B(gx_1x_2\otimes g;GX_1,x_1x_2)+\\ &+B(x_1x_2\otimes x_2;G,x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)\\ &-B(x_1x_2\otimes x_2;G,x_1x_2)=0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0.$$

鉴于 (598)，我们得到

$$\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0.\tag{680}$$

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\begin{aligned}&\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\\ =\;&-\beta_2B(gx_1x_2\otimes g;GX_2,gx_1)-\lambda B(gx_1x_2\otimes g;GX_1,gx_1)+\\ &+B(x_1x_2\otimes x_2;G,gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)-B(x_1x_2\otimes x_2;G,gx_1)=0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0.\tag{681}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ = \quad & -\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_2; G, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; G, gx_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \tag{682}$$

等式（634）可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \quad = \quad & -\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) \\ & +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) \quad = \quad & -\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) \\ & +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) \\ & -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, 1_H) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 \begin{bmatrix} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{bmatrix} \\ & -\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0. \end{aligned} \tag{683}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) \quad = \quad & -\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) \\ & +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2) - \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0.$$

即 (494)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) \\ & +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \tag{684}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) &= -\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2)\\ &\quad +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \tag{685}$$

等式 (635)。可改写为

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) &= B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f)\\ +\lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) &= B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, 1_H) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H)\\ +\lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H)\\ &-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) +\\ &-\lambda \begin{bmatrix} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{bmatrix} = 0.\end{aligned} \tag{686}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) &= B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2)\\ +\lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1x_2) &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1x_2)\\ &-B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (495)。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) &= B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1)\\ +\lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) &\quad -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\\ &+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0\end{aligned}$$

由 (496) 可得

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

即 (483)
情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) &= B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) \\ +\lambda B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) & \quad -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) \\ & +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \end{aligned} \tag{687}$$

等式 (636)。可改写为

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, f) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f) + \\ & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B((x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g) + \\ & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) - \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) + \\ & -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \\ -\gamma_2 & \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0. \end{aligned} \tag{688}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1) + \\ & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (494)。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2) + \\ & \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为 (495)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) \\ = \; & -B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + \\ & +\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (637). 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) \; = \; & +\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) \; = \; & +\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, g) = 0$$

这已是已知结果。

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) \; = \; & +\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, x_1) = 0.$$

考虑到这些元素的形式，我们得到

$$\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \tag{689}$$

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) \; = \; & +\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为（680）。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) &= +\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，这可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \tag{690}$$

等式（638）。可改写为

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, f) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, g).\end{aligned}$$

应用（24）后，这可改写为

$$\begin{aligned}&2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g)\\ &-B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, g) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g)\\ &+\lambda \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0.\end{aligned} \tag{691}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (598)。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2)\\ &\quad +B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可将其改写为

$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即（599）。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) &= -B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1x_2) \\ &- B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0. \tag{692}$$

等式 (639)。可改写为

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) &= B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) &= B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, 1_H) = 0$$

这已经是已知的。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) &= B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1x_2) = 0$$

这已经是已知的。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) &= B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

即 (690)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) &= B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + \\ &\quad + B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) - B(x_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

即 (692)。

44.4.5. 情形 $gx_1 \otimes 1_H$。

等式 (632)。改写为

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, f) \\ = \; & -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; G, f) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1, f) - \beta_2 B(x_1 \otimes g; X_2, f) + \\ & + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) \\ = \; & -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; G, 1_H) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1, 1_H) - \beta_2 B(x_1 \otimes g; X_2, 1_H) + \\ & + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} 2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, 1_H) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) + \\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, 1_H) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} 2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H)\right] + \\ + \lambda \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\right] = 0. \end{aligned} \tag{693}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) \\ = \; & -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; G, x_1x_2) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1, x_1x_2) - \beta_2 B(x_1 \otimes g; X_2, x_1x_2) + \\ & + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} 2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) + \\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即（495）。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_1) \\ = \; & -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; G, gx_1) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1, gx_1) - \beta_2 B(x_1 \otimes g; X_2, gx_1) + \\ & + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, gx_1). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} & -\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) - \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) \\ & + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, gx_1) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] = 0$$

由式 (692)。可得

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_2, gx_2) &= -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; G, gx_2) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2) - \beta_2 B(x_1 \otimes g; X_2, gx_2) + \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) \\ &+ B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_2; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) \\ &+ 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g).\end{aligned}$$

鉴于 (603)，(500)

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \tag{694}$$

等式 (633). 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, f) &= +\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, f) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; G, f) + B(gx_1 \otimes x_2; G, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) &= +\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, g) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1, g) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; G, g) + B(gx_1 \otimes x_2; G, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) \\ &- B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1 \otimes x_2; G, g) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式可得

$$\lambda\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] = 0. \tag{695}$$

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) &= +\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, x_1) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1, x_1) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_1) + B(gx_1 \otimes x_2; G, x_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) \\ &+ B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1 \otimes x_2; G, x_1) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式可得

$$\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这就是 (680)。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) &= +\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, x_2) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1, x_2) \\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; G, x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; G, x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) \\ &+ B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; G, x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即为 (599)。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} & \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ = \; & +\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + \\ & +B(gx_1x_2 \otimes g; G, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; G, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} & -\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) \\ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; G, gx_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

即 (692)。

等式 (634). 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, f) \quad = \quad & +\beta_2 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, f) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1, f) \\ & +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, f) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g) \quad = \quad & +\beta_2 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1, g) \\ & +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, g) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} & +\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) \\ & -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \right] = 0$$

这由 (692)。 得出

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) \quad = \quad & +\beta_2 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, x_1) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1, x_1) \\ & +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_1) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1, x_1) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0$$

这是显然的。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) \quad = \quad & +\beta_2 B(x_1 \otimes g; X_1X_2, x_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1, x_2) \\ & +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) \\ & +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1, x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即（495）。
情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) &= +\beta_2B(x_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) - \gamma_2B(x_1 \otimes g; GX_1, gx_1x_2)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1, gx_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 可改写为

$$\begin{aligned}&\gamma_2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2)\\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1, gx_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。
等式 (635). 可改写为

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, f) &= -B(x_1 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_2B(x_1 \otimes g; GX_2, f) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1X_2, f)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, f) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) &= -B(x_1 \otimes g; 1_A, g) - \gamma_2B(x_1 \otimes g; GX_2, g) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1X_2, g)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, g) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&2B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, g) + \gamma_2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, g) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, g)\\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - B(gx_1 \otimes x_2; X_2, g) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)\right]\\ &+\gamma_2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

这由 (694)，(603) 和 (500) 得出
情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1) &= -B(x_1 \otimes g; 1_A, x_1) - \gamma_2B(x_1 \otimes g; GX_2, x_1) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1X_2, x_1)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_1) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, x_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_1) - \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1)\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) - B(gx_1 \otimes x_2; X_2, x_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (495)。
情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, x_2) &= -B(x_1 \otimes g; 1_A, x_2) - \gamma_2B(x_1 \otimes g; GX_2, x_2) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1X_2, x_2)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, x_2) - \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2)\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; X_2, x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) = 0$$

这显然成立。
情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{gathered}B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = -B(x_1 \otimes g; 1_A, gx_1x_2)+\\ -\gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) - \lambda B(x_1 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2)\\ +B(gx_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2).\end{gathered}$$

应用 (24) 可改写为

$$\begin{gathered}2B(gx_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2)+\\ +\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)+\\ -B(gx_1 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2) = 0.\end{gathered}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。
等式 (636)。可改写为

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, f) &= +B(x_1 \otimes g; X_1, f) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, f)\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, 1_H) &= +B(x_1 \otimes g; X_1, 1_H) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, 1_H)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{gathered}+\gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)\\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, 1_H) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, 1_H) = 0\end{gathered}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (495)。
情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) &= +B(x_1 \otimes g; X_1, gx_1) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1)\\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1)\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{gathered}2B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_1) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1)\\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_1) = 0\end{gathered}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这是显然的。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) &= +B(x_1 \otimes g; X_1, gx_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_1 \otimes 1_H; X_1, gx_2) - \gamma_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (637). 可改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, f) &= -\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) &= -\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) \\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, 1_H) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

即 (680)。

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) &= -\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, x_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) \\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, x_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) &= -\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, gx_1) = 0.$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

这是显然的。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) &= -\beta_2 B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_2)\\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, gx_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1, gx_2) = 0.$$

根据这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

即（692）。

等式（638）可改写为

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; G, f) &= +B(x_1 \otimes g; G, f) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, f)\\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, f) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; G, 1_H) &= +B(x_1 \otimes g; G, 1_H) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, 1_H)\\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, 1_H) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H)\\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这就是 (599).

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; G, x_1x_2) &= +B(x_1 \otimes g; G, x_1x_2) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2)\\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2)\\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, x_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) &= +B(x_1 \otimes g; G, gx_1) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_1)\\ &\quad + B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1)\\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

即为 (692)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) &= +B(x_1 \otimes g; G, gx_2) + \lambda B(x_1 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_1 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ &+B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (639). 可改写为

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, f) &= -B(x_1 \otimes g; GX_1, f) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) &= -B(x_1 \otimes g; GX_1, g) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, g) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, g). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, g) \\ &-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, g) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, g) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0$$

这就是 (692).

情形 $f = x_1$。

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_1) &= -B(x_1 \otimes g; GX_1, x_1) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_1 \otimes 1_H; GX_1, x_2) &= -B(x_1 \otimes g; GX_1, x_2) \\ &\quad +B(gx_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_2) + B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_2) - B(gx_1 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2).$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0$$

这显然成立。

44.4.6. 情形 $gx_2 \otimes 1_H$。

等式 (632). 改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, f) &= -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; G, f) - \lambda B(x_2 \otimes g; X_1, f) \\ &\quad -\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_2, f) + B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) &= -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; G, 1_H) - \lambda B(x_2 \otimes g; X_1, 1_H)\\ &\quad -\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_2, 1_H) + B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, 1_H).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; G, 1_H) +\\ \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) \quad &-B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_2 \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2)\right]\\ &+\gamma_2 \left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H)\right] +\\ &-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0.\end{aligned} \tag{696}$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) &= -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; G, x_1x_2) - \lambda B(x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2)\\ &\quad -\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_2, x_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\\ &+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2) - B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为 (494)。

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) &= -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; G, gx_1) - \lambda B(x_2 \otimes g; X_1, gx_1)\\ &\quad -\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_2, gx_1) + B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1)\\ &-B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

即为 (684)。

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) &= -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; G, gx_2) - \lambda B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2)\\ &\quad -\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_2, gx_2) + B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2)\\ &-B(gx_2 \otimes x_2; 1_A, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&\gamma_2 \left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right]\\ &+\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2)\\ &+\left[+2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right] = 0.\end{aligned} \tag{697}$$

等式 (633) 可改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, f) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_2, f)+\\ &\quad \lambda B(x_2\otimes g; GX_1, f)+B(gx_2\otimes x_2; G, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, g) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_2, g)+\\ &\quad \lambda B(x_2\otimes g; GX_1, g)+B(gx_2\otimes x_2; G, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, g)-B(gx_2\otimes x_2; G, g)=0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1)=0$$

即 (681)。

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_1) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_2, x_1)+\\ &\quad \lambda B(x_2\otimes g; GX_1, x_1)+B(gx_2\otimes x_2; G, x_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_1)+\\ +\quad &\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, x_1)-B(gx_2\otimes x_2; G, x_1)=0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)=0$$

即 (689)。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_2) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_2, x_2)+\\ &\quad \lambda B(x_2\otimes g; GX_1, x_2)+B(gx_2\otimes x_2; G, x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, x_2)\\ &\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, x_2)-B(gx_2\otimes x_2; G, x_2)=0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)=0$$

即为 (598)。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_2, gx_1x_2)+\\ &\quad \lambda B(x_2\otimes g; GX_1, gx_1x_2)+B(gx_2\otimes x_2; G, gx_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2)-B(gx_2\otimes x_2; G, gx_1x_2)=0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1)=0$$

即为 (690)。

等式 (634)。改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; X_1X_2, f) &= +\beta_2 B(x_2\otimes g; X_1X_2, f)\\ &\quad -\gamma_2 B(x_2\otimes g; GX_1, f)+B(gx_2\otimes x_2; X_1, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) &= +\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g)\\ &\quad -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_2 \otimes x_2; X_1, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) + B(gx_2 \otimes x_2; X_1, g) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

这可由 (690) 得出。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) &= +\beta_2 B(x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2)\\ &\quad -\gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; X_1, x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2)\\ &-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_2 \otimes x_2; X_1, x_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (494)。

等式 (635). 可改写为

$$\begin{aligned}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, f) &= -B(x_2 \otimes g; 1_A, f) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_2, f)\\ &\quad -\lambda B(x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(gx_2 \otimes x_2; X_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{aligned}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) &= -B(x_2 \otimes g; 1_A, g) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_2, g)\\ &\quad -\lambda B(x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(gx_2 \otimes x_2; X_2, g).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned}&2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, g) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, g)\\ &+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(gx_2 \otimes x_2; X_2, g) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)\right]\\ &+\gamma_2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right]\\ &-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0.\end{aligned} \tag{698}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned}B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) &= -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_1) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_2, x_1)\\ &\quad -\lambda B(x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) + B(gx_2 \otimes x_2; X_2, x_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可将其改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1)\\ &-\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - B(gx_2 \otimes x_2; X_2, x_1).\end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为（494）。

情形 $f = x_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) &= -B(x_2 \otimes g; 1_A, x_2) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_2, x_2) \\ &\quad -\lambda B(x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; X_2, x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ &-\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(gx_2 \otimes x_2; X_2, x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(gx_2 \otimes x_2; X_2, x_2) = 0$$

这已是已知结果。

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) &= -B(x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) \\ &\quad -\lambda B(x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ &+\lambda B(gx_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - B(gx_2 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这是显然的。

等式 (636). 改写为

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, f) &= +B(x_2 \otimes g; X_1, f) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, f) \\ &\quad +B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H) &= +B(x_2 \otimes g; X_1, 1_H) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) \\ &\quad +B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, 1_H). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$+\gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即为 (494)。

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) &= +B(x_2 \otimes g; X_1, gx_2) - \gamma_2 B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad +B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) - \gamma_2 B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ &-B(gx_2 \otimes x_2; X_1X_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0$$

这显然成立。

等式 (637). 改写为

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, f) &= -\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_1X_2, f)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_1, f).\end{aligned}$$

.
情形 $f = 1_H$.

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) &= -\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_1X_2, 1_H)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_1, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$2\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_2\otimes x_2; GX_1, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，可得

$$\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (689)。
情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) &= -\beta_2 B(x_2\otimes g; GX_1X_2, gx_2)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_1, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(gx_2\otimes x_2; GX_1, gx_2) = 0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

这就是 (690)。
等式 (638)。可改写为

$$\begin{aligned}B(gx_2\otimes 1_H; G, f) &= +B(x_2\otimes g; G, f) + \lambda B(x_2\otimes g; GX_1X_2, f)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_2, f).\end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}B(gx_2\otimes 1_H; G, 1_H) &= +B(x_2\otimes g; G, 1_H) + \lambda B(x_2\otimes g; GX_1X_2, 1_H)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_2, 1_H).\end{aligned}$$

应用 (24)，可将其改写为

$$\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_2\otimes x_2; GX_2, 1_H) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0$$

即 (598)。
情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}B(gx_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) &= +B(x_2\otimes g; G, x_1x_2) + \lambda B(x_2\otimes g; GX_1X_2, x_1x_2)\\ &\quad +B(gx_2\otimes x_2; GX_2, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后可改写为

$$\lambda B(gx_2\otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) + B(gx_2\otimes x_2; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，这显而易见。

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1) &= +B(x_2 \otimes g; G, gx_1) + \lambda B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) \\ &\quad +B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) \\ &-B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

即 (690).

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned} B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2) &= +B(x_2 \otimes g; G, gx_2) + \lambda B(x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) \\ &\quad +B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2). \end{aligned}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_2 \otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) \\ &-B(gx_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] \\ &+\left[-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0 \end{aligned}$$

这是显然的。

等式 (639). 可改写为

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = -B(x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_2 \otimes x_2; GX_1X_2, f) = 0.$$

情形 $f = g$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = -B(x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_2 \otimes x_2; GX_1X_2, g) = 0.$$

应用 (24) 后，可改写为

$$2B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, g) - B(gx_2 \otimes x_2; GX_1X_2, g) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0$$

即为 (690)。

情形 $f = x_2$。

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = -B(x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$B(gx_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2) = 0$$

鉴于该元素的形式，这一点已是已知的。

44.4.7. 情形 $gx_1x_2 \otimes 1_H$.**等式 (632)**。改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, f) &= \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; G, f) + \lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1, f) \\ &\quad +\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_2, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, f). \end{aligned}$$

情形 $f = 1_H$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, 1_H) &= \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H) + \lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1, 1_H)\\ &\quad +\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_2, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, 1_H).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, 1_H)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, 1_H) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda\left[+B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1)\right] = 0 \tag{699}$$

情形 $f = x_1x_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1x_2) &= \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1, x_1x_2)\\ &\quad +\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2).\end{aligned}$$

应用（24）后，可改写为

$$\begin{aligned}&-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) - \lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1x_2)\\ &-B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, x_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0 \tag{700}$$

情形 $f = gx_1$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) &= \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_1)\\ &\quad +\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\\ &+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_1) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_2\left[B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right]\\ &+\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.\end{aligned} \tag{701}$$

情形 $f = gx_2$。

$$\begin{aligned}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) &= \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1, gx_2)\\ &\quad +\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_2).\end{aligned}$$

应用 (24) 后，改写为

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\\ &+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; 1_A, gx_2) = 0.\end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned}&2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\\ &+\lambda\left[-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right]\\ &+2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0.\end{aligned} \tag{702}$$

等式 (633)。改写为

$$\begin{aligned}&\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, f) = -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f)\\ &-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, f).\end{aligned}$$

情形 $f = g$。

$$\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) = -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, g).$$

应用（24）后，可改写为

$$2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g)$$
$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, g) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\beta_2 \left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] \tag{703}$$
$$+\lambda \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0.$$

情形 $f = x_1$。

$$\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) = -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, x_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, x_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

由 (644)。可知

情形 $f = x_2$。

$$\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) = -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] = 0$$

这由 (664)。得出

情形 $f = gx_1x_2$。

$$\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) = -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, gx_1x_2).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2)$$
$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; G, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$-2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \tag{704}$$
$$+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0.$$

等式 (634)。改写为

$$\begin{aligned} \beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, f) &= -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) &\quad +B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, f). \end{aligned}$$

情形 $f = g_\circ$

$$\begin{array}{rcl}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) & = & -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) & & +B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, g).\end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\begin{array}{rl} & 2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) \\ -\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) & -B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, g) = 0.\end{array}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{rl} & 2\beta_2 \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\end{array}\right] \\ & -\gamma_2 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0.\end{array} \tag{705}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{array}{rcl}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) & = & -\beta_2 B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) & & +B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_1).\end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

这由 (644) 得出。

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{array}{rcl}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) & = & -\beta_2 B(c; X_1X_2, x_2) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) & & +B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_2).\end{array}$$

应用 (24) 后，可改写为

$$\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, x_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] = 0$$

这由 (664) 得出。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{array}{rcl}\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) & = & -\beta_2 B(c; X_1X_2, gx_1x_2) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) & & +B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1x_2).\end{array}$$

应用 (24) 后可将其改写为

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) + \\ -\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_1, gx_1x_2) = 0.\end{array}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \\ -\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.\end{array}$$

