arXiv:2512.20262v1 [math.NT] 23 Dec 2025

整数上的多项式的不可约因子

RISHUGARG[1] 和 JITENDER SINGH[2], †

Abstract. 本文针对若干类具有整数系数的多项式，得到了若干新的因式分解结果。为此，我们利用这些多项式及其高阶形式导数在足够大的整数参数处取值的素因数分解信息。若事先已知此类多项式的因子的最小可能次数的下界，则所需的整数参数会显著减小，从而使相应的因式分解结果更易应用。本文还通过牛顿多边形证明了所研究的这些多项式类的因子次数显式下界。

1. Introduction

对于一个满足 $a_0a_n \neq 0$ 的多项式 $f = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathbb{Z}[z]$，我们定义多项式 $s_i \in \mathbb{Z}[z]$ 为

$$s_i(z) = f^{(i)}(z)/i!,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

其中 $f^{(0)}(z) = f(z)$，且 $f^{(i)}(z)$ 对于 $i \geq 1$ 表示关于 z 的 f 的形式 i 阶导数。多项式 f 的高度 h_f 定义为数量

$$h_f := \max_{0\leq i\leq n-1}\{|a_i|/|a_n|\}.$$

在 [7], 一个广为人知的创新事实是， f 的所有零点都位于复平面中的开圆盘 $|z| < h_f + 1$内，并满足条件：当整数参数严格大于 $h_f + 1$ 时， $|f|$ 取素数值。这一事实促成了 f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的不可约性。Girstmair 在 [6] 中进一步推广了这一结果，去除了对本原多项式必须为素数的假设， f 只要求其满足 $f(m) = \pm pd$，其中正整数 d 是素数， $p \nmid d$ 且 m严格大于 $h_f + d$。在 [5], 中，Girstmair不可约性判别准则得到进一步推广，并证明了以下结果。

定理 A ([5])。设 $f = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，满足$a_0a_n \neq 0$。假设存在自然数 m、 d、 k、 $j \leq n$，以及一个素数 $p \nmid d$，使得$m \geq h_f + 1 + d$、 $f(m) = \pm p^k d$，最大公因数$(k,\ j) = 1$，p^k整除 $s_i(m)$，对每个指标 $i = 1$、.....、$j - 1$ 均成立；并且对于 $k > 1$， p 也不整除 $s_j(m)$。那么多项式 f 在 $\mathbb{Z}[z]$中不可约。

Girstmair 的判别准则对应于定理 $k = 1$ 的情形A。事实上，Girstmair 的判别准则最近在 [4] 和 [8] 中得到了进一步推广，从而建立了若干类整数上的不可约多项式。

†通讯作者电子邮箱：jitender.math@gndu.ac.in 2020年数学主

题分类：主要分类 12E05；11C08

关键词：Dumas不可约性判别准则；牛顿多边形；多项式因式分解；整数系数。1

本文通过对 f 在充分大的整数参数m处取值的一个或多个高阶导数施加条件，进一步推广了上述不可约性结果。本文证明的一些判别准则受到 Dumas 经典不可约性判别准则的启发 [1]。接下来，我们回顾一下：对于任意素数 p 和非零整数 a， $v_p(a)$表示满足 $p^{v_p(a)}$ 整除 a的最大非负整数，并定义 $v_p(0) = \infty$。我们还回顾一下，若多项式 $f \in \mathbb{Z}[z]$ 的所有系数的最大公约数为 1，则称其为本原多项式。

我们的主要结果之一是以下因式分解定理。

定理1. 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个满足 $a_0 a_n \neq 0$的本原多项式。假设存在正整数 $m \geq h_f + 2$，使得 $f(m) = \pm p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$，其中$p_1, \ldots, p_r$ 是素数，且当 $r \geq 2$时它们两两不同。对于每个 $i = 1, \ldots, r$，设 $j_i \leq n$ 为满足以下条件的正整数。

(i) $v_{p_i}(s_{j_i}(m)) = 0$, *and* $\gcd(k_i, j_i) = 1$,
(ii) *If* $j_i > 1$, *then* $\frac{k_i}{j_i} < \frac{v_{p_i}(s_t(m))}{j_i - t}$ *for each* $t = 1, \ldots, j_i - 1$.

那么 f 至多是 $\mathbb{Z}[z]$中的 r 个不可约多项式的乘积。特别地，若 $r = 1$，则f 不可约。

定理 1 特别地，对于 $r = 1$，得到定理 A 的推广，该定理已在 [8,定理 1]中证明。此外，定理1中提到的上界是最佳的，因为存在达到该上界的整数上的多项式。例如，多项式

$$f = 64 + 56z^2 + 14z^4 + z^6$$

满足定理 1 的假设，适用于 $m = 117 > 66 = h_f + 2$，因为这里我们有

$$s_0(117) = 13691 \times 13693 \times 13697,$$

它是三个不同素数 $p_1 = 13691$、 $p_2 = 13693$ 和 $p_3 = 13697$ 的乘积，因此$r = 3$ 且 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$。此外，对于每个 $i = 1, \ldots, 6$ 以及$t = 1, 2, 3$， $s_i(117)$ 与 p_t 互素。因此，我们有 $j_1 = j_2 = j_3 = 1$。于是，多项式 f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多是 $r = 3$ 个不可约因子的乘积，而直接计算可得

$$64 + 56z^2 + 14z^4 + z^6 = (2 + z^2)(4 + z^2)(8 + z^2),$$

它是 $\mathbb{Z}[z]$ 中恰好由三个不可约多项式相乘所得的多项式。注意，定理 A 和 [8, 定理 1] 均不适用于推导关于多项式 $64 + 56z^2 + 14z^4 + z^6$ 的因式分解的信息。

定理 2。 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，且满足 $a_0 a_n \neq 0$。假设存在正整数 $m \geq h_f + 2$，使得 $s_n(m) = \pm p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$，其中 p_1、……、p_r 是彼此不同的素数，且对于 $r \geq 2$ 均成立。对于每个 $i = 1$、……、r，取正整数 $j_i \leq n$，使其满足以下条件。

(i) $v_{p_i}(s_{n-j_i}(m)) = 0$，且 最大公因数$(k_i, j_i) = 1$; ***(ii)*** 如果 $j_i > 1$，则对于每个 $t = 1$、……、$j_i - 1$, $\frac{k_i}{j_i} < v_{p_i}(s_{n-t}(m))\, j_i - t$; ***(iii)*** $|s_0(m)/q| \leq |s_n(m)|$，其中 q 是 $|s_0(m)|$ 的最小素因子。

