arXiv:2512.20465v1 [math.QA] 23 Dec 2025

霍普夫–伽罗瓦扩张的推前：非中心情形

GIOVANNI LANDI，CHIARA PAGANI

摘要。我们研究 Hopf–Galois 扩张的推前，将其视为主丛拉回的代数对应物。我们应用扭曲张量积代数理论，在满足映射 F 与扭曲映射之间相容条件的情况下，为沿映射 F 的模的协变扩张赋予代数结构。沿映射 F：$B \to C$ 推前 $B \subset A$ 的 H-伽罗瓦扩张，是 C 的 H-伽罗瓦扩张。我们比较相应的 Ehresmann–Schauenburg 代环。

目录

1. 引言 1 2. 扭曲张量积 3 2.1. 代数的扭曲张量积 3 2.2. 可逆扭曲映射与 $*$-结构 6 3. Hopf–Galois 扩张的推前 7 3.1. 协变扩张的扭曲积 8 3.2. 从扭曲张量积代数到 Hopf–Galois 扩张的推前 10 4. 例子 13 4.1. 伽罗瓦对象的推前 13 4.2. 推前至全代数 16 4.3. 推前至商代数 19 5. Ehresmann–Schauenburg 双代数胚的比较 23 5.1. 双代数胚 23 5.2. 推前的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚 25 附录A. 关于模的扩张 28 附录 B. 关于强联络与 2-余循环变形 30 参考文献 32

1. 引言

从代数的观点来看，尤其是在代数几何和非交换几何中，主丛由忠实平坦Hopf–Galois扩张 [23] 建模。在这一背景下，

日期：2025年12月23日。

拉回丛或诱导丛的理论尚未形成令人满意的表述。给定一个 H-伽罗瓦代数扩张 $B \subset A$ 以及一个代数映射 $\mathsf{F}: B \to C$，沿着 F 的 B-模 A 的协变 F-扩张 $C \otimes_B A$ （见 (3.1)），作为线性空间，可以视为沿某个映射的空间纤维积的类似物——也就是说，它是拉回丛的全空间。在假设代数 B 在 A 中为中心的（因而特别是交换的），且 F 的像 $\mathsf{F}(B)$ 在 C，[14] 中为中心的条件下，张量积代数 $C \otimes A$ 的通常乘法 $m_{C\otimes A} = (m_C \otimes m_A) \circ (\mathrm{id}_C \otimes \mathrm{flip} \otimes \mathrm{id}_A)$ 可下降为协变 F-扩张 $C \otimes_B A$ 上定义良好的乘法。在交换代数扩张的情形之外，如何赋予 $C \otimes_B A$ 代数结构仍是一个开放问题。本文通过运用扭曲张量积代数理论来处理这一问题。

在本文所考虑的情形下，扭曲张量积代数最早在 [9]中得到研究（其中也探讨了其上的微分演算 [9, §3]），后来又在 [8]中将其对偶化到余代数和双代数的背景下。给定两个结合代数 A和 C，向量空间 $C \otimes A$ 赋予乘法 $m^\psi := (m_C \otimes m_A) \circ (\mathrm{id}_C \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_A)$，其中 $\psi: A \otimes C \to C \otimes A$ 是任意满足最小条件的线性映射，这些条件确保扭曲乘法 m^ψ 具有结合律（见§2.1）。通过变形两个已有对象的张量积来构造新对象，这一思想早于上述研究，并已在多种背景下得到探索。霍普夫代数理论中的著名例子包括 Takeuchi 叉积和交叉积（参见例如 [18]）、Drinfel'd量子双，以及霍普夫代数的 Majid双叉积（参见例如 [17]）。代数的扭曲张量积及其在余代数和霍普夫代数中的对应形式，都可以在 Beck的分配律理论中得到自然诠释（参见(2.4)和(2.5)），该理论为这些构造提供了范畴论背景。

在此，我们将代数扭曲张量积理论应用于研究可能是非中心的 Hopf–Galois 扩张的推前。给定两个含单位结合代数 C and$A$ 以及一个代数映射 $\mathsf{F}: B \to C$，其中 B 是 A 的子代数，我们在 $C \otimes A$ 上赋予扭曲代数乘法 m^ψ。我们研究扭曲映射 ψ与映射 $\mathsf{F}: B \to C$之间的相容条件，以确保 $C \otimes^\psi A = (C \otimes A,\ m^\psi)$的代数结构能够下降到商 $C \otimes_B A$ 上（命题 3.1）。所得代数称为推前代数。在对 ψ作出假设的条件下，它继承 A 上的 H-余模代数结构（命题 3.6）。作为 [20, 定理 9] 和 [14, 定理 1.4]向可能是非中心的 H-伽罗瓦扩张的推广，我们证明如下结果：

定理 3.8. 设 $B \subset A$ 是一个 H-伽罗瓦扩张，且 A 作为 B-模是忠实平坦的。设 $\psi: A \otimes C \to C \otimes A$ 是一个具有引理 *3.7* 中所述性质的扭曲映射。那么， $B \subset A$ 沿映射 $\mathsf{F}: B \to C$ 的扭曲推前代数 $C \otimes_B^\psi A$ 是 C 的一个忠实平坦 H-伽罗瓦扩张。

本文的结构如下。第 2 节回顾代数扭曲张量积的一些预备结果，并介绍有关扭曲映射可逆性的若干基本事实，

以及它们与 $*$-结构的相容性。主要内容见第 3 节：该节将扭曲张量代数理论应用于研究 B-模 A 的协变 F-扩张的代数结构（见 §3.1）。随后在 §3.2 中，将这一构造专门应用于 $B \subset A$ 为 Hopf–Galois 扩张的情形。第 4 节介绍了 Hopf–Galois 扩张推前的若干特例 $B \subset A$：伽罗瓦对象的情形（§4.1），以及沿代数嵌入 $i: B \to A$ （§4.2）和沿投影映射 $\pi: B \to B/I$ 到商代数的推前情形（§4.3）。第 5 节中，我们考察通过推前构造得到的 Hopf–Galois 扩张的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚，并将其与原 Hopf–Galois 扩张的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚进行比较。最后，附录A回顾模扩张的若干方面，附录 B 则证明强联络的一项性质在 2-余循环变形下保持不变。

记号。 我们在域 $\mathbf{k}$上工作。给定一个代数 A，我们分别用 m_A 和 η_A 表示乘法和单位映射，并用记号 $1_A = \eta_A(1_\mathbf{k})$表示 A的单位元。对于霍普夫代数 H，我们分别用 Δ、ε 和 S 表示其余乘法、余单位和反粒子。对于霍普夫代数的余乘法和余作用，我们使用标准的 Sweedler 记号。

2. 扭曲张量积

在本节的引言部分，我们在 §2.1 回顾代数扭曲张量积的一些基本事实（例如参见 [9, 8]），并在 §2.2 证明有关扭曲映射可逆性及其与 $*$-结构相容性的一些结果。

2.1. 代数的扭曲张量积。 通过用更一般的适当映射替代交换映射，可以将张量积代数推广为扭曲张量积。

设 A和 C是两个含幺结合代数，且 $\psi: A \otimes C \to C \otimes A$是一个线性映射。映射

$$m^\psi := (m_C \otimes m_A)(\mathrm{id}_C \otimes \psi \otimes \mathrm{id}_A) : (C \otimes A) \otimes (C \otimes A) \to C \otimes A \tag{2.1}$$

当且仅当映射 ψ 满足以下条件时，才在向量空间 $C \otimes A$ 上定义一个结合乘积

$$(\mathrm{id}_C \otimes m_A) \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes m_C \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_C \otimes \psi) = (m_C \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_C \otimes \psi) \circ (\mathrm{id}_C \otimes m_A \otimes \mathrm{id}_C) \circ (\psi \otimes \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_C)\,. \tag{2.2}$$

我们将满足条件 (2.2) 的线性映射 $\psi: A \otimes C \to C \otimes A$ 称为**扭曲映射**，并用 $\psi(a \otimes c) := c^{[\psi]} \otimes a^{[\psi]}$ 表示 ψ 的像（此处默认可能存在求和）。递归地，我们用记号 $[\psi]_2, \ldots,$ 表示多次应用时 ψ 的像。于是，条件 (2.2) 可写为

$$(cc'^{[\psi]})^{[\psi]_2} \otimes a^{[\psi]_2} a'^{[\psi]} = c^{[\psi]} c'^{[\psi]_2} \otimes (a^{[\psi]} a')^{[\psi]_2}, \quad \forall\, a, a' \in A,\ c, c' \in C\,. \tag{2.3}$$

我们将赋予扭曲乘积 m^{ψ} 的向量空间 $C\otimes^{\psi}A$ $C\otimes A$ 记作 $C\otimes^{\psi}A=(C\otimes A,m_{\psi})$，并称其为扭曲张量积代数。此外，我们使用符号 $\cdot^{\psi}$ 表示两个元素的乘积：

$$m^{\psi}\Big((c\otimes a)\otimes(c'\otimes a')\Big)=(c\otimes a)\cdot^{\psi}(c'\otimes a')=cc'^{[\psi]}\otimes a^{[\psi]}a'.$$

“扭曲张量积”这一术语取自 [26], ，而 [8] 使用“叉积”一词， m^{ψ} 是 Takeuchi 叉积的推广。

结合律(2.2)成立的一个充分条件是满足以下两个条件（分配律）：

$$\psi(m_A\otimes\mathrm{id}_C)=(\mathrm{id}_C\otimes m_A)\circ(\psi\otimes\mathrm{id}_A)\circ(\mathrm{id}_A\otimes\psi) \tag{2.4}$$

$$\psi(\mathrm{id}_A\otimes m_C)=(m_C\otimes\mathrm{id}_A)\circ(\mathrm{id}_C\otimes\psi)\circ(\psi\otimes\mathrm{id}_C)\,. \tag{2.5}$$

它们分别为：

$$\psi(aa'\otimes c)=\psi\left(a\otimes c^{[\psi]}\right)a'^{[\psi]}=c^{[\psi][\psi]_2}\otimes a^{[\psi]_2}a'^{[\psi]} \tag{2.6}$$

$$\psi(a\otimes cc')=c^{[\psi]}\psi(a^{[\psi]}\otimes c')=c^{[\psi]}c'^{[\psi]_2}\otimes a^{[\psi][\psi]_2} \tag{2.7}$$

对元素 a、 $a'\in A$、 c、 $c'\in C$。

给定一个扭曲映射 ψ： $A\otimes C\to C\otimes A$，张量单位元 $\eta_{\otimes}:=\eta_C\otimes\eta_A$ 与扭曲乘积 m^{ψ} 相容，即 $m^{\psi}\circ(\mathrm{id}\otimes\eta_{\otimes})=\mathrm{id}=m^{\psi}\circ(\eta_{\otimes}\otimes\mathrm{id})$ 当且仅当 ψ是正规的，也就是说，对所有 $c\in C$、 $a\in A$,

$$\psi(1_A\otimes c)=c\otimes 1_A\quad(\text{right normal}),\qquad\psi(a\otimes 1_C)=1_C\otimes a\quad(\text{left normal}). \tag{2.8}$$

m_{ψ} 的结合律与 $\eta_{\otimes}$ 作为相容单位元的性质是彼此独立的：存在没有单位元的结合代数 $C\otimes^{\psi}A$ （而且显然，并非每个正规线性映射 ψ：$A\otimes C\to C\otimes A$ 都满足结合律条件（2.2））。

条件（2.2）以及 ψ 的左正规性（分别为右正规性）蕴含条件（2.4）（分别为（2.5））。因此，对于正规扭曲映射，（2.4）和（2.5）分别等价于乘积 m^{ψ}的结合律。若一个扭曲映射是右正规的并满足分配律（2.4），那么它也满足分配律（2.5）。类似地，满足（2.5）的左正规扭曲映射也满足（2.4）。

对于有限生成代数 A 和 C，方程（2.4）和（2.5）意味着线性映射 ψ 由其在 A 和 C 的代数生成元上的取值所确定，因为一旦在线性映射的代数生成元上（良定义地）确定，就存在唯一的方式将其延拓到整个 $A\otimes C$。

代数的扭曲张量积与一个代数的分解问题密切相关（参见 [17, 第 7], [8,章定理 2.10]）。

定理 2.1. 设 C、 A 和 X 为代数。以下两个条件等价：

(i) 存在一个代数同构 $X\simeq C\otimes^{\psi}A$，其中 ψ 是某个正规扭曲映射。

(ii)代数 X 可通过 C 和 A 分解，也就是说，存在两个代数态射$u_C:\ C\to X$ 和 $u_A:\ A\to X$，使得映射 $\xi:=m_X\circ(u_C\otimes u_A):\ C\otimes A\to X$ 是一个向量空间同构。

证明基于这样一个事实：若 $C\otimes^{\psi}A$ 是由正规扭曲映射 ψ得到的扭曲张量积代数，那么这些映射

$$u_C:C\to C\otimes^{\psi}A\,,\quad c\mapsto c\otimes 1_A\,,\qquad u_A:A\to C\otimes^{\psi}A\,,\quad a\mapsto 1_C\otimes a\,,\tag{2.9}$$

是代数同态，而映射 $\xi:=m^{\psi}\circ(u_C\otimes u_A):\ C\otimes A\to C\otimes^{\psi}A$是向量空间的同构，因为 $\xi(c\otimes a)=c\otimes a$。对于反向推论，可构造正规扭曲映射为 $\psi=\xi^{-1}\circ m_X\circ(u_A\otimes u_C)$。

扭曲张量积的构造在 [8, §2]中被推广到余代数和双代数。C 一个余代数与 A 一个代数的混合情形在 [6, §2]中得到了研究，其中利用纠缠结构将 Hopf–Galois 扩张推广为余代数主丛（另见 [7,§34]）。

关于代数的扭曲张量积的例子，参见例如 [8, §2]。这里我们只回顾 Majid 的双交叉积（尤其是 smash 积）这一基本例子，扭曲张量积是它的推广。

例2.2. 扭曲映射的一个基本例子来自双代数的双交叉积（或双交叉积）构造。我们简要回顾这一框架，参见例如 [15, §10.2.5]。设 $\{C,A\}$ 为一对双代数匹配对：$(A,\triangleleft)$ 是右 C-模余代数，而 $(C,\triangleright)$ 是左 A-模余代数，且这两个作用满足以下相容条件

$$\begin{aligned}
&(aa')\triangleleft c=(a\triangleleft({a'}_{(1)}\triangleright c_{(1)}))({a'}_{(2)}\triangleleft c_{(2)})\,,\qquad 1_A\triangleleft c=\varepsilon_C(c)\\
&a\triangleright(cc')=(a_{(1)}\triangleright c_{(1)})((a_{(2)}\triangleleft c_{(2)})\triangleright c')\,,\qquad a\triangleright 1_C=\varepsilon_A(a)\\
&(a_{(1)}\triangleleft c_{(1)})\otimes(a_{(2)}\triangleright c_{(2)})=(a_{(2)}\triangleleft c_{(2)})\otimes(a_{(1)}\triangleright c_{(1)}).
\end{aligned}$$

向量空间 $C\otimes A$ 是一个代数，其乘法为

$$(c\otimes a)\cdot^{\psi}(c'\otimes a')=c(a_{(1)}\triangleright {c'}_{(1)})\otimes(a_{(2)}\triangleleft {c'}_{(2)})a',$$

对应于扭曲映射

$$\psi:A\otimes C\to C\otimes A:\ a\otimes c\mapsto(a_{(1)}\triangleright c_{(1)})\otimes(a_{(2)}\triangleleft c_{(2)}).\tag{2.10}$$

所得代数是一个双代数，其余代数结构为$C\otimes A$的通常张量积余代数结构。它称为这一对 $\{C,A\}$ 的双交叉积双代数，记作$C\bowtie A$。当两个作用之一是平凡的时，这一构造就退化为 smash（或 crossed）积。■

2.2. **可逆扭曲映射与 $*$-结构**。 接下来我们讨论扭曲张量积代数中是否存在 $*$-结构，以及它与扭曲映射可逆性之间的关系。

设 $\psi\colon\ A\otimes C\to C\otimes A$ 是一个作为线性映射可逆的扭曲映射。令 $\psi^{-1}\colon\ C\otimes A\to A\otimes C$ 表示其逆映射。由可逆映射 ψ 定义的乘积具有结合性，并不一般意味着由 ψ^{-1} 定义的乘积也具有结合性；这一蕴含需要更强的分配律（2.4）和（2.5）。如果 $\psi\colon\ A\otimes C\to C\otimes A$ 是满足条件（ 2.4 ）和（ 2.5 ）的线性映射，那么其逆映射也满足这些条件，因此 ψ^{-1} 为 $A\otimes C$ 定义了一个结合乘积 $m^{\psi^{-1}}$。由此得到的扭曲张量积代数 $A\otimes^{\psi^{-1}}C$ 与 $C\otimes^{\psi}A$ 同构。

引理 2.3。 令 $\psi\colon\ A\otimes C\to C\otimes A$ 为满足条件 （2.4）和（2.5）的线性映射。扭曲张量积代数 $A\otimes^{\psi^{-1}}C$ 和 $C\otimes^{\psi}A$ 通过扭曲映射同构，即

$$\psi:(A\otimes^{\psi^{-1}}C,\,m^{\psi^{-1}})\longrightarrow(C\otimes^{\psi}A,\,m^{\psi})$$

