arXiv:2512.20551v1 [math.AG] 23 Dec 2025

下降理论与等变范畴的算术拓扑视角

MILTIADIS KARAKIK ES、Sotiris Karanikolopoulos、Aristides Kontogeorgis 和 Dimitrios Noula S

摘要。我们建立了一个统一的群论框架，将簇的算术同伦正合列与曲面的伯曼正合列联系起来。在这一框架下，我们重新诠释了经典的算术概念——例如簇及其覆盖的下降——并构造了相应的拓扑类比。我们形式化了绝对伽罗瓦群的闭子群与基空间的映射类群子群及其在基本群上的作用之间的平行情形。这为算术不变量与拓扑不变量提供了类比，使我们能够在两种情形下定义模群、定义域和不变性群。

借助这一统一视角，一些纯粹的群论证明能够同时在两种情形下得出结果。应用包括映射类群中 Weil 下降定理的拓扑类比，以及将 Dèbes 和 Douai 关于代数覆盖下降的上同调障碍改编到拓扑情形。

最后，我们将这些结果提升到范畴层面。我们证明，经典的 Weil 上循环条件等价于在等变范畴的框架下存在线性化。将这一观点应用于相干层有界导出范畴 $D^b(X)$，我们证明，在 Weil 下降数据所诱导的作用下，等变导出范畴 $D^b(X)^G$ 恢复了下降簇的导出范畴。

目录

1. 引言 1 2. 覆盖 8 3. 辫群与副有限辫 10 4. 曲线与簇上的群作用及其单值化 17 5. 模域与模群 - 定义 - 不变性 31 6. 正则性 39 7. 单值化上的下降 40 8. Birman-Hilden 性质 44 9. 范畴上的有限群作用 46 10. 利用导出范畴的同构作用与下降 50 参考文献 53

1. 引言

代数曲线算术的研究与其基本群的对称性有着内在联系。这种关系最著名的体现是 Grothendieck 的类阿贝尔几何[36]，，其中通过绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 对挖点簇基本群的前有限完备化所施加的外作用来研究该群。与此相应，在低维拓扑领域，映射类群 $\mathrm{Mod}(S)$ 也以类似方式通过外自同构作用于曲面 S 的拓扑基本群，为数论中的伽罗瓦作用提供了一种离散类比。这一类比补充了算术拓扑的 Mazur-Morishita-Kapranov-Reznikov词典 [54, 55, 51]，算术拓扑研究三维流形中的纽结与整数环中的素数之间的相似性。辫群和伽罗瓦元素可视为这一对应关系的一部分：一个素数对应于

日期：2025年12月24日。2020 数学主题分类。2G15；11G30；14A22；14A30；14F08；14H15；14H25；14H30；14H37；18F20；20F36；54B99；57K20。关键词和短语。模域、定义域、映射类群、绝对伽罗瓦群、等变范畴、相干层的有界导出范畴、Weil 下降、算术拓扑、算术基本群、Birman-Hilden 性质、范畴作用、正则性、单值化、覆盖、辫群、副有限辫。

Gal($\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$) 中一个弗罗贝尼乌斯元素的共轭类，而一个结对应于 B_n[48] 中辫群的一个马尔可夫等价类。Y. Ihara [40, 41, 42, 45]，通过利用 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 的几何，将绝对伽罗瓦群重新诠释为一个有限生成自由辫群，大大深化了这一对应。具体而言，Ihara 证明绝对伽罗瓦群的元素作用为有限生成自由群的自同构，形成了阿廷表示的离散类比。

本文将经典算术概念引入拓扑情形，进一步探讨这种类比。曲线算术的核心研究对象之一是“模域／定义域问题”。我们的首要目标是用纯粹的群论语言表述域下降的算术框架，从而为曲面建立相应的理论，弥合这两种视角之间的差异。我们的研究遵循这样一条原则：**域下降，群上升**。

我们将域扩张的选择理解为绝对伽罗瓦群的子群的选择，并以此类推，将其理解为映射类群的子群的选择。由此，我们表明，代数几何中关于群扩张和等变结构的许多深刻结果，都有自然的拓扑对应。具体而言，我们提出，算术同伦正合列 [35]:

$$1 \to \Pi_{K_s}(B^*) \to \Pi_K(B^*) \to \mathrm{Gal}(K_s/K) \to 1, \tag{1}$$

其中 B^* 表示这　　个去心基簇，与拓扑中的伯曼正合列 [28] 类似　　:

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \mathrm{Mod}(B^*, b_0) \to \mathrm{Mod}(B^*) \to 1. \tag{2}$$

例如，众所周知，存在一个 K 有理点即可使 (1) 分裂。我们在命题 11 中证明，这种分裂也可以通过一个群论框架建立，而且该框架同样严格适用于 (2)。此外，我们指出，在这两种情形下，这些正合列通常都受到分裂障碍的制约。一方面，有理点存在这一条件往往限制较多；另一方面，众所周知，闭曲面上的伯曼正合列不能分裂。

本文的核心主题之一是重新诠释下降理论。历史上，确定代数簇定义域的问题由 A. Weil 在其具有开创意义的 1956年著作 [72] 中解决。Weil 引入了下降数据的概念——一族满足特定余循环条件的同构，它使得一个定义在域 L 上的簇能够“下降”到更小的子域 L_0。韦伊定理是算术几何的基石，但其拓扑对应问题——将覆盖下降到一个更大的群——在下降数据的语言中仍未得到充分形式化。我们旨在说明，作为簇下降的标准工具，Weil 上循环条件可以用等变范畴 的语言更自然地表述为线性化（命题 67）。

等变范畴自然产生于对轨道空间上的层的研究。这一概念可追溯至 Grothendieck 的开创性东北论文 [34], ，他在文中探讨了拓扑空间 X 上的 G-等变层与轨道空间 X/G上的层之间的关系。Mumford 和福加蒂在其《几何不变式理论》 [56], 中将这一框架形式化，确立了 G-等变层的权威定义。此后，这一理论蓬勃发展；值得一提的是，伯恩斯坦和伦茨[7] 率先为 G-空间定义了等变有界导出范畴，这一框架后来由阿查尔[1]拓展至概形论语境。因此，群作用的研究被推广至任意范畴（定义60），由此产生了抽象等变范畴（定义62）。如今，这些范畴被视为非交换范畴商，构成了一个独特且活跃的研究领域。例如，埃拉金 [27] 确立了三角范畴的等变范畴继承典范三角结构的判据，而贝克曼和奥伯迪克 [4] 则确定了椭圆曲线在所谓卡拉比–丘群作用下的等变范畴。

一个经典的代数原型是有限群在环 R 上的作用：等变范畴 (模群$-R)^G$ 等价于斜群代数 $R * G$ 上的模范畴；赖滕和里特曼对此对应关系进行了广泛研究 [63] （见例 64）。在几何情形中，众所周知，概形 X 上的 G-作用会在 Coh(X) 上诱导一个作用，使得等变范畴 Coh^G(X) 等价于商栈 $[X/G]$ 上的相干层范畴（见例 61、63、65）。

我们通过将下降形式体系扩展到有界导出范畴 D^{b}(X)，进一步推进这一理念。我们不再仅将导出范畴视为同调不变量，而是将其视为一种独立的几何对象，受伽罗瓦作用与下降支配。我们仅凭 X 上的 Weil 下降数据，便在 D^{b}(X) 上构造出一个典范群作用，从而给出韦伊定理（命题 74）的范畴论证明，并自然涵盖导出不变量。

主要结果与所用思路。 现在，我们概述本文的主要贡献，并围绕贯通算术与拓扑视角的核心主题加以组织。

算术拓扑观点。 本文的第一个主题是算术、几何和拓扑基本群之间的结构性同一。Grothendieck 的基本群理论给出了算术短正合序列：

$$1 \to \Pi_{K_s}(B^*) \to \Pi_K(B^*) \to \mathrm{Gal}(K_s/K) \to 1.$$

由此得到副有限群之间的连续同态

$$\mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Out}(\Pi_{K_s}(B^*)).$$

类似地，在拓扑情形下，德恩–尼尔森–贝尔定理（定理 10）结合 Birman 正合列，给出了一个同态

$$\mathrm{Mod}(B^*) \to \mathrm{Out}(\pi_1(B^*)).$$

如前所述，Gal(K_s/K)-不动点的存在导致算术序列 (1) 分裂。我们可以用纯粹的群论语言将这一原理应用于拓扑情形：

命题 A。 (命题 11)。 短正合列

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)} \to \mathrm{Mod}(B^*) \to 1.$$

若存在一个 p $oint$ P 使得所有 $\sigma \in \mathrm{Mod}(B^*)$ 都具有一个固定 P的同胚代表元 $\hat{}\sigma$.

