arXiv:2512.20316v1 [math.AC] 23 Dec 2025

关于 S—整环及 Krull 交定理的 S版本

Tushar Singh[1],Gyanendra K. Verma[2],和 Shiv Datt Kumar [3]

[1, 3]数学系，莫蒂拉尔·尼赫鲁国立理工学院阿拉哈巴德分校，普拉亚格拉杰 211004，印度；电子邮箱： [1] sjstusharsingh0019@gmail.com,tushar.2021rma11@mnnit.ac.in， [3]sdt@mnnit.ac.in[2]数学科学系，阿联酋大学，艾因，邮政信箱 15551，阿拉伯联合酋长国；电子邮箱：gkvermaiitdmaths@gmail.com

2025年12月24日

摘要

设 $S \subseteq R$ 是环 R 的一个乘法封闭子集。我们将整环上的若干结果推广到其 S 版本，并建立 Krull 交定理的 S 版本。我们还证明，若 R 是一个 S-域，则关于 S 的 R 的局部化是一个 $\phi(S)$-域，其中 $\phi(S) = \left\{ \frac{s}{1} | \, s \in S \right\}$ 是 $S^{-1}R$ 的一个乘法封闭子集；并在 S 有限的条件下证明其逆命题。作为推论，我们证明每个有限 S-整环都是一个 S-域。此外，我们还给出若干例子，以说明我们研究结果的重要性。

关键词： S-整环， S-域， S-消去性质， S-Krull 交定理。**2020年数学主题分类：** 12E20, 13G05, 16U10, 16U40.

1 引言

全文中， R 表示含幺交换环， $S \subseteq R$ 表示乘法封闭子集。诺特模的概念显著简化了对环和模结构的研究。 S-主理想环和 S-诺特环的概念是主理想环和诺特环的推广，最早由 Anderson 和 Dumitrescu [5] 于 2002年提出。他们建立了诺特环中著名结果的 S版本，以及 Eakin-Nagata定理的 S版本。若环 R 的每个理想都是 S-有限的，则称 R 为 S-诺特环。这意味着，对于 R中的每个理想 I，都存在 $s \in S$ 和 R 的有限生成理想 J，使得 $sI \subseteq J \subseteq I$。2020年，Sevim 等人 [16] 通过引入 S-阿廷环的概念，扩展了阿廷环的理论框架。若对于 R的每个理想降链 $\mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}_n \supseteq \cdots$，都存在 $s \in S$和 $k \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq k$均有 $s\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{I}_n$，则称环 R 为 S- 阿廷 环。若干作者将诺特环和阿廷环的许多重要性质推广到了 S 变体，例如 S-素理想、沿理想的合并代数上的 R -诺特性质、 $S \subseteq R$ -约化模、 S-余生成环以及 S-主分解（参见 [5] 和 S）。

域、沿理想的合并代数上的 S-诺特性质、 S-约化模、S-余生成环以及 S-主分解（参见 [1], [3], [4], [12], [13], [15], [16], [19],和 [21]）。最近，Ersoy 等人 [10]引入了幂等元和纯理想的 S版本及 S推广，并给出了 Stone 型定理的 S版本。

整环是有趣的代数结构，具有许多与整数环类似的性质。一个重要性质是不存在零因子，这保证了算术结构的一致性和精确性。因此，整环在数论中至关重要，可用于研究整除性、素因数分解和丢番图方程。在代数几何中，整环与不可约簇的坐标环相关联，使我们能够分析几何对象。2020年，Yildiz等人 [22] 引入了关于乘法封闭集 S 的 S-整环这一概念，这是整环最有趣的推广之一。若存在一个 $s \in S$ ，使得对于所有 a，$b \in R$，只要 $ab = 0$，就有 $sa = 0$ 或$sb = 0$，则称环 R 为 S-整环。这种方法使我们能够推广经典的整环，并研究环中某些元素可逆，或因存在 S 而具有特殊行为的代数结构。 S-整环的概念对于分析环和模的局部化以及代数几何至关重要。通过关注特定的乘法封闭子集，我们能够更灵活地分析环在各种数学情境中的结构。

在本文的第一部分，我们将整环中的若干结果推广到 S-整环。我们介绍环中的 S-消去性质这一概念（见定义 2.4），并证明：环具有 S-消去性质，当且仅当该环是 S-整环（见命题 2.7）。此外，我们证明，若 R 是一个 S-整环，则环R 关于 S 的局部化是一个 S-整环；但反过来通常并不成立（见例 2.9）。在某些假设下，我们证明了逆命题。在整环中，唯一的幂等元是 0 和 1；然而， S-整环可能还有其他 S-幂等元（见例 2.16）。此外，我们给出整环成为 S-诺特的环的充分条件（见定理 2.24）。

域是重要的代数结构，为多项式理论、代数几何、编码理论和密码学等众多领域的探索提供了基础。在本文的第二部分，我们考察 S-域的概念，这一概念扩展了 E. Yildiz等人 [22] 于2020年提出的域的思想。准确地说，如果一个环 R 的零理想是一个 S-极大理想（见定义 3.3），则称其为 S-域。将环上的模这一概念推广到 S-域上的模，是一个有趣且重要的问题。这种推广自然地将向量空间作为特殊情形纳入其中，从而丰富并扩展了经典框架。通过这一推广，可以从新的视角为交换代数中代数结构的系统分析奠定基础。此外，这一扩展并不仅具有理论意义；它还为应用研究开辟了富有前景的方向，尤其是在编码理论、密码学及相关领域，因为在这些领域中，向量空间与域论之间的相互作用发挥着基础性作用。在本文中，我们将域的若干基本性质推广到 S-域，并给出 S-域的刻画。我们定义环的 S-真理想（见定义3.7），并证明一个环是 S-域，当且仅当它没有 S-真理想。我们还给出了环的 S-极大理想和 S-素理想与S-域之间关系的刻画（见命题 3.9和定理 3.13）。此外，我们研究了环的局部化

相对于乘法封闭集 S 的情形，并确定了环的局部化成为 ϕ（S）-域的条件。作为推论，我们证明每个有限S-整环都是一个 S-域。Krull 交定理是交换诺特环理论的基石，为无限交下理想的结构与稳定性提供了深刻的洞见。在这一经典框架的基础上，我们提出了这一经典结果的 S-类比，将其称为 S-Krull 交定理（见定理 4.5）。

2 关于 S-整环

本节首先给出一个不是整环的 S-整环示例，并说明若 R 是一个 S-整环，则其局部化 $S^{-1}R$ 是整环。然而，反过来未必成立。我们刻画了 S- 整环中的 S- 幂等元和 S- 幂零元。随后证明，若 R 是整环，且每个非 S-根理想都是 S-有限的，则 R 是一个 S-诺特的环。

定义 2.1. [22] 若存在 $s \in S$，使得对于所有 a、$b \in R$，只要 $ab = 0$，则 $sa = 0$ 或 $sb = 0$，就称环 R 为 S-整环。

设 $S_1 \subseteq S_2$ 是 R 的两个乘法封闭子集。则每个 S_1-整环也是一个 S_2-整环。按照 [22]，的说法，我们注意到每个整环都是一个 S-整环，但反过来未必成立。

例 2.2. 取 $R = \mathbb{Z}_6$, $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$。则 R 是一个 S-整环，但不是整环。为此，设 $a, b \in R \setminus \{\bar{0}\}$ 且 $ab = \bar{0}$。则要么 $a = \bar{2}$，要么 $\bar{4}$ 且 $b = \bar{3}$。令 $s = 2 \in S$，则有 $sb = 0$。因此， R 是一个 S-整环。