即 (669)。

等式 (635)。改写为

$$\begin{array}{rcl}B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, f) & = & B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, f) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, f) \\ & & +\lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, f) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, f).\end{array}$$

情形 $f = g$

$$\begin{aligned} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) &= B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, g) \\ &\quad +\lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, g) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, g). \end{aligned}$$

。应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, g) \\ &-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, g) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, g) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &\gamma_2 \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] \\ &-\lambda \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0. \end{aligned} \tag{706}$$

情形 $f = x_{1\circ}$

$$\begin{aligned} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) &= B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_1) \\ &\quad +\lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_1). \end{aligned}$$

应用 (24) 可将其改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1) \\ &+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_1) = 0. \end{aligned}$$

根据元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 \left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] \\ &+\lambda \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \end{aligned} \tag{707}$$

情形 $f = x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) &= B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, x_2) \\ &\quad +\lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_2). \end{aligned}$$

。应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} &2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_2) \\ &+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) \\ &+\lambda \left[B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \end{aligned}$$

即 (654)。

情形 $f = gx_1x_{2\circ}$

$$\begin{aligned} B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) &= B(x_1x_2 \otimes g; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes g; GX_2, gx_1x_2) \\ &\quad +\lambda B(x_1x_2 \otimes g; X_1X_2, gx_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2). \end{aligned}$$

。应用 (24) 后，可将其改写为

$$\begin{aligned} &-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1x_2) \\ &-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; X_1X_2, gx_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; X_2, gx_1x_2) = 0. \end{aligned}$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\begin{aligned} &\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ &-\left[2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] = 0. \end{aligned}$$

即（655）。

等式 （636）可改写为

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,f)=-B(x_1x_2\otimes g;X_1,f)$$
$$+\gamma_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,f)+B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,f)$$

情形 $f=1_H$。

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)=-B(x_1x_2\otimes g;X_1,1_H)$$
$$+\gamma_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,1_H)+B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,1_H)+$$
$$-\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)-B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,1_H)=0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+ \tag{708}$$
$$-\gamma_2\begin{bmatrix} B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\ +B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{bmatrix}=0.$$

情形 $f=x_1x_2$。

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)=-B(x_1x_2\otimes g;X_1,x_1x_2)$$
$$+\gamma_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,x_1x_2)+B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1x_2)$$
$$-\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)-B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,x_1x_2)=0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0$$

即（474）。

情形 $f=gx_1$。

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1)=-B(x_1x_2\otimes g;X_1,gx_1)$$
$$+\gamma_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1).$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)-B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_1)=0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0$$

即（465）。

情形 $f=gx_2$。

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;X_1,f)=-B(x_1x_2\otimes g;X_1,f)$$
$$+\gamma_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,f)+B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,f)$$

应用（24）后，可改写为

$$\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes x_2;X_1X_2,gx_2)=0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]+$$
$$-\begin{bmatrix} 2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix}=0.$$

鉴于 (525)，我们得到

$$B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0$$

即 (575)。

等式 (637)。可改写为

$$\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,f)=+\beta_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,f)$$
$$+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,f).$$

情形 $f=1_H$。

$$\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=+\beta_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,1_H)$$
$$+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,1_H).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,1_H)=0.$$

鉴于该元素的形式，这一点已是已知的。

情形 $f=x_1x_2$。

$$\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,x_1x_2)=+\beta_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,x_1x_2)$$
$$+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,x_1x_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,x_1x_2)=0.$$

鉴于该元素的形式，这一点已为人所知。

情形 $f=gx_1$。

$$\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)=+\beta_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,gx_1)$$
$$+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_1)-B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_1)=0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0$$

即为 (670)。

情形 $f=gx_2$。

$$\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)=+\beta_2B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,gx_2)$$
$$+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_2).$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;GX_1X_2,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_1,gx_2)=0$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$2\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]$$
$$+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

鉴于 (545)，我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \tag{709}$$

等式(638). 改写为

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,f)=-B(x_1x_2\otimes g;G,f)$$
$$-\lambda B(x_1x_2\otimes g;GX_1X_2,f)+B(gx_1x_2\otimes x_2;GX_2,f).$$

情形 $f = 1_{H\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = -B(x_1x_2 \otimes g; G, 1_H)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, 1_H).$$

应用（24）后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H)$$
$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, 1_H) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) \tag{710}$$
$$+\lambda \begin{bmatrix} B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, x_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) \end{bmatrix} = 0.$$

情形 $f = x_1x_{2\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = -B(x_1x_2 \otimes g; G, x_1x_2)$$
$$+\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, x_1x_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1x_2).$$

应用（24）后，可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)$$
$$+\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, x_1x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, x_1x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即为 (629)。

情形 $f = gx_{1\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = -B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_1)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1).$$

应用 (24) 后，可将其改写为

$$-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_1) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0$$

即为 (674)。

情形 $f = gx_{2\circ}$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = -B(x_1x_2 \otimes g; G, gx_2)$$
$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes g; GX_1X_2, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$-\lambda B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_2, gx_2) = 0.$$

鉴于元素的形式，我们得到

$$\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] +$$
$$2\left[B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] = 0.$$

利用（545），我们得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0$$

即为 (665)。

等式 (639) 可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, f) = B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, f) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, f).$$

情形 $f = g$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, g) = B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, g) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, g).$$

应用（24）可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, g) = 0$$

鉴于该元素的形式，这是已知的。
情形 $f = x_1$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) = B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_1) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1).$$

应用（24）可改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_1) = 0$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0$$

即（644）。
情形 $f = x_2$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) = B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, x_2) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2).$$

应用（24）后，可将其改写为

$$2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_2) - B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, x_2) = 0.$$

根据元素的形式，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0$$

即（664）。
情形 $f = gx_1x_2$。

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1x_2) = B(x_1x_2 \otimes g; GX_1, gx_1x_2) \\ +B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1x_2).$$

应用 (24) 后，可改写为

$$B(gx_1x_2 \otimes x_2; GX_1X_2, gx_1x_2) = 0.$$

鉴于这些元素的形式，我们得到

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) = 0$$

即 (651)。

45. LIST OF ALL EQUALITIES GOT FROM (13)

45.1. G.

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0 \quad (437)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0\,(438)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(439)$$

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\,(440)$$

$$2B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0.\,(441)$$

$$2B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\,(442)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,g)+\\ +\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{array}=0.\,(443)$$

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0.\,(444)$$

This is (437)

$$\gamma_1[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)]=0.\,(445)$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(446)$$

$$\begin{array}{c}2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+\\ +\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)\end{array}=0.\,(447)$$

$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (448)$$

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(449)$$

$$\gamma_1[B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(450)$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0\,(451)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)=0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;g,gx_1x_2)\right]=0.\,(453)$$

$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)]=0.\,(454)$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(455)$$

$$\alpha[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)$$

$$2B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(457)$$

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2).\,(458)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]\end{array}=0.\,(459)$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0\,(460)$$

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0\,(461)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(462)$$

$$\begin{array}{c}2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)\\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right]\end{array}=0.\,(463)$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0=0\,(464)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0. \quad (466)$$
$$\gamma_2[B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2)\ +B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)]=0 \quad (467)$$
$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0. \quad (468)$$
$$\gamma_1\ [B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, x_1x_2)]=0. \quad (469)$$
$$\alpha\ [B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)]=0 \quad (470)$$
$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0. \quad (471)$$
$$\alpha\ [B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)]=0 \quad (472)$$
$$\gamma_2[B(g\otimes 1_H, G, gx_1)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0.=0. \quad (473)$$
$$2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\ =0. \quad (474)$$
$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)]=0. \quad (475)$$
$$+B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, x_1x_2)\ =0. \quad (476)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, g)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, g)\ =0. \quad (477)$$
$$2\alpha B\ x_1x_2\otimes 1_H\ G\ x_1\ +(\ ;\ ,\ )\ (\ ;\ ,\ )\ +\gamma_1 B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_1\ x_1\ +\gamma_2 B\ (x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_1)=0. \quad (478)$$
$$2\alpha B\ x_1x_2\otimes 1_H\ G\ x_2\ +(\ ;\ ,\ )\ (\ ;\ ,\ )\ (x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_2)\ +\gamma_1 B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_1\ x_2\ +\gamma_2 B\ =0. \quad (479)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, gx_1x_2)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, gx_1x_2)\ =0 \quad (480)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, 1_H)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, 1_H)\ =0 \quad (481)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, x_1x_2)\ =0 \quad (482)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_1)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, gx_1)=0. \quad (483)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_2)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, gx_2)=0 \quad (484)$$
$$2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, 1_H)\ =0. \quad (485)$$
$$\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ =0. \quad (486)$$
$$-2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ =0 \quad (487)$$
$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, gx_1x_2)\ =0 \quad (488)$$

$$-\gamma_1[1-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ x_1, x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ x_2, x_1)]-2\alpha B(x_1x_2\ \otimes 1_H;\ GX_2, 1_H=0. \quad (489\ )$$

$$\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, x_1x_2)\ =0. \quad (490)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, gx_1x_2)\ =0\ . \quad (491)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, gx_1x_2)\ =0. \quad (492)$$

$$-2B(x_1\,x_2\otimes 1_H;\ X_1, g)+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ g, gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_2)+B(x_1x_2\otimes\ 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1)]=0 \quad (493)$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ =0. \quad (494)$$
$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, x_1x_2)\ =0. \quad (495)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, gx_1x_2)\ =0 \quad (496)$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ \ g)+$$
$$-\gamma_1[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ g,\ \ gx_1x_2)\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ gx_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_2,\ \ gx_1)]=0 \quad (497)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ = 0 \quad (498)\qquad \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, x_1x_2)\ = 0 \quad (499)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ gx_1x_2)\ = 0 \quad (500)$$

$$2\alpha\left[B\ x_1x_2\otimes 1_H\ G\ x_2\ - B\ x_1x_2\otimes 1_H\ GX_2\ 1_H\ \right]+(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_2) = 0. \quad (501)$$

$$+\gamma_1\left[-1+B\ x_1x_2\otimes 1_H\ 1_A\ x_1x_2\ + B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_2\ x_1\ \right]+\gamma_2 B$$

$$2\left[B\ x_1x_2\otimes 1_H\ 1_A\ gx_2\ + B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_2\ g\ \right](\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, gx_2) \quad (502)$$

$$\gamma_1\left[-B\ x_1x_2\otimes 1_H\ G\ gx_1x_2\ + B\ x_1x_2\otimes 1_H\ GX_2\ gx_1\ \right]+\gamma_2 B$$

$$2\alpha\left[-B\ x_1x_2\otimes 1_H\ G\ x_1\ + B\ x_1x_2\otimes 1_H\ GX_1\ 1_H\ \right]+$$

$$-\gamma_1 B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_1\ x_1\ +\gamma_2\left[-1+B\ x_1x_2\otimes 1_H\ 1_A\ x_1x_2\ - B\right.$$

$$\left.(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, x_2)\right] = 0 \quad (503)$$

$$2\left[-B\ x_1x_2\otimes 1_H\ 1_A\ gx_1\ - B\ x_1x_2\otimes 1_H\ X_1\ g\ \right](\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(\ ;\ ,\ )\,(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_2)] = 0. \quad (504)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2)\ = 0 \quad (505)$$

$$\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, 1_H)\ + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)\right]+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, 1_H)\ + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_2)\right] = 0 \quad (506)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ x_1x_2)\ +\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ x_1x_2)\ = 0. \quad (507)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ g)+$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ +\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\right] = 0. \quad (508)$$

$$2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)+$$

$$+\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)\ - B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\right]+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) = 0. \quad (509)$$

$$\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ g)\ - B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\right] \quad (510)$$

$$+\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;\ G, g)\ - B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_2)\right] = 0.$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)$$

$$+\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_1)\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;\ G, x_1)\ - B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\right] = 0. \quad (511)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_2)$$

$$+\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_2)\ + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\right]-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, x_2) = 0. \quad (512)$$

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ -\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ = 0. \quad (513)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ + B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)\ + B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\right]+$$

$$2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ + B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\right] = 0. \quad (514)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_1)\ + B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \quad (515)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ X_2,\ \ 1_H)\ - B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ x_1x_2)\right] = 0 \quad (516)$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ - 2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ = 0. \quad (517)$$

$$-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] + \quad (518)$$

$$-2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_2)\right] = 0$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H; 1_A, x_1) + B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0 \quad (519)$$

$$-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H; 1_A, x_2) - B(x_1\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0. \quad (520)$$

$$-\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2\alpha B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \quad (521)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \quad (522)$$

$$-2\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ 1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1)\right]+$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,\ 1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ x_2)+B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ x_1x_2)\right]$$
$$=0$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\ (524)$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\ (525)$$
$$-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]$$
$$-2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]=0\ (526)$$
$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\ (527)$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\ (528)$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\ (529)$$

45.2. X_1.

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0.\ (539)$$

$$+\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\ (540)$$
$$+2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)=0$$

$$\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\ (541)$$

$$2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\lambda B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;G,g)=0.\ (542)$$
$$-\lambda B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0.\ (543)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)=0.\ (544)$$

$$B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B\left(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2\right)=0\ (545)$$
$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\ (546)$$
$$+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$-2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\ (547)$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0.\ (548)$$

$$-2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)-2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\ (549)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\ (550)$$
$$2\beta_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,g)\ (551)$$
$$-\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0.\ (552)$$
$$0=\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,x_2).\ (553)$$

$$-2\beta_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2\right).\ (554)$$
$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0\ (555)$$
$$\beta_1B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0.\ (556)$$
$$\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=-2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right).\ (557)$$

$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+\lambda\left[-B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]\ (558)$$
$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)+\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0\,(559)$$

$-\lambda B\left(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;\ G,gx_1\right)-2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\right]=0$ (560) $2\beta_1 B($ $g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ -\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -B(x_1\otimes x_1;\ X_2,gx_1)\ =0.$ (563) $-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)$ $+\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\right.$ $-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0$ (561) $\left.-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,g)\right.$ $-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,g).$ (564) $\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A,x_1)\ -B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,x_1x_2)\right]=\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_1).$ (565) $-\lambda B($ $g\otimes 1_H;\ 1_A,x_2)\ =\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G,x_2)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_2).$ (566) $\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ -\gamma_1 B($ $x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)$ (567) $-2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ =0\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G,1_H)\ +B\right.$ $\left.(x_2\otimes\ 1_H;\ G,x_2\right]=-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,1_H).$ (568) $\lambda B(g\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\ =0.$ (569) $\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]=2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1)-2B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)$. (570) $-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ =0.$ (571) $-\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,$ $gx_1x_2)\ =-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)-2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2).$ (572) $0=-\gamma_1\left[B(\right.$ $g\otimes 1_H;\ G,1_H)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,x_2\left.\right]-2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,1_H)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_2).$ (573) $0=-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;$ $G,x_1x_2)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,x_1x_2).$ (574) $B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)$ (575) $+B(g\otimes 1_H;$ $1_A,g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,gx_2)\ =0 2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2\right)\ =\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2).$ (576) $0\ \ =\ \ \gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]$ (577) $+\left[2B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +2B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,\right.$ $\left.gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\right] 0=\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,$ $x_1x_2).$ (578) $\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]=-2\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1)\right.$ (579) $\left.\right]\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]=0$ (580) $B(x_1\otimes 1_H;\ G,x_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)$ $=0$ (581) $\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,g)\ -\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ =0$ (582) $2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,x_1)\ +\lambda B($ $x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,x_1)\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1)\ =0$ (583) $2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,x_2)\ +\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,x_2)$ $+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_2)\ =0.$ (584) $\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ =0.$ (585)

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, 1_H) + \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0. \quad (586)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g) = 0. \quad (587)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \quad (588)$$

$$\lambda\left[+1 - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)\right] \quad (589)$$
$$-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \quad (590)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) = 0 \quad (591)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \quad (592)$$

$$2\beta_1\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)\end{array}\right] + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0. \quad (593)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g) = 0. \quad (594)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \quad (595)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g) + \quad (596)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g) + \lambda\left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2)\end{array}\right] = 0 \quad (597)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \quad (598)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \quad (599)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \quad (600)$$
$$\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \quad (601)$$
$$\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \quad (602)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \quad (603)$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \quad (604)$$

$$2\beta_1\left[-1 + B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)\right] + \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2) \quad (605)$$
$$= -\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H)\right] +$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g)\right].$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) - \gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] \quad (606)$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g)\right] = 0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g)\right] + \quad (607)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, gx_1x_2)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] = 0.$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda\left[-1 + B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)\right] \quad (608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, 1_H)\right] = 0.$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_1) \quad (609)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) = 0.$$
$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2)\right] = 0 \quad (610)$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g)\right] \quad (611)$$

$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0$$

$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (612)$$

$$\beta_1 B(gx_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0. \quad (613)$$

$$+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0 \quad (614)$$

$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (615)$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (616)$$
$$+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (617)$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] \quad (618)$$
$$+\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0 \quad (619)$$

$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$-\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0 \quad (620)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]$$
$$+\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0 \quad (621)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]+ \quad (622)$$
$$+\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+ \quad (623)$$
$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0$$

$$2\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (624)$$
$$-\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right) \quad (625)$$
$$-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$

$$2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right] \quad (626)$$
$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (627)$$
$$+-\left[2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H) \quad (628)$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (629)$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0 \quad (630)$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (631)$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

45.3. X_2.

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)\,(640)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\,(641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(643)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0\,(644)$$
$$\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-2B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0645$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;1_H,gx_1)=0.\,(646)$$
$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)$$
$$3B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)\,(648)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\,(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\quad=\quad 0$$
$$B\,(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(g\otimes 1_H,G,gx_1)=0\,(649)$$
$$2B(g\otimes 1_H;G,1_H)-\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)\,(650)$$
$$+2B(g\otimes 1_H;G,1_H)+2B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0$$
$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,g)\,(652)$$
$$-\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0$$

$$\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)=0\,(653)$$
$$-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right](654)$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)=0.$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(655)$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2B\,(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$
$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(656)$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B\,(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(657)$$

$$\lambda\left[B\,(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right](658)$$
$$+2-B(x_1\otimes 1_H;G,g_1)+2B\,(x_1\otimes 1_H;G,g)=0.$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right](659)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)=0.$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(660)$$
$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)$$

$$-2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)\,(661)$$
$$+\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)=0$$

$$-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ (662)$$
$$+2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ =0.$$
$$\beta_2\left[-B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\right](663)-B($$
$$x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ =0B(x_2\otimes 1_H;\ G,x_2)$$
$$+\ B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\ =0\,(664)B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)\ +B($$
$$gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ =0\,(665)B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,x_2)\ +B($$
$$gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\ =0\,(666)2\qquad\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +B\right.$$
$$\left.(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,gx_2)\right](667)-\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ +\lambda B(x_2\otimes 1_H;$$
$$1_A,gx_1)\ =0.\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G,x_2)\ +\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_1x_2)$$
$$=0.(668)+\qquad 2\beta_2 B\left(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2\right)\ -\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G,$$
$$gx_1x_2)\ (669)+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1\right)\ =0\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\right.$$
$$\left.+\ B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]=0\,(670)2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -\lambda B$$
$$(x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ (671)+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ G,g\right)\ =0$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ 1_H)\ +\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ 1_H)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ G,\right.$$
$$\left.x_2\right](672)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ x_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ 1_A,\ \ x_1x_2)\right]=0.$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2)\ -\lambda B(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1x_2)$$
$$(673)+2\left[+B(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_2)\right.$$
$$\left.\right]=0\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\right.$$
$$\left.\right]=0\,(674)\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ g)\ +\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_1,$$
$$g)\ =0.(675)2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_2,\ \ x_1)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;$$
$$G,\ \ x_1)\ (676)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_1,\ \ x_1)\ =0\,2\beta_2 B($$
$$x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_2,\ \ x_2)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ x_2)\ (677)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_1,\ \ x_2)\ =0.\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)$$
$$+\ \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H\ ;\ \ X_1,\ \ gx_1x_2)\ (678)+2B(x_1x_2\otimes 1_H\ ;\ \ 1_A,$$
$$gx_1)\ =0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)=0. \quad (679)$$
$$\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0. \quad (680)$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0. \quad (681)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (682)$$
$$2\beta_2\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right] \quad (683)$$
$$-\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)=0.$$
$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0 \quad (684)$$
$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0. \quad (685)$$

$$-\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)-\lambda\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]=0. \quad (686)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2) \quad (687)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)- \quad (688)$$
$$\gamma_2\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0.$$
$$\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0. \quad (689)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0. \quad (690)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g) \quad (691)$$
$$+\lambda\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\\ B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0.$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0. \quad (692)$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right] \quad (693)$$
$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]=0.$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0. \quad (694)$$
$$\lambda\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0. \quad (695)$$
$$2\beta_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (696)$$
$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)\right]+$$
$$-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right] \quad (697)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)$$
$$+\left[+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]=0.$$

$$2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \quad (698)$$
$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]$$
$$-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)=0.$$
$$-\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda\left[+B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]=0 \quad (699)$$

$$\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ x_1x_2)\ -\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2)\ =0 \quad (700)$$

$$2\beta_2\left[B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1x_2)\right] \quad (701)$$
$$+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1)\ -\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)\ =0.$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2)\ +\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_2) \quad (702)$$
$$+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1x_2)\right]$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ =0.$$

$$2\beta_2\left[-B\left(x_1\otimes 1_H;\ G,\ g\right)\ -B\left(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_2\right)\right] \quad (703)$$
$$+\lambda\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2) \quad (704)$$
$$+\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)\ -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1)\ =0.$$

$$2\beta_2\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2) \\ -\gamma_2\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1)\right]=0. \end{array}\right] \quad (705)$$

$$\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (706)$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}\right]=0.$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_1)\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;\ G,x_1)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\right]$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,x_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,x_1x_2)\right]=0. \quad (707)$$

$$2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+ \quad (708)$$
$$-\gamma_2\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2) \end{array}\right]=0.$$