那么， f 是 $\mathbb{Z}[z]$中的至多 r 个不可约多项式的乘积。特别地，如果 $r = 1$，那么f 是不可约的。

的不可约因子个数的上界如定理2 所述，可由多项式达到

$$f = 81 + 1782z^2 + 9797z^4$$

对于 $m = 8 > h_f + 2$，由于这里有 $s_0(8) = 6217 \times 6473$，而 6217 和 6473 是素数，因此 $q = 6217$ 和 $s_0(8)/q = 6473 < 9797 = s_4(8)$ 成立。此外，我们有$s_4(8) = 9797 = 97 \times 101$，其中 $p_1 = 97$ 和 $p_2 = 101$ 是素数，因此 $r = 2$ 和$k_1 = 1 = k_2$。由于 $s_3(8) = 2^5 \times 97 \times 101$， $s_2(8) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17923$，且 17923 也是素数，因此可知 $s_2(8)$ 与 97×101 互素，这说明 $j_1 = j_2 = 2$。于是我们有

$$\frac{k_i}{j_i} = \frac{1}{2} < 1 = \frac{v_{p_i}(s_3(8))}{j_i - 1},\ i = 1, 2.$$

我们得出， f 是 $\mathbb{Z}[z]$中的至多两个不可约多项式的乘积，其中注意到 f 可分解为

$$f(z) = 81 + 1782z^2 + 9797z^4 = (9 + 97z^2)(9 + 101z^2),$$

它是 $\mathbb{Z}[z]$中的恰好两个不可约多项式的乘积。

对于一个具有整数系数的非常数多项式 f，令 $\Delta_f \le \deg f$ 为一个自然数，使得 f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中没有次数小于 Δ_f 的因子。由此可知，如果

$$\deg f \le 2\Delta_f,$$

那么多项式 f 在 $\mathbb{Z}[z]$中不可约。以下结果有助于计算一大类具有整数系数的多项式的Δ_f，并推广了论文 [9, Corollary 3.8]中的一个结果。

定理 3. 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 满足 $a_0 a_n \neq 0$。假设存在一个素数 p 和一个正整数 $j \le n$，使得以下条件成立。

(i) $v_p(a_j) = 0$,

(ii) $\frac{v_p(a_0)}{j} \le \frac{v_p(a_i)}{j-i}$ *for each* $i = 0, 1, \ldots, j-1$,

(iii) *If* $j < n$, *then* $\frac{v_p(a_n)}{n-j} \le \frac{v_p(a_i)}{i-j}$ *for each* $i = j+1, j+2, \ldots, n-1$.

令 $d_1 =$最大公因数$(v_p(a_0)\ j)$，若 $j < n$，则令 $d_2 =$最大公因数$(v_p(a_n)\ n-j)$。定义

$$k_f = \begin{cases} \min\{j/d_1, (n-j)/d_2\}, & \text{if } j < n; \\ n/d_1, & \text{if } j = n. \end{cases}$$

那么， f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的任何不可约因子的次数至少为 k_f。

注意，满足定理 f 假设的整数系数多项式3还满足以下性质:

$$\Delta_f = k_f.$$

受论文 [2, 命题 1], 中证明的结果启发，我们可以得到以下更一般的结果。

定理4。 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，且满足 $a_0 a_n \neq 0$。假设存在自然数 m、 d、 k以及素数 $p \nmid d$，使得

$$(m - 1 - h_f)^{\Delta_f} \ge d,$$

满足 $s_0(m) = \pm p^k d$。那么多项式 f 是至多.....的乘积 t

$$\min_{0\le i\le n}\{i + v_p(s_i(m))\}$$

不可约 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的因子。特别是，如果 $k = 1$，或 $p \nmid s_1(m)$，那么 f 是不可约的.

定理 $k = 1 = d$ 和 $j = n$ 中的情形4 恰好就是论文中证明的不可约性结果： [2, 命题 1]。

与前文一样，定理4 中提到的上界是最佳可能的，因为存在达到此上界的多项式的显式例子。鉴于此，我们考虑多项式

$$f = -2 - 4z + 3z^2 - 2z^3 + 2z^4 \in \mathbb{Z}[z],$$

对此有 $h_f = 2$。首先注意， f 满足定理 3 关于素数 2 的假设， $j = 2$， $d_1 = d_2 = 1$。因此， f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的每个不可约因子的次数至少为 $\min\{2/1, 2/1\} = 2$，即 $\Delta_f = 2$。现在取4 对 f 应用定理，并令$m = 14$，可得 $s_0(m) = 11^3 \cdot 54$，这表明 $p = 11$， $k = 3$，以及 $d = 54$，其中

$$(m - 1 - h_f)^{\Delta_f} = (14 - 1 - 2)^2 = 121 > 54 = d.$$

因此，多项式 f 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 $\min\{0 + 3, 1 + 1, 2 + 0, 3 + 1, 4 + 0\} = 2$ 个不可约因子的乘积，其中我们发现 f 分解为

$$f(z) = -2 - 4z + 3z^2 - 2z^3 + 2z^4 = (2 + z^2)(-1 - 2z + 2z^2),$$

它恰好是两个整数上的不可约多项式的乘积。

如果改为利用底层多项式首项系数的因式分解信息，那么我们可以得到以下因式分解结果。

定理 5。 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，且 $a_0 a_n \neq 0$。假设存在自然数 m、 d、 k，以及一个素数 $p \nmid d$，使得

$$(m - 1 - h_f)^{\Delta_f} \ge d,$$

其中 $s_n(m) = \pm p^k d$、 $|s_0(m)/q| \le |s_n(m)|$，其中 q 是 $s_0(m)$ 的最小素因子。那么，多项式 f 是至多

$$\min_{1\le i\le n}\{k, i + v_p(s_{n-i}(m))\}$$

$\mathbb{Z}[z]$中的不可约因子。特别地，如果 $k = 1$，或者 $p \nmid s_{n-1}(m)$，那么 f 是不可约的。

Th定理 5 中提到的上界由多项式

$$f = 9 - 36z + 54z^2 - 2094z^3 + 4125z^4 - 2058z^5 + 117649z^6,$$

其中 $h_f < 1$。为此，我们首先注意到， f 满足定理 3 关于素数 3、 $j = n = 6$和 $d_1 = 2$ 的假设，从而得到 $\Delta_f = 3$。现在取$m = 7$，则有 $s_6(7) = 7^6$，因此，我们有 $p = 7$、 $k_1 = 6$ 和 $d = 1$。此外，$s_0(7) = 117541^2$，所以 $q = 117541$，并且我们有 $s_0(7)/q = 117541 < 117649 = s_6(7)$。由于 $(m - 1 - h_f)^{\Delta_f} > (7 - 1 - 1)^3 = 125 > 1$，根据定理 5，我们推得多项式 f是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 $\min\{6, 1 + 3, 2 + 0, 3 + 0, 4 + 0, 5 + 0, 6 + 0\} = 2$ 个不可约因子的乘积，其中直接计算可验证

$f(z) = 9 - 36z + 54z^2 - 2094z^3 + 4125z^4 - 2058z^5 + 117649z^6 = (-3 + 6z - 3z^2 + 343z^3)^2$,