例 2.3. 设 $R = \mathbb{Z}_{30}$, $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, 16\}$。显然， R 不是一个 S-整环，因为 $5 \cdot 6 = 0$；但对于任意 $s \in S$， $s \cdot 5 = 0$ 和 $s \cdot 6 = 0$都不成立。

定义 2.4. 若环 R 对所有 a、b、$c \in R$，只要 $sa \neq 0$ 对每个 $s \in S$ 和 $ab = ac$ 都成立，就存在某个 $s \in S$ 使得 $sb = sc$，则称其具有 S-消去性质。

根据这个定义，我们可以将整环的消去性质推广到 S-整环。在下面的例子中，我们描述 S-消去性质。

例 2.5. 设 $R = \mathbb{Z}_{12}$、 $S = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{9}\}$。对于 $a = \bar{2}$，注意到对所有 $s \in S$，都有 $sa \neq 0$ 。取 $b = 4$ 和 $c = 10$ 属于 R，则 $ab = ac = 8$。注意，对所有 $s \in S$，都有 $sb \neq sc$ 。因此， R 不具有 S-消去性质。

例 2.6. 考虑 $R = \mathbb{Z}_{15}$、 $S = \{\bar{1}, \bar{6}\}$。对于 a、b、$c \in R$，若对所有 $s \in S$，都有 $ab = ac$ 且 $sa \neq 0$，则对 $s = 6 \in S$ 有 $sb = sc$ 。特别地，对于 $a = 3$、$b = 7$ 和 $c = 2$，对所有 $s \in S$ 和 $ab = ac = 6$，都有 $sa \neq 0$ 。这意味着对 $s = 6$ 有 $sb = sc = 12$ 。

命题 2.7. 环 R 是一个 S-整环，当且仅当 S-消去性质在 R中成立。

证明。 假设 R是一个 S-整环。设 $a, b, c \in R$满足：对所有 $s \in S$和 $ab = ac$，都有 $sa \neq 0$。那么，根据 S-整环的定义， $sa = 0$ 或 $s(b - c) = 0$ 对某个$s \in S$成立。此外，对所有 $s \in S$，都有 $sa \neq 0$。因此， $s(b - c) = 0,$，即 $sb = sc$。所以， S-消去性质在 R.中成立

反之，设 $ab = 0$。如果对于某个 $s \in S,\ sa = 0$，则结论成立。如果对于所有 $s \in S$都有 $sa \neq 0$，那么$ab = 0 = a \cdot 0$，根据 S-消去的定义， $sb = s \cdot 0 = 0$ 对于某个 $s \in S$成立。因此， R是一个 S-整环。 □

回顾 [3], ， R 的理想 P（其与 S不相交）称为 S-素理想，如果存在一个 $s \in S$，使得对于任意满足 $ab \in P$的 $a,\ b \in R$，都有 $sa \in P$或 $sb \in P$。显然，每个素理想都是一个 S-素理想，但反之一般不成立（见 [3, 例 1(3)]）。

引理 2.8。 [8]环 R 是一个 S-整环，当且仅当（0）是一个 S-素理想。

命题 2.9. [8] 设 P 是 R 的一个理想，且与 S不相交。那么， P 是R 的一个 S-素理想，当且仅当 R/P 是一个S-整环，其中 $S = \{s + P \mid s \in S\}$ 是 R/P的一个乘法封闭子集。

回顾一下， R 是整环，当且仅当 $R[X]$ 是整环。我们将这一结果推广到 S-整环。

命题 2.10. $R[X]$ 是一个 S-整环，当且仅当 R 是一个 S-整环。

证明。设 P是 R 的一个理想，且与 S不相交。由事实$(P[X] :^{R[X]} S) = (P :_R s)[X]$以及 $R[X]/(P :_R s)[X] \cong (R/(P :_R s))[X]$，其中某个 $s \in S$。根据 [3, 命题 1]， $P[X]$是 $R[X]$ 的一个 S-素理想，当且仅当$(P[X] :^{R[X]} S) = (P :_R s)[X]$ 是 $R[X]$的一个素理想；当且仅当$(P :_R s)$是 R 的一个素理想；当且仅当 P是 R的一个 S-素理想。特别地，若 $P = (0)$，则(0)是 R 的一个 S-素理想，当且仅当(0)是 $R[X]$的一个 S-素理想。因此，$R[X]$ 是一个 S-整环，当且仅当 R 是 S-整环。 □

命题 2.11. 若环 R 是 S-整环，则 $S^{-1}R$ 是整环 .

证明。 设 R 是一个 S-整环。取 $\frac{\alpha}{u_1}, \frac{\beta}{u_2} \in S^{-1}R$ 使得 $\frac{\alpha}{u_1} \cdot \frac{\beta}{u_2} = 0$，其中$\alpha, \beta \in R$且 $u_1, u_2 \in S$。那么存在 $s \in S$使得 $s\alpha\beta = 0$属于 R。由于 R是一个S-整环，存在 $u \in S$ 使得 $us\alpha = 0$ 或 $u\beta = 0$。若 $us\alpha = 0$，则$\frac{\alpha}{u_1} = \frac{us\alpha}{usu_1} = 0$。同理，若 $u\beta = 0$，则 $\frac{\beta}{u_2} = \frac{u\beta}{uu_2} = 0$。因此，$S^{-1}R$是一个整环。 □

回顾 [7], ，设 M是一个 R-模。 R-模 M的理想化 $R(+)M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$是一个交换环，其加法按分量定义，乘法定义为对所有 $\alpha_1, \alpha_2 \in R$及 $m_1, m_2 \in M$，$(\alpha_1, m_1)(\alpha_2, m_2) = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1)$。容易验证， $S(+)M = \{(s, m) \mid s \in S, m \in M\}$ 在 $R(+)M$ 中构成一个乘法闭集。

下面的例子表明，即使局部化 $S^{-1}R$ 是整环，也不能保证 R 是 S-整环。

例*2.12.* 设 $\mathbb{E} = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $\mathcal{P}$ 是所有素数的集合。定义 $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{E}$ 和 $S = (\mathbb{Z}\setminus\{0\})(+)(0)$。根据 *[11,* 例*3.12],*，局部化 $S^{-1}R = \mathbb{Q}$ 是一个域，因此也是整环。反之，假设 R 是一个 S-整环，则 (0) 是 R 的一个 S-素理想。因此，存在 $s \in S$，使得对每个 α，若 $\beta \in R$ 且 $\alpha\beta = 0$，则 $s\alpha = 0$ 或 $s\beta = 0$。取 $s = (n, 0)$。由于对每个 $q \in \mathbb{E}$，$(0, q)^2 = (0, 0)$，因此存在 $(n, 0) \in S$，使得 $(n, 0)(0, q) = (0, 0)$。由此可得 $nq = 0$，其中 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。这意味着 $n\mathbb{E} = 0$，这是不可能的。因此，R 不是 S-整环。

定理 2.13。假设 S 是环 R的有限子集。那么 R 是 S-整环，当且仅当 $S^{-1}R$ 是整环。

证明。若 R 是 S-整环，则由命题 2.11 可知，$S^{-1}R$ 是整环。反之，设 $a, b \in R$ 满足 $ab = 0$。因此，$\frac{ab}{s's''} = \frac{a}{s'} \cdot \frac{b}{s''} \in S^{-1}R$，其中$s', s'' \in S$。由于 $S^{-1}R$ 是整环，故 $\frac{a}{s'} = 0$ 或 $\frac{b}{s''} = 0$。若 $\frac{a}{s'} = 0$，则存在$u_1 \in S$ 使得 $u_1 a = 0$。此外，若 $\frac{b}{s''} = 0$，则存在 $u_2 \in S$ 使得 $u_2 b = 0$。由于S 是有限的，定义 $u = \prod_{t\in S} t$，则 ~~ua~~ $= 0$ 或 $ub = 0$。因此，R 是 S-整环。