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \quad (709)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H) \quad (710)$$
$$+\lambda\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2) \end{array}\right]=0.$$

46. 非退化情形

From 从现在起，我们假设所有常数 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ 和 λ 均不为零。

46.1. 所有单项式等式列表 0. 我们列出在 (45). 中得到的所有单项式等式。由于先前的假设，在此过程中，我们将消去所有常数并保留相同的标签。

$$B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \, (556)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \, (544)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \, (553)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \, (562)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \ . (491)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \ \ (496)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \ \ (488)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0. \, (492)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0. \, (492)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \, (500)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0. \, (485)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \, (486)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \ \ (487)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \, (494)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \, (498)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \, (505)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \, (590)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \, (490)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \, (495)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \, (499)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \, (588)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \, (601)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \, (598)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0. \, (689)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \, (690)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \, (684)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \, (681)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \, (690)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0 \, (684)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \, (680)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \, (602)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0 \, (599)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0. \, (603)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \, (595)$$
$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0. \, (613)$$

现在我们列出一个不含重复项的清单。如果某个等式重复出现，我们将采用论文中最先出现的那个，并重新编号。

(711) $$B\left(g \otimes 1_H; G, x_1x_2\right) = 0. \, (556)$$

(712) $$B(x_1 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \, (544)$$

(713) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, gx_1x_2) = 0 \ . (491)$$

(714) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \ \ (488)$$

(715) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0. \, (485)$$

(716) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \ \ (487)$$

(717) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \, (681)$$

(718) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \, (680)$$

(719) $$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \, (595)$$

(720) $$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0 \, (613)$$

现在我们取等式（45）的完整清单，并在其中消去上述各项。

46.2. **所有等式列表 1.**

46.2.1 . G.

$$\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_1\right) + \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) = 0 \ \ (437)$$

$$2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \, (438)$$

$$2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \, (439)$$

$$\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0. \, (440)$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0. \, (441)$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0 \, (442)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + \\ +\gamma_1 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \end{array} = 0. \, (443)$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0. \, (444)$$

$$\gamma_1[-B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] = 0. \, (445)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \, (446)$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \\ +\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1)\right] \end{array} = 0. \, (447)$$

$$2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \ \ (448)$$

$$\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \, (449)$$

$$\gamma_1[B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \, (450)$$

$$\gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)\right] = 0 \, (451)$$

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \, (452)$$

$$\alpha \left[-B(g \otimes 1_H; g, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; g, gx_1x_2)\right] = 0. \, (453)$$

$$\gamma_1[B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)] = 0. \, (454)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \, (455)$$

$$\alpha[-B(g \otimes 1_H; g, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \, (456)$$

$$2B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \, (457)$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2). \, (458)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+ \\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right] \\ \gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0 \end{array} =0.\,(459)$$

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0\,(461)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(462)$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H) \\ +\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right] \end{array} =0.\,(463)$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0=0\,(464)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(466)$$

$$\gamma_2[B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)]=0\,(467)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(468)$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0.\,(469)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(470)$$

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(471)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(472)$$

$$\gamma_2[B(g\otimes 1_H,G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.=0.\,(473)$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(474)$$

$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(475)$$

$$+B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(476)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(477)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \end{array} =0.\,(478)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \end{array} =0.\,(479)$$

$$+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0\,(481)$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1) \end{array} =0.\,(483)$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2) \end{array} =0\,(484)$$

$$-2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0\ \ (487)$$

$$-\gamma_1[1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;x_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;x_2,x_1)]$$

$$-2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H=0.\,(489)$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)$$

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(493)$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+$$

$$-\gamma_1[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(497)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right]+\\ +\gamma_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}=0.\,(501)$$

$$\begin{array}{c}2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]\\ \gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]\end{array}\quad(502)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+\\ -\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]\end{array}=0\,(503)$$

$$\begin{array}{c}2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]\\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]\end{array}=0.\,(504)$$

$$\begin{array}{c}\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]\\ +\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]=0\,(506)\\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(507)\\ \begin{array}{c}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]\end{array}=0.\,(508)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)+\\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{array}=0.\,(509)$$

$$\begin{array}{c}\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](510)\\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0.\\ \begin{array}{c}2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\\ +\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]\end{array}=0.\,(511)\\ \begin{array}{c}2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\\ +\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]\end{array}=0.\,(512)\\ \gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(513)\\ \gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(514)\\ 2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;G,g)+B(x_2\otimes 1_H;G,g)\right]=0.\end{array}$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0.\,(515)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0\,(516)$$

$$\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(517)$$

$$\begin{array}{c}-\gamma_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(518)\\ -2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0\\ \gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0\,(519)\\ -\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0.\,(520)\end{array}$$

$$-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(521)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(522)$$

$$-2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+ \tag{523}$$
$$+\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]$$
$$=0$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{524}$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{525}$$
$$-\gamma_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]+$$
$$-2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]=0 \tag{526}$$
$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \tag{527}$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{528}$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{529}$$

46.2.2. X_1.

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)-\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0. \tag{539}$$
$$+\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+ \tag{540}$$
$$+2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)=0$$

$$\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0. \tag{541}$$

$$2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\lambda B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;G,g)=0. \tag{542}$$
$$+2B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0. \tag{543}$$

$$B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B\left(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2\right)=0 \tag{545}$$
$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+ \tag{546}$$
$$+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$-2\beta_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0. \tag{547}$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \tag{548}$$

$$-2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=-2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \tag{549}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0. \tag{550}$$
$$2\beta_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]+$$
$$-\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,g) \tag{551}$$
$$-\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0. \tag{552}$$

$$-2\beta_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2\right). \tag{554}$$
$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0 \tag{555}$$
$$\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=-2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right). \tag{557}$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+\lambda\left[-B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right] \tag{558}$$
$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$
$$2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0 \tag{559}$$

$$-\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+$$
$$-2\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]=0 \quad (560)$$

$$\gamma_1\left[-B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0 \quad (561)$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_1;X_2,gx_1)=0. \quad (563)$$

$$\begin{aligned}&-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]\\ =\quad&-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g). \quad (564)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]\\ =\quad&\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1). \quad (565)\end{aligned}$$
$$-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2). \quad (566)$$

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (567)$$
$$-2B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0.$$
$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right]=-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H). \quad (568)$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0. \quad (569)$$

$$\begin{aligned}&\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]\\ =\quad&2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)-2B\left(x_2\otimes 1_H;G,g\right). \quad (570)\end{aligned}$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0. \quad (571)$$

$$-\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+$$
$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2). \quad (572)$$

$$0=-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2\right]-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2). \quad (573)$$
$$0=-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2). \quad (574)$$

$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \quad (575)$$
$$+B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2). \quad (576)$$

$$\begin{aligned}0\quad=\quad&\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (577)\\ &+\left[\begin{array}{c}2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]\end{aligned}$$

$$0=+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2). \quad (578)$$
$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=-2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] \quad (579)$$
$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0 \quad (580)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (581)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0 \quad (582)$$
$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0 \quad (583)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0. \quad (584)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0. \quad (585)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0. \quad (586)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0. \quad (587)$$

$$\lambda\begin{bmatrix} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{bmatrix}=0 \quad (589)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0 \quad (591)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (592)$$

$$2\beta_1\begin{bmatrix} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{bmatrix}$$
$$+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0. \quad (593)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0. \quad (594)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+ \quad (596)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda\begin{bmatrix} -B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{bmatrix}=0 \quad (597)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0 \quad (600)$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (604)$$
$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \quad (605)$$
$$=-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right]+$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right].$$

$$-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right] \quad (606)$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]=0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]+ \quad (607)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+$$
$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$(609)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.$$
$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (610)$$
$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]=0 \quad (611)$$
$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (612)$$
$$+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0 \quad (614)$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (615)$$
$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (616)$$

$$+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (617)$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] \quad (618)$$
$$+\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0 \quad (619)$$

$$+\lambda\begin{bmatrix} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix}$$
$$-\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0 \quad (620)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]$$
$$+\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0 \quad (621)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]+ \quad (622)$$
$$+\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+ \quad (623)$$
$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0$$

$$2\beta_1\begin{bmatrix} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix} \quad (624)$$
$$-\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right) \quad (625)$$
$$-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$

$$2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right] \quad (626)$$
$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+ \quad (627)$$
$$-\begin{bmatrix} 2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix}=0$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H) \quad (628)$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (629)$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]$$
$$+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0 \quad (630)$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (631)$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

46.2.3. X_2.

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)\,(640)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\,(641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(643)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0\,(644)$$
$$\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)-2B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0645$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;1_H,gx_1)=0.\,(646)$$
$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)+2B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)$$
$$3B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)\,(648)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\,(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\quad=\quad 0$$
$$B\,(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+B(g\otimes 1_H,G,gx_1)=0\,(649)$$
$$2B(g\otimes 1_H;G,1_H)-\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)\,(650)$$
$$+2B(g\otimes 1_H;G,1_H)+2B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0$$
$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,g)\,(652)$$
$$-\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0$$

$$\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)=0\,(653)$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right](654)$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)=0.$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(655)$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2B\,(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$
$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right]+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(656)$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B\,(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(657)$$

$$\lambda\left[B\,(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right](658)$$
$$+2-B(x_1\otimes 1_H;G,g_1)+2B\,(x_1\otimes 1_H;G,g)=0.$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)\right](659)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)=0.$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(660)$$
$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)$$

$$-2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

(661)

$$+\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\right]$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)=0$$

$-\gamma_2 B($ (662)
$+2B($ $+2B($ $=0.\beta_2\left[-B\right.$
$\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_2\right)+B($ $\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2\right)]$ (663)$-B($ $+B($ $=0B($ $+B($
$\otimes 1_H;\ G、\ x_1x_2)=0$ (664)$B($ $+B($
$\otimes 1_H;\ G、\ gx_2)=0$ (665)$B($ $+B($
$\otimes 1_H;\ G、\ x_1x_2)=0$ (666)2 $\beta_2\left[B(\right.$ $+B($
$\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_2\right)]$ (667)$-\gamma_2 B($ $+\lambda B($
$gx_1)=0.\gamma_2 B($ $+\lambda B($
(668)+ $2\beta_2 B($ $-\gamma_2 B($
(669)$+2B($ $=0\beta_2\left[B(\right.$ $+B($
$\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2\right)]=0$ (670)$2\beta_2 B($ $-\lambda B($
$\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2)$ (671)$+2B($ $=02B($
$1_A、\ 1_H)+\gamma_2\left[B(\right.$ $+B($
$+\lambda\left[B(\right.$ $+B($ $\left.\left.\otimes 1_H;\ G、\ x_2\right]\right.$ (672)
$\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_2)\right]=0.\gamma_2 B($
$-\lambda B($ (673)$+2\left[+B(\right.$
$+B($ $\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2)\right]=0\lambda\left[B(\right.$ $+B($
$\left.\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2)\right]=0$ (674)$\gamma_2 B($ $+\lambda B($
$g)=0.$ (675)$2\beta_2 B($ $+\gamma_2 B($
(676)$+\lambda B($ $=02\beta_2 B($
$+\gamma_2 B($ (677)$+\lambda B($ $=0.\gamma_2 B$
$\otimes 1_H;\ G、\ gx_1x_2)+$ (678)$+2B($ $=0.$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) + = 0. \quad (679)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \quad (682)$$

$$\begin{aligned} & 2\beta_2 \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] \quad (683) \\ = \quad & 0. \end{aligned}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) = 0. \quad (685)$$

$$\begin{aligned} & -\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) + \\ -\lambda \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] \quad = \quad & 0. \quad (686) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \quad (687) \\ +2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g) = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) - \quad (688) \\ \gamma_2 \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g) \quad (691) \\ +\lambda \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0. \end{array}$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0. \quad (692)$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 \left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, 1_H) \right] \quad (693) \\ +\lambda \left[-1 + B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) \right] = 0. \end{array}$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, g) = 0. \quad (694)$$

$$\lambda \left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) \right] = 0. \quad (695)$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 \left[-1 + B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2) \right] \quad (696) \\ +\gamma_2 \left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_1) \right] + \\ -\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1) = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma_2 \left[B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) \right] \quad (697) \\ + \\ + \left[+2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) \right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) - B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g) \right] \quad (698) \\ +\gamma_2 \left[-B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2) \right] \\ = 0. \end{array}$$

$$-\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, 1_H) + \lambda \left[+B(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H) - B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) \right] = 0 \quad (699)$$

$$\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, x_1x_2) - \lambda B(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0 \quad (700)$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 \left[B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \right] \quad (701) \\ +\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1) - \lambda B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \end{array}$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2) \quad (702)$$
$$+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$+2\ =0.$$

$$2\beta_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (703)$$
$$+\lambda\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (704)$$
$$+\lambda B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0.$$

$$2\beta_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right] \quad (705)$$
$$-\gamma_2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (706)$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)+\gamma_2\left[\begin{array}{c}-B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+\\-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right] \quad (707)$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]=0.$$

$$2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+ \quad (708)$$
$$-\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \quad (709)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H) \quad (710)$$
$$+\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

46.3. 单项式等式列表 1. 我们列出目前得到的新单项式等式，并提取常数。

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)=0. \quad (441)$$
$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0 \quad (442)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \quad (548)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \quad (574)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \quad (578)$$
$$B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0 \quad (559)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \quad (574)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0. \quad (578)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0. \quad (543)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0 \quad (464)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0 \quad (644)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0 \quad (487) \text{ this is } 716$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0.\,(586)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0\,(481)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0.\,(679)$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(569)$$

我们像之前一样取其中一个重复项，并重新标记它们。

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)=0.\,(441) \tag{721}$$
$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0\,(442) \tag{722}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(548) \tag{723}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0.\,(543) \tag{724}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(464) \tag{725}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0\,(644) \tag{726}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0.\,(586) \tag{727}$$

$B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ x_1x_2)=0$.我们不考虑这一点（680），因为它就是（569）

现在我们取所有等式的完整列表（46.2），并消去其中上述各项 .

46.4. **所有等式列表 2**。

46.4.1 . G.

$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0\ \ (437)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0\,(438)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(439)$$

$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\,(440)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,g)+\\ +\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{gathered}=0.\,(443)$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(446)$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,1_H)=0.\,(447)$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\gamma_1B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\ \ (448)$$
$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(449)$$

$$\gamma_1[B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(450)$$

$$B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=0\,(451)$$
$$-\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)=0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;g,gx_1x_2)\right]=0.\,(453)$$
$$0=0.\,(454)$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(455)$$

$$\alpha[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(457)$$

$$0 = 0. \quad (458)$$

$$\begin{gathered} 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, g)+ \\ -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] \end{gathered} = 0. \quad (459)$$

$$B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0 \quad (460)$$

$$2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \quad (462)$$

$$\begin{gathered} 2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) \\ +\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, x_2\right] \end{gathered} = 0. \quad (463)$$

$$0 = 0 \quad (464)$$

$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \quad (465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \quad (466)$$

$$0 = 0 \quad (467)$$

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \quad (468)$$

$$B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \quad (469)$$

$$\alpha \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \quad (470)$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \quad (471)$$

$$\alpha \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \quad (472)$$

$$\gamma_2[B(g \otimes 1_H, G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. = 0. \quad (473)$$

$$B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \quad (474)$$

$$\gamma_1[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \quad (475)$$

$$B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0. \quad (476)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \quad (477)$$

$$\begin{gathered} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \end{gathered} = 0. \quad (478)$$

$$\begin{gathered} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \end{gathered} = 0. \quad (479)$$

$$0 = 0 \quad (481)$$

$$\begin{gathered} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \end{gathered} = 0. \quad (483)$$

$$\begin{gathered} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{gathered} = 0 \quad (484)$$

$$0 = 0 \quad (487)$$

$$-\gamma_1[1-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; x_1, x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H; x_2, x_1)]-2\alpha B(x_1x \quad (489)$$

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g)+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H; g, gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_1, gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1)] = 0 \quad (493)$$

$$\begin{gathered} -2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)+ \\ -\gamma_1[-B\left(x_1x_2 \otimes 1_H; g, gx_1x_2\right) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx \end{gathered} = 0 \quad (497)$$

$$\begin{gathered} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+ \\ +\gamma_1 \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\right] + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \end{gathered} = 0. \quad (501)$$

$$\begin{array}{c} 2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\quad g)\right] \\ \gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,\quad gx_1)\right] \end{array} \tag{502}$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad x_1)\right]+ \\ -\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,x_1)\ +\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,x_1x_2)\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,x_2)\right] \end{array} = 0 \tag{503}$$

$$\begin{array}{c} 2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1)\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\quad g)\right] \\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,\quad gx_2)\right] \end{array} = 0. \tag{504}$$

$$\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad 1_H)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad x_1)\right]+$$
$$+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\quad 1_H)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad x_2)\right]=0 \tag{506}$$

$$0=0. \tag{507}$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad g)+ \\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\right] \end{array} = 0. \tag{508}$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_2)+ \\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_2)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1x_2)\right]+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_2) \end{array} = 0. \tag{509}$$

$$\begin{array}{c} \gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1)\right] \\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;\ G,\quad g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_2)\right]=0. \end{array} \tag{510}$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad x_1)\ -\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad x_1x_2)\ =0. \tag{511}$$

$$\begin{array}{c} 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\quad 1_A,x_2) \\ +\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad x_2)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad x_1x_2)\right] \end{array} = 0. \tag{512}$$

$$\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\ -\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\ =0. \tag{513}$$

$$\gamma_2\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\quad g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,\quad gx_2)+ \\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1x_2) \\ +2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad g)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G,\quad g)\right]=0. \end{array}\right] \tag{514}$$

$$B\left(x_2\otimes\ 1_H;\ \ 1_A,\ \ x_1x_2\right)\ =0. \tag{515}$$

$$B\left(g\otimes 1_H;\ \ X_2,\ \ 1_H\right)\ =0 \tag{516}$$

$$\gamma_2B(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,gx_1x_2)\ -2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ \ G,gx_1x_2)\ =0. \tag{517}$$

$$\begin{array}{c} -\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\quad g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,\quad gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1x_2)\right]+ \\ -2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H;\ G,\quad g)\ -B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,\quad gx_2)\right]=0 \end{array} \tag{518}$$

$$B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ 1_A,x_1x_2)\ =0 \tag{519}$$

$$0=0. \tag{520}$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\quad gx_1x_2)\ +2\alpha B(x_1\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\ =0. \tag{521}$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\right]=0. \tag{522}$$

$$\begin{array}{c} -2\left[-B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad 1_H)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\quad x_1)\right]+ \\ \gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,1_H)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,x_2)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,x_1x_2)\right] \\ =0 \\ \gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,\quad gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,\quad gx_1x_2)\right]=0. \end{array} \tag{523}$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \quad (525)$$

$$-\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]$$
$$-2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]=0 \quad (526)$$