是一个代数同构:

$$\psi\big((a\otimes c)\cdot^{\psi^{-1}}(a'\otimes c')\big)=\big(\psi(c\otimes a)\big)\cdot^{\psi}\big(\psi(c'\otimes a')\big).\tag{2.11}$$

证明。 (2.6) 与 (2.7) 的结合给出

$$\psi(aa'\otimes cc')=c^{[\psi][\psi]_3}c'^{[\psi]_2[\psi]_4}\otimes a^{[\psi]_3[\psi]_4}a'^{[\psi][\psi]_2}.\tag{2.12}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\psi(aa'^{[\psi^{-1}]}\otimes c^{[\psi^{-1}]}c')&=c^{[\psi^{-1}][\psi][\psi]_3}c'^{[\psi]_2[\psi]_4}\otimes a^{[\psi]_3[\psi]_4}a'^{[\psi^{-1}][\psi][\psi]_2}=c^{[\psi]_2}c'^{[\psi][\psi]_3}\otimes a^{[\psi]_2[\psi]_3}a'^{[\psi]}\\&=c^{[\psi]_2}\psi\big(a^{[\psi]_2}\otimes c'^{[\psi]}\big)a'^{[\psi]}=(c^{[\psi]_2}\otimes a^{[\psi]_2})\cdot^{\psi}(c'^{[\psi]}\otimes a'^{[\psi]})\end{aligned}$$

从而证明了 (2.11)。 ■

现在假设代数 A 和 C 是 $*$-代数，则在扭曲张量积代数上有两种可以考虑的自然 $*$-结构。

引理 2.4。 设 A 和 C 是带有对合的 $*$-代数，其对合分别记为 $*_A$ 和 $*_C$ 。设 $\psi\colon\ A\otimes C\to C\otimes A$ 是一个扭曲映射，且 $\psi(1_A\otimes 1_C)=1_C\otimes 1_A$。则扭曲张量积代数 $C\otimes^{\psi}A$ 是带有对合 $*_C\otimes *_A$ 的 $*$-代数，当且仅当 ψ 是交换映射， $\psi(c\otimes a)=a\otimes c$。

证明。 另一个方向显然成立。对于反向，假设 $C\otimes^{\psi}A$ 是一个带有对合 $*_C\otimes *_A$的 $*$-代数，也就是说

$$\begin{aligned}\big((c\otimes a)\cdot^{\psi}(c'\otimes a')\big)^*&=(cc'^{[\psi]})^*\otimes(a^{[\psi]}a')^*=(c'^{[\psi]})^*c^*\otimes a'^*(a^{[\psi]})^*\\&=(c'^*\otimes a'^*)\cdot^{\psi}(c^*\otimes a^*)=c'^*(c^*)^{[\psi]}\otimes(a'^*)^{[\psi]}a^*\end{aligned}$$

对于所有的 $a, a' \in A$ 和 $c, c' \in C$。那么，特别地，对于 $a' \otimes c = 1_A \otimes 1_C$，该恒等式给出 $c'^{[\psi]} \otimes a^{[\psi]} = c' \otimes a$ 对于所有的 $a \in A$, $c' \in C$，也就是说 ψ 是交换映射。■

引理 2.5. 设 $\psi : A \otimes C \to C \otimes A$ 是一个线性映射。映射

$$* := \psi(*_A \otimes *_C) \circ \mathrm{flip} : C \otimes A \to C \otimes A\,, \quad c \otimes a \mapsto (c \otimes a)^* := \psi(a^* \otimes c^*) \tag{2.13}$$

是对合，当且仅当 ψ 可逆，且其逆映射为

$$\psi^{-1} = (*_A \otimes *_C) \circ \mathrm{flip} \circ \psi \circ (*_A \otimes *_C) \circ \mathrm{flip} : C \otimes A \to A \otimes C. \tag{2.14}$$

在此情形下，对于满足 (2.4) 和 (2.5)的 ψ，(2.13) 中的对合在扭曲张量积代数 $C \otimes^{\psi} A$ 上定义了一个 $*$-结构。

证明. (2.13) 是对合的条件

$$(\psi(a^* \otimes c^*))^* = c^{[\psi]^*[\psi]_2{}^*} \otimes a^{[\psi]^*[\psi]_2{}^*} = c \otimes a\,, \quad \forall\, a \in A,\ c \in C, \tag{2.15}$$

i等价于 (2.14) 中的映射 ψ^{-1} 是 ψ的左逆和右逆。

至于第二个结论，我们需要证明 (2.13) 是关于 $C \otimes^{\psi} A$的乘积 m_{ψ} 的反代数映射。对于 $a, a' \in A$ 和 $c, c' \in C$:

$$\begin{aligned}\big((c \otimes a) \cdot^{\psi} (c' \otimes a')\big)^* &= \big(cc'^{[\psi]} \otimes a^{[\psi]}a'\big)^* = \psi\big((a^{[\psi]}a')^* \otimes (cc'^{[\psi]})^*\big) = \psi\big(a'^*(a^{[\psi]})^* \otimes (c'^{[\psi]})^* c^*\big) \\ &= (c'^{[\psi]})^{*[\psi]_2[\psi]_4} c^{*[\psi]_3[\psi]_5} \otimes (a'^*)^{[\psi]_4[\psi]_5} (a^{[\psi]})^{*[\psi]_2[\psi]_3}\end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了由 (2.6) 和 (2.7) 得到的组合式 (2.12)。利用 (2.15)，该表达式可化简为

$$\begin{aligned}\big((c \otimes a) \cdot^{\psi} (c' \otimes a')\big)^* &= (c'^*)^{[\psi]_2} (c^*)^{[\psi][\psi]_3} \otimes (a'^*)^{[\psi]_2[\psi]_3} (a^*)^{[\psi]} \\ &= \big(c'^{*[\psi]_2} \otimes a'^{*[\psi]_2}\big) \cdot^{\psi} \big(c^{*[\psi]} \otimes a^{*[\psi]}\big) = (c' \otimes a')^* \cdot^{\psi} (c \otimes a)^*.\end{aligned}$$ ■

在前一引理的假设下，由于 ψ 可逆，还可以构造带有结合乘积 $m^{\psi^{-1}}$ 的扭曲张量积代数 $A \otimes^{\psi^{-1}} C$。条件 (2.14) 对交换 ψ 与 ψ^{-1}（以及 $A \leftrightarrow C$）是对称的，因为 $(*_A \otimes *_C) \circ$ 翻转 $=$ 翻转 $\circ (*_C \otimes *_A)$，因此 $A \otimes^{\psi^{-1}} C$ 成为一个 $*$- 代数，并且

$$(a \otimes c)^* := \psi^{-1}(c^* \otimes a^*) = (a^{[\psi]})^* \otimes (c^{[\psi]})^*.$$

映射 $\psi : A \otimes^{\psi^{-1}} C \to C \otimes^{\psi} A$ 是一个 $*$-代数同构。

3. Hopf–Galois 扩张的推前

本节将扭曲张量积代数理论应用于 Hopf–Galois 扩张的推前研究。在 §3.1 中，我们研究扭曲张量积代数 $C \otimes^{\psi} A$ 的乘法m^{ψ} 在何种条件下能够下降为协变 F-扩张 $C \otimes_B A$ 上良定义的代数结构，其中 A 通过映射 $\mathrm{F} : B \to C$ 给出，且 B 是 A 的子代数。随后，在 §3.2 中，我们将这一构造具体应用于 $B \subset A$ 是一个 H-伽罗瓦扩张的情形。

在此背景下， $C \otimes_B A$ 被视为主丛全空间沿底空间上的映射所得纤维积的代数对应物。因此，我们将 H-伽罗瓦代数扩张的推前视为主丛拉回的代数类比。

3.1. 协变扩张的扭曲积。 我们确定扭曲张量积代数 $C \otimes^{\psi} A$ 的乘法 m^{ψ} 何时能够下降到 $C \otimes A$ 关于子代数 $B \subset A$ 的商。

设 A 和 C 是两个代数， B 是 A 的一个子代数，且 $\mathsf{F}\colon B \to C$ 是一个代数态射。商 $C \otimes_B A$（也称为 A 沿 F 的推前）定义为通过 F 得到的 B-模 A 的协变 F-扩张：

$$C \otimes_B A := C \otimes A / \langle c \otimes ba - c\,\mathsf{F}(b) \otimes a \ , \ a \in A,\, b \in B,\, c \in C \rangle \,. \tag{3.1}$$

它是一个左 C-模和右 A-模，左右作用 $c'(c \otimes a) = c'c \otimes a$ 和 $(c \otimes a)a' = c \otimes aa'$ 彼此交换，其中 $a,\ a' \in A, c,\ c' \in C$。我们将 $\pi_B\colon C \otimes A \to C \otimes B, \pi_B(c \otimes a) := c \otimes_B a$ 记作商映射；根据构造，它是左 C-模和右 A-模的态射。我们还指出，如果 A 作为左 B-模是忠实平坦的，那么 $C \otimes_B A$ 作为左 C-模也是忠实平坦的，见命题 5，第 I 章 §3]。

赋予 $C \otimes_B A$ 代数结构的问题尚未解决。通常的张量积代数 $C \otimes A$ 的乘法$m_{C\otimes A} = (m_C \otimes m_A) \circ(\mathrm{id}_C \otimes \mathsf{flip} \otimes \mathrm{id}_A)$在以下假设下可下降为推前 $C \otimes_B A$ 上良定义的乘法：代数 B 在 A中是中心的，因而特别是交换的，并且 F 的像 $\mathsf{F}(B)$ 在 C中是中心的 [14]。

这里，我们通过赋予 $C \otimes A$ 扭曲代数乘法m^{ψ}来避免中心性条件，并研究扭曲映射 ψ 与映射 F 之间的相容条件，以确保 $C \otimes^{\psi} A = (C \otimes A,\ m^{\psi})$的代数结构能够下降到商 $C \otimes_B A$。

考虑向量空间 C，通过映射 F 和 A将其视为 B-双模；并以显然的方式将 $A \otimes C$、$C \otimes A$ 和$C \otimes_B A$ 视为 B-双模。我们记$\psi := \pi_B \circ \psi\colon A \otimes C \to C \otimes_B A$ 为 ψ 与投影映射 π_B 的复合。我们有如下结果。

命题 3.1. 设 $\psi\colon A \otimes C \to C \otimes A$ 是一个扭曲映射， $C \otimes^{\psi} A = (C \otimes A, m^{\psi})$ 是相应的扭曲张量积代数。按 (2.1) 定义的乘法 m^{ψ} 能够下降为推前 $C \otimes_B A$ 上良定义的乘法，当且仅当映射ψ 是一个 B-双模态射，即

$$\overline{\psi}(b(a \otimes c)) = \overline{\psi}(ba \otimes c) = \mathsf{F}(b)\overline{\psi}(a \otimes c) \ ; \quad \overline{\psi}((a \otimes c)b) = \overline{\psi}(a \otimes c\,\mathsf{F}(b)) = \overline{\psi}(a \otimes c)b \tag{3.2}$$

对所有 $a \in A$、 $b \in B$、 $c \in C$ 均成立。

证明。 </style}映射 m^{ψ} 可下降为 $(C \otimes_B A) \otimes (C \otimes_B A)$ 上的良定义映射，当且仅当

$$\pi_B\Big(\psi(ba \otimes c)b' - \mathsf{F}(b)\psi(a \otimes c\,F(b'))\Big) = 0 \quad ; \quad \pi_B\Big(\psi(ba \otimes c\,\mathsf{F}(b')) - \mathsf{F}(b)\psi(a \otimes c)b\Big) = 0$$

对所有 $a \in A$,b, $b' \in B$ 且 $c \in C$。也就是说，作为 π_B 一个 B-双模映射，当且仅当 f

$$\overline{\psi}(ba \otimes c)b' = \mathsf{F}(b)\overline{\psi}(a \otimes c\,\mathsf{F}(b')) \quad ; \quad \overline{\psi}(ba \otimes c\,\mathsf{F}(b')) = \mathsf{F}(b)\overline{\psi}(a \otimes c)b.$$

那么，直接 检查这些恒等式与 (3.2). ■

所得代数 $C \otimes_B A$，其乘法为 m^{ψ}，记作 $C \otimes_B^{\psi} A$ ，称为扭曲推前代数。

注记 3.2。 要求 m^{ψ} 在商$C \otimes_B A$ 上诱导出良定义映射，等价于要求 $I := \langle c \otimes ba - c\mathsf{F}(b) \otimes a\,,\quad a \in A,\quad b \in B,\quad c \in C\rangle$ 为一个代数理想:

$$(c' \otimes a') \cdot^{\psi} (c \otimes ba - c\,\mathsf{F}(b) \otimes a) \in I \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_B\Big(\psi(a' \otimes c)b - \psi(a' \otimes c\,F(b))\Big) = 0$$

$$(c \otimes ba - c\,\mathsf{F}(b) \otimes a) \cdot^{\psi} (c' \otimes a') \in I \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_B\Big(\psi(ba \otimes c') - \mathsf{F}(b)\psi(a \otimes c')\Big) = 0\,,$$

对所有 a，$a' \in A$、 $b \in B$和 c，$c' \in C$。注意，映射 ψ 的 B-线性条件 (3.2) 弱于映射 ψ的类似 B-线性条件， $\psi(ab \otimes c\mathsf{F}(b')) = \mathsf{F}(b)\psi(a \otimes c)b$。 ψ 的 B-线性意味着代数 $C \otimes^{\psi} A$ 中的一个元素与 I 中的一个元素的乘积为零。□

注记 3.3. 前一个注记还指出，对于满射映射 F，要求 ψ 满足 B-线性会过于严格。若 F $= B \to C$ 是满射，扭曲映射 $\psi\colon\ A \otimes C \to C \otimes A$ 满足 B-线性就要求 $\psi(a \otimes c) = \psi(a \otimes 1_C)b_c$ 对所有 $a \in A$、 $c \in C$ 以及满足 $\mathsf{F}(b_c) = c$ 的任意元素都成立。因此，为了使此映射定义良好，还需要对任意两个元素 b_c， $b'_c \in \mathsf{F}^{-1}(c)$ 满足 $1_C \otimes a\,b_c = 1_C \otimes a\,b'_c$。此外，$\psi$ 不可能是（右）正规，因为这要求 $c \otimes 1_A = \psi(1_A \otimes c) = 1_C \otimes b_c$ 对所有 $c \in C$ 以及 $b_c \in \mathsf{F}^{-1}(c)$ 都成立。□

我们以一条关于可逆扭曲映射和 $*$-结构的评论结束本小节。设扭曲映射 ψ 可逆，其逆映射 ψ^{-1} 也是扭曲映射（见 §2.2）。根据命题 3.1， $A \otimes^{\psi^{-1}} C$ 上的乘法 $m^{\psi^{-1}}$ 能否下降为推前 $A \otimes_B C := A \otimes C/J$ 上的良定义代数结构，当且仅当 $J := \big\langle a\,b \otimes c - a \otimes \mathsf{F}(b)\,c\,,\quad a \in A,\quad b \in B,\quad c \in C\big\rangle$ 是一个代数理想。等价地，扭曲映射 ψ^{-1} 与投影 $\widetilde{\pi}_B\colon$ $A \otimes C \to A \otimes_B C$ 的复合映射必须满足类似于 (3.2) 的条件。一般而言，这并不能由 I 是一个代数理想推出。

引理 3.4. 设 A 和 C 是 $*$-代数，其中 B 是 A的一个 $*$-子代数。设 ψ满足(2.4) 和 (2.5)，且使得 $* = \psi(*_A \otimes *_C) \circ \mathrm{flip}$ 在扭曲张量积代数 $C \otimes^{\psi} A$ 上给出一个 $*$-结构（见引理 *2.5*）。设 $\mathsf{F}\colon$ $B \to C$ 是一个 $*$-代数态射。

$*$在 $C \otimes^{\psi} A$ 上的结构，$(c \otimes a)^* = \psi(a^* \otimes c^*)$，能够下降为扭曲推前代数 $C \otimes_B^{\psi} A$ 上定义良好的 $*$ 结构，当且仅当 ψ 也是内 B-线性的:

$$\overline{\psi}(ab \otimes c) = \overline{\psi}(a \otimes \mathsf{F}(b)c), \quad \forall\, a \in A,\ b \in B,\ c \in C. \tag{3.3}$$

证明。 条件 (3.3) 可通过要求 $(c \otimes ba)^*$ 等于 $(c\mathrm{F}(b) \otimes a)^*$（在 $C \otimes_B A$ 中）直接得到；等价地，要求 I 是 $C \otimes A$ 的一个 $*$-理想。■

注记 3.5. 条件 (3.3) 等价于 $\psi(J) \subseteq I$，其中理想 I, J 如上所述。当 $J \subset A \otimes C$ 是代数理想且 $\psi(J) = I$ 时，ψ 可下降为良定义的代数同构 $\psi\colon (A \otimes_B^{\psi^{-1}} C, m^{\psi^{-1}}) \longrightarrow (C \otimes_B^{\psi} A, m^{\psi})$。□

3.2. **从扭曲张量积代数到推前 Hopf–Galois 扩张。** 现在，我们将上一节的结果应用于 $B \subset A$ 为 Hopf–Galois 扩张的情形。如前所述，沿代数态射 $\mathrm{F}: B \to C$ 对 A 作推前 $C \otimes_B A$，其作用相当于主丛的几何拉回。在中心 Hopf–Galois 扩张的框架下 —— 也就是说，假设代数 B 在 A中是中心的，因此特别是交换的，并且 F 的像 $\mathrm{F}(B)$ 在 C 中是中心的—— [14, Thm. 1.4] 已证明，配备张量积代数乘法的代数 $C \otimes_B A$ 是 C的 H-伽罗瓦扩张。此外，若 A 作为 B-模忠实平坦，则它作为C-模也忠实平坦。现在，我们将在不作中心性假设的更一般的扭曲张量积代数背景下证明类似结果。

假设代数 A 是霍普夫代数 H 的右 H-余模代数，其余作用为 $\delta\colon A \to A \otimes H$，$a \to a_{(0)} \otimes a_{(1)}$，且 B 是余不变元子代数，$B = A^{coH} = \{b \in B \mid \delta(b) = b \otimes 1_H\}$。此外，假设 A 是 B 的 H-伽罗瓦扩张。受几何拉回解释的启发，将 C 视为平凡的 H-余模，并通过张量积余作用 $\mathrm{id}_C \otimes \delta$ 将 $C \otimes A$ 视为右 H-余模。由于 $B = A^{coH}$ 是余不变量子代数，H-余模结构可下降到 $C \otimes_B A$，其余作用为 $\mathrm{id}_C \otimes_B \delta$。类似地，将向量空间 $A \otimes C$ 视为右 H- 余模，其张量积余作用为 $(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{flip}) \circ (\delta \otimes \mathrm{id}_C)$。下文中，我们固定一个代数映射 $\mathrm{F}: B \to C$。

命题 3.6. 设 $\psi\colon A \otimes C \to C \otimes A$ 是一个扭曲映射，使得投影 ψ 是一个 B-双模态射，¯ 如 (3.2) 中所示。假设 ψ 是一个 H-余模态射，即

$$c^{[\psi]} \otimes \left(a^{[\psi]}\right)_{(0)} \otimes \left(a^{[\psi]}\right)_{(1)} = c^{[\psi]} \otimes (a_{(0)})^{[\psi]} \otimes a_{(1)}\,, \qquad \forall\, a \in A,\, c \in C$$

向前推代数 *{v1}* 是一个 H-余模代数，其余作用为 恒等$_C \otimes_B \delta$.