□

例*2.14.* 考虑 $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$，$S = \{(1, 1), (0, 1)\}$。显然，$R$不是整环。设 $\alpha, \beta \in R$满足 $\alpha = (x, u)$ 且 $\beta = (y, v)$，其中 $x, y \in \mathbb{Z}$ 且 $u, v \in \mathbb{Q}$。现在，若 $\alpha\cdot\beta = (xy, uv) = (0, 0)$，则可得 $xy = 0$ 且 $uv = 0$。这意味着 $x = 0$或 $y = 0$，且 $u = 0$ 或 $v = 0$，因为 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Q}$ 都是整环。因此，α 和 β有两种可能：若 $\alpha = (x, 0)$，则 $\beta = (0, v)$。此外，若 $\alpha = (0, u)$，则 $\beta = (y, 0)$。取 $s = (0, 1) \in S$。那么 $s\alpha = 0$ 或 $s\beta = 0$。因此，R 是一个 S-整环，从而根据定理 *2.13*，$S^{-1}R$ 是一个整环。

2024年，Ersoy 等人 [10], 引入了环 R的 S-幂等元概念。在本文中，我们确定了 S-整环中 S-幂等元的类别。

定义 2.15。 *[10]* 如果 $a^2 = s\cdot a$ 对于某个 $s \in S$成立，则称元素 $a \in R$ 为 S-幂等元。

注意，每个幂等元都是 S-幂等的，但反之未必成立。

例 2.16。设 R 为任意环。取 $R\times\mathbb{Z} = \{(r,\ m) \mid r \in R,\ m \in \mathbb{Z}\}$。然后按坐标定义加法，并如下定义乘法：

$$(r,\ m)(s,\ n) = (rs + sm + nr,\ mn).$$

容易验证，$R\times\mathbb{Z}$是一个带单位元 $(0, 1)$ 的交换环。考虑 $S = \{0\}\times\mathbb{Z}^*$，其中 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$。令 $(0,\ a) \in R\times\mathbb{Z}$，其中 $a \in \mathbb{Z}\setminus\{0, 1\}$。则对于 $a^2 \neq a$，$(0,\ a)^2 = (0,\ a^2) \neq (0,\ a)$，也就是说，$(0,\ a)$ 不是幂等元，但对于 $s = (0,\ a) \in S$，$(0,\ a)^2 = s(0,\ a)$。因此，$(0,\ a)$ 是 $R\times\mathbb{Z}$ 的 S- 幂等元。

定义 2.17。 *[10]* 设 y 是环 R中的一个元素。那么我们有以下结论：

1. 若对于某些 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$，$sy^n = 0$，则称 y 为 S-幂零元。

2. 若对于某个 $s \in S$， $sy = 0$，则称 y 为 S-零元。注意，0 也是一个 S-零元。

定义 2.18。若元素 $a \in R$ 满足：对于所有 $s \in S$， $sa \neq 0$，则称其为 S-非零 元素。

定义 2.19。若环 $[15]$ 满足： $r^n = 0$，其中 $r \in R$，且 $n \in \mathbb{N}$，则存在 $s \in S$ 使得 $sr = 0$，则称环 $[15]$ 为 S-约化环。

S-约化环 [15], 的概念是约化环的适当推广，最早由 A. Pekin 等人在 2020年提出。下面给出 S-整环的 S-版本结果。

定理 2.20。设 R 为一个 S-整环。则有以下结论：

1. R 不含有任何 S-非零 S-幂零元素。

2. 如果 $S \cap Z(R) = \emptyset$，则 R 的非零 S-幂等元必须是 S的元素。

3. R 是一个 S-约化环。

证明。

1. 假设存在 $r \in R$，使得对所有 $s \in S$都有 $sr \neq 0$，即 r 是一个 S-非零元，且它是一个 S-幂零元。那么，存在 $t \in S$，使得对某个 $n \in \mathbb{N}$有 $tr^n = 0$。由于 R 是一个S-整环，因此存在 $s' \in S$ 使得 $s'r = 0$，这与对所有$s \in S$都有 $sr \neq 0$ 矛盾。故结论成立。

2. 设 $a \in R$是 S-幂等元，因此对某个 $s \in S$有 $a^2 = sa$。这意味着 $a(a-s) = 0$，于是存在 $t \in S$ 使得 $ta = 0$ 或 $t(a-s) = 0$，因为 R 是一个 S-整环。因此，要么 $a = 0$，要么 $a = s$，因为 $S \cap Z(R) = \emptyset$，证毕。

3. 假设 R 是一个 S 整环。令 $a \in R$，并且对某个 $n \in \mathbb{N}$ 令 $a^n = 0$。则存在 $s' \in S$，使得 $s'a = 0$，因为 R 是一个 S 整环。因此， R 是一个 S 约化环。

□

注意，对于定理 2.20(3)，逆命题未必成立。

例 *2.21.* 考虑一个环 $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \times \cdots$（$\mathbb{Z}_p$ 的可数无穷多个副本），其中 p 是素数。则 R 是一个 S 约化环，因为 R 没有非零幂零元。考虑乘法集 $S = \{1_R = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, ...) \ s = (\bar{1}, \bar{1}, 0, ...)\}$。令 $a = (\bar{1}, 0, \bar{1}, 0, ...)$ 和 $b = (0, \bar{1}, 0, \bar{1}, ...) \in R$。则 $ab = (\bar{0}, \bar{0}, ...)$，但对于所有 $s \in S$， $sa = (\bar{0}, \bar{0}, ...)$ 和 $sb = (\bar{0}, \bar{0}, ...)$ 均不成立。因此， R 不是一个 S 整环。

一般来说，整环不一定是 S-诺特的环。下面给出一个不是 S-诺特的整环示例。

例 2.22. 设 $R = \mathbb{Z} + X\mathbb{Q}[X]$ 和 $S = \{+1, -1\}$ 是 R的乘法封闭集。显然， R 是一个整环。考虑 $R[Y]$，它不是诺特的，因此不是 S- 诺特的。

这引出了一个自然的问题:

问题 *2.1.* </style>什么时候一个整环是 S-诺特环?

上述问题的答案由定理 2.24 给出，其中使用了 S-根理想。

定义 2.23. *[18,* 定义 *2.1]* 设 $S \subseteq R$ 是一个乘法封闭集，且 I 是 R的一个理想。那么， I 的 S-根定义为

$$\sqrt[S]{I} = \{a \in R \mid sa^n \in I \text{ for some } s \in S \text{ and } n \in \mathbb{N}\}.$$

此外，如果 $\sqrt[S]{I} = I$，则称 I 是 R的一个 S-根理想。

定理 2.24. 如果整环 R 的每个非 S-根理想都是 S-有限的，那么 R 是一个 S-诺特环。

证明. 我们证明 R 的每个真理想都是 S-有限的。若 $I \cap S \neq \emptyset$，则存在 $t \in S$使得 $t \in I$，于是 $tI \subseteq J \subseteq I$，其中 $J =< t >$ 是由 t生成的理想。因此， I 是 S-有限的。假设 $I \neq (0)$ 且 $I \cap S = \emptyset$。对于 $s \in S$，存在 $0 \neq x_s \in I$ 使得$sx_s \neq 0$。由于 $x_s \in I$，但 $sx_s \notin x_sI$；对此，若 $sx_s \in x_sI$，则对某个 $i \in I$ 有 $sx_s = x_si$ ，但根据消去性质，这意味着 $s = i \in I$，这不可能，因为 $I \cap S = \emptyset$。因此 $sx_s \notin x_sI$，但 $sx_s^2 \in sx_sI \subseteq x_sI$。这意味着 x_sI 是一个非 S-根理想，所以 x_sI 是 S-有限的。现在，定义一个 R-模同态 $\phi_s : I \to x_sI$，其定义为对所有 $j \in I$， $\phi_s(j) = x_sj$ 。于是

$$ker\ \phi_s = \{y \in I \mid \phi_s(y) = x_sy = 0\} = \{y \in I \mid x_s = 0 \text{ or } y = 0\}.$$