$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0. \quad (527)$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \quad (528)$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0. \quad (529)$$

46.4.2. $X_{1\circ}$

$\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,x_2)\ -\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,1_H)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,1_H)\ =0.$(539) $+\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ X_2,gx_1)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +(540)+2B($ $g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ =0\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,$ $gx_2)\ -2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ =0.(541)2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ G,$ $gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)\ =0.(542)0=0.(543)B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,$ $gx_1x_2)\ =0$(545)$+\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +(546)+2B($ $g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ =0.-2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ +2B($ $x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ =0.(547)0=0.(548)0=0(549)B(x_1\otimes 1_H;$ $G,gx_1x_2)\ -B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ =0.(550)2\beta_1\left[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\right.$ $\left.gx_1)\right]+-\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ =\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)$ (551)$0=0.$(552)$-2\beta_1 B(g\otimes 1_H;$ $1_A,gx_1x_2)\ =\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ .$ (554)$B(g\otimes 1_H;\ G,$ $1_H)\ =0$(555)$\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ =-2B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)\ .$ (557)$2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,$ $1_H)\ -\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,x_2)\ +(558)+\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,1_H)\ =0 2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,x_1x_2)$ $=0$(559)$-\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ -\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +-2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\right.$ $\left.+B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\right]=0(560)\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\right.$ $\left.\right]=0$(561)

$2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) + -\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) - B(x_1\otimes x_1;\ X_2, gx_1) = 0.$ (563)$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + \lambda[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g) - B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)]$ $= \quad -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, g) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, g).$ (564)$\lambda[-B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, x_1x_2)$ $] = +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1).$ (565)$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_2) + 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_2)$ $= 0.$ (566)$\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)$ (567)$-2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,$ $gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = 0\lambda[B(g\otimes 1_H;\ G, 1_H) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, x_2]$ $= \quad -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, 1_H).$ (568)$B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2) = 0.$ (569)$\lambda[B(g\otimes 1_H;\ G,$ $gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)]= \quad 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1) - 2B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\,.$ (570)$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_2)$ $= 0.$ (571)$-\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) + -2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,$ $gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2).$ (572)$0 = -\gamma_1[B(g\otimes 1_H;\ G, 1_H) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,$ $x_2] + -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, 1_H) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_2).$ (573)$0 = 0.$ (574)$B(x_1\otimes 1_H;$ $1_A, gx_1) + B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)$ (575)$+B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)$ $= 0 2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = \gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2) + 2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2).$ (576)

$$0 \quad = \quad \gamma_1[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)]$$ (577)$$+\left[\begin{array}{c} 2B(\\ g\otimes 1_H\ 1_A\ g\ +2B\ x_2\otimes\ 1_H\ 1_A\ gx_2\ +;,)\,(\,;,)\,(\,;,)\,(\,;,gx_1x_2) \\ +2B\ x_1\otimes 1_H\ 1_A\ gx_1\ +2B\ gx_1x_2\otimes 1_H\ 1_A \end{array}\right] 0 = 0.$$

(578)$\lambda[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)]= \quad -2[B(x_2\otimes 1_H;\ G, g) - B($ $gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1)]$ (579)$\beta_1[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)] = 0$ (580)B $(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2) = 0$ (581)$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g) = 0$ (582)$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, x_1) + \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_1) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1)$ $= 0$ (583)

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0. \quad (584)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0. \quad (585)$$
$$0=0. \quad (586)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0. \quad (587)$$

$$\lambda\left[+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (589)$$
$$=0$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0 \quad (591)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (592)$$

$$\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]=0. \quad (593)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0. \quad (594)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+ \quad (596)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0 \quad (597)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0 \quad (600)$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (604)$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \quad (605)$$
$$=-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right].$$

$$-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right] \quad (606)$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]=0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]+ \quad (607)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]+ \quad (608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$(609)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.$$
$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (610)$$
$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \quad (611)$$
$$=0$$
$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (612)$$
$$+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right]-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0 \quad (614)$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (615)$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (616)$$

$$+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$\begin{gathered}2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right](617)\\ +\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](618)\\ +\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(619)\\ +\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]\\ -\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(620)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)+\lambda\left[B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)\right]\\ =0\,(621)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)+(622)\\ +\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+(623)\\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\beta_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right](624)\\ -\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)(625)\\ -\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_2)\right](626)\\ +\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(627)\\ -\left[\begin{array}{c}2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)+(628)\\ +\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\,(629)$$

$$\begin{gathered}\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+\\ +\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(630)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(631)\\ +B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\end{gathered}$$

46.4.3 . X_2.

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, 1_H) + (640)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_1)\,(641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\,(642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + 2B(g\otimes 1_H; 1_A, g) = 0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + \lambda B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2\otimes 1_H; G, g) = 0\,(643)$$
$$0 = 0\,(644)$$
$$\lambda B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) - 2B(x_2\otimes 1_H; G, x_2) = 0645$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H; 1_H, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2\otimes 1_H; 1_H, gx_1) = 0.\,(646)$$
$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2) + 2B(x_2\otimes 1_H; 1, x_1x_2) = 0\,(647)$$
$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2)\,(648)$$
$$+B(x_2\otimes 1_H; X_2, x_1) + B\,(x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \quad = \quad 0$$
$$B\,(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + B(g\otimes 1_H, G, gx_1) = 0\,(649)$$
$$2B(g\otimes 1_H; G, 1_H) - \lambda B(g\otimes 1_H; G, x_1x_2)\,(650)$$
$$+2B(g\otimes 1_H; G, 1_H) + 2B(x_2\otimes 1_H; G, x_2) = 0$$
$$B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0\,(651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; G, g)\,(652)$$
$$-\lambda\left[B(g\otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, g) = 0$$

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0\,(653)$$
$$(654)$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0.$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\,(655)$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2B\,(x_1\otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0$$
$$\lambda B(g\otimes 1_H; G, 1_H) + 2B(gx_1x_2\otimes 1_H; G, 1_H) = 0\,(656)$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B\,(g\otimes 1_H; G, gx_1) + 2B(x_2\otimes 1_H; G, g) = 0.\,(657)$$

$$\lambda\left[B\,(g\otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right](658)$$
$$+2 - B(x_1\otimes 1_H; G, g_1) + 2B\,(x_1\otimes 1_H; G, g) = 0.$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, 1_H) + (659)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, 1_H) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0.$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] + (660)$$
$$-2B(x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)$$

$$-2B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ =0.(661)B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_2)\ =0-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ (662)+2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ =0.\beta_2\left[-B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\right](663)-B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ =0B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_2)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\ =0\ (664)B(x_1\otimes 1_H;\ G, g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0\,(665)B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, x_2)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\ =0\,(666)$$

$$2\qquad \beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)\right](667)-\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ =0.B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_2)\ =0.\,(668)+\qquad 2\beta_2 B\left(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2\right)\ -\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\,(669)+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1\right)\ =0\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)\right]=0\,(670)2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ -\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\,(671)+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ G, g\right)\ =0$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ 1_H)\ +\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ 1_H)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ x_2\right](672)+\lambda B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,\ \ x_1x_2)\ =0.$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2)-\lambda B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right)(673)$$
$$+2\left[+B(g\otimes 1_H; 1_A, g)+B(x_2\otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right]=0.$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H; G, gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right]=0\,(674)$$
$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, g)=0.\,(675)$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_1)\,(676)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_1)=0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; X_2, x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; G, x_2)\,(677)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; X_1, x_2)=0.$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2)+\ (678)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_1)=0.$$

$$0 = 0. \quad (679)$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G, g)\ - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_2)\ = 0. \quad (682)$$

$$\begin{array}{l} 2\beta_2 \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ \ x_2) \end{array} \right] \quad (683) \\ = \quad 0. \end{array}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1, gx_2)\ + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1, g)\ = 0. \quad (685)$$

$$\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ \ x_2) \end{array} \right] = 0. \quad (686)$$

$$2B\ (x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ 1_A, gx_2)\ + \quad (687)$$

$$+2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2, g)\ = 0.$$

$$2B\ (x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ X_1,\ \ g)\ - \quad (688)$$

$$\gamma_2 \left[\begin{array}{c} -B(\qquad\qquad x_1x_2 \otimes 1_H\ G\ gx_1x_2\ +\ ;\ ,\ )\ (\ ;\ \ ,\ ) \\ x_1x_2 \otimes 1_H \qquad B \qquad\qquad GX_2\ gx_1\ - B\ x_1x_2 \otimes 1_H \\ (\ ;\ GX_1,\ \ gx_2) \end{array} \right] = 0.$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ G, g) \quad (691)$$

$$+\lambda \left[\begin{array}{c} -B(\qquad\qquad x_1x_2 \otimes 1_H\ G\ gx_1x_2\ +\ ;\ ,)\ (\ ;\ ,)\ (\ ; \\ x_1x_2 \otimes 1_H \qquad B \qquad\qquad GX_2\ gx_1\ - B\ x_1x_2 \otimes 1_H \\ GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0.$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1)\ = 0. \quad (692)$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_2)\ + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ x_2) \quad (693)$$

$$+\lambda\left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ x_1x_2)\ + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1)\right] = 0.$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)\ + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_2, g)\ = 0. \quad (694)$$

$$\lambda\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_2,\ \ gx_1)\right] = 0. \quad (695)$$

$$2\beta_2\left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2)\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1, x_2)\right] \quad (696)$$

$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ x_1)\right] +$$

$$-\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1, x_1)\ = 0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ \ gx_2)\right] \quad (697)$$

$$+$$

$$+\left[+2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1)\ + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ \ g)\right] = 0.$$

$$\begin{array}{l} 2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1)\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ \ g)\right] \quad (698) \\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ GX_1,\ \ gx_2)\right] \\ = \quad 0. \end{array}$$

$$-\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ G, 1_H)\ + \lambda\left[+B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, 1_H)\ - B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, x_1)\right] = 0 \quad (699)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ G, x_1x_2)\ = 0 \quad (700)$$

$$2\beta_2\left[B(x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\right] \quad (701)$$

$$+\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ G, gx_1)\ - \lambda B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ = 0.$$

$$2\beta_2 B\ (x_1 \otimes 1_H;\ \ 1_A, gx_2)\ + \gamma_2 B\ (gx_1x_2 \otimes 1_H;\ \ G, gx_2)\ \quad (702)$$

$$+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (703)$$
$$+\lambda\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (704)$$
$$+\lambda B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0.$$

$$2\beta_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right] \quad (705)$$
$$-\gamma_2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (706)$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2) \quad (707)$$
$$+\lambda B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.$$

$$2\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)\right]+ \quad (708)$$
$$-\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \quad (709)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H) \quad (710)$$
$$+\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;G,1_H)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)\\+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,x_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

46.5. 单项式等式列表 2。我们列出目前得到的新单项式等式，并提取常数

$$B(g\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(555)$$
$$B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=0\,(451)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(457)\text{ this is already in 46.1}$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(474)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(527)$$
$$B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=0\,(516)$$
$$B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0\,(559)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(460)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(469)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(476)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(515)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(519)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0.\,(668)$$

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1)=0\,(653)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0\,(653)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0.\,(654)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0\,(661)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0.\,(569)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0\,(581)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0\,(615)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0\,(615)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0\,(700)$$

我们像之前一样取其中一个重复项，并重新标记它们

$$B(g \otimes 1_H; G, 1_H) = 0\,(555) \tag{728}$$

$$B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) = 0\,(451) \tag{729}$$

$$B\,(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0\,(559) \text{ this was already in } (46.3)$$
$$B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0.\,(469) \text{ this was already in } (46.3)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, x_2) = 0.\,(668) \tag{730}$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0\,(653) \tag{731}$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0.\,(654) \tag{732}$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0.\,(569) \text{ this was already in } (46.3)$$

现在，我们取所有等式列表 1（46。4），并消去其中上述各项。

46.6. **全部等式列表 3**。

46.6.1. G。

$$\gamma_1 B\,(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) + \gamma_2 B\,(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0\ \ (437)$$

$$2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0\,(438)$$

$$2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \gamma_1 B\,(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0.\,(439)$$

$$\gamma_1 B\,(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B\,(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0.\,(440)$$

$$\begin{gathered} 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + \\ +\gamma_1\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \end{gathered} = 0.\,(443)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(446)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) = 0.\,(447)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) = 0\ \ (448)$$
$$\gamma_1 B\,(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(449)$$

$$\gamma_1[B\,(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0.\,(450)$$

$$0 = 0\,(451)$$
$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_1) = 0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-B(g \otimes 1_H; g, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; g, gx_1x_2)\right] = 0.\,(453)$$
$$0 = 0.\,(454)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(455)$$

$$\alpha[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)$$
$$0=0.\,(457)$$
$$0=0.\,(458)$$
$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]\end{array}=0_{\circ}\,(459)$$
$$0=0\,(460)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(462)$$
$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+\gamma_2 B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0.\,(463)$$
$$0=0\,(464)$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(466)$$
$$0=0\,(467)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(468)$$
$$0=0.\,(469)$$
$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(470)$$

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(471)$$
$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(472)$$

$$\gamma_2[B(g\otimes 1_H,G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.=0.\,(473)$$
$$0=0.\,(474)$$

$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(475)$$
$$0=0.\,(476)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(477)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\end{array}=0.\,(478)$$
$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}=0.\,(479)$$

$$0=0\,(481)$$
$$\begin{array}{c}2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}=0.\,(483)$$
$$\begin{array}{c}2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}=0\,(484)$$

$$0=0\ \ (487)$$

$$\begin{array}{c}-\gamma_1[1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;x_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;x_2,x_1)]+\\ -2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H=0.\,(489)\end{array}$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)+$$

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(493)$$

$$\begin{gathered}-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+\\ -\gamma_1[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(497)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\\ +\gamma_1\left[\begin{array}{c}-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\end{array}\right]+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{gathered}=0.\,(501)$$

$$\begin{gathered}2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]\\ \gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]\end{gathered}\quad(502)$$

$$\begin{gathered}2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+\\ -\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]\end{gathered}=0\,(503)$$

$$\begin{gathered}2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]\\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]\end{gathered}=0.\,(504)$$

$$-\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(506)$$

$$0=0.\,(507)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]\end{gathered}=0.\,(508)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)+\\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{gathered}=0.\,(509)$$

$$\begin{gathered}\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](510)\\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0.\end{gathered}$$

$$0=0.\,(511)$$

$$0=0.\,(512)$$

$$\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(513)$$

$$\begin{gathered}\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(514)\\ 2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;G,g)+B(x_2\otimes 1_H;G,g)\right]=0.\end{gathered}$$

$$0=0.\,(515)$$

$$0=0\,(516)$$

$$\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(517)$$

$$\begin{gathered}-\gamma_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(518)\\ -2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$0=0\,(519)$$

$$0=0.\,(520)$$

$$-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(521)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(522)$$

$$2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)+\gamma_2B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(523)$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(524)$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(525)$$
$$-\gamma_1B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(526)$$
$$0=0.\,(527)$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(528)$$
$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(529)$$

46.6.2. X_1。

$$\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_2)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ 1_H)\ =0.(539)$$

$$+\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_1)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ X_2,\ gx_1)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)\ +(540)$$
$$+2B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ g)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)\ =0$$

$$\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2)\ -2\beta_1B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1x_2)\ =0.(541)$$

$$2\beta_1B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_1)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ g)\ =0.(542)$$
$$0=0.(543)$$

$$B\left(g\otimes 1_H;\ G,gx_2\right)\ -B\left(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2\right)\ =0\,(545)$$
$$+\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1x_2)\ +\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_1)\ +(546)$$
$$+2B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ =0.$$

$$-2\beta_1B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ =0.(547)$$
$$0=0.\,(548)$$

$$0=0(549)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)\ -B(g\otimes 1_H;\ G,\ gx_2)\ =0.(550)$$

$$\begin{aligned}&2\beta_1\left[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\right]-\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +\\ =\ &\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)\,(551)\end{aligned}$$

$$0=0.\,(552)$$

$$-2\beta_1B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1x_2)\ =\gamma_1B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)\ -2B\left(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2\right)。\ (554)$$
$$0=0(555)$$
$$\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)\ =-2B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ g)。\ (557)$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,1_H)\ -\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,x_2)\ =0.(558)$$
$$0=0(559)$$

$$-\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ -\gamma_1B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +$$
$$-2\left[B(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,g)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ \ 1_A,gx_1)\right]=0\,(560)$$

$$\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\right]=0\,(561)$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1\otimes x_1;X_2,gx_1)=0. \quad (563)$$

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right] \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g). \quad (564) \end{aligned}$$

$$0=0. \quad (565)$$

$$0=0. \quad (566)$$

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\,(567)$$

$$-2B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2\right)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0.$$

$$\lambda B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2=-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H). \quad (568)$$

$$0=0. \quad (569)$$

$$\begin{aligned} & \lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \\ = \quad & 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)-2B\left(x_2\otimes 1_H;G,g\right). \quad (570) \end{aligned}$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0. \quad (571)$$

$$-\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+$$

$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2). \quad (572)$$

$$0=-\gamma_1 B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H). \quad (573)$$

$$0=0. \quad (574)$$

$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(575)$$

$$+B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=\gamma_1 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2). \quad (576)$$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+ \quad (577) \\ & +\left[\begin{array}{c} 2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}\right] \end{aligned}$$

$$0=0. \quad (578)$$

$$\begin{aligned} & \lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right] \\ = \quad & -2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]\,(579) \end{aligned}$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(580)$$

$$0=0\,(581)$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(582)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+$$

$$+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0\,(583)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+$$

$$+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0. \quad (584)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0. \quad (585)$$

$$0=0. \quad (586)$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0. \quad (587)$$

$$\lambda\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]=0 \quad (589)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0 \quad (591)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (592)$$

$$\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]=0. \quad (593)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0. \quad (594)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+ \quad (596)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+$$
$$+\lambda\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0 \quad (597)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0 \quad (600)$$

$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \quad (604)$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \quad (605)$$
$$=-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right].$$

$$-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right] \quad (606)$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]=0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]+ \quad (607)$$
$$+$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+$$
$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0. \quad (609)$$

$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (610)$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \quad (611)$$
$$=0$$