证明。 我们需要证明，余作用 $\mathrm{id}_C \otimes_B \delta$ 关于扭曲乘积 m^{ψ} 是一个代数映射。对于 $a \in A$、$c \in C$，利用 δ 是一个代数映射，我们计算得

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_C \otimes_B \delta)\big((c \otimes_B a) \cdot^{\psi} (c' \otimes_B a')\big) &= (\mathrm{id}_C \otimes_B \delta)\big(cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a'\big) \\ &= cc'^{[\psi]} \otimes_B \left(a^{[\psi]}\right)_{(0)} a'_{(0)} \otimes_B \left(a^{[\psi]}\right)_{(1)} a'_{(1)}\,.\end{aligned}$$

另一方面（再次记作 $\cdot^{\psi}$，这是符号上的一种滥用）

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{id}_C \otimes_B \delta)(c \otimes_B a)\big) \cdot^{\psi} \big((\mathrm{id}_C \otimes_B \delta)(c' \otimes_B a')\big) &= \big(c \otimes_B a_{(0)} \otimes_B a_{(1)}\big) \cdot^{\psi} \big(c' \otimes_B a'_{(0)} \otimes_B a'_{(1)}\big) \\ &= cc'^{[\psi]} \otimes_B (a_{(0)})^{[\psi]} a'_{(0)} \otimes_B a_{(1)} a'_{(1)}\end{aligned}$$

并且，由于 ψ 是一个 H-余模态射，这两个表达式相同。 ■

代数 C 包含于由余不变元组成的 $C\otimes_B^{\psi}A$ 子代数中，$C\subset\left(C\otimes_B^{\psi}A\right)^{coH}$，$c\mapsto c\otimes_B 1_B$。通过这一认定，有

$$c'(c\otimes_B a)=c'\overline{\psi}(1_A\otimes c)a\ ,\quad (c\otimes_B a)c'=c\overline{\psi}(a\otimes c')\ ,\quad a\in A,\, c,c'\in C$$

于是可以构造 $C\otimes_B^{\psi}A$ 在其子代数 C 上与自身的平衡张量积。我们假设映射 $\overline{\psi=\pi_B\circ\psi}$ 满足（参见（2.8））

$$\overline{\psi}(1_A\otimes c)=c\otimes_B 1_A\ ,\qquad \overline{\psi}(a\otimes 1_C)=1_C\otimes_B a. \tag{3.4}$$

那么，$C\otimes_B^{\psi}A$ 在 C 上与自身的平衡张量积为

$$(C\otimes_B^{\psi}A)\otimes_C(C\otimes_B^{\psi}A)=(C\otimes_B^{\psi}A)\otimes(C\otimes_B^{\psi}A)/\mathcal{I}$$

其理想为

$$\mathcal{I}=\left\langle (c\otimes_B a)\otimes(c''c'\otimes_B a')-(cc''^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]})\otimes(c'\otimes_B a')\,;\quad a,a'\in A,\, c,c',c''\in C\right\rangle.$$

注意，在商中，

$$c^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]}\otimes_C 1_C\otimes_B 1_A=1_C\otimes_B a\otimes_C c\otimes_B 1_A\ ,\quad \forall a\in A,\, c\in C. \tag{3.5}$$

引理 3.7。设 $\psi:\ A\otimes C\to C\otimes A$ 是一个右 H-余模态射的扭曲映射。假设 ψ 是一个满足 (3.4)和分配律 $\overline{\psi(a\otimes cc')=c^{[\psi]}\psi(a^{[\psi]}\otimes c')}$（参见(2.7)）的 B-双模态射。那么，$(C\otimes_B\overline{A})\otimes_C(C\otimes_B\overline{A})$ 与 $C\otimes_B(A\otimes_B A)$作为左 C-模和右 H-余模同构，同构映射为

$$(C\otimes_B A)\otimes_C(C\otimes_B A)\to C\otimes_B(A\otimes_B A)\,,\qquad (c\otimes_B a)\otimes_C(c'\otimes_B a')\mapsto cc'^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]}\otimes_B a' \tag{3.6}$$

其逆映射为 $c\otimes_B(a\otimes_B a')\ \mapsto(c\otimes_B a)\ \otimes_C(1_C\otimes_B a')$。

证明。该映射

$$\begin{aligned}\alpha:&(C\otimes_B A)\otimes(C\otimes_B A)\to C\otimes_B(A\otimes_B A),\\ &(c\otimes_B a)\otimes(c'\otimes_B a')\ \mapsto\ c\overline{\psi}(a\otimes c')\otimes_B a'=cc'^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]}\otimes_B a'\end{aligned}$$

是良定义的，因为 $\overline{\psi=\pi_B\circ\psi}$ 是一个 B-双模态射，也就是说它满足 (3.2)。对于$c''\in C$，以及映射 ψ的性质 $\overline{\psi(a\otimes cc')=c^{[\psi]}\psi(a^{[\psi]}\otimes c')}$，有

$$\begin{aligned}\alpha\big((c\otimes_B a)\otimes(c''c'\otimes_B a')\big)&=c(c''c')^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]}\otimes_B a'=cc''^{[\psi]}c'^{[\psi]_2}\otimes_B\left(a^{[\psi]}\right)^{[\psi]_2}\otimes_B a'\\ &=\alpha\big((cc''^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]})\otimes(c'\otimes_B a')\big).\end{aligned}$$

因此，α 在理想 $\mathcal{I}$ 上为零，并下降为平衡张量积 $(C\otimes_B A)\otimes_C(C\otimes_B A)$ 上的良定义映射 (3.6)。映射 $C\otimes_B(A\otimes_B A)\ \to(C\otimes_B A)\ \otimes_C(C\otimes_B A)$,$c\otimes_B(a\otimes_B a')\ \mapsto(c\otimes_B a)\ \otimes_C(1_C\otimes_B a')$ 是良定义的。直接验证可知，由于 ψ 的性质 (3.4)，它是 α 的右逆；又由于商中的恒等式 (3.5)，它也是左逆。这两个映射都是左 C-模和右 H-余模的态射。■

[14, 定理 1.4] 的结果由以下结论推广到可能非中心的 H-伽罗瓦扩张。

定理 3.8. 设 $B \subset A$ 是一个 H-伽罗瓦扩张，且 A 作为 B-模忠实平坦。设 ψ: $A\otimes C \to C\otimes A$ 是一个具有引理 *3.7* 中所述性质的扭曲映射。那么， $B \subset A$ 沿映射 F: $B \to C$ 的扭曲推前代数 $C\otimes_B^{\psi} A$ 是 C的一个忠实平坦 H-伽罗瓦扩张。

证明. 左 C-模 $C\otimes_B A$ 是忠实平坦的，因为 A 作为左 B-模忠实平坦，[4,命题 5，第 I 章 §3]。考虑映射

$$\chi^{\psi} : (C\otimes_B^{\psi} A)\otimes_C (C\otimes_B^{\psi} A) \to (C\otimes_B^{\psi} A)\otimes H\ ,\ \ (c\otimes_B a)\otimes_C (c'\otimes_B a') \mapsto (c\otimes_B a)\cdot^{\psi}(c'\otimes_B a'_{(0)})\otimes a'_{(1)}.$$

利用同构 (3.6)，映射 χ^{ψ}就是 $\chi^{\psi} = \mathrm{id}_C \otimes_B \chi$，其中 χ: $A\otimes_B A \to A\otimes H$是代数扩张 $B \subset A$ 的典范映射。因此， χ^{ψ} 是满射。由于左 C-模 $C \otimes_B A$ 忠实平坦，且 χ^{ψ} 是满射，根据 [25, 引理 4.2] ，有$C = (C \otimes_B^{\psi} A)^{coH}$。于是， $C \subset C \otimes_B^{\psi} A$ 是一个 H-伽罗瓦扩张，其典范映射为 χ^{ψ}。■

我们给出通过推前构造得到的扩张的平移映射的显式公式。

引理 3.9. 设 $\tau:\ H \to A \otimes_B A,\ h \mapsto h^{<1>} \otimes_B h^{<2>}$ 是 H- 伽罗瓦扩张 $B \subset A$ 的平移映射。那么， H-伽罗瓦扩张 $C \otimes_B^{\psi} A$ 的平移映射 $\tau^{\psi} = (\chi^{\psi})^{-1}|_{1_C\otimes_B 1_A\otimes H}$ 由下式给出

$$\tau^{\psi} : H \to (C \otimes_B^{\psi} A) \otimes_C (C \otimes_B^{\psi} A), \quad h \mapsto (1_C \otimes_B h^{<1>}) \otimes_C (1_C \otimes_B h^{<2>}). \tag{3.7}$$

证明。 我们计算:

$$\begin{aligned}
&(m^{\psi} \otimes_C \mathrm{id}_{C\otimes_B A})(\mathrm{id}_{C\otimes_B A} \otimes \tau^{\psi})\chi^{\psi}\Big((c \otimes_B a) \otimes_C (c' \otimes_B a')\Big) \\
&\qquad = (m^{\psi} \otimes_C \mathrm{id}_{C\otimes_B A})\Big(cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a'_{(0)} \otimes \tau^{\psi}(a'_{(1)})\Big) \\
&\qquad = \Big(cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a'_{(0)}\Big) \cdot^{\psi} \Big(1_C \otimes_B a'_{(1)}{}^{<1>}\Big) \otimes_C \Big(1_C \otimes_B a'_{(1)}{}^{<2>}\Big) \\
&\qquad = \Big(cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a'_{(0)}a'_{(1)}{}^{<1>}\Big) \otimes_C \Big(1_C \otimes_B a'_{(1)}{}^{<2>}\Big)
\end{aligned}$$

由于 $\overline{\psi}$ 是正规元素。根据 (3.5)，这等于

$$\begin{aligned}
&= c \otimes_B aa'_{(0)}a'_{(1)}{}^{<1>} \otimes_C c' \otimes_B a'_{(1)}{}^{<2>} \\
&= c \otimes_B a \otimes_C c' \otimes_B a'.
\end{aligned}$$

恒等式 $a_{(0)}a_{(1)}{}^{<1>} \otimes_B a_{(1)}{}^{<2>} = 1 \otimes_B a$ for $a \in A$ （由 τ 是扩张 $B \subset A$ 的平移映射）成立。另一个恒等式 $\chi^{\psi}\left(\tau^{\psi}(h)\right) = 1_c \otimes_B 1_A \otimes h$，由两个映射的定义以及伽罗瓦扩张 $B \subset A$ 的映射 χ, τ 所满足的类似恒等式 $\chi\left(\tau(h)\right) = 1 \otimes h$ for 推出。■

引理 3.10. 在定理 *3.8* 的假设下，如果 H-伽罗瓦扩张 $B \subset A$ 是裂分的（分别为平凡的），那么扩张 $C \subset C \otimes_B^{\psi} A$ 也是裂分的（分别为平凡的）。

证明。 回忆一下，若存在裂化映射，即一个卷积可逆的 H-余模态射 $\gamma : H \to A$，则 H-扩张称为裂分的，其中 H 的余作用由其余乘法给出。如果 γ 还是代数映射，则称该扩张为平凡的。假设 $B \subset A$ 是一个裂分扩张，其裂化映射为 γ：$H \to A$。那么，映射 $\pi_B \circ u_A \circ \gamma$ 是 $C \subset C \otimes_B^{\psi} A$的裂化映射，其中 u_A 是代数态射 u_A：$A \to C \otimes^{\psi} A$，$a \mapsto 1_C \otimes a$，见（2.9）。事实上，它是两个此类映射的复合，因此是一个H-余模态射。此外，它在卷积下可逆，逆映射为 $u_A \circ \bar{\gamma}$，其中 $\bar{\gamma}$ 是 γ的卷积逆元；这可由 ψ满足（3.4）得出。特别地，如果 γ 是代数映射，使得 $B \subset A$ 成为一个平凡扩张，那么映射 $u_A \circ \gamma$ 也是代数映射，且 $C \subset C \otimes_B^{\psi} A$ 是平凡的。■

注 3.11。 [12] 提出了一种针对紧致矩阵量子群的分类空间的非交换构造，并引入了经典分类映射的量子类比。该文的方法依赖于一种广义交叉积构造，类似于我们论文中所使用的构造，并将其应用于由元素 ψ_{ki} 生成、仅满足关系 $\sum_k \psi_{ki}^* \psi_{kj} = \delta_{ij}$的含幺 $*$-代数。□

4. 例子

本节分析 Hopf–Galois 扩张$B \subset A$推前的若干特殊情形：伽罗瓦对象的情形（§4.1），以及沿（单射）代数嵌入 i： $B \to A$ 的推前（§4.2）和沿一个（满射）投影映射 π：$B \to B/I$ 到商代数的推前（§4.3）。

4.1. 伽罗瓦对象的推前。 对于一个 H-伽罗瓦对象 $B = \mathbf{k}$，任意含幺代数 C的唯一可能的代数映射 F：$\mathbf{k} \to C$ 是 C的单位元 η_C。对于任意扭曲映射 ψ： $A \otimes C \to C \otimes A$，$\psi$与 η_C 之间的相容条件（3.2）自动满足，因为它仅仅对应于 ψ的线性性。此外，$\psi = \psi$。引理 3.7中的映射 ψ 以及随后定理 3.8中的相关要求，归结为扭曲映射 ψ 是正规的，并满足分配律（2.5）。后一个性质是多余的，因为它已经由扭曲映射 ψ 的正规性条件推出（该条件也蕴含（2.4））。

作为定理 3.8 的推论，我们得到以下结果。

推论 4.1. 设 A 是一个 H-伽罗瓦对象，且 A 作为 $\boldsymbol{k}$-模是忠实平坦的。对于任意正规扭曲映射 ψ：$A \otimes C \to C \otimes A$，若它是一个 H-余模态射，则扭曲张量积代数 $C \otimes^{\psi} A$ 是 C 的忠实平坦 H-伽罗瓦扩张。

我们处于 [14], 中所讨论的中心伽罗瓦扩张的推前这一背景下。这里，ψ 可以比交换映射更一般，因此会在 $C\otimes A$ 上导出一种不同于通常张量积乘法的乘法。

引理 4.2。 设 $\{C,A\}$ 是一个双代数匹配对（见例 *2.2*）。设 A 是一个H-伽罗瓦对象，其余作用为 $\delta:\ A\to A\otimes H$，并且作为 k-模是 A 忠实平坦的。假设 A 的余乘法 Δ_A 是一个 H-余模态射，其中 $A\otimes A$ 的余作用为 恒等映射 $\otimes\delta$；且 C对 A的作用 $\triangleleft$是一个 H-余模态射，其中 $A\otimes C$的张量余作用为$\delta^{\otimes}=$ 恒等映射 $\otimes\,\delta$，如前所述。那么，双交叉积代数 $C\bowtie A$ 是 C的一个H忠实平坦H-伽罗瓦扩张。