由于 R 是一个整环， $ker\ \phi_s = \{0\}$。因此 ϕ_s 是单射。接下来，若 $a \in x_sI$，则$a = x_si$ ，其中存在某个 $i \in I$ 使得 $\phi_s(i) = x_si = a$。因此 ϕ_s 是满射，从而 ϕ_s 是一个R-模同构，即作为 R-模有 $x_sI \cong I$ 。因此， I 是一个 S-有限的，所以 R 是一个S-诺特环。 □

在定理 2.24 的背景下，产生了以下问题，我们将其留待今后研究。

问题 2.2。 假设一个 S-整环的每个非S-根理想都是 S-有限的。那么 RS-诺特吗?

3 S-域的刻画

本节将域的概念推广到 S-域。我们引入 R 中 S-真理想的概念，并建立与域中类似的结果。首先，我们回顾 [22, 23], 中的 S-极大理想和 S-域的定义，并给出若干例子。

定义 3.1. *[23,* 定义 *2.2]* 如果存在 $s \in S$ ，使得对于 R 的任意理想 J ，只要满足 $I \subseteq J$, 则要么 $sJ \subseteq I$ ，要么 $J \cap S \neq \emptyset$，那么称一个理想 $I \subseteq R$ （与 S 不相交）为 S-极大理想。

显然，对于 R 中任意乘法闭集 S， R 的每个极大理想都是一个 S-极大理想。然而，反过来并不成立。

例3.2. 考虑 $R=\mathbb{Z}_6$, $S=\{\bar{1},\bar{2},\bar{4}\}$。零理想 $(\bar{0})$ 不是 R 中的极大理想。 R 的真理想是 $I_1=2\mathbb{Z}_6$ 和 $I_2=3\mathbb{Z}_6$。由于零理想 $(\bar{0})\subseteq I_1$ 且 $I_1\cap S\neq\emptyset$，并且$(\bar{0})\subseteq I_2$，因此对于 $s=\bar{2}\in S$, $sI_2\subseteq(\bar{0})$。于是$(\bar{0})$是一个 S-极大理想。

定义 3.3. *[22,* 若环 R 的零理想 (0) 是其 R 的一个 S-极大理想，则称环 R 为 S-域。

注意，每个 S-域都是一个 S-整环，而对于任意乘法封闭集 $S\subseteq R$，每个域都是一个 S-域；但反过来并不成立。

例3.4. 设 $R=\mathbb{Z}$, $S=\{2^i|\, i\in\mathbb{N}\}$。由于 R 是整环，因此 R 是一个 S-整环。但 R 不是一个 S-域。为此，$(0)\subseteq I$，其中 $I=3\mathbb{Z}$ 是 R. 的一个理想。注意， $I\cap S=\emptyset$，并且不存在任何 $s\in S$ 使得 $sI\subseteq(0)$。

例3.5. 设 $R=\mathbb{Z}$, $S=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。那么对于 R 的任意理想 I， $I\cap S\neq\emptyset$，且零理想 (0) 是一个 S-极大理想。因此 R 是一个 S-域。

例3.6。 考虑环 $R=\mathbb{Z}_{mn}$，并令 $S=\{\bar{m}^i\mid i\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ 为 R 的乘法封闭子集，其中 m、 n 是两个不同的素数。 R 的真理想为 $I_1=m\mathbb{Z}_{mn}$ 和 $I_2=n\mathbb{Z}_{mn}$。由于零理想$(\bar{0})\subseteq I_1$ 以及 $I_1\cap S\neq\emptyset$，且$(\bar{0})\subseteq I_2$，因此对于 $s=\bar{m}\in S$、$sI_2\subseteq(\bar{0})$。于是$(\bar{0})$ 是一个 S-极大理想，但不是极大理想。因此 R 是一个 S-域，但不是域。

定义3.7。 若理想 $I\subseteq R$ 满足 $I\cap S=\emptyset$ 且对所有 $s\in S.$ 都有 $sI\neq 0$，则称其为 S-真理想

注意到，每个 S-真理想都是一个真理想，但 R 的真理想不一定是S-真理想。例如，在例3.6中，理想 $I_1=m\mathbb{Z}_{mn}$ 是一个真理想，但不是S-真理想，因为 $S\cap I_1\neq\emptyset$。

命题 3.8。 环 R 是一个 S-域，当且仅当它没有 S-真理想。

证明。 假设 R 是一个 S-域，且 I 是 R的一个非零理想。那么 (0) 是一个 S-极大理想，并且 (0) $\subseteq I$, 因此，对于某个 $s\in S.$，有 $I\cap S\neq\emptyset$ 或 $sI\subseteq$ (0)。所以， I 不是 S- 真理想。反之，假设 R 没有 S-真理想。如果 I 不是一个 S-真理想，那么根据定义，对于某个 $s\in S$，有 $I\cap S\neq\emptyset$ 或$sI=$ (0)。因此，(0) 是一个 S-极大理想。 □

命题 3.9. 理想 $M\subseteq R$ 满足 $M\cap S=\emptyset$ 是一个 S-极大理想，当且仅当 R/M 是一个 S-域，其中 $\overline{S}=\{s+M\mid s\in S\}$ 是 R/M 的乘法封闭子集。

证明。假设 设 M 是 R的一个 S-极大理想。由定义 3.3， R/M 是一个 S-域 $\overline{\quad}$ d.

反过来，假设 R/M 是一个 S-域。令 $\overline{M}\subseteq M'$，其中 M' 是 R 的某个理想。由于 M'/M 是包含 M 的 R/M 的一个理想。由命题 3.8， M'/M 不是 R/M 的一个 S-真理想。于是有两种情形:

情形 1: 若 $(M'/M)\cap\overline{S}\neq\emptyset$，则存在 $\bar{s}\in S$ 使得 $\overline{\bar{s}}\in M'/M$。这意味着 $s+M\in M'/M$, $s\in M'$，因为 $M\cap S=\emptyset$。因此 $M'\cap S\neq\emptyset$，从而 M 是 R 的一个 S-极大理想。

情形 2: 若 $\bar{s}M'/M\subseteq M$，则 R/M 的零理想为某个 $\bar{s}\in S$。这意味着 $(s+M)M'/M\subseteq M$, $sM'/M\subseteq M$。因此 $sM'\subseteq M$，所以 M 是 R 的一个 S-极大理想。

□

推论 3.10. 若 ϕ 是从环 R 到 S-域 F 的满同态，则 $ker\phi$ 是 R 的一个$\bar{}$$S$-极大理想。

对于所有 $x \in R$ 都满足 $x^2 = x$ 的环 R 称为布尔环。在布尔环中，每个素理想都是极大理想。我们将在下一个命题中将这一结果推广到 S 版本。