它在整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中恰好是两个不可约多项式的乘积。4

2. Examples

下面给出一些显式例子，说明其因式分解性质可由以下定理推得：1-5。

例1。 多项式

$$F_1 = 1287 + 3168z^2 - 3528z^3 + 1936z^4 - 4312z^5 + 2401z^6 \in \mathbb{Z}[z]$$

满足定理1关于 $m = 4 > h_{F_1} + 2$ 的假设，因为这里 $s_0(4) = 2393 \times 2399$ 是两个素数 $p = 2393$ 和 $p_2 = 2399$ 的乘积，因此 $r = 2, k_1 = 1 = k_2$。进一步地，我们有 $s_1(4) = 2^7 \times 5^3 \times 599$，它与 $s_0(4)$ 互素，因此 $j_1 = j_2 = 1$。所以，多项式 F_1 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多两个不可约因子的乘积；在这里，我们发现多项式 F_1 是两个不可约多项式 $39 + 44z^2 - 49z^3$ 和 $33 + 44z^2 - 49z^3$ 的乘积。论文 [8, 定理 3] 得出了关于多项式 F_1 的相同结论。

例2。 考虑多项式

$$F_2 = 4 + 120z^2 + 899z^4,$$

它满足定理 2 的假设，因此 $m = 3 > h_{F_2} + 2$ 所以 $s_0(3) = 263 \times 281$，其中 263 和 281 均为素数，因此 $q = 263$，且 $s_0(3)/q = 281 < 899 = s_4(3)$。由于$s_4(3) = 899 = 29 \times 31$，我们有 $p = 29, p_2 = 31, k_1 = k_2 = 1$；又由于对于每个$i = 1$，2 和 $s_2(3) = 2 \times 3 \times 8111$，其与 $s_4(3)$ 互素，因此可得 $j_1 = j_2 = 2$。最后，对于每个 $i = 1$，2，我们有 $k_i/j_i = 1/2 < 1 = v_{p_i}(s_{4-i}(3))/(2-1)$。因此，多项式 F_2 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 2 个不可约因子的乘积，其中我们发现

$$F_2(z) = (2 + 29z^2)(2 + 31z^2),$$

它是 $\mathbb{Z}[z]$ 中恰好两个不可约多项式的乘积。

例3。 现在考虑多项式

$$F_3 = 4 - 16z + 32z^2 + 4z^3 - 56z^4 + 72z^5 + 81z^6,$$

它满足定理 3 关于素数 2 的假设，$j = n = 6$，$d_1 = 2$，其中注意到 $h_{F_3} = 72/81 < 1$。因此，我们有 $\Delta_{F_3} = 3$。注意，多项式F_3 满足定理 4 关于 $m = 4$ 的假设，因此 $s_0(4) = 313^2 \cdot 4$，其中 $p = 313$，$k = 2$，且 $d = 4$，其中

$$(m - 1 - h_{F_3})^{\Delta_{F_3}} > (4 - 1 - 1)^3 = 8 > 4 = d.$$

我们推得，多项式 F_3 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中是至多 $\min\{0+2, 1+1, 2+0, 3+0, 4+0\} = 2$ 个不可约因子的乘积，其中我们得到

$$F_3(z) = (2 - 4z + 4z^2 + 9z^3)^2,$$

它是 $\mathbb{Z}[z]$ 中恰好两个不可约因子的乘积。

例4。 多项式

$$F_4 = 2 - 2z + 2z^2 - 375z^3 + 100z^4 - 100z^5 + 100z^6 - 18750z^7$$

满足定理 3 关于素数 2 的假设，$j = 3$，$d_1 = 1$，且 $d_2 = 1$，因此我们得到 $\Delta_{F_4} = 3$。现在注意，多项式 F_4 满足定理 5 关于 $m = 3 > h_{F_4} + 1$的假设，$s_7(3) = 5^5 \cdot 6$ 因此 $p = 5$，$k_1 = 5$，且 $d = 6$。此外，$s_0(3) = -4051 \cdot 10111$，其中 4051 和 10111 是素数，因此 $q = 4051$ 而我们

有 $|s_0(3)/q| = 10111 < 18750 = |s_7(3)|$。由于 $(m-1-h_{F_4})^{\Delta_{F_4}} = (3-1-0.02)^3 \approx 7.76 > 6$，根据定理 5，我们推得多项式 F_4 在 $\{5, 1+2, 2+2、3+2、4+2、5+0、6+1、7+0\} = 3$ 中至多是 min 个不可约因子的乘积，$\mathbb{Z}[z]$其中我们发现 F_4 可分解为

$$F_4(z) = (2 - 2z + 2z^2 - 375z^3)(1 + 50z^4),$$

它恰好是两个不可约因子的乘积。

3. Proofs

论文 [3,引理 9] 是证明定理1.以下结果

引理 A. 设 $g = s_0 + s_1 z + \cdots + s_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个次数为 n 的多项式，使得存在一个指标 j 满足 $1 \le j \le n$，并且以下条件成立。

(i) $v_p(s_j) = 0, (ii)$ 若 $j > 1$，则对于每个 $i = 1, \ldots,$ $j-1$，都有 $v_p(j) \le v_p(s_i)$ (iii) $\gcd(v_p(s_0), j) = 1$。

那么，多项式 g 在整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中的任意因式分解 $g(z) = g_1(z)g_2(z)$ 都满足 $v_p(g_1(0)) = 0$，或 $v_p(g_2(0)) = 0$。

The 在后文证明我们的结果时，也将用到以下引理。

引理 6. 设 $f = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个满足 $a_0 a_n \neq 0$ 的本原多项式。设 m 和 d 为满足 $m \ge h_f + 1 + d$ 的正整数。若 $g(z) = f(m+z)$，则 $g \in \mathbb{Z}[z]$ 满足：g 在 $\mathbb{C}$ 中的每个零点 θ 都满足 $|\theta| > d$。

引理 6 的证明。 我们有 $f(m+\theta) = g(\theta) = 0$，这表明 $m+\theta$ 是多项式 f 的一个零点。由于 f 的所有零点都位于复平面中以原点为圆心的开圆盘内，因此

$$h_f + 1 > |m + \theta| \ge m - |\theta| \ge h_f + 1 + d - |\theta|,$$

这表明 $|\theta| > d$，证毕。 □

现在我们将按如下方式证明定理 1 。

定理1的证明。定义 $g(z) = f(m+z)$，使得 $g = s_0(m) + s_1(m)z + \cdots + s_n(m)z^n \in \mathbb{Z}[z]$。注意，$\gcd(s_0(m), \ldots, s_n(m)) = 1$，因为对于所有 $i = 1$，.....，r，$v_{p_i}(s_{j_i}(m)) = 0$；由此可知，多项式 g 是本原多项式。我们还注意到，g 和 f 在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的不可约因子数相同。因此，只需证明 g 在整数环上的不可约因子数至多为 r。下面进行证明。设 $g(z) = g_1(z) \cdots g_N(z)$ 是多项式 g 的因式分解，它是 $\mathbb{Z}[z]$ 中 N 个不可约因子 g_1，.....，g_N 的乘积。反设 $N > r$。鉴于

$$p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} = |f(m)| = |g(0)| = |g_1(0)| \cdots |g_N(0)|,$$