证明。 根据推论 4.1，我们只需证明 (2.10) 中的 ψ 是一个 H-余模态射。在余乘法 Δ_A 是一个 H-余模态射这一假设下,

$$(a_{(0)})_{(1)}\otimes(a_{(0)})_{(2)}\otimes a_{(1)}=a_{(1)}\otimes(a_{(2)})_{(0)}\otimes(a_{(2)})_{(1)},\ \forall a\in A$$

并且作用 $\triangleleft$ 是一个 H-余模态射,

$$\delta(a\triangleleft c)=(a_{(0)}\triangleleft c)\otimes a_{(1)},\ \forall a\in A,\,c\in C,$$

对于（2.10）中的扭曲映射 ψ，我们计算得,

$$\begin{aligned}\delta^{\otimes}(\psi(a\otimes c))&=(a_{(1)}\triangleright c_{(1)})\otimes\delta(a_{(2)}\triangleleft c_{(2)})=(a_{(1)}\triangleright c_{(1)})\otimes((a_{(2)})_{(0)}\triangleleft c_{(2)})\otimes(a_{(2)})_{(1)}\\&=((a_{(0)})_{(1)}\triangleright c_{(1)})\otimes((a_{(0)})_{(2)}\triangleleft c_{(2)})\otimes a_{(1)}=\psi(a_{(0)}\otimes c)\otimes a_{(1)}\\&=(\psi\otimes\mathrm{id})\,\delta^{\otimes}(a\otimes c).\end{aligned}$$

因此， ψ 是一个 H-余模态射。 ■

注 4.3。 在 [3, §4] 中，研究了作为双交叉积霍普夫代数的伽罗瓦对象的扭曲张量积代数。给定一个 H-伽罗瓦对象 A 和一个 U-伽罗瓦对象 R，对于$\{H,U\}$霍普夫代数匹配对，证明了扭曲张量积代数 $A\otimes^{\psi}R$是双交叉积霍普夫代数 $H\bowtie U$的伽罗瓦对象。□

例 4.4。 设 q 为包含于$\mathbf{k}$中的一个本原 n次单位根，其中 $n\geq 2$。***Taft*** 代数 $T_n(q)$ 是由两个元素 g 和 x 生成的 n^2维霍普夫代数，满足以下关系

$$g^n=1,\quad x^n=0,\quad xg=q\,gx.$$

其余乘法、余单位和反粒子定义如下

$$\Delta(g)=g\otimes g,\quad \varepsilon(g)=1,\quad S(g)=g^{-1},$$

$$\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes g,\quad \varepsilon(x)=0,\quad S(x)=-x\,g^{-1}.$$

对每个 $s\in\mathbf{k}$，定义 A_s 为由元素 G 和 X 生成的代数，并满足以下关系:

$$G^n=1,\quad X^n=s,\quad XG=q\,GX. \tag{4.1}$$

于是 A_s 是一个右 $T_n(q)$-余模代数，其余作用 $\delta\colon A_s \to A_s \otimes T_n(q)$ 在生成元上的定义如下：

$$\delta(G) = G \otimes g, \quad \delta(X) = X \otimes g + 1 \otimes x$$

其中 **k** 为余不变量子代数。代数 A_s 是一个伽罗瓦对象， [21]。 A_s 的一组向量空间基由元素 $G^a X^b$ 构成，其中 a, b 为整数， $0 \le a, b < n$。这些基元素上的余作用为

$$\delta(G^a X^b) = \sum_{k=0}^{b} \begin{bmatrix} b \\ k \end{bmatrix}_q G^a X^k \otimes g^{a+k} x^{b-k},$$

wh 其中 $\left[\begin{smallmatrix} b \\ k \end{smallmatrix}\right]_q$ 表示 q-二项式系数，这可由归纳法证明。

设 C 是一个代数，并假设存在一个正规扭曲映射 $\psi\colon A_s \otimes C \to C \otimes A_s$。可以先在 A_s 的代数生成元上指定该映射，再通过要求满足 (2.6)、(2.7)，并与关系式 (4.1) 相容，将其扩展。最一般的线性映射 $\psi\colon A_s \otimes C \to C \otimes A_s$ 具有如下形式

$$\psi(G \otimes c) := \sum_{a,b} c_{ab} \otimes G^a X^b\,, \quad \psi(X \otimes c) := \sum_{a,b} d_{ab} \otimes G^a X^b\,,$$

在代数生成元上，其中 $c_{ab} = c_{ab}(c)$ 和 $d_{ab} = d_{ab}(c)$ 都属于 C。为了使该映射成为一个 H-余模态射，对于 $a > 1$ 或 $b \ge 1$，必须有 $c_{ab} = 0$ ；对于 $a > 1$ 或 $b > 1$，必须有 $d_{ab} = 0$ 。此外，$c_{00} = 0$ 且 $d_{00} = d_{11} = 0$, $d_{01} = c$。因此， ψ 由两个线性映射 $\alpha, \beta\colon C \to C$ 确定，如下

$$\psi(G \otimes c) = \alpha(c) \otimes G\,, \quad \psi(X \otimes c) = c \otimes X + \beta(c) \otimes G\,,$$

其中 $\alpha(1) = 1$ 和 $\beta(1) = 0$ ，以使 ψ 正规。通过要求满足 (2.6)、(2.7) 对其进行扩展，从而得到一个扭曲映射，因此特别有

$$\psi(G^m \otimes c) = \alpha^m(c) \otimes G^m\,, \quad \psi(X^m \otimes c) = c \otimes X^m + \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q \beta^{m-k}(c) \otimes G^{m-k} X^k$$

（其中 α^m 和 β^m 分别是这些映射的第 m 次迭代），对每个 $m \in \mathbb{N}$，再加上

$$\psi(GX \otimes c) = \alpha(c) \otimes GX + \alpha(\beta(c)) \otimes G^2\,, \quad \psi(XG \otimes c) = \alpha(c) \otimes XG + \beta(\alpha(c)) \otimes G^2.$$

与 (4.1) 的相容性继而要求

$$\alpha^n = \mathrm{id}\,, \quad q\,\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha\,, \quad \beta^{n-k} = 0\,,\ \forall k = 0, \dots, n-1.$$

综上，正规扭曲映射 $\psi\colon A_s \otimes C \to C \otimes A_s$（它们是 H-余模态射）与满足 $\alpha^n =$id: 的含幺代数映射 $\alpha : C \to C$ 之间存在一一对应：

$$\psi(G^a X^b \otimes c) = \alpha^a(c) \otimes G^a X^b.$$

这导出代数 $C \otimes^{\psi} A_s$ ，其乘积为

$$(c' \otimes G^{a_1} X^{b_1}) \cdot^{\psi} (c \otimes G^{a_2} X^{b_2}) = q^{b_1 a_2} c' \alpha^{a_1}(c) \otimes G^{a_1 + a_2} X^{b_1 + b_2}$$

以及 $T_n(q)$–伽罗瓦扩张 $C \subset C \otimes A_s$。

这类映射 α 的例子有 $^{\alpha_{(m)}}$： $c \mapsto q^m c$、 $m \in \mathbb{N}$，其中 C 是任意代数；或者 α 对生成元 c_j 作适当的置换，适用于 $C = \mathbf{k}[c_1, \dots, c_n]$。当 A 是霍普夫代数 $T_n(q)$ 时，例子包括式 (2.10) 中的扭曲映射，以及双交叉积 $C \bowtie T_n(q)$；对于这些双交叉积， C 在 q 上的作用 $\triangleleft$ 是一个 H-余模态射（引理 4.2）。 [1] 研究了经由两个 Taft 代数分解的 Hopf 代数这一特殊情形，并对相应的双交叉积进行了分类。■

4.2. 推前至全代数。与经典几何结果相一致：沿丛投影将主丛拉回至全空间所得的丛是平凡的。我们构造忠实平坦Hopf–Galois扩张$B \subset A$ 沿包含映射 i: $B \to A$ 推前至全空间代数的推前 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$ ，并证明它是平凡的。这里的扭曲映射 ψ_ℓ 由该扩张的强联络 ℓ 构造而成。

设 $B \subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张，霍普夫代数为 H ，其反足可逆，余作用为 δ： $A \to A \otimes H$, $\delta(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$。那么，根据 [22, 定理 5.6], ，总是存在一个符合 [13]定义的强联络。它可以表示为如下线性映射ℓ： $H \to A \otimes A$，并具有以下性质（见 [5, 引理 2.3]）：

$$\ell(1) = 1 \otimes 1, \quad \pi_B \circ \ell = \tau, \quad (\mathrm{id}_A \otimes \delta) \circ \ell = (\ell \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta, \quad (\delta_l \otimes \mathrm{id}_A) \circ \ell = (\mathrm{id}_H \otimes \ell) \circ \Delta. \tag{4.2}$$

这里， $\tau = \chi^{-1}|_{1 \otimes H}$： $H \to A \otimes_B A$ 是扩张的平移映射， π_B： $A \otimes A \to A \otimes_B A$是典范投影，而 δ_l： $A \to H \otimes A$， $a \mapsto S^{-1}(a_{(1)}) \otimes a_{(0)}$ 是 H 在 A上的诱导左余作用。映射 ℓ 是扩张的平移映射到 $A \otimes A$ 的一个提升。我们用记号 $\ell(h) = h^{\langle 1 \rangle} \otimes h^{\langle 2 \rangle}$ 和 $\tau(h) = h^{\langle 1 \rangle} \otimes_B h^{\langle 2 \rangle}$ 表示元素 $h \in H$的像。那么，(4.2)中的最后两个恒等式可写为

$$h^{\langle 1 \rangle} \otimes h^{\langle 2 \rangle}{}_{(0)} \otimes h^{\langle 2 \rangle}{}_{(1)} = h_{(1)}{}^{\langle 1 \rangle} \otimes h_{(1)}{}^{\langle 2 \rangle} \otimes h_{(2)} \in A \otimes A \otimes H \tag{4.3}$$

$$S^{-1}(h^{\langle 1 \rangle}{}_{(1)}) \otimes h^{\langle 1 \rangle}{}_{(0)} \otimes h^{\langle 2 \rangle} = h_{(1)} \otimes h_{(2)}{}^{\langle 1 \rangle} \otimes h_{(2)}{}^{\langle 2 \rangle} \in H \otimes A \otimes A. \tag{4.4}$$

利用强联络 ℓ ，我们在 $A \otimes A$ 上构造一个扭曲张量积，其结合律要求映射 ℓ满足一个条件。不过，对于推前商代数 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$ 中乘积的结合律而言，这一要求并不构成限制（见注 4.7）。

命题4.5。 设 H 是一个具有双射反足的霍普夫代数，且 $B \subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张。假设它存在一个强联络 ℓ ，使得

$$\ell(kh) = h^{\langle 1 \rangle} k^{\langle 1 \rangle} \otimes k^{\langle 2 \rangle} h^{\langle 2 \rangle}, \quad \forall\, h, k \in H. \tag{4.5}$$

那么该映射

$$\psi_\ell : A \otimes A \to A \otimes A\,, \quad a \otimes c \mapsto a_{(0)} c a_{(1)}{}^{\langle 1 \rangle} \otimes a_{(1)}{}^{\langle 2 \rangle} \tag{4.6}$$

是一个扭曲映射。

证明。 为证明相应的乘积m^{ψ_ℓ} 是结合的，我们证明条件 (2.2) 成立。对于每个 a, c, a', $c' \in A$，我们计算 (2.2) 的左边

$$(\mathrm{id} \otimes m) \circ (\psi_\ell \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \psi_\ell)(a \otimes c \otimes a' \otimes c')$$

$$= (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\psi_\ell \otimes \mathrm{id})(a \otimes ca'_{(0)}c'a'_{(1)}{}^{<1>} \otimes a'_{(1)}{}^{<2>})$$
$$= a_{(0)}ca'_{(0)}c'a'_{(1)}{}^{<1>}a_{(1)}{}^{<1>} \otimes a_{(1)}{}^{<2>}a'_{(1)}{}^{<2>}.$$

我们计算 (2.2) 的右端

$$\begin{aligned}(m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi_\ell) \circ (\mathrm{id} \otimes m \otimes \mathrm{id}) \circ (\psi_\ell \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(a \otimes c \otimes a' \otimes c') \\ = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \psi_\ell)(a_{(0)}ca_{(1)}{}^{<1>} \otimes a_{(1)}{}^{<2>}a' \otimes c') \\ = a_{(0)}ca_{(1)}{}^{<1>}\left(a_{(1)}{}^{<2>}a'\right)_{(0)}c'\left((a_{(1)}{}^{<2>}a')_{(1)}\right)^{<1>} \otimes \left((a_{(1)}{}^{<2>}a')_{(1)}\right)^{<2>} \\ = a_{(0)}ca_{(1)}{}^{<1>}(a_{(1)}{}^{<2>})_{(0)}a'_{(0)}c'\left((a_{(1)}{}^{<2>})_{(1)}a'_{(1)}\right)^{<1>} \otimes \left((a_{(1)}{}^{<2>})_{(1)}a'_{(1)}\right)^{<2>}\end{aligned}$$

是一个 δ 代数映射，且

$$= a_{(0)}ca'_{(0)}c'(a_{(1)}a'_{(1)})^{<1>} \otimes (a_{(1)}a'_{(1)})^{<2>}$$

对所有 $h \in H$，都有 $h^{<1>}(h^{<2>})_{(0)} \otimes (h^{<2>})_{(1)} = 1 \otimes h$（这是因为平移映射是 χ的右逆）。随后，等式左边和右边的表达式因映射 ℓ满足性质 (4.5) 而相同。■

扭曲映射 ψ_ℓ 显然是右正规映射：对每个 $c \in A$，都有 $\psi_\ell(1_A \otimes c) = c \otimes 1$；但一般而言，它并非左正规。事实上，

$$\psi_\ell(a \otimes 1_A) = a_{(0)}\ell(a_{(1)}) = s(a) \in B \otimes A,$$

其中 $s\colon\ A \to B \otimes A$ 是与强联络 ℓ 相关的乘法映射 $B \otimes A \to A$ 的（幺左 B-模且右 H-余模）分裂映射（见 [5, 引理 2.3]）。结合代数 $A \otimes^{\psi_\ell} A$ 的乘法为

$$(a \otimes c) \cdot_{\psi_\ell} (a' \otimes c') = aa'_{(0)}c(a'_{(1)})^{<1>} \otimes (a'_{(1)})^{<2>}c'$$

因此不一定有单位元。分配律 (2.7) 是由 ψ为右正规扭曲映射这一事实所蕴含的。尽管一般而言并非左正规，ψ 也满足 (2.6)：

$$\begin{aligned}\psi_\ell(aa' \otimes c) = a_{(0)}a'_{(0)}c\,(a_{(1)}a'_{(1)})^{<1>} \otimes (a_{(1)}a'_{(1)})^{<2>} = a_{(0)}a'_{(0)}c\,a'_{(1)}{}^{<1>}a_{(1)}{}^{<1>} \otimes a_{(1)}{}^{<2>}a'_{(1)}{}^{<2>} \\ = \psi_\ell\left(a \otimes a'_{(0)}ca'_{(1)}{}^{<1>}\right)a'_{(1)}{}^{<2>} = \psi_\ell\left(a \otimes c^{[\psi_\ell]}\right)a'^{[\psi_\ell]}.\end{aligned}$$

尽管强联络的性质 (4.5) 通常并不成立，但也有一些例子仍可利用公式 (4.5) 构造出 ℓ（例如 §4.3.1 中描述的 [16], Hopf 丛）。对于有限生成代数，一旦在 H的生成元上定义了 ℓ，就可以检验该公式能否一致地扩展到 ℓ H的所有元素。若代数 H 和 A是交换的，该公式与代数的交换性相容（不过一般而言，无法断定它是否与 H中的任何其他关系相容）。如附录 B 所示，性质 (4.5) 在 2-余循环变形下保持不变。

按照 (3.1) 的定义，沿代数嵌入 $\mathsf{F} = i\colon B \to A$ 的 A 的协变 i-扩张，是由平衡张量积 $A \otimes_B A$ 给出的 A-双模。$A \otimes^{\psi_\ell} A$ 的扭曲乘法 m^{ψ_ℓ} 可下降到该双模上。

命题 4.6。设 $B \subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张。通过 (4.6) 中的扭曲映射定义的扭曲张量代数 $A \otimes^{\psi_\ell} A$ 的乘法m^{ψ_ℓ}，下降为沿代数包含映射 $\mathsf{F} = i : B \to A$ 的协变 i-扩张 $A \otimes_B A$ 上良定义的代数结构。所得代数 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$ 是幺代数。

证明。根据命题 3.1，只需证明条件 (3.2) 成立；也就是说，扭曲映射 ψ_ℓ 与投影 π_B：$A \otimes A \to A \overline{\otimes}_B A$ 的复合映射 $\psi_\ell = \pi_B \circ \psi_\ell$ 是 B-线性的，即 $\psi_\ell(ba \otimes a'b') = b\psi_\ell(a \otimes a')b'$。如上所述，记 $\overline{\tau}(h) = h^{\langle 1\rangle} \otimes_B \overline{h^{\langle 2\rangle}}$ 为元素 $h \in H$ 在平移映射下的像，则有 $\psi_\ell = \psi_\tau$ 其中

$$\psi_\tau : A \otimes A \to A \otimes_B A, \quad a \otimes c \mapsto a_{(0)} c a_{(1)}{}^{\langle 1\rangle} \otimes_B a_{(1)}{}^{\langle 2\rangle}. \tag{4.7}$$