命题 3.11。布尔环中的每个 S-素理想都是一个 S-极大理想 R。

证明。设 $P \subseteq R$ 是一个 S-素理想，且 $P \subseteq Q$ 满足 $Q \cap S = \emptyset$，其中 Q 是 R 的一个理想。我们证明，对于某个 $s \in S$，有 $sQ \subseteq P$。设 $x \in Q$。则对于所有 $r \in R$，都有 $x^2r = xr$。因此，$x(xr - r) = 0 \in P$，于是存在 $s \in S$，使得 $sx \in P$ 或 $s(xr - r) \in P$。如果 $s(xr - r) \in P$，则对于某个 $p \in P$，有 $sxr - sr = p$。这意味着 $sr = sxr - p \in Q$，因为 $x \in Q$ 且 $P \subseteq Q$。因此，$sR \subseteq Q$。于是 $s \in Q$，但这是不可能的，因为 R 含有幺元且 $S \cap Q = \emptyset$。所以 $sx \in P$，$sQ \subseteq P$。因此，P 是 R 的一个 S-极大理想。 □

推论 3.12. 设 R 是一个布尔环，P 是 R 的一个 S-素理想。那么，R/P 是一个$_$$_S$-域，其中 $S = \{s + P \mid s \in S\}$ 是 R/P 的一个乘法封闭集。

定理 3.13. 设 R 是一个 S-阿廷环，P 是 R 的一个 S-素理想。那么，R/P 是$\bar{}$$\bar{}$一个 S-域，其中 $S = \{s + P \mid s \in S\}$ 是 R/P 的一个乘法封闭子集。

证明. 设 R 是一个 S-阿廷环，P 是 R 的一个 S-素理想。那么，R/P 是一个 S-整环。要证明 R 是一个 S-域，只需证明 P 是 R 的一个 S-极大理想。假设对于 R 的某个理想 Q，有 $P \subseteq Q$，且对所有 $s \in S$ 均有 $sQ \nsubseteq P$。那么，对所有 $s \in S$，都存在$q \in Q$ 使得 $sq \notin P$。由于 P 是 S-素的，根据 [3, 命题 1]，存在 $t \in S$，使得 $(P\colon t)$ 是 R 的一个素理想。根据我们的假设，对于这个 t，存在 $q' \in Q$ 使得$tq' \notin P$。这意味着 $q' \notin P$。我们的目标是证明 $Q \cap S \neq \emptyset$。考虑 R 的以下递减理想序列

$$P + Rq' \supseteq P + Rq'^2 \supseteq \cdots \supseteq P + Rq'^n \supseteq \cdots .$$

由于 R 是一个 S-阿廷，因此存在 $s' \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得 $s'(P+Rq'^k) \subseteq (P+Rq'^{k+1})$。令 $p \in P$。那么，对于某些 $r \in R$ 和 $p' \in P$，有 $s'(p+q'^k) = p'+q'^{k+1}r$。这意味着 $q'^k(s'-q'r) \in P$。因此，$q'^k(s' - q'r) \in (P\colon t)$。由于 $(P\colon t)$ 是 R 的一个素理想，所以要么 $q'^k \in (P\colon t)$，要么 $s' - q'r \in (P\colon t)$。若 $q'^k \in (P\colon t)$，则 $q' \in (P\colon t)$。因此 $tq' \in P$，这与 $tq' \notin P$ 的假设矛盾。另一方面，若 $s' - q'r \in (P\colon t)$，则 $ts' - trq' \in P \subseteq Q$。由于 $trq' \in Q$，这意味着 $ts' \in Q$。因此 $Q \cap S \neq \emptyset$，得证。

□

接下来，我们研究环同态下的 S-整环和 S-域。设 $f : R \longrightarrow R'$ 是一个环同态，且 S 是 R 的一个乘法封闭子集。那么，$f(S)$ 是 R' 的乘法封闭子集，当且仅当 $S \cap \mathrm{Ker}(f) = \emptyset$。特别地，若 f 是单射，则 $f(S)$ 是 R' 中的一个乘法封闭集。

命题 3.14. 设 f 是环 R 到环 R' 的一个同构。那么有如下结论：

1. 如果 R 是一个 S-整环，那么 R' 是一个 $f(S)$-整环。

2. 如果 R 是一个 S-域，那么 R' 是一个 $f(S)$-域。

证明。

1. 设 R 是一个 S-整环。由于 $S \subseteq R$ 是 R 中的乘法封闭集，且 f 是单射， $0 \notin f(S)$, 因为 $0 \notin S$ 且 $f(1_R) = 1_{R'} \in f(S)$。因此， $f(S)$ 是 R' 的乘法封闭子集。设 α、 $\beta \in R'$ 满足 $\alpha \cdot \beta = 0_{R'}$。由于 f 是一个同构，存在唯一的 a、 $b \in R$ 使得 $f(a) = \alpha$ 且 $f(b) = \beta$。现在， $\alpha \cdot \beta = 0_{R'}$ 推出 $f(a)f(b) = 0_{R'}$。因此， $f(ab) = f(0_R)$。这意味着 $ab = 0_R$。由于 R 是一个 S-整环，存在 $s \in S$ 使得 $sa = 0$ 或 $sb = 0$。由此可得， $f(s)\alpha = 0_{R'}$ 或 $f(s)\beta = 0_{R'}$。因此， R' 是一个 $f(S)$-整环。

2. 设 R 是一个 S-域。我们的目标是证明零理想（$0_{R'}$）$\subseteq R'$ 是 R' 的一个 f（S）-极大理想。显然，（$0'_R$）$\subseteq I_{R'}$，其中 $I_{R'} \subseteq R'$ 是某个理想。令 $J_R = f^{-1}$（$I_{R'}$）。那么 J_R 是 R 的一个理想，并且包含 $R.$ 的零理想（0_R）。因此，存在一个 $s \in S$，使得 $sJ_R \subseteq$（0_R）或 $S \cap J_R \neq \emptyset$。因此，我们有 f（s）$I_{R'} = f$（sJ_R）$\subseteq f$（0_R）$=$（$0_{R'}$），或 $\emptyset \neq f$（S）$\cap f$（J_R）$= f$（S）$\cap I_{R'}$，因为 f 是一个同构。因此（$0_{R'}$）是 R' 的一个 S-极大理想。因此， R' 是一个 f（S）-域。

□

定义 3.15. 如果乘法封闭集不包含 R 的零或零因子，则称其为真乘法封闭集。

注 3.16. 设 S 是 R 的乘法封闭子集。定义 $\phi: R \to S^{-1}R$ 为 $\phi(r) = \frac{r}{1}$，对所有 $r \in R$ 均成立。则 $\phi(S) = \left\{ \frac{s}{1} \in S^{-1}R | \frac{s}{} \in S \right\}$ 是 $S^{-1}R$ 的乘法封闭子集。此外，注意若 S 是真乘法封闭集，则 $\phi(S)$ 也是一个真乘法封闭集。

命题 3.17. 若 R 是一个 S-域，则 $S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域。

证明. 我们用 $[0]$ 表示 $S^{-1}R$ 中的零理想，用 **(0)** 表示 R 中的零理想。由注 3.16， $\phi(S)$ 是 $S^{-1}R.$ 的乘法封闭集。设 R 是一个 S-域。我们证明 $S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域，即 $[0]$ 是 $S^{-1}R$ 中的一个 $\phi(S)$-极大理想。假设 $[0] \subseteq S^{-1}I \subseteq S^{-1}R$, 其中 I 是 R 的某个理想。定义 $J = \{a \in R | \ \phi(a) \in S^{-1}I\}$. 注意，只要 $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$，就有 $\frac{s}{1} \cdot \frac{-a}{s} = \frac{a}{1} \in S^{-1}I$,也就是说， $a \in J.$。因此，对于某个 $s \in S\}$，有 $J = \{a \in R | \ \frac{a}{s} \in S^{-1}I,$。容易看出 J 是 R 的一个理想，且 **(0)** $\subseteq J$。由于 R 是一个 S-域，因此或者 $J \cap S \neq \emptyset$，或者存在一个 $s \in S$ 使得 $sJ \subseteq$**(0)**。