根据 $d = 1$ 的引理 6，我们发现，对于每个 $j = 1$，都有 $|g_j(0)| > 1$，.....，N。应用抽屉原理可知，存在一个指标 $i \in \{1, \ldots, r\}$，以及集合 $\{1, \ldots, N\}$ 中两个不同的指标 ℓ_1 和 ℓ_2，使得对于每个 $t = 1$，2，p_i 都整除 $g_{\ell_t}(0) = s_{\ell_t}(m)$。于是，对于每个 $t = 1$，2，都有 $v_{p_i}(g_{\ell_t}(0)) > 0$。现在，如果我们将集合 $\{1, \ldots, N\}$ 划分为

两个不相交集合 P_1 和 P_2，使得对于 $t = 1,2$，有 $\ell_t \in P_t$，那么我们可以得到 g 的如下因式分解。

$$g(z) = \Big(\prod_{a\in P_1} g_a(z)\Big)\Big(\prod_{b\in P_2} g_b(z)\Big),$$

其中 $G_t(z) = \prod_{a\in P_t} g_a(z)$ 对每个 $t = 1$ 都是 $\mathbb{Z}[z]$ 中的多项式，2，且满足 $g(z) = G_1(z)G_2(z)$，其中 $v_{p_i}(G_t(0)) \geq v_{p_i}(g_{\ell_t}(0)) > 0$ 对每个 $t = 1$ 都成立，2。这与引理 A 矛盾。□

为了证明定理 2，我们先证明以下因式分解结果，该结果本身也可能具有独立的研究价值。

引理 7。 设 $g = s_0 + s_1 z + \cdots + s_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，且 $s_0 s_n \neq 0$以及 g 的所有零点都位于复平面中的区域 $|z| > 1$ 内。假设 $s_n = \pm p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$对于素数 p_1、……、p_r 成立，这些素数彼此不同；对于 $r \geq 2$ 和 k_1、……、k_r，它们都是正整数。对于每个 $i = 1$、……、r，令 $j_i \leq n$ 为满足以下条件的一个正整数。

(i) $v_{p_i}(s_{n-j_i}) = 0$，且 $\gcd(k_i, j_i) = 1$；***(ii)*** 若 $j_i > 1$，则对于每个 $t = 1$、…、$j_i - 1$，$\frac{k_i}{j_i} < v_{p_i}(s_{n-t})\, j_i - t$；***(iii)*** $|s_0/q| \leq |s_n|$，其中 q 是 $|s_0|$ 的最小素因子。

那么，g 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 r 个不可约多项式的乘积。特别地，如果 $r = 1$，那么 g 是不可约的。

多项式

$$g = 128 + 120z^2 - 113z^4 - 105z^6$$

满足引理 7 的假设，因为在此处，g 的首项是 $s_6 = 105 = 3\times 5\times 7$，它是 $r = 3$ 个素数的乘积，因此 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$；对于 $q = 2$，我们有 $s_0/q = 128/2 = 64 < 105 = s_6$。由于 $\gcd(s_4, 105) = 1$，我们必有 $j_1 = j_2 = j_3 = 2$ 和对于每个 $i = 1, 2, 3$，$k_i/j_i = \frac{1}{2} < \infty = v_{p_i}(s_5)$ $2-1$。因此，多项式 g 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 3 个不可约因子的乘积，其中我们得到

$$128 + 120z^2 - 113z^4 - 105z^6 = (1 + z^2)(8 + 7z^2)(16 - 15z^2),$$

它是整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中恰由 3 个不可约多项式构成的乘积。

引理 7 的证明。设 $g(z) = g_1(z) \cdots g_N(z)$ 是整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中由 N 个不可约因子 g_1，……，g_N 构成的乘积。由于 g 的每个零点都位于区域 $|z| > 1$ 内，因此 $|s_0| > |s_n|$，从而 q 存在，并且对于每个 $i = 1$，……，N，都有 $|g_i(0)| > 1$。对于每个 $i = 1$，……，N，设 α_i 为 g_i 的首项系数，于是有 $\alpha_1 \cdots \alpha_N = s_n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$。利用假设，可得

$$|s_0/q| \leq |s_n| \;<\; |s_n|\Big(\frac{|g_1(0)|}{|\alpha_1|} \cdots \frac{|g_N(0)|}{|\alpha_N|}\Big) \times \frac{|\alpha_i|}{|g_i(0)|} = |s_0|\frac{|\alpha_i|}{|g_i(0)|},$$

这表明对于每个 $i \in \{1, \ldots, N\}$，$|g_i(0)/q| < |\alpha_i|$。由于 $|g_i(0)/q| \geq 1$，对于每个指标 i，我们必有 $|\alpha_i| > 1$，对每个 i均成立。结合 $\pm p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} = s_n = \alpha_1 \cdots \alpha_N$这一事实可知，对于每个 $i = 1$、……、N，都存在一个素数 p_{t_i}，它整除某个 $t_i \in \{1, \ldots, r\}$对应的 α_i。现在反设 $N > r$。那么存在一个指标 $i \in \{1, \ldots, r\}$，以及集合 $\{1, \ldots, N\}$ 中的两个不同指标 ℓ_1 和 ℓ_2，使得对于每个 $t = 1$，p_i 都整除 α_{ℓ_t}，2.7

现在，如果我们将集合 $\{1,\dots,N\}$ 划分为两个不相交集合 P_1 和 P_2，使得 $\ell_t \in P_t$ 对于 $t=1,\ 2$，并令 $G(z)=z^n g(1/z)$，我们便得到 $G\in\mathbb{Z}[z]$，并且 G 满足引理 A 的假设，其中 $G(0)=\alpha_1\cdots\alpha_N$，并且

$$G(z)=\Big(\prod_{a\in P_1} z^{\deg g_a} g_a(1/z)\Big)\Big(\prod_{b\in P_2} z^{\deg g_b} g_b(1/z)\Big),$$

其中，对每个 $t=1,\ 2$，$G_t(z)=\prod_{a\in P_t} z^{\deg g_a} g_a(1/z)$ 是 $\mathbb{Z}[z]$ 中的一个多项式，使得 $G(z)=G_1(z)G_2(z)$，其中

$$v_{p_i}(G_t(0))\geq v_{p_i}(\alpha_{\ell_t})>0,$$

对每个 $t=1,\ 2$。这与引理 A矛盾。 □

利用引理 7，我们现在证明定理 2 如下。

定理 2 的证明。定义 $g(z)=f(m+z)$，使得 $g=s_0(m)+s_1(m)z+\cdots+s_n(m)z^n$。利用引理 6 处理 $d=1$，我们发现 g 的所有零点都位于复平面中的区域 $|z|>1$ 内。因此，g 的系数满足引理 7 的假设。由此，g，从而f 是整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中至多 r 个不可约多项式的乘积。□