映射 ψ_τ 是左 B-线性的，因为 $B = A^{coH}$。右 B-线性由平移映射的性质得出：$b\,\tau(h) = \tau(h)b$，对任意 $b \in B$, $h \in H$ 均成立（这是由映射 χ的单射性推得的）。

所得代数 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$是含幺的。$\psi_\ell$的右正规性给出 $\psi_\tau(1 \otimes c) = c \otimes_B 1$，对每个 $c \in A$均成立。另一方面，$\psi_\tau(a \otimes 1) = a_{(0)} a_{(1)}{}^{\langle 1\rangle} \otimes_B a_{(1)}{}^{\langle 2\rangle} = \chi^{-1}\big(\chi(1 \otimes_B a)\big) = 1 \otimes_B a$，对每个 $a \in A$均成立。因此，$1_C \otimes_B 1_A$ 是 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$的单位元。■

这使我们能够沿着代数嵌入 $\mathsf{F} = i : B \to A$ 构造 $A \otimes_B^{\psi_\ell} A$ 的扭曲推前代数，并赋予其如下乘法

$$(a \otimes_B c) \cdot^{\psi_\ell} (a' \otimes_B c') = a a'_{(0)} c (a'_{(1)})^{\langle 1\rangle} \otimes_B (a'_{(1)})^{\langle 2\rangle} c' = a a'_{(0)} c\, \tau(a'_{(1)}) c'. \tag{4.8}$$

鉴于上述乘法表达式，下文将扭曲推前代数记为 $A \otimes_B^{\psi_\tau} A$，并用 m^{ψ_τ} 表示其乘法。

注 4.7. 对于不满足 (4.5) 的强联络 ℓ，乘法 m^{ψ_ℓ}可能不满足结合律。尽管如此，平衡张量积上由 (4.8) 诱导的乘法 m^{ψ_τ} 仍满足结合律。其结合律源自平移映射所满足的类似性质 $\tau(hk) = k^{\langle 1\rangle} h^{\langle 1\rangle} \otimes_B h^{\langle 2\rangle} k^{\langle 2\rangle}$；对于任意霍普夫代数 H，该平移映射确实对所有$h, k \in H$ 都满足这一性质。□

注 4.8. 扭曲推前代数 $A \otimes_B^{\psi_\tau} A$ 与平衡张量积 $A \otimes_B A$ 重合，后者的代数结构由张量积代数 $A \otimes H$ 的代数结构经由典范映射 $\chi\colon A \otimes_B A \to A \otimes H$ 诱导而得（因此该映射是代数映射）：

$$m_{\psi_\tau} = \chi^{-1} \circ m_{A \otimes H} \circ (\chi \otimes \chi).$$

事实上，映射 ψ_τ 满足 $\psi_\tau(ab \otimes c) = \psi_\tau(a \otimes bc)$，对所有 $a \in A$、$b \in B$ 和 $c \in C$均成立，因此诱导出一个定义在 $A \otimes_B A$上的良定义映射

$$\sigma : A \otimes_B A \to A \otimes_B A, \quad a \otimes_B c \mapsto a_{(0)} c (a_{(1)})^{\langle 1\rangle} \otimes_B (a_{(1)})^{\langle 2\rangle}$$

这就是 Durdević编织 [11, 式（2.2）]。它可逆，其逆映射为

$$\sigma^{-1}: A\otimes_B A\to A\otimes_B A,\quad a\otimes c\mapsto \big(S^{-1}(c_{(1)})\big)^{<1>}\otimes\big(S^{-1}(c_{(1)})\big)^{<2>}ac_{(0)}.$$

σ 与 A的乘法 m_A 之间的相容性与式（2.3）中的相容性类似，见 [11, 命题 2.1]。□

映射 ψ_ℓ 是一个 H-余模态射，因为强联络 ℓ 也是如此，见式（4.2）（同样的论证也适用于映射 ψ_τ 和 τ）。根据定理 3.8 的一般结果，扭曲推前代数 $A\otimes_B^{\psi_\tau}A$ 是一个 H -余模代数，其对应的余不变元子代数为 A ，且包含映射 $A\subset A\otimes_B^{\psi_\tau}A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张。

引理 4.9。 $B\subset A$ 沿代数嵌入i: $B\to A$ 的扭曲推前代数 $A\otimes_B^{\psi_\tau}A$ 是一个平凡的 H-伽罗瓦扩张。

证明。 该扩张是裂分的。裂化映射，即一个卷积可逆的 H-余模代数映射 $\gamma: H\to A\otimes_B^{\psi_\tau}A$, 就是 H-伽罗瓦扩张 $B\subset A$的平移映射。它是一个代数映射，因为对于乘法 m^{ψ_τ}， χ 是一个代数映射；其逆映射为$\gamma:=\gamma\circ S$，其中 S 是 H的反粒子。因此，该扩张是平凡的。■

注 4.10。 在公式 (4.7) 中，元素 c 可以取自任何包含 A 且使 c 与 A 中元素的乘积有定义的代数。若 C 是任意一个含有子代数 A 的代数，并且如上所述， $B\subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张，则映射

$$\psi_\tau: A\otimes C\to C\otimes_B A,\quad a\otimes c\mapsto a_{(0)}c\,\tau(a_{(1)})$$

在代数嵌入 $i: B\to C$ 下，定义了 A 沿其协变 i-扩张 $C\otimes_B A$ 上的含幺结合乘积。所得的 H-伽罗瓦扩张 $C\subset C\otimes_B A$ 也是平凡的，并且与平凡的 H-伽罗瓦扩张 $A\subset A\otimes_B^{\psi_\tau}A$ 沿映射 i: $B\to C$ 的推前相同。□

4.3. 推前到商代数。 本节中，我们考虑 Hopf–Galois 扩张 $B\subset A$ 沿（满射）投影映射 $\mathrm{F}=\pi:B\to B/I$ 的推前，其中该映射从 B 映到其关于双边代数理想 I 的商。这提供了将主丛限制到子空间这一操作的代数类比。

目前，设 A 为一个代数， B 为 A 的子代数，且 $C:=B/I$ 为 B 关于双边代数理想 $I\subset B$ 的商代数，使得 $A\cdot I\subseteq I\cdot A$。设 $C\otimes_B A$ 为沿投影 $\pi: B\to B/I$的协变扩张。尽管可能存在不同的扭曲映射$\psi: A\otimes C\to C\otimes A$，但当我们要求其满足 (3.4) 以及 B-线性条件 (3.2) 时，它们在 $C\otimes_B A$ 上的投影 $\psi=\pi_B\circ\psi$ 变得唯一；这一结果并不依赖于 ψ 是扭曲映射这一事实，而是对任意线性映射 $\psi: A\otimes C\to C\otimes A$均成立。

命题 4.11。 设 $C = B/I$ 和 $\psi\colon\ A \otimes C \to C \otimes A$ 为一个线性映射。假设理想 I 满足

$$A \cdot I \subseteq I \cdot A\,. \tag{4.9}$$

为满足 (3.2) 和 (3.4)，映射 ψ 必须定义为

$$\overline{\psi}(a \otimes [b]) = 1_C \otimes_B a\,b, \qquad \forall a \in A,\, [b] \in C.$$

此外，映射 ψ 在 $\overline{C} \otimes_B A$上定义了一个结合含幺代数乘法。

证明。 右侧 B-线性以及 (3.4) 中的第二个条件唯一确定了映射 ψ ，其定义为

$$\overline{\psi}(a \otimes [b]) = \overline{\psi}(a \otimes 1)b = 1_C \otimes_B a\,b, \qquad \forall a \in A,\, [b] \in C.$$

条件 (4.9) 确保该映射定义良好：若 $b,\ b' \in B$ 满足 $\pi(b) = \pi(b')$，即 $b - b' \in I$，则 $1_C \otimes a\,b = 1_C \otimes a\,b'$。因此， ψ 与元素 $[b]$的代表元无关。映射 ψ自动满足左侧 B-线性和 (3.4) 中的第一个条件，因为对每个 $b \in B$，都有 $1_C \otimes_B b = [b] \otimes_B 1_A$ 。

由 ψ定义在 $C \otimes_B A$ 上的代数乘法，

$$\big([b] \otimes_B a\big) \cdot^{\overline{\psi}} \big([b'] \otimes_B a'\big) = [b]\overline{\psi}(a \otimes [b'])a' = 1_C \otimes_B bab'a' \tag{4.10}$$

是结合的。映射 ψ 满足类似于分配律 (2.6) 和 (2.7) 的性质：它与代数乘法 m_A 的相容性显而易见，而它与乘法 m_C 的相容性则由 π 是代数映射可得。■

现在我们专门考虑 $B \subset A$ 是一个 H-伽罗瓦扩张的情形，此时映射 ψ 也是一个 H-余模态射，

$$[b]^{[\psi]} \otimes_B (a^{[\psi]})_{(0)} \otimes (a^{[\psi]})_{(1)} = 1_C \otimes_B a_{(0)}b \otimes a_{(1)} = [b]^{[\psi]} \otimes_B (a_{(0)})^{[\psi]} \otimes a_{(1)}\,, \quad \forall\, a \in A,\, [b] \in C,$$

于是，根据定理 3.8，我们得到以下结果。

推论 4.12。 设 $B \subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张，且 I 是 B 的一个双边代数理想 I ，满足 (4.9)。则 $B \subset A$ 沿 $\pi\colon\ B \to B/I$ 的（唯一）扭曲推前代数$B/I \otimes_B^{\psi} A$ 是 B/I的忠实平坦 H-伽罗瓦扩张。

最后，我们给出理想 I 有限生成时代数 $C \otimes_B^{\psi} A$ 的一个刻画。

引理 4.13。 令 $I = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$ 为由元素$y_1, \ldots, y_m \in B$, $m \in \mathbb{N}$生成的 B 中的双边理想。令 I_A 为由元素$y_1, \ldots, y_m$生成的 A 中的双边理想。那么， $C \otimes_B^{\psi} A$作为一个 H-余模代数，同构于商代数 A/I_A。

证明。 定义映射

$$g : C \otimes_B^{\psi} A \to A/I_A\,, \quad [b] \otimes_B a = 1_C \otimes_B ba \mapsto ba\,. \tag{4.11}$$

它是 由于 $[b] = [b'] \iff ba - b'a \in I_A$，它是一个代数态射 :

$$g\big((1_C \otimes_B b^a) \cdot^{\psi} (1_C \otimes_B b'a')\big) = g\big(1_C \otimes_B bab'a'\big) = bab'a' = g(1_C \otimes_B ba)g(1_C \otimes_B b'a').$$

它可逆，逆映射为 $g^{-1}\colon\ A/I_A \to C \otimes_B^{\psi} A$, $a \mapsto 1_C \otimes_B a$，其定义良好，因为$1_C \otimes_B y_j = 0$, 对 $j = 1, \ldots, m$。由于理想 $\{y_j\}$ 的生成元属于余不变元子代数 B，因此 (4.11) 中的映射 g 也是一个 H-余模态射。■

4.3.1. 将 *(2)*-霍普夫丛推前至商代数。考虑在 [16] 中引入的$\mathcal{O}(SU(2))$–伽罗瓦扩张 $\mathcal{O}(S^4_\theta) \subset \mathcal{O}(S^7_\theta)$。

$*$代数 $\mathcal{O}(S^4_\theta)$ 由一个中心实元素 x 以及元素 $\alpha,\ \beta,\ \alpha^*,\ \beta^*$生成，它们满足以下交换关系

$$\alpha\beta = \lambda\beta\alpha\,, \quad \alpha^*\beta^* = \lambda\beta^*\alpha^*\,, \quad \beta^*\alpha = \lambda\alpha\beta^*\,, \quad \beta\alpha^* = \lambda\alpha^*\beta, \qquad \lambda := e^{2\pi i\theta},$$

以及球面关系 $\alpha^*\alpha + \beta^*\beta + x^2 = 1$，其中 θ 为实参数。 $*$代数 $\mathcal{O}(S^7_\theta)$ 由元素 $\{z_j, z_j^*;$ $j = 1$、.....、$4\}$ 生成，它们满足以下关系

$$z_j z_k = \lambda_{jk}\, z_k z_j\,, \qquad z_j^* z_k = \lambda_{kj}\, z_k z_j^*\,, \qquad z_j^* z_k^* = \lambda_{jk}\, z_k^* z_j^*\,,$$

以及球面关系 $\sum z_j^* z_j = 1$。变形矩阵 (λ_{jk}) 的选取使得群 $SU(2)$ 的坐标代数 $\mathcal{O}(SU(2))$ 余作用于 $\mathcal{O}(S^7_\theta)$，其余不变量子代数为 $\mathcal{O}(S^4_\theta)$，即变形4-球面 S^4_θ 的坐标代数。该矩阵仅依赖于一个变形参数 $\mu = e^{\pi i\theta}$，且

$$\lambda_{12} = \lambda_{34} = 1\,, \quad \lambda_{13} = \lambda_{24} = \bar{\mu}\,, \quad \lambda_{14} = \lambda_{23} = \mu\,, \quad \lambda_{jk} = \bar{\lambda}_{kj}.$$

$\mathcal{O}(SU(2))$ 在 $\mathcal{O}(S^7_\theta)$ 上的右余作用 δ定义在代数生成元上如下

$$\delta : \mathsf{u} \ \longmapsto\ \mathsf{u} \dot{\otimes} \mathsf{w}\,, \quad \mathsf{u} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ -z_2^* & z_1^* & -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix}^t, \quad \mathsf{w} = \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix},$$

其中 $w_1,\ w_2$ 表示 $SU(2)$ 的坐标函数（而 $\otimes$ 表示张量积与矩阵乘法的复合）。余作用扩展到整个 $\mathcal{O}(S^7_\theta)$，成为一个 $*$-代数态射。 $\mathcal{O}(S^7_\theta)$ 中的余不变元子代数由矩阵 $p := uu^*$ 的矩阵元生成，并通过下式与 $\mathcal{O}(S^4_\theta)$ 认同

$$\alpha = 2(z_1 z_3^* + z_2^* z_4)\,, \quad \beta = 2(-z_1^* z_4 + z_2 z_3^*)\,, \quad x = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* - z_3 z_3^* - z_4 z_4^*.$$

通过这一恒等对应， $\mathcal{O}(S^7_\theta)$的生成元与其子代数 $\mathcal{O}(S^4_\theta)$的生成元之间的交换关系为

$$\begin{aligned} &z_1\,\alpha = \mu\,\alpha\,z_1\,, && z_2\,\alpha = \bar{\mu}\,\alpha\,z_2\,, && z_3\,\alpha = \mu\,\alpha\,z_3\,, && z_4\,\alpha = \bar{\mu}\,\alpha\,z_4\,, \\ &z_1\,\beta = \mu\,\beta\,z_1\,, && z_2\,\beta = \bar{\mu}\,\beta\,z_2\,, && z_3\,\beta = \bar{\mu}\,\beta\,z_3\,, && z_4\,\beta = \mu\,\beta\,z_4 \end{aligned} \tag{4.13}$$

z_j^* 与 $\mu \leftrightarrow \bar{\mu}$之间也有类似的关系，而 x 与所有 z_j、 z_j^*均可交换。

到商代数的推前 $\mathcal{O}(S_\theta^3)$。考虑将 $B = \mathcal{O}(S_\theta^4)$ 对由中心元 x 生成的双边代数理想取商所得的商代数：

$$C = \mathcal{O}(S_\theta^4)/\langle x \rangle \simeq \mathcal{O}(S_\theta^3).$$

该商代数可识别为 3 维 θ-球面 S_θ^3 的坐标代数，而 S_θ^4 是它的悬挂。

条件 (4.9) 成立，因为 x 在代数 $\mathcal{O}(S_\theta^7)$ 中是中心的；因此，我们可以沿着投影 π: $\mathcal{O}(S_\theta^4) \to \mathcal{O}(S_\theta^3)$ 构造推前代数 $\mathcal{O}(S_\theta^3) \otimes^{\psi}_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} \mathcal{O}(S_\theta^7)$。所得代数是 $\mathcal{O}(S_\theta^3)$ 的一个 $\mathcal{O}(SU(2))$-伽罗瓦扩张（由推论 4.12 可得）。

引理 4.14。 $\mathcal{O}(SU(2))$–伽罗瓦扩张 $\mathcal{O}(S_\theta^3) \subseteq \mathcal{O}(S_\theta^3) \otimes^{\psi}_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} \mathcal{O}(S_\theta^7)$ 是平凡的。

证明。 根据引理 4.13，存在同构 $\mathcal{O}(S_\theta^3) \otimes^{\psi}_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} \mathcal{O}(S_\theta^7) \simeq \mathcal{O}(S_\theta^7)/\langle x \rangle$，其为$\mathcal{O}(SU(2))$–余模代数。在 $\mathcal{O}(S_\theta^7)/\langle x \rangle$ 的商代数中，有 $z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = z_3 z_3^* + z_4 z_4^* = \frac{1}{2}$，由 z_1, z_2 生成的 $*$-子代数是交换的，并且同构于 $\mathcal{O}(SU(2))$。我们定义一个映射 γ: $\mathcal{O}(SU(2)) \to \mathcal{O}(S_\theta^7)/\langle x \rangle$，规定其在生成元上的作用为