情形 1： 设 $a \in J \cap S \neq \emptyset$, 则对于某个 $s \in S$，有 $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$。由于 $S^{-1}I$ 是一个理想，因此，$\frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} = \frac{a}{1} \in S^{-1}I$。于是 $\frac{a}{1} \in S^{-1}I \cap \phi(S) \neq \emptyset$。因此， $[0]$ 是 $S^{-1}R$ 的一个 $\phi(S)$-极大理想。

情形 2： 如果 $J \cap S = \emptyset$, 那么 $sJ \subseteq$ **(0)**。因此，对于任意 $\frac{a}{s'} \in S^{-1}I$，我们有 $\phi(s) \cdot \frac{a}{s'} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s'} = \frac{0}{s'} = \frac{0}{1}$，也就是说， $\phi(s)S^{-1}I \subseteq [0]$。因此， $[0]$ 是一个 $\phi(S)$-极大理想。因此，$S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域。

□

上述定理的逆命题通常并不成立。

例3.18。 令 $\mathbb{E} = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，其中 $\mathcal{P}$ 是所有素数的集合。定义 $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{E}$ 以及 $S = (\mathbb{Z}\setminus\{0\})(+)(0)$。根据 *[11, 例 3.12]*，局部化 $S^{-1}R = \mathbb{Q}$是一个域，但 R 不是 S-域，因为 R 不是 S-整环（见例*2.12*）。

接下来，我们给出关于乘法封闭集的一些充分条件，使得命题 3.17 的逆命题成立。

定理 3.19。 设 S 是 R的一个真乘法封闭子集，且 $S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域。如果以下任一条件成立，则 R 是一个 S-域

1. S 是一个有限集。
2. R 是 S-PID。

证明。 1. 设 J 是 R的一个理想。那么 $S^{-1}J \subseteq S^{-1}R$ 是一个包含 $[0]$的 $S^{-1}R.$ 的理想。由于 $S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$- 域，因此， $S^{-1}J \cap \phi(S) \neq \emptyset$，或者存在 $\frac{t}{1} \in \phi(S)$ 使得 $\frac{t}{1}(S^{-1}J) \subseteq [0].$

$-$

情形 1： 假设 $S^{-1}J\cap\phi(S) \neq \emptyset$且 $\frac{a}{s} \in S^{-1}J\cap\phi(S)$。这意味着，对于某个 s_1， $s_2 \in S$且 $j \in J.$，有 $\frac{a}{s} = \frac{j}{s_1} = \frac{s_2}{1}$。因此，存在 $u \in S$使得 $u(j - s_1s_2) = 0$。于是 $j = s_1s_2$，因为 S 是适当的。因此 $s_1s_2 \in J \cap S \neq \emptyset$。

情形 2： 假设 $\frac{t}{1}S^{-1}J \subseteq [0]$，其中 $\frac{t}{1} \in \phi(S)$。这意味着 $S^{-1}J \subseteq [0]$，因为 $\frac{t}{1}$ 是 $S^{-1}R.$ 中的一个单位。因此，对所有 $s \in S$和 $j \in J.$，都有 $\frac{j}{s} = \frac{0}{1}$。特别地，对于 $s = 1$，$\frac{j}{1} = \frac{0}{1}, \forall j \in J$，这意味着对所有 j，存在 $s_j \in S$ 使得 $s_jj = 0.$。取 $u = \prod_{s\in S} s$，则 $uJ \subseteq (0)$，因为 $u \in S$ 是 S.中元素的有限乘积

因此，(0) 是一个 S-极大理想，即 R 是一个 S-域。

2. 设 $(0) \subseteq J$ 是 $R.$ 的一个理想。由于 R 是一个 S-PID，存在 $s \in S$ 和 $a \in J$ 使得 $sJ \subseteq \langle a\rangle.$ 因此，要证明 R 是一个 S-域，只需证明当 $(0) \subseteq \langle a\rangle$时， $\langle a\rangle \cap S \neq \emptyset$，或者存在 $t \in S$ 使得 $t\langle a\rangle \subseteq (0)$。设 $S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域，且 $(0) \subseteq \langle a\rangle$，其中 $a \in R$。那么 $S^{-1}\langle a\rangle$ 是 $S^{-1}R$ 的一个理想，且包含$S^{-1}R.$ 的零理想 $[0]$。因此， $S^{-1}\langle a\rangle \cap \phi(S) \neq \emptyset$，或者存在 $\frac{t}{1} \in \phi(S)$使得 $\frac{t}{1}S^{-1}\langle a\rangle \subseteq [0].$

情形 1： 设 $S^{-1}\langle a\rangle \cap \phi(S) \neq \emptyset$且 $\frac{t}{s} \in S^{-1}\langle a\rangle \cap \phi(S)$。这意味着，对于某个 $b \in \langle a\rangle$ 和 s_1，有 $\frac{t}{s} = \frac{b}{s_1} = \frac{s_2}{1}$， $s_2 \in S.$ 因此，对于某个 $u \in S$，有 $u(b - s_1s_2) = 0$。于是$b = s_1s_2$， 因为 S 是真理想。所以 $b \in \langle a\rangle \cap S \neq \emptyset.$

情形 2： 设 $\frac{t}{1}(S^{-1}\langle a\rangle) \subseteq [0]$。这意味着 $S^{-1}\langle a\rangle \subseteq [0]$，因为 $\frac{t}{1}$ 是 $S^{-1}R$中的一个单位。因此，对于某个 $s \in S$，有 $s\langle a\rangle \subseteq (0)$。

因此，(0) 是一个 S-极大理想，也就是说，它是 S-域。

□

每个有限整环都是域。一个自然的问题是：类似的结果对 S-整环是否成立？这个问题的答案是肯定的。

推论 3.20. 每个有限 S-整环都是 S-域。

证明. 设 R 是有限的 S-整环。由定理 2.13，$S^{-1}R$ 是有限整环，因为 S 是有限的。因此，$S^{-1}R$ 是域，因为每个有限整环都是域。由于对于任意乘法封闭集 S，每个域都是 S-域，,因此，$S^{-1}R$ 是一个 $\phi(S)$-域。此外，S 是有限的；于是由定理 3.19，R 是一个 S-域。

□

4 Krull 交定理的 S-版本

2024年，Kim等人 [11] 给出了 S-维数的定义，并证明：如果 R 是一个 S-诺特的S-整环，且 $dim_S(R) = 1$，那么 $S^{-1}R$的每个真理想 $S^{-1}I$ （其中 I 是 R 的一个与 S 不相交的理想）都可以唯一地写成若干初等理想的乘积，且这些初等理想的根理想两两不同（见定理 4.3）。1930年代，Krull阐明了诺特环结构中的一个基本见解。他证明，对于诺特环 R 及其理想 I，有$\infty \quad \infty \quad \infty\bigcap I^n = I(\bigcap I^n)$。此外，如果 R 是一个整环，那么 $\bigcap I^n = 0$ （见 [6]）。2024年，Singh等人 [21] 证明了 S-诺特环中 S-初等分解的存在性。在本节中，我们利用 S-初等分解证明 S-Krull 交定理。