为了证明定理 3，我们将利用以下基于杜马定理的基本结果 [1]，该定理涉及牛顿多边形。

定理 *B*（*Dumas* [1]）。设 $f=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n\in\mathbb{Z}[z]$ 满足 $a_0a_n\neq 0$。假设存在非常数多项式 f_1、……、$f_r\in\mathbb{Z}[z]$，使得 $f(z)=f_1(z)\cdots f_r(z)$。设 p为素数。令 $\{A_i(x_i,y_i) \mid 0\leq i\leq k,\ x_0=0<x_1<\cdots<x_k=\deg f\}$ 为相对于素数 p的牛顿多边形 $NP(f)$ 上的 $k+1$个格点所构成的列表。对于每个$s\in\{1,\dots,k\}$，令 $b_s=x_s-x_{s-1}$和 $\{\epsilon_{ts}\mid 1\leq t\leq r, 1\leq s\leq k\}=\{0,1\}$。于是，对于每个 $s\in\{1,\dots,k\}$，存在唯一的 $i\in\{1,\dots,r\}$，使得 $\epsilon_{is}=1$，并且对于每个$i=1$、……、r，我们有

$$\deg f_i=\epsilon_{i1}b_1+\epsilon_{i2}b_2+\cdots+\epsilon_{ik}b_k.$$

下文还将用到以下标准结果。

引理 8. 连接笛卡尔坐标为 $A(a_1,b_1)$ 和 $B(a_2,b_2)$ 的两点的线段 AB 上（包括端点）的格点数等于

$$1+\gcd(|a_1-a_2|,|b_1-b_2|).$$

定理 3 的证明。 设 $f(z)=f_1(z)f_2(z)\cdots f_N(z)$ 是 f在 $\mathbb{Z}[z]$上的 f 的 N不可约多项式 $f_1,\dots,f_N$ 的因式分解。我们不妨设 f_t 对每个 $t=1,\dots,N$ 都非常数。

首先假设 $j<n$。根据假设，f关于 p 的牛顿多边形 $NP(f)$ 有一条边连接端点 $A(0,v_p(a_0))$ 和 $B(j,0)$，另一条边连接端点 $B(j,0)$ 和 $C(n,v_p(a_n))$，如图 1 所示。根据引理 8，边 AB 和 BC 上（包括端点）的格点总数为

$$1+\gcd(v_p(a_0),j)=1+d_1 \text{ and } 1+\gcd(v_p(a_n),n-j)=1+d_2,$$

分别（见图 1）。现在令

$$E=\{0,1,2,\dots,d_1\},\ F=\{d_1+1,\dots,d_1+d_2\},$$

并分别以 χ_E 和 χ_F 表示 E 和 F 的特征函数，我们发现，关于 p， $NP(f)$ 上所有 d_1+d_2+1 格点的列表为（x_ℓ， y_ℓ）、$\ell=0$， 1，……， d_1+d_2，其中对于每个这样的索引 ℓ，我们有

$$\begin{aligned} x_\ell &= \frac{j}{d_1}\ell\chi_E(\ell)+\Big(j+\frac{\ell-d_1}{d_2}(n-j)\Big)\chi_F(\ell), \\ y_\ell &= \frac{v_p(a_0)}{d_1}(d_1-\ell)\chi_E(\ell)+\frac{v_p(a_n)}{d_2}(\ell-d_1)\chi_F(\ell). \end{aligned}$$

根据定理 B 我们可知，对于每个 $\ell=0$， 1、……、 $k=d_1+d_2$，存在唯一的指标

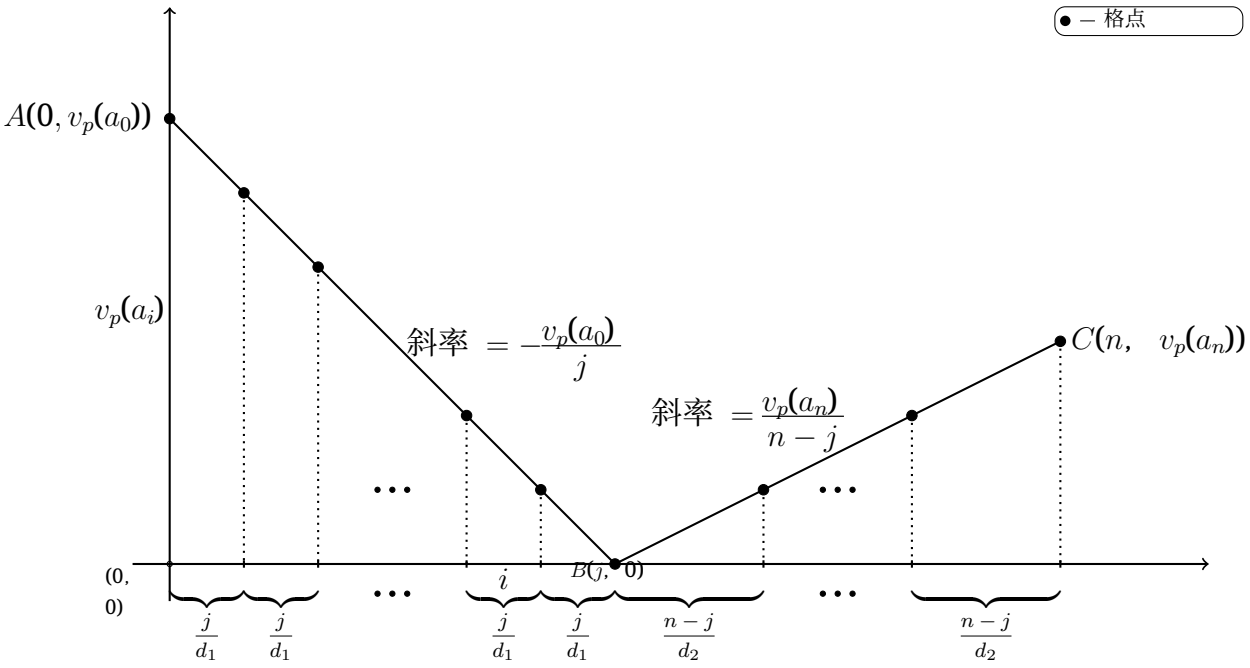


FIGURE 1. 牛顿多边形 $NP(f)$，适用于 f $j<n$ 的情形。

$i_\ell\in\{1,\dots,N\}$ 使得 $\epsilon_{i_\ell\ell}=1$（从而 $\sum_{t=1}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}\geq 1$ 对于每个这样的指标 i），并且对于每个 $i=1$, ……， N，我们有

$$\begin{aligned} \deg f_i &= \sum_{t=1}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}(x_t-x_{t-1}) \\ &= \frac{j}{d_1}\sum_{t=1}^{d_1}\epsilon_{it}t+\sum_{t=d_1+1}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}\Big(j+\frac{t-d_1}{d_2}(n-j)\Big) \\ &- \frac{j}{d_1}\sum_{t=2}^{d_1+1}\epsilon_{it}(t-1)-\sum_{t=d_1+2}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}\Big(j+\frac{t-d_1-1}{d_2}(n-j)\Big) \\ &= \frac{j}{d_1}\sum_{t=1}^{d_1}\epsilon_{it}+\frac{n-j}{d_2}\sum_{t=d_1+1}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}\geq\min\left\{\frac{j}{d_1},\ \frac{n-j}{d_2}\right\}\sum_{t=1}^{d_1+d_2}\epsilon_{it}, \end{aligned}$$