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}$$

并将其延拓为（交换的）代数的态射。映射 γ 是一个 H-余模态射（参见 (4.12)），且卷积可逆，其逆映射为 $\mathsf{w} \mapsto \sqrt{2} \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix}$。映射 γ 为该扩张定义了一个裂化映射，从而证明该扩张是平凡的。■

到商代数的推前 $\mathcal{O}(S^2)$。考虑将 $\mathcal{O}(S_\theta^4)$ 对由 α, α^*生成的双边代数理想 I 取商：

$$C = \mathcal{O}(S_\theta^4)/\langle \alpha, \alpha^* \rangle \simeq \mathcal{O}(S^2).$$

所得的商代数是 2-球面的坐标交换代数S^2。集合 $\{Z_{m_j n_j} := \prod_{j=1}^4 z_j^{m_j} (z_j^*)^{n_j},\ m_j, n_j \in \mathbb{N},\ m_4 n_4 = 0\}$ 是$\mathcal{O}(S_\theta^7)$的向量空间基。由 (4.13) 中的交换关系可知，对于基中的每个元素，$\alpha Z_{m_j n_j}$ 与 $\mathbb{Z}_{m_j n_j} \alpha$成比例；对于 α^*同样如此。因此，条件 (4.9) 成立，$\mathcal{O}(S_\theta^7) \cdot I \subseteq I \cdot \mathcal{O}(S_\theta^7)$，从而可以沿着投影 π: $\mathcal{O}(S_\theta^4) \to \mathcal{O}(S^2)$ 构造推前代数 $\mathcal{O}(S^2) \otimes^{\psi}_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} \mathcal{O}(S_\theta^7)$。其乘法如 (4.10) 所示，其中 ψ 为线性映射

$$\overline{\psi} : \mathcal{O}(S_\theta^7) \otimes \mathcal{O}(S^2) \to \mathcal{O}(S^2) \otimes_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} \mathcal{O}(S_\theta^7), \quad Z_{m_j n_j} \otimes [b] \mapsto 1 \otimes_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} Z_{m_j n_j}\, b\,.$$

现在，我们将 x, β, β^* 简记为商 $\mathcal{O}(S^2)$ 的代数生成元，其关系为$\beta^* \beta + x^2 = 1$； $\mathcal{O}(S^2)$ 的向量空间基为 $\{C_{rst} = x^r \beta^s (\beta^*)^t,\ r, s, t \in \mathbb{N},\ st = 0\}$。于是

$$\overline{\psi}\big(Z_{m_j n_j} \otimes C_{rst}\big) = 1 \otimes_{\mathcal{O}(S_\theta^4)} Z_{m_j n_j} \big(x^r \beta^s (\beta^*)^t\big)$$

$$= 1 \otimes_{\mathcal{O}(S^4_\theta)} \mu^\eta \big(x^r \beta^s (\beta^*)^t\big) Z_{m_j n_j} = \mu^\eta\, C_{rst} \otimes_{\mathcal{O}(S^4_\theta)} Z_{m_j n_j}$$

其比例系数为 μ^η，指数由（4.13）计算得出。所得代数 $\mathcal{O}(S^2)^{\otimes^\psi_{\mathcal{O}(S^4_\theta)}}\mathcal{O}(S^7_\theta)$ 是 $\mathcal{O}(S^2_\theta)$ 的一个 $\mathcal{O}(SU(2))$–伽罗瓦扩张。根据引理 4.13，存在 $\mathcal{O}(SU(2))$–余模代数的同构 $\mathcal{O}(S^2)^{\otimes^\psi_{\mathcal{O}(S^4_\theta)}}\mathcal{O}(S^7_\theta) \simeq \mathcal{O}(S^7_\theta)/\langle \alpha, \alpha^* \rangle$。

5. 比较 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚

本节考察通过推前构造得到的 Hopf–Galois 扩张的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚，并将其与原 Hopf–Galois 扩张的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚进行比较。

5.1. 双代数胚。下面回顾环、余环和双代数胚的一些定义及基本结果；更多详情请参见 [7]。

设 B 是一个代数。B-环，或称为 B上的代数，是一个二元组（L，u），其中 L 是一个（在 k 上的）代数，且 $u:\ B \to L$ 是一个代数态射，参见例如 [7, §31.1]。于是 L 是一个 B 双模，满足 $b \cdot x \cdot b' = u(b)xu(b')$，其中 b、$b' \in B$ 和 $x \in L$。对于一个代数 C，B-环（L，u）与 C-环（M，v）之间的态射是一个二元组（F γ），其中 $\mathsf{F}:\ B \to C$ 且 $\gamma:\ L \to M$是代数态射，并满足 $\gamma \circ u = v \circ \mathsf{F}$。给定代数态射 $\mathsf{F}:\ B \to C$，任意$\sim$ $\sim C$-环（M，v）都定义了一个 B-环（M，$\tilde{v}$），其中 $M = M$，且代数映射 $\tilde{v} := v \circ \mathsf{F}:\ B \to M$。

例 5.1. 我们关注包络代数上的代数，例如参见 [7, §31.2]。一个带有代数映射 $u:\ B \otimes B^{op} \to L$ 的代数 L 是一个 $(B \otimes B^{op})$-环，当且仅当存在代数映射 $\mathsf{s}:\ B \to L$ 和 $\mathsf{t}:\ B^{op} \to L$，使得对于所有 $b, b' \in B$，均有 $\mathsf{s}(b)\mathsf{t}(b') = \mathsf{t}(b')\mathsf{s}(b)$。事实上，给定一个 $(B \otimes B^{op})$-环 (L, u)，其限制映射

$$\mathsf{s} := u \circ (\,\cdot \otimes_B 1_B) : B \to L \quad \text{and} \quad \mathsf{t} := u \circ (1_B \otimes_B \,\cdot\,) : B^{op} \to L$$

是具有所需性质的代数映射。反过来，给定 $(L, \mathsf{s}, \mathsf{t})$，可定义代数映射 $u:\ B \otimes B^{op} \to L$，将 $b \otimes b' \mapsto \mathsf{s}(b)\mathsf{t}(b')$ 映射到相应元素。映射 s 和 t 分别称为 $(B \otimes B^{op})$-环 L的源映射和目标映射。

给定一个代数态射 $\mathsf{F}:\ B \to C$，任意 $C \otimes C^{op}$-环 $(M,\ \mathsf{s},\ \mathsf{t})$ 都定义了一个 $B \otimes B^{op}$-环 $\sim$ $\sim(M,\ \tilde{\mathsf{s}}\ \tilde{\mathsf{t}})$，其 $M = M$以及源映射和靶映射为 $\tilde{\mathsf{s}} := \mathsf{s} \circ \mathsf{F}$ 和 $\tilde{\mathsf{t}} := \mathsf{t} \circ \mathsf{F}$。■

对偶地，参见例如 [7, §17.1], 给定 B 一个代数，B-余代数是一个三元组 $(\underline{L},\ \underline{\Delta},\ \underline{\varepsilon})$，其中 $\underline{L}$ 是一个B-双模，而 $\underline{\Delta}:\ \underline{L} \to \underline{L} \otimes_B \underline{L}$ 和 $\underline{\varepsilon}:\ \underline{L} \to B$ 是 B-双模态射，满足余结合性和余单位条件

$$(\underline{\Delta} \otimes_B \mathrm{id}_{\underline{L}}) \circ \underline{\Delta} = (\mathrm{id}_{\underline{L}} \otimes_B \underline{\Delta}) \circ \underline{\Delta}, \quad (\underline{\varepsilon} \otimes_B \mathrm{id}_{\underline{L}}) \circ \underline{\Delta} = \mathrm{id}_{\underline{L}} = (\mathrm{id}_{\underline{L}} \otimes_B \underline{\varepsilon}) \circ \underline{\Delta}.$$

B-余代数 $\underline{L}$ 与 C-余代数 $\underline{M}$ 之间的态射是一对 (γ, F)，其中 $\mathsf{F}:\ B \to C$ 是代数态射（也用于赋予 C 一个 B-双模结构），且 $\gamma : \underline{L} \to \underline{M}$ 是一个 B-双模态射，使得

$$\xi \circ (\gamma \otimes_B \gamma) \circ \underline{\Delta}_L = \underline{\Delta}_M \circ \gamma\,, \qquad \underline{\varepsilon}_M \circ \gamma = \mathsf{F} \circ \underline{\varepsilon}_L \tag{5.1}$$

其中 $\xi:\ M\otimes_B M\to M\otimes_C M$ 是由映射 F 诱导的 B-双模的典范态射，参见 [7, §24.1]。我们用 $\Delta(x)=x_{(1)}\otimes_B x_{(2)}$ 表示任意 $x\in L$ 的余乘法。

给定一个代数态射 $\mathsf{F}:\ B\to C$，对于任意 B-余环 $(L,\ \Delta,\ \varepsilon)$，都可以构造一个 C-余环 $(L,\ \Delta,\ \widetilde{\varepsilon})$，即 L, [7, §17.2] 的基环扩张。它由以下 C-双模组成

$$\widetilde{L}:=C\otimes_B L\otimes_B C \tag{5.2}$$

其余乘法为

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Delta}:C\otimes_B L\otimes_B C\to C\otimes_B L\otimes_B C\otimes_C C\otimes_B L\otimes_B C\simeq C\otimes_B L\otimes_B C\otimes_B L\otimes_B C\,,\\&\quad c\otimes_B x\otimes_B c'\ \mapsto (c\otimes_B x_{(1)})\otimes_B 1_C\otimes_B (x_{(2)}\otimes_B c')\end{aligned} \tag{5.3}$$

其余单位为

$$\widetilde{\varepsilon}:C\otimes_B L\otimes_B C\to C\,,\quad c\otimes_B x\otimes_B c'\mapsto c\cdot\varepsilon(x)\cdot c'=c\,\mathsf{F}\left(\varepsilon(x)\right)c'. \tag{5.4}$$

那么，B-余环 L 与 C-余环 M 之间的态射$\widetilde{}$等价于由以下数据构成：代数映射 $\mathsf{F}:\ B\to C$，以及 C-余环的态射 $\widetilde{\gamma}:\ L\to M$。

B-双代数胚 $(L,\ \mathsf{s},\ \mathsf{t},\ \Delta,\ \varepsilon)$ 是一个 $(B\otimes B^{op})$-环 $(L,\ \mathsf{s},\ \mathsf{t})$，也是一个 B-余环 $(L,\ \Delta,\ \varepsilon)$，且这些结构之间满足相容性：

(i) B-余环 L 的 B-双模结构由源映射和目标映射给出：$b\cdot x=\mathsf{s}(b)x,\quad x\cdot b=\mathsf{t}(b)x$，对所有 $b\in B, x\in L$ 均成立；

(ii) $Im(\Delta)\subseteq L\times_B L:=\left\{\sum_j x_j\otimes_B y_j\mid \sum_j x_j\mathsf{t}(b)\otimes_B y_j=\sum_j x_j\otimes_B y_j\mathsf{s}(b),\ \forall\, b\in B\right\}$ and the corestriction of $\Delta:L\to L\times_B L$ is an algebra map for $L\times_B L$ with componentwise multiplication;

(iii) 余单位 $\varepsilon:\ L\to B$ 是保单位映射，$\varepsilon(1_L)=1_B$，并且对所有 $x,\ y\in L$，满足 $\varepsilon(x\,\mathsf{s}(\varepsilon(y)))=\varepsilon(xy)=\varepsilon(x\,\mathsf{t}(\varepsilon(y)))$。

B-双代数胚 L 与 C-双代数胚 M 之间的态射，是 B-余代数 L 与 C-余代数 M 之间的态射 $(\gamma,\ \mathsf{F})$，且 $\gamma:L\to\mathsf{M}$ 也是代数映射。

例 5.2（*Ehresmann–Schauenburg* 双代数胚）。设 $B\subseteq A$ 是忠实平坦的H-伽罗瓦扩张。记 τ 为平移映射。那么，B-双模

$$\mathcal{L}:=\{a\otimes a'\in A\otimes A\,|\,a_{(0)}\otimes\tau(a_{(1)})a'=(a\otimes a')\otimes_B 1_A\}$$

是一个双代数胚，称为 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚（参见 [7, §34.14]）。它是一个带有余乘法和余单位的B-余代数

$$\Delta(a\otimes a'):=a_{(0)}\otimes\tau(a_{(1)})\otimes a'=(a_{(0)}\otimes {a_{(1)}}^{<1>})\otimes_B({a_{(1)}}^{<2>}\otimes a'),\qquad \varepsilon(a\otimes a'):=aa', \tag{5.5}$$

对所有 $a\otimes a'\in\mathcal{L}$，以及一个带有代数乘法的 $B\otimes B^{op}$-环

$$(a\otimes a')\cdot(d\otimes d'):=ad\otimes d'a',\quad \forall a\otimes a', d\otimes d'\in\mathcal{L},$$

因此， $\mathcal{L}$ 是 $A \otimes A^{op}$的子代数。源映射和目标映射分别为 $\mathsf{s}(b) = b \otimes 1_A$ 和 $\mathsf{t}(b) = 1_A \otimes b$。 B-双模 $\mathcal{L}$ 与集合 $(A \otimes A)^{coH}$ 相同，该集合由 $A \otimes A$中关于对角 H-余作用的余不变量元素构成，

$$\mathcal{L} \simeq (A \otimes A)^{coH} = \{a \otimes a' \in A \otimes A \,|\, a_{(0)} \otimes a'_{(0)} \otimes a_{(1)}a'_{(1)} = a \otimes a' \otimes 1_H\}. \tag{5.6}$$

这也意味着 $aa' \in B$。 ■

5.2. **推前的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚**。 设 $B \subseteq A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张，且 $\mathcal{L}$ 是其关联的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚。设 $F\colon B \to C$ 是一个代数态射。设 $\psi\colon A \otimes C \to C \otimes A$ 是一个扭曲映射，它是右 $\underline{H}$-余模态射，并且 ψ 是一个 B-双模态射，满足（3.4）以及 $\psi(a \otimes cc') = c^{[\psi]}\psi(a^{[\psi]} \otimes c')$。

根据定理 3.8，由此得到的沿映射 $\mathsf{F}: B \to C$ 将 $B \subset A$ 推前所得的扭曲推前代数 $\Omega =: C \otimes_B^{\psi} A$ 是 C的一个忠实平坦 H-伽罗瓦扩张。其关联的 Ehresmann–Schauenburg 双代数胚 $\mathcal{M}$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \{x \otimes x' \in \Omega \otimes \Omega \,|\, x_{(0)} \otimes \tau^{\psi}(x_{(1)}) \cdot^{\psi} x' = x \otimes x' \otimes_C (1_C \otimes_B 1_A)\} \\ &= \big\{(c \otimes_B a) \otimes (c' \otimes_B a') \in \Omega \otimes \Omega \,\big|\, \\ &(c \otimes_B a_{(0)}) \otimes (1_C \otimes_B a_{(1)}{}^{<1>}) \otimes_C (c'^{[\psi]} \otimes_B (a_{(1)}{}^{<2>})^{[\psi]}a') = (c \otimes_B a) \otimes (c' \otimes_B a') \otimes_C (1_C \otimes_B 1_A)\big\}.\end{aligned}$$

C-双模 结构由左乘法和右乘法给出：利用 (3.4)，对于 $c'' \in C$,

$$\begin{aligned}c'' \cdot \big(c \otimes_B a \otimes c' \otimes_B a'\big) &= c''c \otimes_B a \otimes c' \otimes_B a' \,, \\ \big(c \otimes_B a \otimes c' \otimes_B a'\big) \cdot c'' &= c \otimes_B a \otimes c'c''^{[\psi]} \otimes_B a'^{[\psi]}.\end{aligned}$$

作为一个 C-双模， $\mathcal{M}$ 与对角 H-余作用下的余不变量元素集 $(\Omega \otimes \Omega)^{coH}$ 一致（参见 (5.6)）。由 (5.5) 和 (3.7) 可知， $\mathcal{M}$ 具有余乘法

$$\underline{\Delta}_{\mathcal{M}}\big(c \otimes_B a \otimes c' \otimes_B a'\big) = \big(c \otimes_B a_{(0)} \otimes 1_C \otimes_B a_{(1)}{}^{<1>}\big) \otimes_C \big(1_C \otimes_B a_{(1)}{}^{<2>} \otimes c' \otimes_B a'\big). \tag{5.7}$$

对于余单位，我们首先注意到，由于 $(c \otimes_B a) \otimes (c' \otimes_B a') \in (\Omega \otimes \Omega)^{coH}$,

$$(c \otimes_B a_{(0)}) \otimes (c' \otimes_B a'_{(0)}) \otimes a_{(1)}a'_{(1)} = (c \otimes_B a) \otimes (c' \otimes_B a') \otimes 1_H,$$

并应用 $m^{\psi} \otimes \mathsf{id}_H$，我们得到

$$(cc'^{[\psi]} \otimes_B a_{(0)}{}^{[\psi]}a'_{(0)}) \otimes a_{(1)}a'_{(1)} = (cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a') \otimes 1_H.$$