定义 4.1. [11] 设 R 是一个环，$S \subseteq R$ 是一个乘法封闭集。

1. 若对于每个 $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ 以及每个 $s \in S$，都有$sP_{i+1} \nsubseteq P_i$，则称序列 $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{n-1} \supset P_n$为 S-严格递减链（简称 S-链）。2. 设 P 是 R的一个 S-素理想。则 P的 S-高度，记作 $S\text{-}ht(P)$，是 R的所有 S-严格递减链 $P = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{n-1} \supset P_n$ （由 S-素理想构成）的长度 n 的上确界，并且 $dim_S(R) = sup\{S\text{-}ht(P) \mid P \in Spec_S(R)\}$ 称为 R的 S-Krull 维数。

注记 4.2. 若 $P_i (1 \leq i \leq n)$ 是不同的 S-素理想，则 $S^{-1}P_i$ 不一定不同。为此，考虑 $R = \mathbb{Z}_{12}$，$S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$，并设 $P_1 = 3\mathbb{Z}_{12}$，$P_2 = 6\mathbb{Z}_{12}$ 是 R 的两个理想。注意，对于 $i = 1$，$P_i \cap S = \emptyset$ 为 2。由于 P_1 是 R 的素理想，因此也是 R 的 S-素理想。显然，P_2 也是 R 的 S- 素理想。为证明这一点，设$a, b \in R$ 满足 $ab \in P_2$。根据 $a = 2k$ 和 $b = 3k'$ 的选取，或（$a = 3k'$ 和 $b = 2k$），其中 $k, k' \in \mathbb{Z}$，可得 $sb \in P_2$ 或 $sa \in P_2$，对于 $s = \bar{4}$ 均成立。因此，P_2 是 R 的 S-素理想。显然，$S^{-1}P_1 = (\bar{0}) = S^{-1}P_2$，但 $P_1 \neq P_2$。

回顾 [14, 命题 2.5]：若 Q 是环 R 的 S-初等理想，则 $P=\mathrm{rad}(Q)$ 是一个 S-素理想。在这种情况下， Q 称为 R 的 P-S-初等理想。

定理 4.3。设 R 是一个 S-诺特的 S-整环，且 $dim_S(R)=1$。那么， $S^{-1}R$的每个真理想$S^{-1}I$，其中 I 是一个与 S 不相交的 R 理想，都可以唯一地写成若干初等理想的乘积，且这些理想的根彼此不同。

证明。由于 R 是 S-诺特的，依据 [21, 定理 9], ， I 有一个极小 S-初等分解 $I=\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$，其中每个 Q_i 都是 S-初等的，且 $rad(Q_i)=P_i$。因此，依据 [21, 注记 11], $S^{-1}I=\bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}Q_i$，其中每个 $S^{-1}Q_i$ 都是初等理想，且 $rad(S^{-1}Q_i)=S^{-1}P_i$。由注记 4.2 可知，所有 $S^{-1}P_i$ 不一定彼此不同。假设对于 $i=1,\ldots,k$，若 $rad(S^{-1}Q_i)$相等，不妨设为 $S^{-1}P$，而对于 $i=k+1,\ldots,n$， $rad(S^{-1}Q_i)$彼此不同，则根据 [9, 引理 4.3], $S^{-1}I'=\bigcap_{j=1}^{k} S^{-1}Q_j$ 也是 $S^{-1}P$-初等的，因此我们在分解中用 $S^{-1}I'$ 替换 $S^{-1}Q_1, S^{-1}Q_2,\ldots, S^{-1}Q_k$。现在我们可以保证，对于 $i\neq j$， $S^{-1}P_i\neq S^{-1}P_j$；对于$i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 以及 $\bigcap_{j\in\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i\}} S^{-1}Q_j\nsubseteq S^{-1}Q_i$。因此， $S^{-1}I$表示极小初等分解。由于 R 是 S-整环，且 $dim_S(R)=dim(S^{-1}R)=1$，根据 [11, 定理 4.11], ， $S^{-1}R$ 的每个非零素理想都是极大理想，因此 $S^{-1}P_i$ 是彼此不同的极大理想，故两两互素。因此，根据 [9, 命题 1.16] ， $S^{-1}Q_i$ 两两互余，进而根据 [9, 命题 1.10] ，有 $\prod_{i=1}^{n} S^{-1}Q_i=\bigcap S^{-1}Q_i=S^{-1}I$。另一方面$_{i=1}^{n}$，若 $S^{-1}I=\prod_{i=1}^{n} S^{-1}Q_i$，则同样的论证可得 $S^{-1}I=\bigcap S^{-1}Q_i$；这是 $S^{-1}I$的极小初等分解，其中 $S^{-1}Q_i$ 是一个孤立初等分量，并且根据 [9, 推论 4.11]是唯一的。

□

为了证明 Krull 交定理的 S版本，我们需要以下引理。

引理 4.4. 设 R 是一个 S-诺特的环，且 I 是一个与 S不相交的理想。那么存在$s\in S$ 和一个整数 m，使得 $s(rad(I))^m\subseteq I$，其中 $rad(I)=\{x\in R|\ x^n\in I$ 对某个 $n\in$成立，且$\mathbb{N}\}$ 是 I的根理想。

证明。由于 $rad(I)$ 是一个 S-有限的， $t\cdot rad(I)\subseteq J\subseteq rad(I)$，其中 $t\in S$是某个元素，且 $J=\langle x_1,x_2,\ldots,x_l\rangle$ 是 R 的一个有限生成理想。设 $n_i\in\mathbb{N}$ 满足 $x_i^{n_i}\in I$。取 $m=\sum_{i=1}^{l}(n_i-1)+1$。于是 $J^m\subseteq I$。因此， $s(rad(I))^m\subseteq J^m\subseteq I$，其中 $s=t^m$。 □

定理 4.5。 *(S-Krull* 交定理*)* 设 R 是一个 S-诺特整环，且 I 是 R 中与 S不相交的一个理想。设$B=\bigcap_{n=1} I^n$。那么存在 $t\in S$ 使得 $tB=0$.

证明。显然， $IB\cap S=\emptyset$ 因为 $I\cap S=\emptyset$。因此， IB 有 S-初等分解，因为在 S-诺特的环中，任何与 S 不相交的理想都有一个 S-初等分解[20]。设

$$IB=B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_k,$$

其中 B_i $(1 \leq i \leq k)$ 是 P_i-S-初等理想，属于 R；其中 $P_i = rad(B_i)$ 是一个 S-素数。由于$rad(B_i)$ 是 S-有限的，因此，对于某个有限生成理想 J_i （属于R ）以及 $s_i \in S$，有 $s_i(rad(B_i)) \subseteq J_i \subseteq rad(B_i)$。

由引理 4.4，存在 s_i 和整数 m_i 使得 $s_i P_i^{m_i} \subseteq B_i$. 取 $s = \prod_{i=1}^{k} s_i \in S$ 和$m = \max_{1 \leq i \leq k}\{m_i\}$。则对所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $sP_i^m \subseteq B_i$。注意，对所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $IB \subseteq B_i$。由于 B_i 是 P_i-S-primary，存在 $t_i \in S$ 使得 $t_i I \subseteq P_i$ 或 $t_i B \subseteq B_i$。若 $t_i I \subseteq P_i$，则

$$t_i^m sB = t_i^m s\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n\right) \subseteq t_i^m sI^m \subseteq sP_i^m \subseteq B_i$$