鉴于 $\sum_{t=1}^{d_1+d_2} \epsilon_{it} \geq 1$ 这一事实，这表明

$$\deg f_i \geq \min\left\{\frac{j}{d_1},\ \frac{n-j}{d_2}\right\},\ \text{for each } i = 1, \ldots, N.$$

现在假设 $j = n$。在这种情况下， $NP(f)$ 仅由连接点 AB 与 $A(0, v_p(a_0))$ 和 $B(n, 0)$ 的线段组成，如图 2 所示，因此 $NP(f)$ 上所有格点的列表由以下 d_1+1 点 (x_ℓ, y_ℓ) 组成，其中对于每个这样的指标 $0 \leq \ell \leq d_1$，有

$$x_\ell \ = \ \frac{n}{d_1}\ell,\ y_\ell = \frac{v_p(a_0)}{d_1}(d_1 - \ell),$$

再次由定理 B，对于每个 $\ell = 0$、1，...， $k = d_1$，存在唯一的指标 $i_\ell \in \{1, \ldots, N\}$

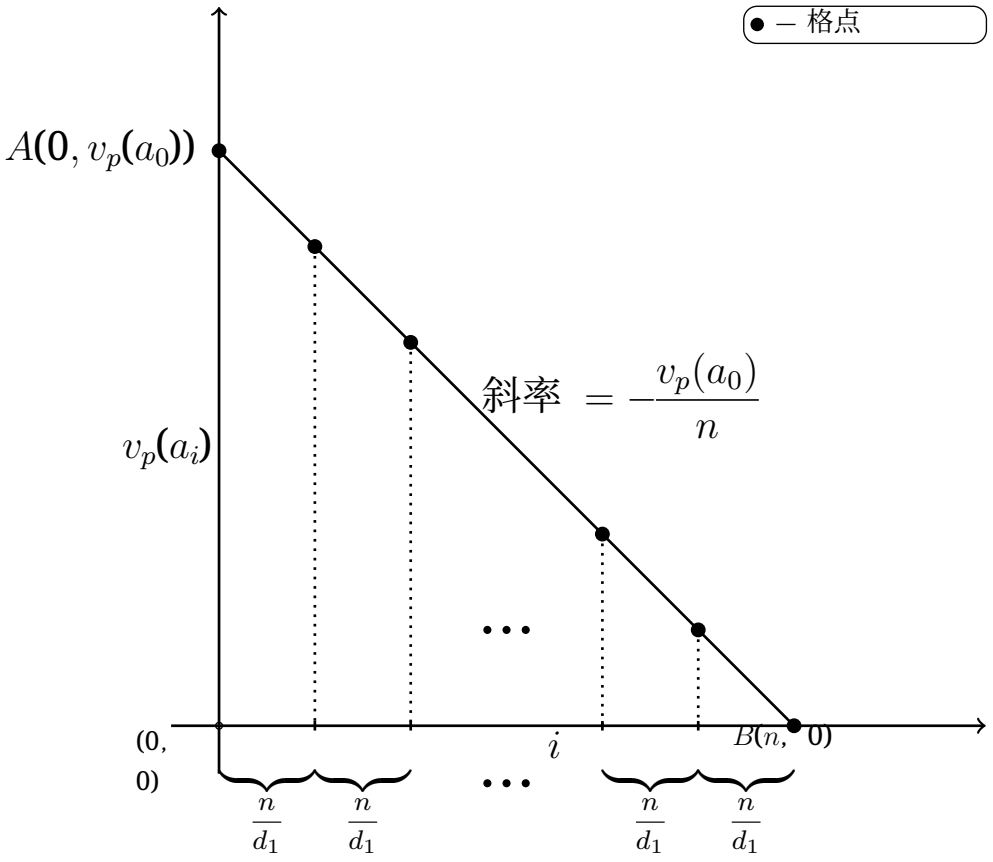


FIGURE 2. 当 $j = n$ 时的 f的牛顿多边形 $NP(f)$。

使得 $\epsilon_{i_\ell \ell} = 1$（从而对于每个这样的指标 i，有 $\sum_{t=1}^{d_1} \epsilon_{it} \geq 1$），并且对于每个 $i = 1$，...， N，有

$$\deg f_i \ = \ \sum_{t=1}^{d_1} \epsilon_{it}(x_t - x_{t-1}) = \frac{n}{d_1}\sum_{t=1}^{d_1} \epsilon_{it} \geq \frac{n}{d_1},$$

这就证明了当 $j = n$ 时的定理。 □

以下结果将用于证明定理4。

引理 9. 设 $g = s_0 + s_1 z + \cdots + s_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，满足 $s_0 s_n \neq 0$ 和 $s_0 = \pm p^k d$，其中 k 和 d 是正整数，$p \nmid d$ 是素数，并且 g 的所有零点都位于复平面上的区域 $|z| > \sqrt[\Delta]{d}$ 内。那么，多项式 g 至多是

$$\min_{0 \le i \le n} \{i + v_p(s_i)\}$$

不可约多　　项式在 $\mathbb{Z}[z]$ 中。特别地，如果 $k = 1$，或 $p \nmid s_1$，那么 f 是不可约的。

考虑多项式

$$f = -3 + 3z + 343z^2 - 126z^4 + 126z^5 + 14406z^6,$$

它满足定理 3 关于素数 3 的假设，$j = 2$，$d_1 = d_2 = 1$ 因此在这里，$\Delta_f =$ 最小值$\{2, 4\} = 2$。

现在，若我们考虑满足 $g(z) = z^6 f(1/z)$ 的多项式 g，那么对于 g，我们有 $s_0 = 14406 = 7^4 \times 6$，因此 $p = 7$、$k = 4$ 和 $d = 6$。于是我们有 $\sqrt[\Delta]{d} = \sqrt{6}$，并得到

$$126\sqrt{6} + 126\sqrt{6}^2 + 343\sqrt{6}^4 + 3\sqrt{6}^5 + 3\sqrt{6}^6 \approx 14325.2 < 14406.$$

因此，g 的每个零点都位于复平面中的开区域$|z| > \sqrt{6} = \sqrt[\Delta]{d}$ 内。根据引理 9，多项式 g（因此 f）是至多

$$\min\{0 + 4, 1 + 1, 2 + 1, 3 + \infty, 4 + 3, 5 + 0, 6 + 0\} = 2$$

$\mathbb{Z}[z]$中的不可约因子，其中我们注意到 g 可分解为

$$g(z) = 14406 + 126z - 126z^2 + 343z^4 + 3z^5 - 3z^6 = (343 + 3z - 3z^2)(42 + z^4),$$