$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \quad (612)$$

$$\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)-\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0 \quad (614)$$

$$0=0 \quad (615)$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (616)$$
$$+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right](617)$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](618)$$
$$+\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(619)$$
$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$-\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(620)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(621)$$

$$0=0\,(622)$$

$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+(623)$$
$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0$$

$$2\beta_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right](624)$$
$$-\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)(625)$$
$$-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$
$$2B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)+\gamma_1 B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(626)$$
$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(627)$$
$$-\left[\begin{array}{c}2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0$$
$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(628)$$
$$0=0\,(629)$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+$$
$$+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(630)$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right](631)$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

46.6.3. X_2.

$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(640)$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ (641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1)\ =0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\ (642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +2B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ =0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ G,gx_1)\ +2B(x_2\otimes 1_H;\ G,g)\ =0\,(643)$$
$$0=0(644)$$
$$0=0645$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;1_H,gx_1)=0. \quad (646)$$

$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0 \quad (647)$$

$$B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0 \quad (648)$$

$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+B(g\otimes 1_H,G,gx_1)=0 \quad (649)$$

$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0 \quad (650)$$

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0 \quad (651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,g) \quad (652)$$

$$-\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0$$

$$0=0 \quad (653)$$

$$0=0. \quad (654)$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \quad (655)$$

$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)=0$$

$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0 \quad (656)$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0. \quad (657)$$

$$\lambda\left[B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (658)$$

$$+2-B(x_1\otimes 1_H;G,g_1)+2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)=0.$$

$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0. \quad (659)$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]+ \quad (660)$$

$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)$$

$$-2B(g\otimes 1_H;1_A,g)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$0=0. \quad (661)$$

$$-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right) \quad (662)$$

$$+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0.$$

$$\beta_2\left[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right] \quad (663)$$

$$-B(x_2\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0$$

$$0=0 \quad (664)$$

$$B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0 \quad (665)$$

$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0 \quad (666)$$

$$2\qquad\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right] \quad (667)$$

$$-\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$0=0. \quad (668)$$

$$+\qquad 2\beta_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (669)$$

$$+2B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)=0$$

$$\beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \, (670)$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \, (671) \\ +2B \left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right) = 0 \end{array}$$

$$2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + \gamma_2 B(x_2 \otimes \ 1_H; G, x_2) = 0. \, (672)$$

$$\begin{array}{c} \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B \left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) (673) \\ +2 \left[+B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2)\right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \, (674) \\ \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \, (675) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) \, (676) \\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \, (677) \\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \, (678) \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \end{array}$$

$$0 = 0. \, (679)$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \, (682)$$

$$\begin{array}{c} 2\beta_2 \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] \, (683) \\ = \quad 0. \end{array}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \, (685)$$

$$\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] = 0. \, (686)$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \, (687) \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) - \, (688) \\ \gamma_2 \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) \, (691) \\ +\lambda \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} \right] = 0. \end{array}$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0. \, (692)$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \, (693)$$

$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]=0.$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0. \quad (694)$$

$$\lambda\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0. \quad (695)$$

$$\begin{aligned}&2\beta_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (696)\\ &+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+\\ &-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\gamma_2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right] \quad (697)\\ &+\\ &+\left[+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \quad (698)\\ &+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]\\ =\;& 0.\end{aligned}$$

$$-\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0 \quad (699)$$

$$0=0 \quad (700)$$

$$\begin{aligned}&2\beta_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (701)\\ &+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)-\lambda B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\beta_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2) \quad (702)\\ &+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]\\ &+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\beta_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (703)\\ &+\lambda\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-2\beta_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (704)\\ &+\lambda B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\beta_2\begin{bmatrix}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix} \quad (705)\\ &-\gamma_2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (706)\\ &-\lambda\begin{bmatrix}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{bmatrix}=0.\end{aligned}$$

$$0=0. \quad (707)$$

$$-2B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)-\gamma_2B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0. \quad (708)$$

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \quad (709)$$

$$2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)+\lambda B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0. \quad (710)$$

46.7. **单项式等式列表 3.** 我们列出上文通过去除常数得到的新幺半等式

$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\,(650)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0.\,(447)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0\ \ (448)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(640)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0.\,(659)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(621)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(666)$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(656)$$

我们像之前一样取其中一个重复项，并重新标记它们

$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\,(650)\ \text{ this is already in 46.1}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0.\,(447)\tag{733}$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0\ \ (448)\ \text{ this is already in 46.3}$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(640)\tag{734}$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(621)\ \text{ this was already in }(46.3)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(666)\ \text{ this was already in 46.5}$$
$$B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(656)\tag{735}$$

现在，我们取完整的等式列表（46.6），并在其中消去上面的项 .

46.8. **所有等式列表 4.**

46.8.1. G.

$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_1\right)+\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0\ \ (437)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0\,(438)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(439)$$

$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\,(440)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,g)+\\ +\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{gathered}=0.\,(443)$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(446)$$
$$0=0.\,(447)$$
$$0=0\ \ (448)$$
$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(449)$$

$$\gamma_1[B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(450)$$

$$0=0\,(451)$$
$$-\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)=0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;g,gx_1x_2)\right]=0.\,(453)$$
$$0=0.\,(454)$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(455)$$

$$\alpha[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)$$
$$0=0.\,(457)$$
$$0=0.\,(458)$$
$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]\end{array}=0.\,(459)$$
$$0=0\,(460)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(462)$$
$$0=0.\,(463)$$
$$0=0\,(464)$$
$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(466)$$
$$0=0\,(467)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(468)$$
$$0=0.\,(469)$$
$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(470)$$

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(471)$$
$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0\,(472)$$

$$\gamma_2[B(g\otimes 1_H,G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.=0.\,(473)$$
$$0=0.\,(474)$$

$$\gamma_1[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(475)$$
$$0=0.\,(476)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(477)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\end{array}=0.\,(478)$$
$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}=0.\,(479)$$

$$0=0\,(481)$$
$$\begin{array}{c}2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)\\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\end{array}=0.\,(483)$$
$$\begin{array}{c}2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)\\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}=0\,(484)$$

$$0=0\ \ (487)$$

$$-\gamma_1[1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;x_1,x_2)+$$
$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;x_2,x_1)]-2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H=0.\,(489)$$

$$-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)+$$

$$-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(493)$$

$$\begin{gathered}-2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+\\ -\gamma_1[-B(x_1x_2\otimes 1_H;g,gx_1x_2)+\\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)]=0\,(497)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\\ +\gamma_1\left[\begin{array}{c}-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\end{array}\right]+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)=0.\,(501)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]\\ \gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]\end{gathered}\quad(502)$$

$$\begin{gathered}2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+\\ -\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]=0\,(503)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]\\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0.\,(504)\end{gathered}$$

$$0=0\,(506)$$

$$0=0.\,(507)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0.\,(508)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)+\\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0.\,(509)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](510)\\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0.\end{gathered}$$

$$0=0.\,(511)$$

$$0=0.\,(512)$$

$$\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(513)$$

$$\begin{gathered}\gamma_2\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(514)\\ +2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;G,g)+B(x_2\otimes 1_H;G,g)\right]=0.\end{gathered}$$

$$0=0.\,(515)$$

$$0=0\,(516)$$

$$\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(517)$$

$$\begin{gathered}-\gamma_1\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+(518)\\ -2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0\end{gathered}$$

$$0=0\,(519)$$

$$0=0.\,(520)$$

$$-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(521)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(522)$$

$$0 = 0 \,(523)$$
$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \,(524)$$
$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \,(525)$$
$$0 = 0 \,(526)$$
$$0 = 0. \,(527)$$
$$\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \,(528)$$
$$\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \,(529)$$

46.8.2. X_1.

$$B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) = 0. \,(539)$$
$$+\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \,(540)$$
$$+2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, g\right) + B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \,(541)$$

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) = 0. \,(542)$$
$$0 = 0. \,(543)$$

$$B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B\left(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2\right) = 0 \,(545)$$
$$+\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \,(546)$$
$$+2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.$$

$$-2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0. \,(547)$$
$$0 = 0. \,(548)$$

$$0 = 0 \,(549)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \,(550)$$
$$2\beta_1 \left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \,(551)$$
$$0 = 0. \,(552)$$

$$-2\beta_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right). \,(554)$$
$$0 = 0 \,(555)$$
$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = -2B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right). \,(557)$$
$$B\left(g \otimes 1_H; 1_A, x_2\right) = 0. \,(558)$$
$$0 = 0 \,(559)$$

$$-\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) +$$
$$-2\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] = 0 \,(560)$$

$$\gamma_1 \left[-B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \,(561)$$

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1) = 0. \,(563)$$

$$-2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + \lambda\left[-B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g) - B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)\right]$$
$$= \quad -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, g) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, g). \quad (564) 0 = 0. (565) 0 = 0. (566) \lambda B($$
$$g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) - \gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) \quad (567) -2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) - 2B($$
$$gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = 0. B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, x_2) = 0. \quad (568) 0 = 0. (569) \lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G,\right.$$
$$\left. gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)\right] = \quad 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1) - 2B\,(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\,.$$
$$(570) -2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) + \lambda B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_2)$$
$$= 0. (571) -\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = -\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) + -2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A,$$
$$gx_2) - 2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2). \quad (572) 0 = 0. (573) 0 = 0. (574) B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)$$
$$+ B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \quad (575) + B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) = 0.$$

$$2\beta_1 B\,(g\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1x_2) = \gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2) + 2B(x_1\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_2)。 \quad (576)$$

$$0 \quad = \quad \gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1) + B(x_2\otimes\ 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\right] + \quad (577)$$
$$+\left[\begin{array}{l} 2B(\qquad g\otimes 1_H\ \ 1_A\ \ g\ \ + 2B\ \ x_2\otimes\ \ 1_H\ \ 1_A\ \ gx_2\ +;\ \ ,\ \ )\,(;\ \ ,\ \ )\,(;\ \ ,\ \ ) \\ \qquad +2B\ \ x_1\otimes 1_H\ \ 1_A\ \ gx_1\ \ + 2B\ \ gx_1x_2\otimes 1_H\ \ 1_A \\ (\ ;\ \ ,\ \ gx_1x_2)\end{array}\right] 0 = 0. (578) \lambda\left[B(g\otimes 1_H\ ;\ \ G,\ \ gx_1) + B(x_2\otimes\ \ 1_H\ ;\ \ G,\right.$$

$$\left. gx_1x_2)\right] = \quad -2\left[B(x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ g) - B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1)\right] \quad (579) \beta_1\left[B\right.$$
$$\left.(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1) + B(x_2\otimes\ \ 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\right] = 0 \quad (580) 0 = 0 \quad (581) \lambda B($$
$$x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_2,\ \ g) - \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ G,\ \ g) = 0 \quad (582)\ 2$$

$$\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ \ x_1) + \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ \ x_1) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ x_1) = 0 \quad (583)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, x_2) + \lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_2) = 0. \quad (584)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2\otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \quad (585)$$
$$0 = 0. \quad (586)$$
$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2\otimes 1_H; G, g) = 0. \quad (587)$$

$$\lambda\left[+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right](589)$$
$$=0$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0\,(591)$$
$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0.\,(592)$$

$$\left[\begin{array}{c}+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\end{array}\right]=0.\,(593)$$

$$\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(594)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+\quad(596)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0\,(597)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0\,(600)$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0.\,(604)$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\,(605)$$
$$=-\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right].$$

$$-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right](606)$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]=0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]+\quad(607)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right](608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$(609)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.$$
$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0\,(610)$$
$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right](611)$$
$$=0$$
$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0\,(612)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(614)$$
$$0=0\,(615)$$

$$-2\beta_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right](616)$$
$$+\gamma_1B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right](617)$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right](618)$$
$$+\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(619)$$

$$\lambda\left[\begin{array}{c}B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]+$$
$$-\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(620)$$

$$0=0\,(621)$$

$$0=0\,(622)$$

$$+\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+(623)$$
$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)]=0$$

$$2\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A,g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$(624)-\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;\ G,g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)(625)$$
$$-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(626)$$

$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(627)$$
$$-\left[\begin{array}{c}2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+\\+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0$$

$$0=0\,(628)$$
$$0=0\,(629)$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+$$
$$+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(630)$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right](631)$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

46.8.3. X_2。

$$0=0\,(640)$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\,(641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(643)$$
$$0=0\,(644)$$
$$0=0645$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;1_H,gx_1)=0.\,(646)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0\,(648)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+B(g\otimes 1_H,G,gx_1)=0\,(649)$$

$$0 = 0 \,(650)$$
$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \,(651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \,(652)$$
$$-\lambda \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0$$

$$0 = 0 \,(653)$$
$$0 = 0. \,(654)$$
$$+\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \,(655)$$
$$-2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0$$
$$0 = 0 \,(656)$$

$$2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + 2B(x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0. \,(657)$$

$$\lambda \left[B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] \,(658)$$
$$+2 - B(x_1 \otimes 1_H; G, g_1) + 2B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right) = 0.$$

$$0 = 0. \,(659)$$
$$\gamma_2 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] + \,(660)$$
$$-2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)$$
$$-2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.$$
$$0 = 0. \,(661)$$

$$-\gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \,(662)$$
$$+2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0.$$

$$\beta_2 \left[-B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] \,(663)$$
$$-B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0$$
$$0 = 0 \,(664)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \,(665)$$
$$0 = 0 \,(666)$$
$$2 \qquad \beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2)\right] \,(667)$$
$$-\gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.$$
$$0 = 0. \,(668)$$

$$+ \qquad 2\beta_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_2 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \,(669)$$
$$+2B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0$$

$$\beta_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \,(670)$$
$$2\beta_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \,(671)$$
$$+2B\left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right) = 0$$

$$0 = 0. \tag{672}$$

$$\begin{gathered}\gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) - \lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) \\ +2\left[+B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] = 0.\end{gathered} \tag{673}$$

$$\begin{gathered}\lambda\left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes\ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \\ \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0.\end{gathered} \tag{674}$$

$$\begin{gathered}2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) \\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) = 0.\end{gathered} \tag{676}$$

$$\begin{gathered}2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \\ +\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) = 0.\end{gathered} \tag{677}$$

$$\begin{gathered}\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.\end{gathered} \tag{678}$$

$$0 = 0. \tag{679}$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) - \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \tag{682}$$

$$\begin{gathered}2\beta_2 \left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array}\right] \\ = \quad 0.\end{gathered} \tag{683}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0. \tag{685}$$

$$\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) \\ -B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array}\right] = 0. \tag{686}$$

$$\begin{gathered}2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \\ +2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0.\end{gathered} \tag{687}$$

$$\begin{gathered}2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) - \\ \gamma_2 \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] = 0.\end{gathered} \tag{688}$$

$$\begin{gathered}2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) \\ +\lambda \left[\begin{array}{c} -B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array}\right] = 0.\end{gathered} \tag{691}$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0. \tag{692}$$

$$\begin{gathered}2\beta_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) \\ +\lambda\left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\right] = 0.\end{gathered} \tag{693}$$

$$\begin{gathered}B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \\ \lambda\left[B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)\right] = 0.\end{gathered} \tag{694}$$

$$2\beta_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (696)$$
$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+$$
$$-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right] \quad (697)$$
$$+$$
$$+\left[+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]=0.$$

$$\begin{aligned} & 2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \quad (698)\\ & +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right] \\ = \quad & 0. \end{aligned}$$

$$0=0 \quad (699)$$

$$0=0 \quad (700)$$

$$2\beta_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \quad (701)$$
$$+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)-\lambda B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2) \quad (702)$$
$$+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (703)$$
$$+\lambda\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2) \quad (704)$$
$$+\lambda B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0.$$

$$2\beta_2\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right] \quad (705)$$
$$-\gamma_2\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0.$$

$$\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right] \quad (706)$$
$$-\lambda\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2) \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\end{array}\right]=0.$$

$$0=0. \quad (707)$$

$$0=0. \quad (708)$$

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)=0. \quad (709)$$

$$0=0. \quad (710)$$

46.9. **单项式等式列表 4.** 我们列出上面得到的新单项式等式，并去掉常数后重新标记。

$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0.\,(539)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0.\,(558)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0.\,(568)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(614)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(626)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)$$

因此我们得到

$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0.\,(539)\text{ this appeared already in }(46.3)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(614)\text{ this appeared already in }(46.7)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)\text{ this appeared already in }(46.3)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0.\,(568)\text{ this appeared already in }(46.7)$$

现在，我们取完整的等式列表 (46.6)，并消去其中上述各项

46.10. **所有等式列表 5.**

46.10. 1. G.

$$0=0\ \ (437)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)=0\,(438)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0.\,(439)$$

$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\,(440)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,g)+\\ +\gamma_1\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)\end{gathered}=0.\,(443)$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(446)$$
$$0=0.\,(447)$$
$$0=0\ \ (448)$$
$$\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(449)$$

$$\gamma_1[B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(450)$$

$$0=0\,(451)$$
$$-\gamma_2B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_1)=0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;g,gx_1x_2)\right]=0.\,(453)$$
$$0=0.\,(454)$$

$$-\gamma_1B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(455)$$

$$\alpha[-B(g\otimes 1_H;g,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)$$
$$0=0.\,(457)$$
$$0=0.\,(458)$$

$$\begin{gathered}2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+\\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;1_A,g)-B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)\right]\end{gathered}=0.\,(459)$$

$$0 = 0 \,(460)$$

$$2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \,(462)$$
$$0 = 0. \,(463)$$
$$0 = 0 \,(464)$$
$$\gamma_2 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0. \,(465)$$

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \,(466)$$
$$0 = 0 \,(467)$$

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0. \,(468)$$
$$0 = 0. \,(469)$$
$$\alpha \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \,(470)$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \,(471)$$
$$\alpha \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \,(472)$$

$$\gamma_2[B(g \otimes 1_H, G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \,(473)$$
$$0 = 0. \,(474)$$

$$\gamma_1[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)] = 0. \,(475)$$
$$0 = 0. \,(476)$$
$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \,(477)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \end{array} = 0. \,(478)$$
$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) \end{array} = 0. \,(479)$$

$$0 = 0 \,(481)$$
$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) \\ +\gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) \end{array} = 0. \,(483)$$
$$\begin{array}{c} 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) \end{array} = 0 \,(484)$$

$$0 = 0 \ \ (487)$$

$$-\gamma_1[1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2)+$$
$$+B(x_1x_2 \otimes 1_H; x_1, x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; x_2, x_1)]+$$
$$-2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H = 0. \,(489)$$

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) + \gamma_2[-B(x_1x_2 \otimes 1_H; g, gx_1x_2)+$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)] = 0 \,(493)$$

$$-2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g)+$$
$$-\gamma_1[-B(x_1x_{\ 2} \otimes 1_H; g, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1)] = 0 \,(497)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2)+ \\ +\gamma_1 \left[-1 + B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1)\right] + \gamma_2 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, \end{array} = 0. \,(501)$$

$$\begin{array}{c} 2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right] \\ +\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right] \end{array} \quad (502)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+ \\ -\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \end{array} = 0\,(503)$$

$$\begin{array}{c} 2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right] \\ +\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right] \end{array} = 0.\,(504)$$

$$0=0\,(506)$$

$$0=0.\,(507)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,g)+ \\ -\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\gamma_2\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \end{array} = 0.\,(508)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)+ \\ +\gamma_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]+\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2) \end{array} = 0.\,(509)$$

$$\begin{array}{c} \gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]\,(510) \\ +\gamma_2\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0. \end{array}$$

$$0=0.\,(511)$$

$$0=0.\,(512)$$

$$\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\gamma_2B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(513)$$

$$\begin{array}{c} \gamma_2\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+ \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}\right]+\,(514) \\ +2\alpha\left[-B(x_2\otimes 1_H;G,g)+B(x_2\otimes 1_H;G,g)\right]=0. \end{array}$$

$$0=0.\,(515)$$

$$0=0\,(516)$$

$$\gamma_2B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)-2\alpha B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(517)$$

$$\begin{array}{c} -\gamma_1\left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+ \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array}\right]+\,(518) \\ -2\alpha\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0 \end{array}$$

$$0=0\,(519)$$

$$0=0.\,(520)$$

$$-\gamma_1B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+2\alpha B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(521)$$

$$\alpha\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(522)$$

$$0=0\,(523)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(524)$$

$$\gamma_2\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(525)$$

$$0=0\,(526)$$

$$0=0.\,(527)$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(528)$$

$$\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\right]=0.\,(529)$$

46.10.2. X_1.

$$0 = 0. \tag{539}$$

$$\begin{aligned} &+\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + \lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \\ &+2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, g\right) + B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1\right) = 0 \end{aligned} \tag{540}$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0. \tag{541}$$