即 $t_i' B \subseteq B_i$，其中 $t_i' = t_i^m s$。结合两种情形（ $t_i I \subseteq P_i$ 或 $t_i B \subseteq B_i$），我们得出存在 $u_i \in S$ 使得 $u_i B \subseteq B_i$ （其中，当 $t_i I \subseteq P_i$ 时为 $u_i = t_i'$ ，而当$t_i B \subseteq B_i$时为 $u_i = t_i$ ）。令 $u = \prod_{1 \leq i \leq k} u_i \in S$，则对所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $uB \subseteq B_i$。因此，我们得到$uB \subseteq IB$。由 S-Nakayama 引理 [2, 引理 2.1], ，存在 $t \in S$ 和 $a \in I$ 使得（$t + a$）$B = 0$。因此，对所有 $b \in B$，都有（$t + a$）$b = 0$。由于 R 是 S-domain 且 $I \cap S = \emptyset$，因此$tB = 0$。证毕。□

推论 4.6. 设 R 是一个 S-诺特的整环，且 I 是 R 中与 S 不相交的理想。若$I \subseteq J(R)$，其中 $J(R)$是 R 的 ***Jacobson*** 根基，则存在 $s \in S$ 和 $a \in I$，使得$\infty(s + a)\bigcap I^n = 0.n=1$

∞证明。 设 $B = \bigcap I^n$。由定理 4.5，存在 $u \in S$ 使得 $uB \subseteq IB$。利用 [2,$n=1\infty$注 2.1], ($s + a$) $\bigcap I^n = 0$，其中 $s \in S$ 和 $a \in I$。$n=1$

□

推论 4.7. 若 R 是一个 S-诺特的整环，则存在 $s \in S$ 和 $a \in J_S(R)$ 使得$\infty(s + a) \bigcap (J_S($ $R))^n = 0$，其中 $J_S(R)$ 是 R 的 ***S-Jacobson*** 根基。$n=1$

5 结论

本文将关于整环和域的若干结果分别推广到了 S-整环和 S-域。借助 S-域，我们讨论了 S-诺特环的若干刻画。我们还给出了 Krull 交定理的 S-版本。

域的一个定义性性质是每个非零元素都有唯一的乘法逆元，而向量空间通常定义在域上。通过将向量空间的概念推广到 S-向量空间（即定义在 S-域上的向量空间），我们可以为交换代数中代数结构的分析与探索引入一个新框架。这种推广也为编码理论、密码学以及其他以向量空间和域论为基础的领域开辟了新的研究方向。有鉴于此，我们提出以下问题：

问题 5.1. 如何定义环中关于 S （例如， S-逆元）的 S-非零元素的唯一乘法逆元？此外，如何证明 S-域中的每个 S-非零元素都具有一个 S-逆元？该定义必须确保，当 S-域替换为通常的域时， S-逆元与通常的乘法逆元一致。

问题 5.2. 能否将向量空间结构扩展到 S-域上?

致谢

作者谨向匿名审稿人和编辑致以诚挚谢意，感谢他们提出的宝贵意见和建设性建议，这些意见和建议显著提升了本文的质量。G. K. Verma 衷心感谢 UAEU-AUA 项目提供的资助 $G00004614$。本研究的部分工作是在 G. K. Verma 任职于印度理工学院德里分校数学系期间完成的。

参考文献

[1]A. Hamed, 关于 *S-Mori* 整环, 《代数及其应用杂志》, **17**(2018), 1850171-11. DOI:10.1142/S0219498818501712.[2] A. Hamed, 关于 *S-Nakayama* 引理的一则注记, Ukr. Math. J., **72**(2020), 157-160. DOI: 10.1007/s11253-020-01769-y.[3] H. Ahmed and M. Achraf, S交换环的 -素理想, Beitr Algebra Geom.,**61**(2020), 533-542. DOI:10.1007/s13366-019-00476-5.[4] H. Ahmed and M. Achraf, 关于 *S-ACCR* 对, Commun. Korean Math. Soc.,**37**(2022), 337-345. DOI:10.4134/CKMS.c210112[5] D. D. Anderson and T. Dumitrescu, S-诺特环, 《代数通讯》, **30**(2002), 4407-4416. DOI:10.1081/AGB-120013328.[6]D. D. Anderson, *Krull* 交定理, Pac. J. Math., **57**(1975), 11-14. DOI:10.2140/PJM.1975.57.11[7] D. D. Anderson and M. Winders, 模的理想化, J. Commut. Algebra, **1**(2009), 3-56. DOI:10.1216/JCA-2009-1-1-3.[8] A. U. Ansari and S. Prakash, 关于 *S*-主理想整环, Palestine Journal of Mathe- matics, (2024), 136-142. DOI:pjm.ppu.edu/paper/1723-s-principal-ideal-domain[9] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, 交换代数导论, Addison-Wesley Publishing Company, (1969). DOI:10.2307/2316241.[10]B. A. Ersoy, U. Tekir, and E. Yildiz, 幂等元、纯理想和 *Stone* 型定理的 *S*-版本及 *S*-推广, Bull. Korean Math. Soc., **61**(2024), 83-92. DOI:10.4134/BKMS.b230023.[11] H. Kim, N. Mahdou, and E. Oubouhou, 关于交换环的 *S-Krull* 维数, 《代数及其应用杂志》, (2024). 2650045-20. DOI:10.1142/S0219498826500453.

[12] H. Kim, M. O. Kim, and J. W. Lim, 关于 S-强 Mori 整环, 《代数杂志》, 416(2014), 314-322. DOI:10.1016/J.JALGEBRA.2014.06.015.[13] J. W. Lim and D. Y. Oh, 沿理想合并代数的 S-诺特性质, 《纯粹与应用代数杂志》, 218(2014), 1075-1080. DOI:10.1016/J.JPAA.2013.11.003.[14] E. Massaoud, 交换环的 S-主理想, 《代数通讯》, 50(2022), 988- 997. DOI:10.1080/00927872.2021.1977939.[15] A. Pekin, U. Tekir, and O. Kilic, S-半素子模与 S-约化模, 《数学杂志》, (2020), 1-7. DOI:10.1155/2020/8824787.[16] E. S. Sevim, U. Tekir, and S. Koc, S-阿廷环和有限 S-余生成环, 《代数及其应用杂志》, 19(2020), 2050051-2050067. DOI:10.1142/S0219498820500516[17] E. S. Sevim, T. Arabaci, U. Tekir, and S. Koc, 关于 S-素子模. 《土耳其数学杂志》, 43(2019), 1036-1046. DOI:10.3906/MAT-1808-50[18] U. Tekir, E. Yildiz, H.A. Khashan, and E. Yetkin Celikel, 理想的 S-根与强 S-n 理想, 《数学研究》, (2025), 1-17. DOI:10.1007/s11587-025-00981-x.[19] T. Singh, A. U. Ansari, and S. D. Kumar, S-诺特环、模及其推广, 《数学及其应用综述》, 18(2023), 163-182. DOI:www.utgjiu.ro/math/sma/v18/ a18-13.html.[20] T. Singh, A. U. Ansari, and S. D. Kumar, S-初等分解研究, (2024). arXiv:2401.00922.[21]T. Singh, A. U. Ansari, and S. D. Kumar, S-初等分解在 S-诺特模中的存在性与唯一性, 《代数通讯》, 52(2024), 4515-4524. DOI:10.1080/00927872.2024.2350598[22] E. Yildiz, B. A. Ersoy, U. Tekir, and S. Koc, 关于 S-Zariski 拓扑, 《代数通讯》 49(2021), 1212-1224. DOI:10.1080/00927872.2020.1831006[23] E. Yildiz, B. A. Ersoy, and U. Tekir, 关于模的 S-谱上的 S-Zariski 拓扑, Filomat, 36(2022), 7103-7112. DOI:10.2298/fil2220103y