利用 ψ 是一个 H-余模态射这一事实，前一个方程表明 $cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a'$ 属于 $C \otimes_B B$:

$$\begin{aligned}cc'^{[\psi]} \otimes_B \delta(a^{[\psi]}a') &= (cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}{}_{(0)}a'_{(0)}) \otimes a^{[\psi]}{}_{(1)}a'_{(1)} = (cc'^{[\psi]} \otimes_B a_{(0)}{}^{[\psi]}a'_{(0)}) \otimes a_{(1)}a'_{(1)} \\ &= (cc'^{[\psi]} \otimes_B a^{[\psi]}a') \otimes 1_H.\end{aligned}$$

由式 (5.5) 中余单位的表达式可得

$$\underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\big((c\otimes_B a)\otimes(c'\otimes_B a')\big)=cc'^{[\psi]}\otimes_B a^{[\psi]}a'=cc'^{[\psi]}\mathsf{F}\left(a^{[\psi]}a'\right)\otimes_B 1_A\in C\otimes_B 1_A\simeq C \tag{5.8}$$

代数态射 $u_A:\ A\to C\otimes_B^{\psi} A,\ a\mapsto 1_C\otimes_B a$ （见 (2.9)）在 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 之间诱导出一个余代数态射。

引理 5.3. 存在一个双群胚态射(γ,F)，连接 B-双代数胚 $\mathcal{L}$ 与 C-双代数胚 $\mathcal{M}$，其由代数映射$\mathsf{F}: B\to C$ 以及 B-双模映射给出

$$\gamma:\mathcal{L}\to\mathcal{M},\quad a\otimes a'\mapsto(1_C\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a'). \tag{5.9}$$

证明。 式 (5.9) 中的映射 γ 是一个 B-双模映射:

$$\begin{aligned}b(a\otimes a')b'=ba\otimes ab'\overset{\gamma}{\longmapsto}&(1_C\otimes_B ba)\otimes(1_C\otimes_B a'b')\\&=(\mathsf{F}(b)\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a'b')=b\big((1_C\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a')\big)b'.\end{aligned}$$

我们需要证明 (5.1) 成立。关于余单位的条件用到 (5.8) :

$$(\underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\circ\gamma)(a\otimes a')=\underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\big((1_C\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a')\big)=\mathsf{F}(aa')\otimes_B 1_C=\mathsf{F}\left(\underline{\varepsilon}_{\mathcal{L}}(a\otimes a')\right)\otimes_B 1_C.$$

对于余乘法，我们计算

$$\begin{aligned}\xi\circ(\gamma\otimes_B\gamma)\circ\underline{\Delta}_{\mathcal{L}}(a\otimes a')&=\gamma\left(a_{(0)}\otimes {a_{(1)}}^{<1>}\right)\otimes_C\gamma\left({a_{(1)}}^{<2>}\otimes a'\right)\\&=(1_C\otimes_B a_{(0)})\otimes(1_C\otimes_B {a_{(1)}}^{<1>})\otimes_C(1_C\otimes_B {a_{(1)}}^{<2>})\otimes(1_C\otimes_B a')\\&=\underline{\Delta}_{\mathcal{M}}\left((1_C\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a')\right)\\&=\underline{\Delta}_{\mathcal{M}}\left(\gamma(a\otimes a')\right),\end{aligned}$$

最后倒数第二个等式使用了 (5.7)。这表明 γ 在 (5.9) 中是一个余代数态射。它也是一个代数映射，因为 ψ 满足条件 (3.4)。因此， γ 是一个双群胚态射。■

给定代数映射 $\mathsf{F}:\ B\to C$，它可扩张为代数映射 $B\otimes B^{op}\to C\otimes C^{op}$。从带有源映射和靶映射的 $C\otimes C^{op}$-环 $\mathcal{M}$ 出发

$$\mathsf{s}:C\to\mathcal{M},\ c\mapsto(c\otimes_B 1_A)\otimes(1_C\otimes_B 1_A)\qquad \mathsf{t}:C^{op}\to\mathcal{M},\ c\mapsto(1_C\otimes_B 1_A)\otimes(c\otimes_B 1_A)$$

我们构造 $B\otimes B^{op}$-环 $\widetilde{\mathcal{M}}$。作为代数，它与 $\mathcal{M}$ 一致，但其源映射和靶映射为

$$\begin{aligned}&\mathsf{s}_{\widetilde{\mathcal{M}}}:B\to\widetilde{\mathcal{M}},\quad b\mapsto(\mathsf{F}(b)\otimes_B 1_A)\otimes(1_C\otimes_B 1_A)=(1_C\otimes_B b)\otimes(1_C\otimes_B 1_A)\\&\mathsf{t}_{\widetilde{\mathcal{M}}}:B^{op}\to\widetilde{\mathcal{M}},\quad b\mapsto(1_C\otimes_B 1_A)\otimes(\mathsf{F}(b)\otimes_B 1_A)=(1_C\otimes_B 1_A)\otimes(1_C\otimes_B b).\end{aligned}$$

引理 5.3 得出以下结果。

命题 5.4。代数映射 γ 在 (5.9) 中视为取值于 $\mathcal{M}$,

$$\gamma:\mathcal{L}\to\widetilde{\mathcal{M}},\quad (a\otimes a')\mapsto(1_C\otimes_B a)\otimes(1_C\otimes_B a')$$

是一个 $B\otimes B^{op}$-环同态，其中 $\mathsf{s}_{\widetilde{\mathcal{M}}}=\gamma\circ\mathsf{s}_{\mathcal{L}}$ 和 $\mathsf{t}_{\widetilde{\mathcal{M}}}=\gamma\circ\mathsf{t}_{\mathcal{L}}$。

接下来，我们分析 C-余环 $\mathcal{M}$与基环扩张

$\sim$ $\sim\mathcal{L}$之间的关系；后者由代数映射 $\mathsf{F}: B \to C$ 从 $\mathcal{L}$ 得到，见 (5.2)。 C-余环 $(\mathcal{L}, \Delta, \widetilde{\varepsilon})$ 是一个C-双模

$$\widetilde{\mathcal{L}} := C \otimes_B \mathcal{L} \otimes_B C \tag{5.10}$$
$$= \left\{ c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \in C \otimes_B A \otimes A \otimes_B C \mid a_{(0)} \otimes {a_{(1)}}^{<1>} \otimes_B {a_{(1)}}^{<2>} a' = a \otimes a' \otimes_B 1_A \right\}$$

其余乘法为（5.3），余单位为（5.4）：

$$\underline{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}: \ c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \ \mapsto \left(c \otimes_B a_{(0)} \otimes {a_{(1)}}^{<1>} \otimes_B 1_C\right) \otimes_C \left(1_C \otimes_B {a_{(1)}}^{<2>} \otimes a' \otimes_B c'\right) \tag{5.11}$$

$$\underline{\varepsilon}_{\tilde{\mathcal{L}}}: \ c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \mapsto c\,\mathsf{F}(aa')c' \tag{5.12}$$

（这里，$\mathsf{F}(aa')$是良定义的，因为 $aa' \in B$ 对于 $a \otimes a' \in \mathcal{L}$。）

命题 5.5. 假设扭曲映射 ψ 的投影 ψ 限制为一个良定义映射 $\psi: A \otimes_B C \to C \otimes_B A$, 也就是说，(3.3) 成立。那么存在一个 C-余代数态射

$$\widetilde{\gamma} = \mathrm{id}_{C\otimes_B A} \otimes \overline{\psi} : \widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{M}, \quad c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \mapsto c \otimes_B a \otimes {c'}^{[\psi]} \otimes_B {a'}^{[\psi]}.$$

若 ψ 可逆，则映射 $\widetilde{\gamma}$ 是一个同构。

$\sim$证明. 我们证明 $\widetilde{\gamma}$的取值属于 $\mathcal{M}$，也就是说，对所有 $c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \in \mathcal{L}$,

$$(c \otimes_B a_{(0)}) \otimes (1_C \otimes_B {a_{(1)}}^{<1>}) \otimes_C ({c'}^{[\psi][\psi]_2} \otimes_B ({a_{(1)}}^{<2>})^{[\psi]_2} {a'}^{[\psi]}) \tag{5.13}$$
$$= (c \otimes_B a) \otimes ({c'}^{[\psi]} \otimes_B {a'}^{[\psi]}) \otimes_C (1_C \otimes_B 1_A).$$

$\sim$ $\sim$若 $c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c' \in \mathcal{L}$，根据 L 的定义（5.10），有

$$c \otimes a_{(0)} \otimes 1_C \otimes {a_{(1)}}^{<1>} \otimes_B {a_{(1)}}^{<2>} a' \otimes c' = c \otimes a \otimes 1_C \otimes a' \otimes_B 1_A \otimes c'.$$

我们将 $\mathrm{id}_{C\otimes_B A} \otimes_B \psi$应用于上述方程，并注意到它将 $(C\otimes_B A)\otimes_B (A\otimes_B C)$ 映射为 $(C\otimes_B A)\otimes_C (C\otimes_B A)$（映射 $\mathrm{id}_{C\otimes_B A}\otimes\psi$ 只有在将其视为取值于商 $(C \otimes_B A) \otimes_C (C \otimes_B A)$ 时，才可限制为 $C\otimes_B A\otimes_B A\otimes_B C$ 上的良定义映射）：

$$(c \otimes_B a_{(0)}) \otimes (1_C \otimes_B {a_{(1)}}^{<1>}) \otimes_C ({c'}^{[\psi]} \otimes_B ({a_{(1)}}^{<2>} a')^{[\psi]}) = (c \otimes_B a) \otimes (1_C \otimes_B a') \otimes_C (c' \otimes_B 1_A)$$
$$= (c \otimes_B a) \otimes ({c'}^{[\psi]} \otimes_B {a'}^{[\psi]}) \otimes_C (1_C \otimes_B 1_A)$$

最后一个等式用到了 (3.5)。然后，利用性质$\psi(aa' \otimes c) = {c}^{[\psi][\psi]_2} \otimes_B a^{[\psi]_2} {a'}^{[\psi]}$，即可得到等式 (5.13)；该性质由假设在 ψ 上成立的类似性质 $\psi(a \otimes cc') = c^{[\psi]}\psi(a^{[\psi]} \otimes c')$ 推出（参见 §2.1 中方程 (2.8) 之后的讨论）。

接下来我们证明 $\underline{\Delta}_{\mathcal{M}} \circ \widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma} \otimes_C \gamma) \circ \underline{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}$ 以及 $\varepsilon_{\mathcal{M}} \circ \widetilde{\gamma} = \varepsilon_{\tilde{\mathcal{L}}}$。由式 (5.11) 中 $\Delta_{\tilde{\mathcal{L}}}$ 和式 (5.7) 中 $\Delta_{\mathcal{M}}$ 的表达式，利用对于 $a \in A$ 有 $\psi(a \otimes_B 1_C) = 1_C \otimes_B a$，我们计算得

$$(\widetilde{\gamma} \otimes_C \widetilde{\gamma})\big(\underline{\Delta}_{\tilde{\mathcal{L}}}(c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c')\big)$$
$$= \left(c \otimes_B a_{(0)} \otimes 1_C \otimes_B {a_{(1)}}^{<1>}\right) \otimes_C \left(1_C \otimes_B {a_{(1)}}^{<2>} \otimes {c'}^{[\psi]} \otimes_B {a'}^{[\psi]}\right)$$
$$= \underline{\Delta}_{\mathcal{M}}(c \otimes_B a \otimes {c'}^{[\psi]} \otimes_B {a'}^{[\psi]})$$

$$= \underline{\Delta}_{\mathcal{M}}\left(\widetilde{\gamma}(c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c')\right).$$

由式 (5.8) 中 $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ 的表达式，我们计算得

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\big(\widetilde{\gamma}(c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c')\big) &= \underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\big(c \otimes_B a \otimes c'^{[\psi]} \otimes_B a'^{[\psi]}\big) = cc'^{[\psi]^{[\psi]_2}}\mathsf{F}\big(a^{[\psi]_2}a'^{[\psi]}\big) \otimes_B 1_A \\ &= cc'^{[\psi]}\mathsf{F}\big((aa')^{[\psi]}\big) \otimes_B 1_A = c\,\mathsf{F}(aa')c' \otimes_B 1_A\end{aligned}$$

其中，倒数第二个等式用到了性质 $\psi(aa' \otimes c) = c^{[\psi]^{[\psi]_2}} \otimes_B a^{[\psi]_2}a'^{[\psi]}$对 a，$a' \in A$ 和 $c \in C$ 成立；最后一个等式则用到了 $\psi(b \otimes c) = \mathsf{F}(b)c \otimes_B 1_A$ 对 $\overline{c} \in C$ 和$b \in B$成立，特别是对 $b = aa' \in B$成立。于是，在识别 $C \otimes_B 1_A \simeq C$ 下，$\underline{\varepsilon}_{\mathcal{M}}\big(\widetilde{\gamma}(c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c')\big)$ 与 (5.12) 中的 $\underline{\varepsilon}_{\tilde{\mathcal{L}}}(c \otimes_B a \otimes a' \otimes_B c')$一致。

当 ψ 可逆时，$\widetilde{\gamma}$ 是一个同构。 ■

附录A. 关于模的扩张

给定两个环 B 和 $\widetilde{B}$，以及一个含幺环同态 $\mathsf{F}: B \to \widetilde{B}$，任意右（例如）$B$-模 $\mathcal{V}$ 都可通过如下定义成为右 B-模：$v \cdot b := v \cdot \mathsf{F}(b)$，其中 $b \in B$ 且 $v \in \mathcal{V}$。

特别地，B 本身也可视为右 B-模。于是，给定一个左 B-模$\mathcal{E}$，其协变 F-扩张是左 B-模

$$\mathcal{E}_{(\mathsf{F})} := \widetilde{B} \otimes_B \mathcal{E}$$

（见 [10, 第 II 章 §6]）。我们用 $b \otimes_B \xi$ 表示 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$中一个元素（的等价类）。如果 $\mathcal{E}$ 作为左 B-模是忠实平坦的，那么 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})} = B \otimes_B \mathcal{E}$ 作为左 B-模也是忠实平坦的（见 [4, 第 I 章命题 5 §3]）。

此外，由 [10, 第 I 章命题 6.1], 可知，如果 B模 $\mathcal{E}$ 是射影的，那么 B模$\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$ 也是射影的。最后，如果 $\mathcal{E}$ 是有限生成的，且具有生成集 $\{\xi_j\}$，那么 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$ 也是有限生成的，且具有生成集 $\{1_{\widetilde{B}} \otimes_B \xi_j\}$。因此，如果 $\mathcal{E}$ 既有限生成又是射影的，简言之是有限投射的，那么它的协变扩张也如此。

引理 A.1. </style}假设左模是有限投射的，且，其中是幂等元$\mathbf{M}_N(B)$，并且 $N \in \mathbb{N}$。那么，对于幂等元$\mathsf{F}(p) \in \mathrm{M}_N(B)$，有 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})} \simeq B^N\mathsf{F}(p)$。

证明。</style}映射 $\mathsf{F}: B \to \widetilde{B}$ 逐分量扩展到 B^N。我们定义映射 $\lambda: \widetilde{B} \otimes \widetilde{B}^N p \to \widetilde{B}^N$ $\mathsf{F}(p)$：令 $1_{\widetilde{B}} \otimes \xi \mapsto \mathsf{F}(\xi)\mathsf{F}(p)$，并要求它是左 B模映射。由于环映射 F 是乘法的，我们有

$$1_{\widetilde{B}} \otimes b\xi - \mathsf{F}(b) \otimes \xi \mapsto \mathsf{F}(b\xi)\mathsf{F}(p) - \mathsf{F}(b)\mathsf{F}(\xi)\mathsf{F}(p) = 0.$$

因此，该映射可下降为一个定义良好的 B-模映射 $\lambda: B \otimes_B \widetilde{B}^N p \to \widetilde{B}^N\mathsf{F}(p)$。

反过来，给定 $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_k)\in\widetilde{B}^N\mathsf{F}(p)$，且 $\sum_{k=1}^N\tilde{\xi}_k\mathsf{F}(p_{kj})=\tilde{\xi}_j$，我们将元素 $\lambda^{-1}(\tilde{\xi}):=\sum_{k=1}^N\tilde{\xi}_k\otimes_B p_{kj}\in\widetilde{B}\otimes_B B^Np$ 与之关联。我们有

$$\lambda(\sum_{k=1}^N\tilde{\xi}_k\otimes_B p_{kj})=\sum_{k=1}^N\tilde{\xi}_k\mathsf{F}(p_{kj})\mathsf{F}(p)=\tilde{\xi}\mathsf{F}(p)=\tilde{\xi}$$

并且对于 $\xi=(\xi_k)\in B^Np$，我们有

$$\lambda^{-1}(\mathsf{F}(\xi)\mathsf{F}(p))=\sum_{k,l=1}^N\mathsf{F}(\xi_l)\mathsf{F}(p_{lk})\otimes_B p_{kj}=\sum_{k,l=1}^N 1_{\widetilde{B}}\otimes_B\xi_l p_{lk}p_{kj}=1_{\widetilde{B}}\otimes_B\xi.$$

因此，$\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}=B\otimes_B\mathcal{E}\simeq B^N\mathsf{F}(p)$，如所述。 ■