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \lambda B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; G, g) = 0. \tag{542}$$

$$0 = 0. \tag{543}$$

$$B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) - B\left(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2\right) = 0 \tag{545}$$

$$\begin{aligned} &+\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \\ &+2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \end{aligned} \tag{546}$$

$$-2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0. \tag{547}$$

$$0 = 0. \tag{548}$$

$$0 = 0 \tag{549}$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \tag{550}$$

$$2\beta_1\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - \lambda B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \tag{551}$$

$$0 = 0. \tag{552}$$

$$-2\beta_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B\left(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right). \tag{554}$$

$$0 = 0 \tag{555}$$

$$\lambda B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = -2B\left(x_1 \otimes 1_H; G, g\right). \tag{557}$$

$$0 = 0. \tag{558}$$

$$0 = 0 \tag{559}$$

$$\begin{aligned} &-\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \\ &-2\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] = 0 \end{aligned} \tag{560}$$

$$\gamma_1\left[-B\left(g \otimes 1_H; G, gx_2\right) + B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2)\right] = 0 \tag{561}$$

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1 \otimes x_1; X_2, gx_1) = 0. \tag{563}$$

$$\begin{aligned} & -2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + \lambda\left[-B(g \otimes 1_H; 1_A, g) - B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2)\right] \\ = \quad & -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g). \end{aligned} \tag{564}$$

$$0 = 0. \tag{565}$$

$$0 = 0. \tag{566}$$

$$\begin{aligned} &\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \\ &-2B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2\right) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0. \end{aligned} \tag{567}$$

$$0 = 0. \tag{568}$$

$$0 = 0. \quad (569)$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) \right] \\ = \quad &2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - 2B\left(x_2 \otimes 1_H; G, g\right). \quad (570) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-2\beta_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \lambda B(g \otimes 1_H; G, gx_2) \\ &-2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0. \quad (571) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = -\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \\ &-2B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2). \quad (572) \end{aligned}$$

$$0 = 0. \quad (573)$$

$$0 = 0. \quad (574)$$

$$\begin{aligned} &B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \quad (575) \\ &+B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \end{aligned}$$

$$2\beta_1 B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = \gamma_1 B(g \otimes 1_H; G, gx_2) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2). \quad (576)$$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad &\gamma_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) \right] \quad (577) \\ &+ \left[\begin{array}{c} 2B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + 2B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) + \\ +2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$0 = 0. \quad (578)$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) \right] \\ = \quad &-2 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) \right] \quad (579) \end{aligned}$$

$$\beta_1 \left[B(g \otimes 1_H; G, gx_1) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2) \right] = 0 \quad (580)$$

$$0 = 0 \quad (581)$$

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) - \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0 \quad (582)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) = 0 \quad (583)$$

$$2\beta_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) + \lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) = 0. \quad (584)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \quad (585)$$

$$0 = 0. \quad (586)$$

$$\lambda B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, g) = 0. \quad (587)$$

$$\begin{aligned} &\lambda \left[+1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \right] \quad (589) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0 \quad (591)$$

$$2B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0. \quad (592)$$

$$\left[\begin{array}{c} +1 - B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) \\ +B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) \end{array} \right] = 0. \quad (593)$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) + 2B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \quad (594)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)+ \tag{596}$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda\left[\begin{array}{c}-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)\\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\end{array}\right]=0 \tag{597}$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0 \tag{600}$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0. \tag{604}$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \tag{605}$$
$$=-\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+$$
$$-2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right].$$

$$-\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right] \tag{606}$$
$$+2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]=0.$$

$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)\right]+ \tag{607}$$
$$+$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)\right]=0.$$

$$-2\beta_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \tag{608}$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0 \tag{609}$$
$$+\gamma_1\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \tag{610}$$
$$2\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)\right]=0 \tag{611}$$
$$\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)\right]=0 \tag{612}$$
$$0=0 \tag{614}$$
$$0=0 \tag{615}$$

$$-2\beta_1B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)+\lambda\left[B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \tag{616}$$
$$+\gamma_1B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_1\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right] \tag{617}$$
$$+\lambda B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_1B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

$$2\beta_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right] \tag{618}$$
$$+\lambda\left[-B(x_1\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0 \tag{619}$$

$$+\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]$$
$$-\gamma_1\left[B(x_2\otimes 1_H;G,g)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0 \tag{620}$$
$$0=0 \tag{621}$$

$$0=0 \tag{622}$$

$$\lambda B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+ \tag{623}$$
$$-\gamma_1B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\left[+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 \left[\begin{array}{c} B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+ \\ +B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array} \right] + (624)$$
$$-\gamma_1\left[B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)\right]=0$$

$$2\beta_1 B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)(625)$$
$$-\gamma_1 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0$$
$$0=0\,(626)$$

$$+\gamma_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+(627)$$
$$-\left[\begin{array}{c} 2B(g\otimes 1_H;1_A,g)+2B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,gx_2)+ \\ +2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2) \end{array} \right]=0$$
$$0=0\,(628)$$
$$0=0\,(629)$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right]+$$
$$+\left[2B(x_2\otimes 1_H;G,g)-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1)\right]=0\,(630)$$

$$\beta_1\left[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)\right](631)$$
$$+B(x_1\otimes 1_H;G,g)+B(gx_1x_2\otimes 1_H;G,gx_2)=0.$$

46.10.3. X_2.

$$0=0\,(640)$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\,(641)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(642)$$
$$+2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)+2B(g\otimes 1_H;1_A,g)=0.$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(643)$$
$$0=0\,(644)$$
$$0=0645$$
$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_H,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;1_H,gx_1)=0.\,(646)$$
$$0=0\,(647)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0\,(648)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)+B(g\otimes 1_H,G,gx_1)=0\,(649)$$
$$0=0\,(650)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(651)$$

$$-2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,g)\,(652)$$
$$-\lambda\left[B(g\otimes 1_H;1_A,g)+B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)\right]-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,g)=0$$

$$0=0\,(653)$$
$$0=0.\,(654)$$

$$+\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\,(655)$$
$$-2B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1\right)=0$$
$$0=0\,(656)$$

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ +\lambda B\left(g\otimes 1_H;\ G, gx_1\right)\ +2B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ =0. \tag{657}$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\right] \tag{658}$$

$$+2-B(x_1\otimes 1_H;\ G, g_1)\ +2B\left(x_1\otimes 1_H;\ G, g\right)\ =0.0=0. \tag{659}$$

$$\gamma_2\left[-B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\right]+ \tag{660}$$

$$-2B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)\ -2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)$$

$$-2B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ -2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ =0.0=0. \tag{661}$$

$$-\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ +\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \tag{662}$$

$$+2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ +2B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ =0.$$

$$\beta_2\left[-B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ +B\left(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2\right)\right] \tag{663}$$

$$-B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ =00=0 \tag{664}$$

$$B(x_1\otimes 1_H;\ G, g)\ +B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0 \tag{665}$$

$$0=0 \tag{666}$$

$$2\qquad \beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)\right] \tag{667}$$

$$-\gamma_2 B(x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ =0.0=0. \tag{668}$$

$$+\qquad 2\beta_2 B\left(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2\right)\ -\gamma_2 B\left(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2\right) \tag{669}$$

$$+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1\right)\ =0\beta_2\left[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)\right]=0 \tag{670}$$

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ -\lambda B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) \tag{671}$$

$$+2B\left(x_2\otimes 1_H;\ G, g\right)\ =00=0. \tag{672}$$

$$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ -\lambda B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \tag{673}$$

$$+2\left[+B(g\otimes 1_H;\ 1_A, g)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2)\right]=0$$

$$\lambda\left[B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G, gx_1x_2)\right]=0 \tag{674}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, g)\ =0. \tag{675}$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_1)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, x_1) \tag{676}$$

$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, x_1)\ =0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)=0. \quad (677)$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0. \quad (678)$$

$$0=0. \quad (679)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ g)-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)=0. \quad (682)$$

$$2\beta_2\begin{bmatrix} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ x_2)\end{bmatrix} \quad (683)$$

$$=\ 0.$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ g)=0. \quad (685)$$

$$\begin{bmatrix} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ x_2)\end{bmatrix}=0. \quad (686)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,g)=0. \quad (687)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ g)-\gamma_2\begin{bmatrix} -B(x_1x_2\otimes 1_H\ G\ gx_1x_2+;,)(;,) \\ x_1x_2\otimes 1_H\ B\ GX_2\ gx_1-B\ x_1x_2\otimes 1_H\end{bmatrix}(;\ GX_1,\ gx_2)=0. \quad (688)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda\begin{bmatrix} -B(x_1x_2\otimes 1_H\ G\ gx_1x_2+;,)(; \\ x_1x_2\otimes 1_H\ B\ GX_2\ gx_1-B\ x_1x_2\otimes 1_H\end{bmatrix},)(;\ GX_1,gx_2)=0. \quad (691)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,gx_1)=0. \quad (692)$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ x_2)+\lambda[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ x_1)]=0. \quad (693)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,\ g)=0. \quad (694)$$

$$\lambda[B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,\ gx_1)]=0. \quad (695)$$

$$2\beta_2[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ x_2)]+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ x_1)]+-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,x_1)=0. \quad (696)$$

$$\gamma_2[B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)]+ \quad (697)$$

$$+[+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)+2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ g)]=0.$$

$$2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ gx_1)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,\ g)]+\gamma_2[-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,\ gx_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,\ gx_2)] \quad (698)$$

$$=\ 0.$$

$$0 = 0 \,(699)$$
$$0 = 0 \,(700)$$
$$2\beta_2 \left[B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right] (701)$$
$$+\gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) - \lambda B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0.$$

$$2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) \,(702)$$
$$+\lambda \left[-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2)\right]$$
$$+2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0.$$

$$2\beta_2 \left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] (703)$$
$$+\lambda \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0.$$

$$-2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) \,(704)$$
$$+\lambda B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0.$$

$$2\beta_2 \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array}\right] (705)$$
$$-\gamma_2 \left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0.$$

$$\gamma_2 \left[B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] (706)$$
$$-\lambda \left[\begin{array}{c} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H; 1_A, gx_2) \\ +B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \end{array}\right] = 0.$$

$$0 = 0. \,(707)$$

$$0 = 0. \,(708)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \,(709)$$
$$0 = 0. \,(710)$$

46.11. **所有单项式等式列表**。

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0. \,(441)$$
$$B(g \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0. \,(442)$$
$$B(g \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \,(555)$$
$$B(g \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \,(457)$$
$$B(g \otimes 1_H; X_2, 1_H) = 0 \,(451)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H;\ 1_A,\ 1_H) = 0. \,(447)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2) = 0. \,(548)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H;\ G, x_1) = 0. \,(543)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H;\ G,\ x_2) = 0. \,(544)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A,\ 1_H) = 0 \,(640)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2) = 0 \,(464)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ x_1) = 0 \,(644)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ x_2) = 0. \,(668)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ X_1,\ gx_1x_2) = 0 \,. \,(491)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, gx_1x_2) = 0 \ \ (488)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, 1_H) = 0. \, (485)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, x_1x_2) = 0 \ \ (487)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_1) = 0. \, (681)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, 1_H) = 0. \, (586)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, x_1x_2) = 0. \, (680)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_2) = 0 \, (595)$$

$$B(gx_2 \otimes 1_H; GX_1X_2, 1_H) = 0. \, (613)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0 \, (653)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0. \, (654)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \, (656)$$

46.12. （**46.**10）中的二项式等式，**其系数为 1 或 -1**。我们将删除乘法常数（如果有），并对它们重新排序

$$B(g \otimes 1_H, G, gx_1) + B(x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \, (473) \, .$$

$$B \left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2 \right) + B(g \otimes 1_H, G, gx_1) = 0 \, (649)$$

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_1) = -B(x_2 \otimes \ 1_H; G, gx_1x_2). \, (465)$$

$$B(g \otimes 1_H; G, gx_2) = B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2). \, (453)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \, (665)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \, (709)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B \left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2 \right) = 0 \, (648)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0 \, (611)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \, (694)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \, (610)$$

$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \, (612)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0. \, (692)$$

比较 (610)、(612) 和 (692)，我们推得

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \tag{736}$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_1, gx_2) = 0 \tag{737}$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; GX_2, gx_1) = 0 \tag{738}$$

46.12.1. 不同系数的二项式等式列表。这些二项式等式的系数各不相同。我们在以下等式中删去上文的 (736) 、 (737) 和 (738)

$$2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ =0$$

(438)$2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ -\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ =0.$

(439)$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0.$(440)

$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ +2\alpha B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0.$

(446)$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ +\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0.$

(449)$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1)\ =0.$

(452)$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ +2\alpha B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0.$

(455)$2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ -\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ =0.$

(462)$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ +\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0.$

(466)$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =0.$

(468)$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2)\ =0.$

(471)$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, g)\ +\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, g)\ =0.$

(477)$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)\ =0.(483)B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)$

$=0$(484)$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ -\gamma_2 B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)$

$=0.$(513)$\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ -2\alpha B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)$

$=0.$(517)$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)\ +2\alpha B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)$

$=0.$(521)$\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ =-2B(x_1\otimes 1_H;\ G, g)\,.$

(557)$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, g)\ -\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ =0$

(582)$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)\ =0.(585)B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g)$

$=0.$(587)$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2)\ =0.(592)B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,$

$g)\ =0.$(594)$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2)\ -\lambda B(x_1\otimes 1_H;\ G,$

$gx_1x_2)\ =0$(619)$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g)\ +\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,$

$g)\ =0.$(675)

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0\,(678)$$

$$2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(682)$$
$$+2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.\,(685)$$

46.12.2. 重复。

$$[-B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(456)\ \text{this is}\ (453)$$
$$[B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(522)\ \text{this is}\ (453)$$
$$B\,(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)]=0.\,(450)\ \text{this is}\ (453)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(524)\ \text{this is}\ (453)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,gx_2)-B(x_1\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0.\,(525)\ \text{this is}\ (453)$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0.\text{(529) 这是 (453)}$$
$$B\,(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ -B\,(x_1\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(545) 这就是 (453)}$$

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(472)\ \text{this is}\ .\,(465)$$
$$[B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+B(x_2\otimes\ 1_H;G,gx_1x_2)]=0\,(470)\ \text{this is}\ (465)$$

$$[B(g\otimes 1_H,\ \ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0.=0.\text{(473) 这是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(651) 这是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)]=0.\text{(475) 这是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(580) 这是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(670) 这就是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0.\text{(528) 这就是 (465)}$$

$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(674) 这就是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(670) 这就是 (465)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1)\ +B(x_2\otimes\ 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(674) 这就是 (465)}$$
$$[-B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)]=0.\text{(456) 这是 (453)}$$
$$[B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)]=0.\text{(522) 这是 (453)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)]=0.\text{(450) 这是 (453)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ =0.\text{(524) 这是 (453)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ G,gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ =0.\text{(525) 这是 (453)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\ =0.\text{(529) 这是 (453)}$$
$$B\,(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2)\ -B\,(x_1\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(545) 这是 (453)}$$
$$B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2)\ -B(x_1\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\ =0.\text{(550) 这是 (453)}$$
$$-B(g\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2)\ +B(x_1\otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2)\ =0\,\text{(561) 这是 (453)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_1,\ \ g)\ =0.\text{(609) 这是 (611)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_1)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1,g)\ =0\,\text{(591) 这就是 (611)}$$
$$+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,gx_2)\ =0.\text{(604) 这就是 (610)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2,gx_1)\ =0.\,\text{(695) 这就是 (692)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G,gx_1x_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1,gx_2)\ =0\,\text{(600) 这就是 (610)}$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,gx_2)\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2,g)\ =0.\text{(687) 这就是 (694)}$$

46.13. **上文所得新幺半等式列表**。

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.\,(483)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0\,(678)\,\text{this is}\ \ (483)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0\,(484)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0.\,(592)\,(484)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0.\,(585)\,\text{this is}\,(484)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(587)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(682)\ \ \text{this is}\ \ (587)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(736)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.\,(685)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(594)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0\,(737)$$

$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0\,(738)$$

46.13.1. 上述等式列表（不重复）。

(739) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.\,(483)$$

(740) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0\,(484)$$

(741) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(587)$$

(742) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(736)$$

(743) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.\,(685)$$

(744) $$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(594)$$

(745) $$B\ (x_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ gx_2)\ =0\ \ (737)$$

(746) $$B\ (x_1x_2\otimes 1_H;\ \ GX_2,\ \ gx_1)\ =0\,(738)$$

46.14. 将上述等式代入二项式等式列表。现在，我们取这个列表，并将它们代入下面的一份二项式等式副本中

$$2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0\,(438)$$

$$2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_2) - \gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0.\,(439)$$

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_2\right) = 0.\,(440)$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(446)$$

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(449)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_1) = 0.\,(452)$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(455)$$

$$2\alpha B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) = 0.\,(462)$$

$$-\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) + \gamma_2 B(g\otimes 1_H; G, gx_2) = 0.\,(466)$$

$$-\gamma_2 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(468)$$

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) - 2\alpha B(g\otimes 1_H; G, gx_2) = 0.\,(471)$$

$$0 = 0.\,(477)$$

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \gamma_2 B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(513)$$

$$\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - 2\alpha B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(517)$$

$$-\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) + 2\alpha B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0.\,(521)$$

$$\lambda B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = -2B\left(x_1\otimes 1_H; G, g\right).\,(557)$$

$$0 = 0\,(582)$$

$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H; G, gx_1x_2) - \lambda B(x_1\otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0\,(619)$$

$$0 = 0.\,(675)$$

因此我们得到 no new monomial equalities.