这是 $\mathbb{Z}[z]$中恰好两个不可约多项式的乘积。

引理 9 的证明。设 $g(z) = g_1(z) \cdots g_N(z)$ 是 N个不可约因子 g_1，……，g_N在 $\mathbb{Z}[z]$中的乘积。那么对于每个 $i = 1$，……，N，都有 $\Delta_f \le \deg g_i$。根据假设，我们有 $p^k d = |g(0)| = |g_1(0)| \cdots |g_N(0)|$，这表明对于每个 $i = 1$，……，N，都有 $|g_i(0)| \ge 1$。如果对于每个 $i = 1$，……，N，$\alpha_i \neq 0$是 g_i的首项系数，那么我们可以写成 $g_i = \alpha_i \prod_\theta (z - \theta)$，其中乘积遍历 g_i的所有零点。综合上述观察以及假设，我们得到以下结论：

$$|g_i(0)| = |\alpha_i| \prod_\theta |\theta| > |\alpha_i| \left(\sqrt[\Delta]{d} \right)^{\deg g_i} \ge |\alpha_i| \left(\sqrt[\Delta]{d} \right)^{\Delta_f} = |\alpha_i| d \ge d,$$

这表明 $|g_i(0)| > d$，因此，对于每个 $i = 1, \ldots, N$，p整除 $|g_i(0)|$。这就证明了 $N \le k$。

现在令 $j \in \{1, \ldots, n\}$。假设 $v_p(s_j) = J \ge 0$。不失一般性，我们可以假设 $k - j > J$。如果可能，令 $N - j > J$。将 g_i表示为 $g_i = \sum_{t=0}^{\deg g_i} s_{it} z^t \in \mathbb{Z}[z]$，我们得到

$$s_j = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_N = j} s_{1 i_1} s_{2 i_2} \cdots s_{N i_N},$$

其中求和符号下的指标属于集合 $\{0, 1, \ldots, j\}$。由于 $N - j > J \ge 0$，对于 i_1、……、i_N属于集合 $\{0, 1, \ldots, j\}$ 且满足 $i_1 + \cdots + i_N = j$，可知指标 i_1、……、i_N 中至少有 $N - j$ 个都等于零。由于 $g_i(0) = s_{i0}$，且对于每个 i，p 整除 $|g_i(0)|$，因此，对于所有满足 $i_1 + \cdots + i_N = j$ 的指标 i_1、……、i_N 的取值，p^{N-j} 都整除表达式 $s_{1 i_1} s_{2 i_2} \cdots s_{N i_N}$。因此，$p^{N-j}$ 整除和 11

$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_N=j} s_{1i_1}\cdots s_{Ni_N} = s_j$，这表明 $J = v_p(s_j) \geq N - j > J$，矛盾。

□

定理4的证明。我们按照定理1的证明进行，并定义 $g(z) = f(m+z)$，使得 $g \in \mathbb{Z}[z]$ and $g = \sum_{i=0}^{n} s_i(m) z^i$，其中对每个 $i = 0, \ldots, n$，$s_i(m) = f^{(i)}(m)/i!$ 根据假设，我们有 $(m - 1 - h_f)^{\Delta_f} \geq d$，由此可得 $m \geq h_f + 1 + \sqrt[\Delta]{d}$。由引理 6 可知，$g$ 的每个零点都位于复平面上的区域 $|z| > \sqrt[\Delta]{d}$ 内。再结合定理的其余假设和引理 9，可知多项式 g（因此 f）是至多 $\min_{1\leq i\leq n}\{k, i + v_p(s_i(m))\}$ 个整数环中的不可约多项式的乘积。□

为证明定理 5，我们先证明以下因式分解结果。

引理 10. 设 $g = s_0 + s_1 z + \cdots + s_n z^n \in \mathbb{Z}[z]$ 是一个本原多项式，满足 $s_0 s_n \neq 0$，其中 $s_n = \pm p^k d$，且 k 和 d 是正整数，$p \nmid d$是素数。假设 g 的所有零点都位于复平面上的区域 $|z| > \sqrt[\Delta]{d}$ 内。若 $|s_0/q| \leq |s_n|$，其中 q 是 s_0的最小素因子，则多项式 g 至多是

$$\min_{1\leq i\leq n}\{k, i + v_p(s_{n-i})\}$$

不可约 因子在 $\mathbb{Z}[z]$中的乘积。特别地，若 $k = 1$或 $p \nmid s_{n-1}$，则 g 是不可约的 $e.$

鉴于定理 3 针对素数 11，以及 $j = n = 6$，$d_1 = 2$，多项式

$$f = 20449 - 3146z + 121z^2 + 13442z^3 - 1034z^4 + 2209z^6$$

有 $\Delta_f = n/d_1 = 3$。此外，我们有 $s_6 = 47^2$，因此 $p = 47$、$k = 2$ 和 $d = 1$。由于 $s_0 = 13^2 \cdot 11^2$，我们有 $q = 11$，因此 $|s_0/q| = 1859 < 2209 = |s_6|$。现在 $\sqrt[\Delta]{d} = 1$，并且

$$\sum_{i=1}^{6} |s_i| = 19952 < 20449 = |s_0|,$$

由此可推得 f 的每个零点都位于 $|z| > 1 = \sqrt[\Delta]{d}$ 复平面中的开区域内。根据引理10，多项式 f 是至多

$$\min\{2, 1 + \infty, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 0, 5 + 0, 6 + 0\} = 2$$

个不可约因子，其中 $\mathbb{Z}[z]$；这里注意到，f 是不可约多项式$143 - 11z + 47z^3$的平方。

引理 10 的证明。设 $g(z) = g_1(z) \cdots g_N(z)$ 是 N不可约多项式g_1，……，g_N在 $\mathbb{Z}[z]$ 中的乘积。于是对所有 $i = 1$，……，N，有 $\Delta_f \leq \deg g_i$。由于 $1 \leq \min_{1\leq i\leq n}\{i + v_p(s_{n-i})\}$，不妨设 $N > 1$。令 $\alpha_i \neq 0$ 为每个 i 对应的 g_i 的首项系数。根据假设，我们得到 $\pm p^k d = s_n = \alpha_1 \cdots \alpha_N$。我们可以写成 $g_i(z) = \alpha_i \prod_\theta (z - \theta)$，其中乘积遍历每个 i 对应的 g_i 的所有零点 θ。于是得到:

$$|g_i(0)| = |\alpha_i| \prod_\theta |\theta| > |\alpha_i| \left(\sqrt[\Delta]{d}\right)^{\deg g_i} \geq |\alpha_i| \left(\sqrt[\Delta]{d}\right)^{\Delta_f} = |\alpha_i| d \geq d,$$