在下文中，我们将 B 和 B 视为含幺 $*$-代数。设 $\mathcal{E}$ 是一个左 B-模，配备有一个取值于 B的内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_B$ 以及一个标准模架$\{\eta_j\}_{j=1,\ \ldots,\ N}$。也就是说（见 [19, 定义 7.1]），存在 $\mathcal{E}$中的有限个元素 $\{\eta_j\}$，使得对任意 $\xi\in\mathcal{E}$，都有重构公式

$$\xi=\sum_{j=1}^N\langle\xi,\eta_j\rangle_B\,\eta_j.$$

于是，B-模 $\mathcal{E}$是有限投射的，且 $\mathcal{E}\simeq B^Np$，其中 $p\in M_N(B)$ 是分量 $p_{jk}:=\langle\eta_j,\ \eta_k\rangle_B$ 的投影。反过来（见 [19, §7]），任意有限投射的 B-模 $\mathcal{E}$都有标准模架。若对于某个 $p\in M_N(B)$ 有 $\mathcal{E}\simeq B^Np$，则将 B^N上的内积 $\langle(b_j),\ (b'_j)\rangle_B=\sum b_j^*b'_j$限制到 $\mathcal{E}$上，得到 $\mathcal{E}$上的一个内积，并且 $\{\eta_j:=\sum_k e_kp_{kj}\}$是 $\{e_j\}$ 的标准模架，即自由模 B^N的自然基。

引理 A.2. 设 $\mathcal{E}$ 是一个左 B-模，配备了一个取值于 B的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$以及一个标准模架 $\{\eta_j\}_{j=1,\ldots,N}$。设 $\mathsf{F}:\ B\to B$ 是一个 $*$-代数映射。那么

$$\left\langle\tilde{b}\otimes\xi,\tilde{c}\otimes\eta\right\rangle_{\widetilde{B}}:=\tilde{b}\,\mathsf{F}\big(\langle\xi,\eta\rangle_B\big)\,\tilde{c}^*,\quad \xi,\eta\in\mathcal{E},\ \tilde{b},\tilde{c}\in\widetilde{B}\tag{A.1}$$

是 $\mathcal{E}\otimes B$ 上的一个内积，它可下降为扩张的$\sim B$-模 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$ 上的良定义内积，并且 $\{1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j\}_{j=1,\ldots,N}$ 是 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$的一个标准模架。

证明。 要证明 (A.1) 满足内积的性质，可利用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ 的类似性质以及 F 是一个 $*$-映射这一事实。我们证明 (A.1) 可下降为定义良好的映射 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$：对于 $\xi,\eta\in\mathcal{E}$, $b,\tilde{c}\in B$ 和 b, $c\in B$，有：

$$\begin{aligned}\left\langle\tilde{b}\otimes b\xi,\tilde{c}\otimes c\eta\right\rangle_{\widetilde{B}}&=\tilde{b}\,\mathsf{F}\big(\langle b\xi,c\eta\rangle_B\big)\tilde{c}^*=\tilde{b}\mathsf{F}\big(b\langle\xi,\eta\rangle_B c^*\big)\tilde{c}^*=\tilde{b}\,\mathsf{F}(b)\mathsf{F}\big(\langle\xi,\eta\rangle_B\big)\mathsf{F}(c^*)\tilde{c}^*\\&=\tilde{b}\,\mathsf{F}(b)\mathsf{F}\big(\langle\xi,\eta\rangle_B\big)(\tilde{c}\,\mathsf{F}(c))^*=\left\langle\tilde{b}\,\mathsf{F}(b)\otimes\xi,\tilde{c}\,\mathsf{F}(c)\otimes\eta\right\rangle_{\widetilde{B}}.\end{aligned}$$

~ ~对于每个
$b\otimes_B\xi\in B\otimes_B\mathcal{E}$,

$$\tilde{b}\otimes_B\xi=\sum_{j=1}^{N}\tilde{b}\otimes_B\langle\xi,\eta_j\rangle_B\,\eta_j=\sum_{j=1}^{N}\tilde{b}\,\mathsf{F}\big(\langle\xi,\eta_j\rangle_B\big)\otimes_B\eta_j=\sum_{j=1}^{N}\tilde{b}\,\mathsf{F}\big(\langle\xi,\eta_j\rangle_B\big)\big(1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j\big)$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\Big\langle\tilde{b}\otimes_B\xi,1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j\Big\rangle_{\widetilde{B}}\big(1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j\big)$$

表明 $\{1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j\}_{j=1,\ \ldots\ldots,\ N}$ 是 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$的标准模架。 ■

根据引理 A.1，我们有如下结论。

推论 A.3。 在引理 *A.2* 的假设下，模 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}$ 是射影的，并具有 $\mathcal{E}_{(\mathsf{F})}\simeq$
~ ~$B^N\tilde{p}$，其中 $\tilde{p}\in M_N(B)$ 是分量的投影

$$\tilde{p}_{jk}:=\big\langle 1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_j,1_{\widetilde{B}}\otimes_B\eta_k\big\rangle_{\widetilde{B}}=\mathsf{F}\big(\langle\eta_j,\eta_k\rangle_B\big).$$

附录 B。关于强联络和 2-余循环变形

本附录旨在说明，当 Hopf–Galois 扩张通过霍普夫代数 H上的一个 2-余循环发生变形时，H-伽罗瓦扩张的强联络的性质（4.5）保持不变。

根据一般理论（归功于 Doi 和 Drinfeld），给定霍普夫代数 H上的一个 2-余循环 $\gamma:H\otimes H\to\mathbf{k}$，后者可以变形成一个新的霍普夫代数 H_γ。它由余代数 H 及结合乘积构成

$$m_\gamma(h\otimes k):=h\cdot_\gamma k:=\gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)h_{(2)}k_{(2)}\,\bar{\gamma}\left(h_{(3)}\otimes k_{(3)}\right),\quad h,k\in H$$

和反粒子 $S_\gamma:=u_\gamma*S*\bar{u}_\gamma$。这里

$$u_\gamma:H\longrightarrow\mathbf{k},\ h\longmapsto\gamma\left(h_{(1)}\otimes S(h_{(2)})\right),\quad \bar{u}_\gamma:H\longrightarrow\mathbf{k},\ h\longmapsto\bar{\gamma}\left(S(h_{(1)})\otimes h_{(2)}\right)$$

彼此互为卷积逆元。此外，每个（例如）右 H-余模代数（$A,\ \delta$），其余作用为 $\delta:A\to A\otimes H$，都会变形为一个 H_γ-余模代数（$A_\gamma,\ \delta_\gamma$），由**k**-模 A 给出，其单位元 $\eta_\gamma:=\eta$ 保持不变，而乘积则发生变形

$$m_\gamma:A_\gamma\otimes A_\gamma\longrightarrow A_\gamma,\ a\otimes a'\longmapsto a_{(0)}a'_{(0)}\,\bar{\gamma}\left(a_{(1)}\otimes a'_{(1)}\right)=:a\bullet_\gamma a'.$$

余作用 $\delta_\gamma:=\delta$ 作为线性映射保持不变，并且 $A^{coH}=A_\gamma^{coH_\gamma}$。

关于 Hopf–Galois 扩张的 2-余循环变形的范畴方法已在 [2] 中提出；详情请参见该文。如 [2, 推论 3.7], 所示，扩张 $B:=A^{coH}\subseteq A$ 是 H-Galois 当且仅当 $B\subseteq A_\gamma$ 是 H_γ-Galois。此外，$B\subseteq A$ 是忠实平坦的，当且仅当 $B\subseteq A_\gamma$ 也具有这一性质。[2, 推论 3.9] 通过为变形后的 Hopf–Galois 扩张构造强联络证明了这一点，该强联络是映射 $s_\gamma:\ A_\gamma\to B\otimes A_\gamma$ 的一个分裂映射，属于

乘法映射。与 s_γ 相关的映射 ℓ_γ 的表达式见 [27]: 对于 $\ell\colon H\to A\otimes A$，原始 H-Galois 扩张的强联络,

$$\ell_\gamma : H_\gamma \to A_\gamma \otimes A_\gamma\,, \quad h \mapsto u_\gamma(h_{(1)})\ell(h_{(2)}). \tag{B.1}$$

引理 B.1. 设 $B\subset A$ 是一个忠实平坦的 H-伽罗瓦扩张，并且存在一个满足性质 ℓ (4.5) 的强联络。那么，(B.1)中的变形扩张的强联络 ℓ_γ 具有相同的性质。

证明. 我们用 $\ell_\gamma(h) = h^{<1>_\gamma}\otimes h^{<2>_\gamma}$ 表示元素 $h\in H_\gamma$的像。我们需要证明 ℓ_γ 满足 (4.5):

$$\ell_\gamma(h\cdot_\gamma k) = k^{<1>_\gamma}\bullet_\gamma h^{<1>_\gamma}\otimes h^{<2>_\gamma}\bullet_\gamma k^{<2>_\gamma}.$$

为了计算左边，我们需要线性映射的性质

$$\begin{aligned} u_\gamma(hk) &= \gamma\left(h_{(1)}k_{(1)}\otimes S(k_{(2)})S(h_{(2)})\right)\\ &= \bar\gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)\, u_\gamma(k_{(2)})\,\bar\gamma\left(S(k_{(3)})\otimes S(h_{(4)})\right)\,\gamma\left(h_{(2)}\otimes S(h_{(3)})\right)\\ &= \bar\gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)\, u_\gamma(k_{(2)})\,u_\gamma(h_{(2)})\,\bar\gamma\left(S(k_{(3)})\otimes S(h_{(3)})\right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

u_γ，参见 [2, 引理 3.2]。于是

$$\begin{aligned} \ell_\gamma(h\cdot_\gamma k) &= \gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)\,\ell_\gamma(h_{(2)}k_{(2)})\,\bar\gamma\left(h_{(3)}\otimes k_{(3)}\right)\\ &= \gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)\,u_\gamma(h_{(2)}k_{(2)})\,\ell(h_{(3)}k_{(3)})\bar\gamma\left(h_{(4)}\otimes k_{(4)}\right)\\ &= \gamma\left(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\right)\,u_\gamma(h_{(2)}k_{(2)})\,k_{(3)}{}^{<1>}h_{(3)}{}^{<1>}\otimes h_{(3)}{}^{<2>}k_{(3)}{}^{<2>}\bar\gamma\left(h_{(4)}\otimes k_{(4)}\right)\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,\bar\gamma\left(S(k_{(2)})\otimes S(h_{(2)})\right)\,k_{(3)}{}^{<1>}h_{(3)}{}^{<1>}\otimes h_{(3)}{}^{<2>}k_{(3)}{}^{<2>}\bar\gamma\left(h_{(4)}\otimes k_{(4)}\right) \end{aligned}$$

其中，倒数第二个等号用到了 ℓ 的性质 (4.5)，最后一个等号用到了 (B.2)。对于右边，我们计算

$$\begin{aligned} &k^{<1>_\gamma}\bullet_\gamma h^{<1>_\gamma}\otimes h^{<2>_\gamma}\bullet_\gamma k^{<2>_\gamma}\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,k_{(2)}{}^{<1>}\bullet_\gamma h_{(2)}{}^{<1>}\otimes h_{(2)}{}^{<2>}\bullet_\gamma k_{(2)}{}^{<2>}\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,k_{(2)}{}^{<1>}{}_{(0)}h_{(2)}{}^{<1>}{}_{(0)}\,\bar\gamma\left(k_{(2)}{}^{<1>}{}_{(1)}\otimes h_{(2)}{}^{<1>}{}_{(1)}\right)\otimes h_{(2)}{}^{<2>}\bullet_\gamma k_{(2)}{}^{<2>}\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,k_{(3)}{}^{<1>}h_{(3)}{}^{<1>}\,\bar\gamma\left(S(k_{(2)})\otimes S(h_{(2)})\right)\otimes h_{(3)}{}^{<2>}\bullet_\gamma k_{(3)}{}^{<2>}\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,k_{(3)}{}^{<1>}h_{(3)}{}^{<1>}\,\bar\gamma\left(S(k_{(2)})\otimes S(h_{(2)})\right)\otimes h_{(3)}{}^{<2>}{}_{(0)}k_{(3)}{}^{<2>}{}_{(0)}\,\bar\gamma\left(h_{(3)}{}^{<2>}{}_{(1)}\otimes k_{(3)}{}^{<2>}{}_{(1)}\right)\\ &= u_\gamma(k_{(1)})u_\gamma(h_{(1)})\,k_{(3)}{}^{<1>}h_{(3)}{}^{<1>}\,\bar\gamma\left(S(k_{(2)})\otimes S(h_{(2)})\right)\otimes h_{(3)}{}^{<2>}k_{(3)}{}^{<2>}\,\bar\gamma\left(h_{(4)}\otimes k_{(4)}\right) \end{aligned}$$

其中，第三个等式使用了性质 (4.4)，最后一个等式使用了性质 (4.3)。因此，ℓ_γ满足 (4.5)，如所声称。■

致谢。 GL感谢PNRR MUR项目PE0000023-NQSTI提供的支持。CP衷心感谢那不勒斯费德里科二世大学通过2022年FRA项目*GALAQ*：量子化的几何与代数方面提供的支持。两位作者均为INdAM-GNSAGA成员。感谢Tomasz Brzeziński、Francesco D'Andrea、Ulrich Kramer和Thomas Weber富有益的讨论与建议。

参考文献

[1] A.L. Agore, 《两个 Taft 代数的双交叉积分类》, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018) 914– 930。[2] P. Aschieri, P. Bieliavsky, C. Pagani, A. Schenkel, 《通过扭曲变形构造非交换主丛》, Comm. Math. Phys. 352 (2017), 287–344。[3]J. Bichon, A. García, 《双交叉积Hopf代数上的Hopf-Galois对象与扭曲映射》, arXiv:2410.19325 [math.QA]。[4] N. Bourbaki, 《交换代数》, Springer, 2006。[5] T. Brzeziński, P.M. Hajac, 《Chern-Galois特征》, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2004) 113-116。[6] T. Brzeziński, S. Majid, 《余代数丛》, Commun. Math. Phys. 191 (1998) 467–492。[7] T. Brzeziński, R. Wisbauer, 《余环与余模》, Cambridge University Press, 2003。[8] S. Caenepeel, B. Ion , G. Militaru, S. Zhu, 《代数与余代数的分解问题和smash双积》, Algebr. Represent. Theory 3 (2000), no. 1, 19-42。[9] A. Čap, H. Schichl, J. Vanžura, 《代数的扭曲张量积》, Commun. Algebra 23 (1995), 4701-4735。[10] H. Cartan, S. Eilenberg, 《同调代数》, Princeton University Press, 1956。[11] M. Durdević, 《量子规范变换与量子主丛上的辫结构》, arXiv:q-alg/9605010。[12] M. Durdević, 《量子分类空间与普适量子特征类》, Banach Center Publ. Vol. 40, (1997) 315–327。[13] P.M.Hajac, 《量子主丛上的强联络》, Commun. Math. Phys.182 (1996) 579–617。[14] C. Kassel, 《同伦等价意义下的量子主丛》, 《尼尔斯·亨里克·阿贝尔遗产》, 阿贝尔诞辰二百周年纪念, Oslo 2002, O. A. Laudal, R. Piene (编), Springer 2004, 737-748。[15] A. Klimyk, K. Schmüdgen, 《量子群及其表示》, Springer, 1997。[16] G. Landi, W.D. van Suijlekom, 《来自非交换球面的主纤维化》, Commun. Math. Phys. 260 (2005) 203–225。[17] S. Majid, 《量子群理论基础》, Cambridge University Press, 1995。[18] S. Montgomery, 《Hopf代数及其在环上的作用》。CBMS Regional Conference Series in Mathe- matics 82, AMS, 1993。[19] M. Rieffel, 《向量丛与Gromov–Hausdorff 距离》, Journal of K-theory, Vol. 5, Issue 1 (2010), pp. 39–103。[20] D. Rumynin, 《具有中心不变量的Hopf–Galois扩张及其几何性质》, Algebras and Representation Theory 1 (1998) 353–381。[21] P. Schauenburg, 《Hopf–Galois 扩张与Bi–Galois扩张》, Fields Inst. Commun., vol. 43, AMS 2004, pp. 469–515。[22] P. Schauenburg, H.-J. Schneider, 《广义Hopf–Galois扩张》, J. Pure and Applied Algebra 202 (2005), 168–194。

[23] H.-J. Schneider, 《任意Hopf代数的主齐性空间。》Israel J. Math. 72 (1990), 167–195。[24] E.J. Taft, 《有限维Hopf代数的反粒子阶》，美国国家科学院院刊68 (1971), 2631–2633。[25] M. Takeuchi, 《形式群的扩张》，由 μ^A，Comm. Algebra 5, (1977), 1439–1481。[26] A. Van Daele, S. Van Keer, 《杨-巴克斯特方程与五边形方程》，Compositio Math. 91 (1994), 201–221。[27] J. Zanchettin, 《变形Hopf–Galois扩张的陈-韦伊同态》，arXiv:2312.12927[math.QA]。
（G. Landi）意大利的里雅斯特大学与INFN–的里雅斯特，的里雅斯特电子邮箱地址: landi@units.it （C. Pagani）那不勒斯费德里科二世大学与INFN–那不勒斯，那不勒斯电子邮箱地址: chiara.pagani@unina.it