46.15. 余代数 **MPLETE LIST OF MONOMIAL EQUALITIES UP TO NOW.**

$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)=0.\,(441)$$
$$B(g\otimes 1_H;1_A,x_2)=0\,(442)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0.\,(539)\ \text{this is}\ (442)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)=0.\,(558)\ \text{this is}\ (442)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,1_H)=0\,(555)$$
$$B\left(g\otimes 1_H;G,x_1x_2\right)=0.\,(556)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0.\,(457)$$
$$B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)=0\,(650)\ \text{this is}\ (457)$$
$$B(g\otimes 1_H;X_2,1_H)=0\,(451)\,\text{this is}\,B\left(g\otimes 1_H;1_A,x_2\right)\ \text{and so it is}\ (442)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0.\,(447)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(614)\ \text{this is}\ (447)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(626)\,\text{this is}\ (447)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(548)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0\ \ (448)\ \text{this is a repetition of}\ (548)$$
$$B\left(x_1\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)=0\,(559)\ \text{this was already in}\ (46.3)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_1)=0.\,(543)$$
$$B(x_1\otimes 1_H;G,x_2)=0.\,(544)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,1_H)=0\,(640)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(464)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0.\,(469)\ \text{this was already in}\ (46.3)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;1_A,x_1x_2)=0\,(621)\ \text{this was already in}\ (46.3)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;1,x_1x_2)=0\,(647)\ \text{this is}\ (464)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_1)=0\,(644)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0.\,(568)$$
$$B(x_2\otimes\ 1_H;G,x_2)=0\,(666)\ \text{this is}\ (568)$$
$$B(x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0.\,(668)\ \text{this is}\ (568)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0.\,(483)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0\,(484)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0.\,(587)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0\,(736)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.\,(685)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,gx_1x_2)=0\ .\,(491)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(594)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,gx_1x_2)=0\ \ (488)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,1_H)=0.\,(485)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0.\,(486)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,x_1x_2)=0\ \ (487)\ \text{this is a repetition of}\ (486)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_1)=0.\,(681)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_1,gx_2)=0\,(737)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)=0.\,(586)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,x_1x_2)=0.\,(680)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_1)=0\,(738)$$
$$B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,gx_2)=0\,(595)$$
$$B(gx_2\otimes 1_H;GX_1X_2,1_H)=0.\,(613)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1) = 0 \,(653)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0. \,(654)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \,(656)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0. \,(569) \text{ this was already in } (46.3)$$

$B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ x_1x_2) = 0$.我们不考虑（680），因为它就是（569）

46.16. 得到更多单项式等式。 现在我们取 46.12 中的所有等式

.

我们将第一个等式改写为

$$B(g \otimes 1_H, G, gx_1) = -B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) (649)$$

现在，我们在所有其他等式中将 $B(g \otimes 1_H,\ \ G,\ \ gx_1)$ 替换为 $-B(g \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)$。现在我们替换

$$B(x_2 \otimes\ \ 1_H; G, gx_1x_2) = B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) \,(465)$$

我们继续这样做

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = B(g \otimes 1_H; G, gx_2) \,(453)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \,(665)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0. \,(709)$$
$$B(x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) + B\left(x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2\right) = 0 \,(648)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, g) = 0 \,(611)$$
$$B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, g) = 0. \,(694)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ gx_2) = 0 \,(610)$$
$$-B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2) + B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ GX_1,\ \ gx_2) = 0 \,(612)$$

$$B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_1x_2) - B(x_1x_2 \otimes 1_H;\ \ GX_2,\ \ gx_1) = 0. \,(692)$$

$$-2\alpha B(g \otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1x_2) = 0 \,(438)$$

$$2\alpha B(g \otimes 1_H;\ \ G,\ \ gx_2) - \gamma_1 B(g \otimes 1_H;\ \ 1_A,\ \ gx_1x_2) = 0. \,(439)$$

$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2) = 0. \,(440)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(g \otimes 1_H;\ G, gx_2) = 0. \,(446) \text{ 这是 } (439)$$
$$\gamma_1 B(g \otimes 1_H;\ G, gx_1) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ G, gx_2) = 0. \,(449) \text{ 这是 } (440)$$

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(g \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = 0. \,(452) \text{ 这是 } (438)$$

$$-\gamma_1 B(g \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) + 2\alpha B(g \otimes 1_H;\ G, gx_2) = 0. \,(455) \text{ 这是 } (439)$$

$$2\alpha B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2) - \gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2) = 0. \,(462)$$

$$-\gamma_1 B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2) + \gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2) = 0. \,(466)$$

From

$$-\gamma_2 B(g \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2) = 0. \,(468)$$

并由

$$\gamma_2 B\left(g \otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2\right) - 2\alpha B(x_2 \otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2) = 0. \,(517)$$

我们得到

$$B\left(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2\right)=0 \tag{747}$$

and

$$B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)=0 \tag{748}$$

现在由

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)-2\alpha B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0.\,(471)$$

我们得到

$$B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0 \tag{749}$$

并且由

$$\gamma_1 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)+\gamma_2 B\left(g\otimes 1_H;G,gx_2\right)=0.\,(440)$$

我们得到

$$B\left(g\otimes 1_H;G,gx_1\right)=0 \tag{750}$$

$$\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)=0.\,(477)$$

$$\gamma_1 B(x_2\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_1x_2)\ -\gamma_2 B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ =0.\text{(513) 平凡}$$

$$-\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)\ +2\alpha B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ =0.\text{(521) 现在显然成立}$$

From

$$\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=-2B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right).\,(557)$$

我们得到

$$B\left(x_1\otimes 1_H;G,g\right)=0 \tag{751}$$

$$\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,g)-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(582)\,\text{trivial}$$
$$2\beta_1 B(x_2\otimes 1_H;G,gx_1x_2)-\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_2)=0\,(619)\,\text{trivial}$$

$$\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,g)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,g)=0.\,(675)\,\text{trivial}748$$

From

$$\gamma_1 B(g\otimes 1_H;\ G,\ \ gx_2)\ +2B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_2)\ -2\beta_1 B(g\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ gx_1x_2)\ =0.$$

(541) 利用 (749) 和 (747)，我们得到

$$B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)=0. \tag{752}$$

From

$$2\beta_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_2)+\lambda B(g\otimes 1_H;G,gx_1)+2B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0\,(643)$$

利用 (749) 和 (750)，我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;G,g)=0 \tag{753}$$

From

$$\begin{aligned}3B(g\otimes 1_H;1_A,x_1)-\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,x_1x_2)\,(648)\\ +B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B\left(x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2\right)\ \ =\ \ 0\end{aligned}$$

利用 (441)，(457) 和 (464)，，我们得到

$$B(x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0 \tag{754}$$

From

$$\begin{aligned}2\beta_2 B(g\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)+\gamma_2 B(g\otimes 1_H;G,gx_1)\,(641)\\ +2B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1)=0\end{aligned}$$

利用 (747) 和 (750)，我们得到

$$B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0 \tag{755}$$

From

$$-\lambda B\left(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2\right) - \gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) - 2\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] = 0 \,(560)$$

By using (747) and(750) we get

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0 \tag{756}$$

现在由

$$\begin{aligned} &-2\beta_2 B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, g) \,(652) \\ &-\lambda\left[B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1)\right] - 2B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0 \end{aligned}$$

利用 (752)、(751) 和 (756)，得到

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, g) = 0 \tag{757}$$

From

$$\begin{aligned} &-2\left[-B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, 1_H) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1)\right] + \quad (523) \\ &\gamma_2\left[B(g \otimes 1_H; G, 1_H) + B(x_2 \otimes \ 1_H; G, x_2) + B(x_1 \otimes 1_H; G, x_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

利用 (734)，(731)，(728)，(730) 和 (724)，得到

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \tag{758}$$

From

$$\gamma_1 B\left(g \otimes 1_H; G, gx_1\right) + \gamma_2 B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \,(449)$$

利用 (750)，得到

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, gx_1x_2) = 0 \tag{759}$$

From

$$B(x_1 \otimes 1_H; G, g) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \,(665)$$

由 (751)，得到

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \tag{760}$$

From

$$\begin{aligned} &2\beta_2\left[-B(x_1 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2)\right] (703) \\ &+\lambda\left[B(x_2 \otimes 1_H; G, g) - B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1)\right] = 0. \end{aligned}$$

利用（751）、（760）和（753），我们得到

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0 \tag{761}$$

利用

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \,(443)$$

from

$$\begin{aligned} &\lambda B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) + 2B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + (540) \\ &+2B\left(g \otimes 1_H; 1_A, g\right) = 0 \end{aligned}$$

我们得到

$$B(g \otimes 1_H; X_2, gx_1) = 0 \tag{762}$$

并且，鉴于 (762) 和 (443)，(540) 变得平凡。

46.17. **所有单项式等式列表**。

$$B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_1) = 0\ (721) B(g\otimes 1_H;\ 1_A, x_2) = 0\ (722) B(g\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = 0\ (747) B(g\otimes 1_H;\ G, 1_H) = 0\ (728) B(g\otimes 1_H;\ G, x_1x_2) = 0.\ (711) B(g\otimes 1_H;\ G, gx_1) = 0\ (750) B(g\otimes 1_H;\ G, gx_2) = 0\ (749) B(g\otimes 1_H;\ X_2, 1_H) = 0\ (729) B(g\otimes 1_H;\ X_2, gx_1) = 0\ (762) B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, 1_H) = 0.\ (733) B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2) = 0.\ (723) B(x_1\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) = 0\ (752) B(x_1\otimes 1_H;\ G, g) = 0\ (751) B(x_1\otimes 1_H;\ G, x_1) = 0.\ (724) B(x_1\otimes 1_H;\ G, x_2) = 0.\ (712) B(x_1\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) = 0\ (759) B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, 1_H) = 0\ (734) B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) = 0\ (755) B(x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1x_2) = 0\ (725) B(x_2\otimes 1_H;\ G, g) = 0\ (753) B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_1) = 0\ (726) B(x_2\otimes 1_H;\ G, x_2) = 0\ (730) B(x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) = 0\ (748) B(x_2\otimes 1_H;\ X_2, x_1) = 0\ (754) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) = 0.\ (739) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) = 0\ (740) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, g) = 0\ (741) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ G, gx_1x_2) = 0\ (742) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, g) = 0\ (743) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_1, gx_1x_2) = 0.\ (713) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, g) = 0\ (744) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ X_2, gx_1x_2) = 0\ (714) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, 1_H) = 0.\ (715) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, x_1x_2) = 0\ (716) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_1) = 0.\ (717) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_1, gx_2) = 0\ (745) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, 1_H) = 0.\ (727) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, x_1x_2) = 0.\ (718) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, gx_1) = 0\ (746) B(x_1x_2\otimes 1_H;\ GX_2, gx_2) = 0\ (719) B(gx_2\otimes 1_H;\ GX_1X_2, 1_H) = 0\ (720) B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, g) = 0\ (757) B(gx_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A, x_1) = 0\ (731)$$

$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_2) = 0. \, (732)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, 1_H) = 0 \, (735)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1x_2) = 0 \, (758)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_1) = 0 \, (761)$$
$$B(gx_1x_2 \otimes 1_H; G, gx_2) = 0 \, (760)$$

46.18. 所有等式列表 6. 现在我们取出所有等式列表 46.10，并将上面的等式代入其中，再重新排列。

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0. \, (443)$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) &= 0. \, (546) \\ &\text{this is } (443) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) &= 0 \, (551) \\ &\text{this is } (443) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) &= 0 \, (560) \\ &\text{this is } (443) \end{aligned}$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) = 0 \, (652)$$
$$\text{this is } (443)$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) = 0. \, (459)$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) &= 0 \, (564) \\ &\text{this is } (459) \end{aligned}$$

$$B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) = 0 \, (642)$$
$$\text{this is } (459)$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) &= 0. \, (667) \\ &\text{this is } (459) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(g \otimes 1_H; 1_A, g) + B(x_2 \otimes \ 1_H; 1_A, gx_2) &= 0 \, (673) \\ &\text{this is } (459) \end{aligned}$$

$$\beta_1 B(g \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = B \, (x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) \, . \, (554)$$
$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0. \, (508)$$

$$\begin{aligned} B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) &= 0 \, (616) \\ &\text{this is } (508) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \, (x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) &= 0 \, (655) \\ &\text{this is } (508) \end{aligned}$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \, (662)$$
$$\text{this is } (508)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H; 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0 \, (701)$$
$$\text{this is } (508)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, gx_1x_2) = 0. \, (509)$$

$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = \quad 0$(567) 这是 (509)$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = \quad 0.$(572) 这是 (509)$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = \quad 0$ (617) 这是 (509)$B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = \quad 0$(623) 这是 (509)$\left[\begin{array}{l} B(\\ g \otimes 1_H\ 1_A\ g + B\ x_2 \otimes\ 1_H\ 1_A\ gx_2 +; ,) (; ,) (; ,) (; , \\ B\ x_1 \otimes 1_H 1_A\ gx_1 + B\ gx_1x_2 \otimes 1_H\ 1_A \\ gx_1x_2) \end{array} \right]$(518) 根据 (459) 和 (508)，这是显然的$\left[\begin{array}{l} B(\\ +B \\ g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + B(\\ gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right]$(514) 这是 (518)，因此显然。

$\left[\begin{array}{l} B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) \\ +B \\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right]$(577) 这是 (518)，因此显然。

$\left[\begin{array}{l} B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) \\ +B \\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0$(620) 这是 (518)，因此显然。

$B(x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2)$ (575)$+B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) = 0.$这是 (518)，因此显然。

$\left[\begin{array}{l} B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) \\ +B \\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0$(624) 这是 (518)，因此显然。

$\left[\begin{array}{l} B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) \\ +B \\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0$(627) 这是 (518)，因此显然。

$B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1)$ (660)$+B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) = 0$这是 (518)，因此显然。$\left[\begin{array}{l} B(\\ +B \\ g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) + B(\\ gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right] = 0.$(705) 这是 (518)，因此显然。

$\left[\begin{array}{l} B(g \otimes 1_H;\ 1_A, g) + B(x_2 \otimes\ 1_H;\ 1_A, gx_2) (x_1 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1) \\ +B \\ + B(gx_1x_2 \otimes 1_H;\ 1_A, gx_1x_2) \end{array} \right]$(706) 这是 (518)，因此显然。

$$\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+ \quad (540)$$
$$+2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)+=0 \text{ this is trivial by } (762) \text{ and } (443)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \end{array} =0. \quad (478)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+ \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \end{array} =0. \quad (479)$$

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;x_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;x_2,x_1)=0 \quad (489)$$

$$\left[\begin{array}{c} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2) \end{array}\right] = 0 \quad (589)$$
this is (489)

$$\left[\begin{array}{c} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2) \end{array}\right] = 0. \quad (593)$$
this is (489)

$$\left[\begin{array}{c} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2) \end{array}\right] = 0. \quad (683)$$
this is (589)

$$\left[\begin{array}{c} +1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2) \\ -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2) \end{array}\right] = 0. \quad (686)$$
this is (489)

$$\begin{array}{c} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+ \\ +\gamma_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \end{array} =0. \quad (501)$$

$$\begin{array}{c} 2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+ \\ -\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \end{array} =0 \quad (503)$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1) & = & 0 \quad (583) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2) & = & 0. \quad (584) \end{array}$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1) \quad (676)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2) \quad (677)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)=0.$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right] \quad (608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right] \quad (605)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0$$

$$2\beta_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right](696)$$
$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\,(693)$$
$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]=0.$$

由 (508) 和 (752)

$$2\beta_2 B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_2)+(702)$$
$$+\lambda\left[-B(x_2\otimes 1_H;1_A,gx_2)-B(gx_1x_2\otimes 1_H;1_A,gx_1x_2)\right]=0.$$

变得平凡。

由 (443) 和 (762)，等式

$$\lambda B(g\otimes 1_H;X_2,gx_1)+2B(x_1\otimes 1_H;1_A,gx_1)+(540)$$
$$+2B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)=0$$

变得平凡。

$$0=0\ \ (437)$$

$$2\alpha 0+\gamma_2 0=0\,(438)$$

$$2\alpha 0-\gamma_1 0=0.\,(439)$$

$$\gamma_1 0+\gamma_2 0=0.\,(440)$$

$$-\gamma_1 0+2\alpha 0=0.(446)$$
$$0=0.(447)$$
$$0=0\ (448)$$
$$\gamma_1 0+\gamma_2 0=0.(449)$$

$$\gamma_1[0-0]=0.\,(450)$$

$$0=0\,(451)$$
$$-\gamma_2 0-2\alpha 0=0.\,(452)$$

$$\alpha\left[-0+0\right]=0.(453)$$
$$0=0.(454)$$

$$-\gamma_1 0+2\alpha 0=0.\,(455)$$

$$\alpha[0+0]=0.(456)$$
$$0=0.(457)$$
$$0=0.(458)$$
$$0=0(460)$$

$$2\alpha 0-\gamma_2 0=0.\,(462)$$
$$0=0.\,(463)$$
$$0=0\,(464)$$
$$\gamma_2\left[0+0\right]=0.\,(465)$$

$$-\gamma_1 0 + \gamma_2 0 = 0. \, (466)$$
$$0 = 0 \, (467)$$

$$-\gamma_2 0 - 2\alpha 0 = 0. \, (468)$$
$$0 = 0. \, (469)$$
$$\alpha \left[0 + 0 \right] = 0 \, (470)$$

$$\gamma_1 0 - 2\alpha 0 = 0. \, (471)$$
$$\alpha \left[0 + 0 \right] = 0 \, (472)$$

$$\gamma_2 [0 + 0 = 0. = 0. \, (473)$$
$$0 = 0. \, (474)$$

$$\gamma_1 [0 + 0] = 0. \, (475)$$
$$0 = 0. \, (476)$$
$$\gamma_1 0 + \gamma_2 0 = 0. \, (477)$$

$$0 = 0 \, (481)$$
$$\begin{array}{c} 20 \\ +\gamma_2 0 \end{array} = 0. \, (483)$$
$$\begin{array}{c} 20 \\ +\gamma_1 0 \end{array} = 0 \, (484)$$

$$0 = 0 \quad (487)$$

$$-20 + \gamma_2 [-0 - 0 + 0] = 0 \, (493)$$
$$\begin{array}{c} -20+ \\ -\gamma_1 [-0 - 0 + 0] = 0 \, (497) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \left[0 + 0 \right] \\ \gamma_1 \left[-0 + 0 \right] \end{array} \quad (502)$$
$$\begin{array}{c} 2 \left[-0 - 0 \right] \\ +\gamma_2 \left[-0 - 0 \right] \end{array} = 0. \, (504)$$

$$0 = 0 \, (506)$$
$$0 = 0. \, (507)$$

$$\begin{array}{c} \gamma_1 \left[0 - 0 \right] (510) \\ +\gamma_2 \left[-0 - 0 \right] = 0. \end{array}$$

$$0 = 0. \, (511)$$
$$0 = 0. \, (512)$$
$$\gamma_1 0 - \gamma_2 0 = 0. \, (513)$$

$$0 = 0. \, (515)$$

$$0 = 0 \, (516)$$

$$\gamma_2 0 - 2\alpha 0 = 0. \, (517)$$

$$0 = 0 \, (519)$$
$$0 = 0. \, (520)$$

$$-\gamma_1 0 + 2\alpha 0 = 0. \, (521)$$

$$\alpha \left[0 - 0 \right] = 0. \, (522)$$

$$0 = 0 \, (523)$$
$$\gamma_2 \left[0 - 0 \right] = 0. \, (524)$$
$$\gamma_2 \left[0 - 0 \right] = 0. \, (525)$$
$$0 = 0 \, (526)$$
$$0 = 0. \, (527)$$
$$\gamma_1 \left[0 + 0 \right] = 0. \, (528)$$
$$\gamma_1 \left[0 - 0 \right] = 0. \, (529)$$

$$0 = 0. \, (539)$$

$$\gamma_1 0 + 20 - 2\beta_1 0 = 0. \, (541)$$

$$2\beta_1 0 + \lambda 0 + 20 = 0. \, (542)$$
$$0 = 0. \, (543)$$

$$0 - 0 = 0 \, (545)$$

$$-2\beta_1 0 + 20 + \gamma_1 0 = 0. \, (547)$$
$$0 = 0. \, (548)$$

$$0 = 0 \, (549)$$
$$0 - 0 = 0. \, (550)$$
$$0 = 0. \, (552)$$

$$0 = 0 \, (555)$$
$$\lambda 0 = -20. \, (557)$$
$$0 = 0. \, (558)$$
$$0 = 0 \, (559)$$