这说明 $|g_i(0)| > d$，因此对于所有 $i = 1, \ldots\ldots, N$，有 $|g_i(0)/q| \geq 1$。consequently，利用假设，我们得到

$$|s_0/q| \leq |s_n| \ < \ |s_n| \left(\frac{|g_1(0)|}{|\alpha_1| d^{\frac{\deg g_1}{\Delta_f}}} \cdots \frac{|g_N(0)|}{|\alpha_N| d^{\frac{\deg g_N}{\Delta_f}}} \right) \times \frac{|\alpha_i| d^{\frac{\deg g_i}{\Delta_f}}}{|g_i(0)|} = |s_0| \frac{|\alpha_i|}{|g_i(0)| d^{\frac{n - \deg g_i}{\Delta_f}}},$$

对于每个固定的指标 i，可得 $|\alpha_i| > |g_i(0)/q| d^{\frac{n-\deg}{\Delta_f}}$。对于每个这样的 i，我们还注意到

$$n - \deg g_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \deg g_j \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \Delta_f = (N-1)\Delta_f,$$

对于每个指标 i，鉴于 $N > 1$ 这一事实，可知 $(n - \text{次数 } g_i)/\Delta_f \geq N - 1 \geq 1$。结合这一观察以及 $|g_i(0)/q| \geq 1$，我们得到

$$|\alpha_i| > |g_i(0)/q| d^{\frac{n - \deg g_i}{\Delta_f}} \geq d^{\frac{n - \deg g_i}{\Delta_f}} \geq d, \ i = 1, \ldots, N.$$

因此，对于每个 i，我们有 $|\alpha_i| > d$。鉴于 $p^k d = |s_n| = |\alpha_1| \cdots |\alpha_N|$，且根据假设 $p \nmid d$，可知 p 整除 $|\alpha_i|$，对每个 $i = 1, \ldots, N$ 均成立。这就证明了 $N \leq k$。

现在设 j 为一个正整数，满足 $j \leq n$，并令 $v_p(s_{n-j}) = J \geq 0$。不妨设 $k > j + J$。反设 $N > j + J$，即 $N - j > J \geq 0$。我们可以将 $g_i = \sum_{t=0}^{\deg g_i} b_{it} z^t$ 表示为，使得 $\alpha_i = b_{i\,\text{次数 } g_i}$ 对每个 i 都成立。由于我们有 $g(z) = g_1(z) \cdots g_N(z)$，因此有 $n = \sum_{i=1}^{N} \text{次数 } g_i$。于是，我们得到

$$s_{n-j} \ = \sum_{i_1 + \cdots + i_N = n-j} b_{1 i_1} \cdots b_{N i_N} = \sum_{\sum_{t=1}^{N} (\deg g_t - i_t) = j} b_{1 i_1} \cdots b_{N i_N},$$

其中，对每个指标 i_t，$0 \leq i_t \leq \deg g_t$ 且 $0 \leq \deg g_t - i_t \leq j$。由于 $N > j + J$，因此无论如何选取 N-元组 $i_1, \ldots, i_N$，数 $\deg g_1 - i_1, \ldots, \deg g_N - i_N$ 中至少有 $N - j$ 个必定等于零。鉴于此，对于任意 N-元组 $i_1, \ldots, i_N$，至少有 $N - j$ 个指标满足 $i_t = \deg g_t$，$1 \leq t \leq N$，因此 $b_{t i_t} = b_{t \deg g_t} = \alpha_t$，即 g_t 的首项系数，而我们知道 $p \mid \alpha_t$。于是 p^{N-j} 整除形如 $b_{1 i_1} \cdots b_{N i_N}$ 的每一项，因此 p^{N-j} 整除 $\sum_{i_1 + \cdots + i_N = n-j} b_{1 i_1} \cdots b_{N i_N} = s_{n-j}$，从而 $J = v_p(s_{n-j}) \geq N - j > J$，这构成矛盾。

□

定理 5 的证明。与定理 2 的证明一样，我们令 $g(z) = f(m + z)$。于是 $g \in \mathbb{Z}[z]$ and $g = \sum_{i=0}^{n} s_i(m) z^i$，其中对每个 $i = 0, 1, \ldots, n$，都有 $s_i(m) = f^{(i)}(m)/i!$。注意，由假设可知 $m \geq 1 + h_f + \sqrt[\Delta]{d}$；根据引理 6，这说明 g 的每个零点都位于复平面中的开区域 $|z| > \sqrt[\Delta]{d}$ 内。由于 $|s_n(m)| = p^k d$ 且 $|s_0(m)/q| \leq |s_n(m)|$，因此多项式 g 满足引理 10 的假设。由此，多项式 g（因而 f）是至多 $\min_{1 \leq i \leq n} \{k, i + v_p(s_{n-i}(m))\}$ 个整数环 $\mathbb{Z}[z]$ 中不可约多项式的乘积。最后我们注意到，若取 $k = 1$ 或 $p \nmid s_{n-1}(m)$，则 g 不可约，因此 f 也不可约。□

致谢。谨此感谢科学与工业研究委员会（CSIR，印度）向 Rishu Garg 女士提供高级研究奖学金（SRF），资助编号为 CSIRAWARD/JRF-NET2022/11769。

披露 **声明**。作者声明不存在利益冲突 e.

References

[1] G. Dumas, 《关于有理系数多项式的若干不可约情形》，J. Math. Pure Appl. 2 (1906), 191–258。[2] J. Abbott, 《在 $\mathbb{Z}[x]$中认证不可约性》，A. M. Bigatti 等编：《数学软件——ICMS 2020》，LNCS 12097 (2020), 462–472。10.1007/978-3-030-52200-1_46[3]J. Singh, 《Dumas不可约性判别准则的推广》，https://arxiv.org/abs/2505.08549 (2025), 1–10。[4] J. Singh, 《素数与多项式分解》，https://arxiv.org/abs/2411.18366 (2024), 1–11。[5] J. Singh 和 S. Kumar, 《关于 Girstmair不可约性判别准则的简注》，Bull. Aust. Math. Soc. 106 (2022), 62–66。https://doi.org/10.1017/S0004972721000861[6] K. Girstmair, 《论 M. Ram Murty 的一个不可约性判据》，Amer. Math. Monthly 112 (2005), 269–270。https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920194[7] M. Ram Murty, 《素数与不可约多项式》，Amer. Math. Monthly 109 (2002), 452–458。https://doi.org/10.1080/00029890.2002.11919872[8] R. Garg、J. Singh 和 S. Kumar, 《Girstmair不可约性判别准则的进一步推广》，Arch. der Mathematik 125 (2025), 589-597。https://doi.org/10.1007/s00013-025-02184-0[9] S. K. Khanduja, 《不可约多项式漫步》，The Mathematics Student 92 (2023), 27–39。

(1,2) Department of Mathematics, Guru Nanak Dev University, Amritsar-143005, India
jitender.math@gndu.ac.in, rishugarg128@gmail.com