$$\gamma_1 \left[-0 + 0 \right] = 0 \, (561)$$

$$2\beta_1 0 - \gamma_1 0 = 0. \, (563)$$

$$0 = 0. \, (565)$$
$$0 = 0. \, (566)$$

$$0 = 0. \, (568)$$
$$0 = 0. \, (569)$$

$$\lambda\left[0+0\right]=20-20. \tag{570}$$

$$-2\beta_1 0+\lambda 0-20=0. \tag{571}$$

$$0=0. \tag{573}$$
$$0=0. \tag{574}$$

$$2\beta_1 0=\gamma_1 0+20. \tag{576}$$

$$0=0. \tag{578}$$
$$\lambda\left[0+0\right]=-2\left[0-0\right] \tag{579}$$
$$\beta_1\left[0+0\right]=0 \tag{580}$$
$$0=0 \tag{581}$$
$$\lambda 0-\gamma_1 0=0 \tag{582}$$
$$\gamma_1 0-20=0. \tag{585}$$
$$0=0. \tag{586}$$
$$\lambda 0+20=0. \tag{587}$$

$$20+20=0 \tag{591}$$
$$20+\gamma_1 0=0. \tag{592}$$

$$\gamma_1 0+20=0. \tag{594}$$

$$20+ \tag{596}$$
$$+\gamma_1\left[-0+0-0\right]=0$$

$$20+\lambda\begin{bmatrix}-0\\+0-0\end{bmatrix}=0 \tag{597}$$

$$0+0=0 \tag{600}$$
$$+0+0=0. \tag{604}$$

$$-\gamma_1\left[0-0\right] \tag{606}$$
$$+2\left[0+0\right]=0.$$

$$2\left[0+0\right]+ \tag{607}$$
$$+$$
$$+\gamma_1\left[-0+0\right]=0.$$

$$(609)$$
$$+20+20=0.$$

$$+\gamma_1\left[0+0\right]=0 \tag{610}$$

$$2\left[0+0\right] \tag{611}$$
$$=0$$

$$\gamma_1\left[-0+0\right]=0 \tag{612}$$
$$0=0 \tag{614}$$
$$0=0 \tag{615}$$

$$2\beta_1\left[0-0\right] \tag{618}$$

$$+\lambda\left[0-0\right]=0$$

$$2\beta_{1}0-\lambda0=0\left(619\right)$$

$$0=0\left(621\right)$$

$$0=0\left(622\right)$$

$$\begin{array}{c}2\beta_{1}0\left(625\right)\\-\gamma_{1}0-20=0\end{array}$$

$$\begin{array}{c}0=0\left(626\right)\\0=0\left(628\right)\\0=0\left(629\right)\end{array}$$

$$\lambda\left[0+0\right]+\left[20-20\right]=0\left(630\right)$$

$$\begin{array}{c}\beta_{1}\left[0+0\right]\left(631\right)\\+0+0=0.\end{array}$$

$$0=0\left(640\right)$$

$$\begin{array}{c}2\beta_{2}0+\gamma_{2}0\left(641\right)\\+20=0\end{array}$$

$$\begin{array}{c}2\beta_{2}0+\lambda0+20=0\left(643\right)\\0=0\left(644\right)\\0=0645\\2\beta_{2}0+\gamma_{2}0+20=0.\left(646\right)\\0=0\left(647\right)\\0+0=0\left(648\right)\\0+0=0\left(649\right)\\0=0\left(650\right)\\0+0=0\left(651\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}0=0\left(653\right)\\0=0.\left(654\right)\end{array}$$

$$0=0\left(656\right)$$

$$2\beta_{2}0+\lambda0+20=0.\left(657\right)$$

$$\begin{array}{c}+\lambda\left[0-0\right]\\+2B0+20=0.\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\lambda\left[0-0\right]\left(658\right)\\+2-0+20=0.\end{array}$$

$$0 = 0. \, (659)$$

$$0 = 0. \, (661)$$

$$\begin{array}{c} \beta_2 \left[-0 + 0 \right] (663) \\ -0 + 0 = 0 \\ 0 = 0 \, (664) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 + 0 = 0 \, (665) \\ 0 = 0 \, (666) \\ 0 = 0. \, (668) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & 2\beta_2 0 - \gamma_2 0 \, (669) \\ + & +20 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \beta_2 \left[0 + 0 \right] = 0 \, (670) \\ 2\beta_2 0 - \lambda 0 \, (671) \\ +20 = 0 \end{array}$$

$$0 = 0. \, (672)$$

$$\begin{array}{c} \lambda \left[0 + 0 \right] = 0 \, (674) \\ \gamma_2 0 + \lambda 0 = 0. \, (675) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \gamma_2 0 + (678) \\ +20 = 0. \end{array}$$

$$0 = 0. \, (679)$$

$$\begin{array}{c} 20 - \lambda 0 = 0. \, (682) \\ \gamma_2 0 + 20 = 0. \, (685) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 20 + (687) \\ +20 = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 20 - (688) \\ \gamma_2 \begin{bmatrix} -0+ \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 20 \, (691) \\ +\lambda \begin{bmatrix} -0+ \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = 0. \end{array}$$

$$0 - 0 = 0. \, (692)$$

$$0 + 0 = 0. \, (694)$$

$$\lambda \left[0 - 0 \right] = 0. \, (695)$$

$$\begin{array}{l} \gamma_2 \left[0 + 0 \right] (697) \\ + \\ + \left[+20 + 20 \right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2 \left[-0 - 0 \right] (698) \\ & + \gamma_2 \left[-0 - 0 \right] \\ = & 0. \end{array}$$

$$0 = 0 \, (699)$$

$$0 = 0 \, (700)$$

$$\begin{array}{l} 2\beta_2 \left[-0 - 0 \right] (703) \\ + \lambda \left[0 - 0 \right] = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2\beta_2 0 \, (704) \\ + \lambda 0 - 20 = 0. \end{array}$$

$$0 = 0. \, (707)$$

$$0 = 0. \, (708)$$

$$0 - 0 = 0. (709)$$

$$0 = 0. (710)$$

46.19. **以上所得结果的清单**。

46.19.1. 不含 $B \left(x_1 x_2 \otimes 1_H \right)$ 项的二项式等式。

$$B(g \otimes 1_H ; 1_A , g) + B(x_1 \otimes 1_H ; 1_A , g x_1) = 0. \, (443)$$

$$B(g \otimes 1_H ; 1_A , g) + B(x_2 \otimes \ 1_H ; 1_A , g x_2) = 0. \, (459)$$

$$\beta_1 B(g \otimes 1_H ; 1_A , g x_1 x_2) = B \left(x_1 \otimes 1_H ; 1_A , g x_2 \right) . \, (554)$$

$$B(x_1 \otimes 1_H ; 1_A , g x_1) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H ; 1_A , g x_1 x_2) = 0. \, (508)$$

$$B(x_2 \otimes 1_H ; 1_A , g x_2) + B(g x_1 x_2 \otimes 1_H ; 1_A , g x_1 x_2) = 0. \, (509)$$

46.19.2. 我们七个元素的最终形式。我们重写等式 (81),(149), (217), (346),(347),(348) 和 (396)

考虑（46.17）中的所有单项式等式以及（46.19.1）中的所有等式。

$$B\left(g\otimes 1_H\right)=B\left(g\otimes 1_H;1_A,g\right)1_A\otimes g \tag{763}$$

$$B\left(x_1\otimes 1_H\right)=-B(g\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes gx_1 \tag{764}$$

$$B\left(x_2\otimes 1_H\right)=-B(g\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes gx_2 \tag{765}$$

$$B\left(gx_1x_2\otimes 1_H\right)=B(g\otimes 1_H;1_A,g)1_A\otimes gx_1x_2 \tag{766}$$

$$\begin{aligned} B(x_1x_2\otimes 1_H) \quad 767\ B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ \ 1_H)1_A\otimes 1_H+() \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)1_A\otimes x_1x_2+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)G\otimes x_1+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)G\otimes x_2+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)X_1\otimes x_1+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)X_1\otimes x_2+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)X_2\otimes x_1+ \\ +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)X_2\otimes x_2+ \\ +\left[+1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]X_1X_2\otimes 1_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (768)B\left(gx_1\otimes 1_H\right) \quad = \quad & +\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]1_A\otimes x_1+ \\ & +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)1_A\otimes x_2+ \\ & \left[B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;GX_2,1_H)\right]G\otimes 1_H+ \\ & +\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]X_1\otimes 1_H+ \\ & +B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)X_2\otimes 1_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (769) \quad B\left(gx_2\otimes 1_H\right) \quad = \quad & -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)1_A\otimes x_1+ \\ & +\left[B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]1_A\otimes x_2+ \\ & -B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)G\otimes 1_H+ \\ & -B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)X_1\otimes 1_H+ \\ & \left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]X_2\otimes 1 \end{aligned}$$

46.19.3. 仅包含 $B\left(x_1x_2\otimes 1_H\right)$ 的项的二项式等式。

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0 \tag{489}$$

$$\begin{aligned} & 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+ \\ & +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \end{aligned} =0. \tag{478}$$

鉴于（489），

$$+\gamma_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;\ 1_A,\ x_1x_2)+\ 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\right.\ x_1x_2\otimes 1_H;\ 2,\ \ x_1)]+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;\ \ X_2,\ \ x_2)$$

$=0.$(501) 变为

$$\begin{aligned} & 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+ \\ & +\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \end{aligned} \quad = \quad 0.\ (478)$$

this is (478)

鉴于（489）

$$2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+ \quad (503)$$
$$-\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right]$$

变为

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]+ & & \\ -\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)-\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) & = & 0\,(503) \\ & & \text{which is } (478). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+ & & \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) & = & 0.\,(479) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1) & = & 0\,(583) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2) \\ +\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2) & = & 0.\,(584) \end{array}$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\,(676)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\,(677)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)=0.$$

鉴于（489）

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0$$

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right](608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$

变为

$$-2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\,(608)$$
$$+\gamma_1\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]=0.$$
$$\text{which is } (583)$$

鉴于（489）

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0$$

$$2\beta_1\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right](605)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0$$

变为

$$2\beta_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_1 B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)=0\,(605)$$
$$\text{which is } (584).$$

鉴于 (489)

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0$$

$$2\beta_2\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\right](696)$$
$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

变为

$$-2\beta_2 B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\,(696)$$

$$+\gamma_2\left[-B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\right]-\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$
which is (676)

鉴于（489）

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0$$

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\,(693)$$
$$+\lambda\left[-1+B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\right]=0.$$

变为

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\,(693)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0.$$
which is (677)

$$1-B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)+B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)-B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)=0$$
(489)

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)+\\+\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\end{array}=0.\,(478)$$

$$\begin{array}{c}2\alpha B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)+\\+\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}=0.\,(479)$$

$$\begin{array}{rcl}&&2\beta_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\\+\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)&=&0\,(583)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}&&2\beta_1B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\\+\gamma_1B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)&=&0.\,(584)\end{array}$$

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\,(676)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)=0.$$

$$2\beta_2B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)+\gamma_2B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\,(677)$$
$$+\lambda B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)=0.$$

现在我们设定

(770)
$$\begin{array}{rcl}A&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;1_A,x_1x_2)\\B&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_1)\\C&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;G,x_2)\\D&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_1)\\E&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;X_1,x_2)\\F&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_1)\\G&=&B(x_1x_2\otimes 1_H;X_2,x_2)\end{array}$$

并使用这种重新标记方式重写我们的所有方程。

$$-A+E-F=-1\,(489)$$
$$2\alpha B+\gamma_1D+\gamma_2F=0\,(478)$$
$$2\alpha C+\gamma_1E+\gamma_2G=0\,(479)$$
$$\gamma_1B+2\beta_1D+\lambda F=0\,(583)$$
$$\gamma_1C+2\beta_1E+\lambda G=0\,(584)$$

$$\gamma_2 B + \lambda D + 2\beta_2 F = 0 \,(676)$$

$$\gamma_2 C + \lambda E + 2\beta_2 G = 0 \,(677)$$

我们写出系数矩阵：

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 2\beta_1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & 2\beta_1 & 0 & \lambda \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \lambda & 0 & 2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & \lambda & 0 & 2\beta_2 \end{matrix}$$

现在，我们通过行转置得到一个等价矩阵。

$$\begin{matrix} 0 & 2\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 2\beta_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda & 2\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 2\beta_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \lambda & 2\beta_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (771)$$

我们考虑矩阵

$$\begin{matrix} 2\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 2\beta_1 & \lambda \\ \gamma_2 & \lambda & 2\beta_2 \end{matrix}$$

其行列式为行列式：

$$\Delta = -2\alpha\lambda^2 + 2\lambda\gamma_1\gamma_2 - 2\beta_2\gamma_1^2 - 2\beta_1\gamma_2^2 + 8\alpha\beta_1\beta_2 \quad (772)$$

那么，我们的矩阵的行列式为

$$-\Delta^2.$$

We consider the system

$$\begin{matrix} 0 & 2\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 2\beta_1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \lambda & 2\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & 2\beta_1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \lambda & 2\beta_2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$$

- If $\Delta \neq 0$ then we have exactly one solution, namely $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$
- If $\Delta = 0$ then we have infinite solutions.

47. 可分性结果

定理 47.1。 设 $A = Cl(\alpha, \beta_i, \gamma_i, \lambda)$ 为一个 ***Clifford***代数，视为在 $E\,(2)$ 中所述的 ***Radford*** 8 维 ***Hopf***代数上的余模代数。假设 $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$，且 A 的所有定义常数均非零。

那么，对于满足(46.17)中所有单项式等式以及(46.19.1) 中所有二项式等式的任意双线性形式，*cowreath* ($A \otimes H^{op}, H$) 都是可分的，其中这六个元素满足(81)、(149)、(217)、(346)、(347)、(348)和(396)，即它们满足(763)(764) (765) (767)(768) (769) (766)。接着我们考虑(772)中定义的行列式 Δ 。此外，我们有两种情形。

(1) 每当 $\Delta \neq 0$ 时，都应满足以下附加条件

$$\begin{aligned} B(x_1x_2 \otimes 1_H; 1_A, x_1x_2) &= 1 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_1) &= 0 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; G, x_2) &= 0 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_1) &= 0 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_1, x_2) &= 0 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_1) &= 0 \\ B(x_1x_2 \otimes 1_H; X_2, x_2) &= 0 \end{aligned}$$

(2) 每当 $\Delta = 0$ 时，我们就有无穷多个解。

证明。 鉴于 [BCT1，命题 7.4],，我们必须找到一个双线性形式

$$B : H \otimes H \to A \otimes H^{op}$$

它满足卡西米尔条件、态射条件以及归一化条件。在第 (7) 段中，我们证明了如果 B 满足态射条件中的 (13) 和 (14)，那么它就满足归一化条件。

在第 (2) 部分中，我们考虑八个元素 $g \otimes 1_H$、 $x_1 \otimes 1_H$、 $x_1 \otimes 1_H$、 $x_2 \otimes 1_H$、 $x_1x_2 \otimes 1_H$、 $gx_1 \otimes 1_H$、 $gx_2 \otimes 1_H$、 $gx_1x_2 \otimes 1_H$，并假设相对于这些元素， B 满足卡西米尔条件，从而推导出此情形下得到的特定形式，即 (14)、(81)、(149)、(217)、(346)、(347)、(348) 和 (396)。然后，利用 (12) 和 (13)，我们可以证明，对于所有其他元素，卡西米尔条件都会自动成立。接着，在本节中，我们证明，鉴于我们选择用 B （$h \otimes 1_H$）表示所有 B （ $h \otimes h'$ ），其中 $h \otimes 1_H$ 遍历这七个元素，条件 (13) 将自动满足。因此，我们只剩下方程（ 12 ）。在得到 (45) 中为使该条件成立而必须满足的所有等式后，我们选择将讨论限定在非退化情形，即 A 的所有定义常数均非零。于是，我们归结为要求这七个元素满足 (46.17) 中的所有单项式等式以及 (46.19.1) 中的所有二项式等式，也就是说，它们满足 (14)、(763)、(764)、(765)、(767)、(768)、(769) 和 (766)。然后，我们研究了其余等式 (46.19.3)。对这些等式的研究使我们考虑了一个关于 (770) 中所列变量的线性等式组。接着，我们考察了所得方程组的矩阵。其行列式 Δ 给出了求解该方程组时必须考虑的两种情形。□

参考文献

[AG] Auslander, Maurice；Goldman, Oscar 交换环的 *Brauer* 群。《美国数学会汇刊》 **97** 1960 367 409 7 ( ), –。[1] BCT D. Bulacu, S. Caenepeel, B. Torrecillas，余缠绕上的纠缠模范畴的 *Frobenius* 函子与可分函子 *I*：一般理论，《代数与表示论》**23**(2020)，第 3 期，1119-1157。7, 8, 10, 760[BCT2] D. Bulacu, S. Caenepeel, B. Torrecillas，余缠绕上的纠缠模范畴的 *Frobenius* 函子与可分函子 *II*：应用，《代数杂志》 **515** 2018 236 277 7 ( ), -。BT D. Bulacu, B. Torrecillas, [ ] 幺半群范畴中的 *Frobenius* 函子与可分代数扩张：缠绕的应用。《非交换几何杂志》 **9** 2015 3, 707 774 7 ( )，第 – 期。BT D. Bulacu 和 B. Torrecillas, [1] 关于 *Frobenius* 与可分 *Galois* 余缠绕，《数学杂志》**297** 2, 25 2021 1 57 ( )，第 - – 期。[BT2] D. Bulacu, B. Torrecillas, *Galois* 余缠绕与裂幺半群余缠绕。应用。《美国数学会回忆录》**270** (2021)，第 1322 期。[CD] S. Caenepeel, S. Dascalescu, 关于维数为 2^n的尖点Hopf代数，《伦敦数学学会会报》**31** (1) (1999 17 24 8), -。F T. Ford，可分代数，《数学研究生教程》183。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。7 [ ] **181 3** 1996 760 786 8 G S. Gelaki，关于点带状 [ ] *Hopf* 代数，《代数杂志》() ( ) –。M A. Masuoka，由近本原元生成的 *Hopf* 代数的裂开扩张，《通信代数》**22** (11) (1994), 4537-4559

[1] **583** 2021 153 186 1, 8 MT C.
[2] Menini 和 B. Torrecillas，重可分余环绕，《代数杂志》( )，-。MT C. Menini 和 B. Torrecillas，克利福德代数上的可分余环，《高级应用克利福德代数》**33** (2) (2023 1 51 1, 8)，-。NVV C. Nastăsescu、M. van den Bergh 和 F. van Oystaeyen，可分函子在分次环上的应用，《代数杂志》 **123** 1989 397 413 7 ( )，-。PV F. Panaite, F. Van Oystaeyen，作为某些尖点*Hopf*代数裂开扩张的*Clifford*型代数，《通信代数》 28 2000 585 600 8 ( )，-。R D.E.Radford，关于源自有限维*Hopf*代数的 *Kauffman*结不变量，载于《Hopf代数进展》，第 205-266 页，J. Bergen 和 S. Montgomery（编），《纯粹与应用数学讲义》**158**，Marcel Dekker，纽约，1994。1, 7[S] D.Stefan，低维*Hopf*代数，《代数杂志》**211** (1999), 343-361。8

费拉拉大学，数学系，马基雅维利街30号，费拉拉，I-44121，意大利电子邮箱地址: men@unife.it网址: sites.google.com/a/unife.it/claudia-menini

数学系，阿尔梅里亚大学，阿尔梅里亚，西班牙电子邮箱地址: btorreci @ual.es网址: https://w3.ual.es/~btorreci