这是命题 11 的一个特殊情形，其一般表述考虑 Mod(B^*) 的任意子群。我们注意到，关于正合列 (1)、(2) 及其相应外自同构的大量证明，都可以用一种统一的方式表述，从而同时适用于这两种情形。这种统一语言的力量远不止于正合列的分裂。通过将“域”的概念抽象为“群作用”，我们可以纯粹通过群论重新获得若干深刻的几何性质：

(1) **正则性：** 域扩张 $K(X)/K(B)$ 不含新的常数这一算术条件，经典上通过与 K 的可分闭包 K_s 取交来验证。在命题 50 中，我们证明这等价于纯粹群论意义下的指标保持条件： $[\Pi_A : H] = [\Pi_1 : R]$。这使我们能够在拓扑学中定义并研究覆盖的“正则性”概念，因为在拓扑学中不存在基域。(2) **单值化作用：** 通过 Dèbes 等人的理论， [22, 24, 23], 域扩张 $K(X)/K(B)$ 对应于算术基本群 $\Pi_K(B^*)$ 的单值表示。我们证明，同样的对应关系也适用于伯曼正合列，并且覆盖 $X \to B$ “定义”在 $A \subseteq$ Mod(B^*) 上（定义 27）对应于 Π_A 的单值表示（命题29）。在这两种情形中，群 Gal(K_s/K) 和 Mod(B^*) 都作用于相应的表示。这使我们能够平等地处理算术对称性与拓扑对称性。(3) **上同调障碍：** 最后，将算术覆盖下降到其模域的障碍——也与 (1) 的分裂有关——在第 7 节中被确定为一个特定的伽罗瓦上同调类，该类最初由 Dèbes 和 Douai [22]给出。这种群上同调描述（定理 57、58）逐字适用于簇的算术下降，以及通过下述思想实现的覆盖的拓扑群上升。

域下降，群上升。 这个简单的思想源于以下观察。给定一个定义在域 K 上的簇X 以及一个域扩张 L/K，就可以将它扩张为一个簇 $X_L := X \times_K L$。同样，也可以将它扩张为一个簇 X_{K_s}，其中 K_s 表示包含 L 的 K 的可分闭包。于是我们知道， X_{K_s} 在绝对伽罗瓦群 Gal(K_s/K) 的作用下是不变的。然而，如果我们将X_{K_s} 视为由 X_L 导出，那么它实际上在子群 Gal(K_s/L) 的作用下是不变的。因此，定义域越小（即从 L 下降到 K），不变群就越大（即从 Gal(K_s/L) 上升到 Gal(K_s/K)）。

这种反向关系使我们能够将寻找最小定义域的算术问题，转化为在更大的环境群中寻找最大不变（或定义）子群的群论问题。我们将这一理念应用于拓扑情形，以映射类群 Mod(B^*) 的子群取代伽罗瓦塔。

模空间域与群、定义与不变性。在第 5 节中，我们通过区分群作用的三个层次来细化对称性的概念，这些层次同时适用于算术和拓扑学。对于一个对象X 以及 Mod(B^*) 或 Gal(K_s/K) 中的一个子群 A：

(1) 模群 A_X^{mod}由满足 ${}^\sigma X$ 同构于 X 的元素 $\sigma \in A$ 组成。在算术情形下，其不动域就是模域。(2) 定义群 A_X^{def}是这样一个子群：其中这些同构满足 Weil 上循环条件（或者等价地，具有 X 的线性化结构）。这对应于定义域。(3) 不变群 A_X^{inv}由严格保持 X 的元素组成。这对应于不变域。

我们阐明模域与定义域之间微妙的区别。尽管在大多数情况下二者可能重合，例如椭圆曲线的情形，但我们讨论了一个具体例子（第 5.5 小节），其中模域严格小于定义域；这一现象可由定义群中 Weil 余循环的障碍检测出来。

Weil 拓扑上升与可定义性。在拓扑领域，由于不存在底层域结构，必须纯粹通过群论重构“定义域”这一概念。为此，我们用映射类群 Mod(B^*) 的子群取代域扩张。

我们引入记号 $X \to (B, A)$，表示定义在子群 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$ 上的覆盖（定义 27）。此定义抓住了曲线定义在某个子域上的拓扑本质：几何对象在与该子域相对应的对称性作用下保持不变。

本文的一个核心结果是提出了 Weil 下降定理的拓扑类比。在算术情形下，将一个簇从域 L 下降到子域 L_0 需要 Weil 下降数据：一族同构 $\{f_\sigma \colon X \xrightarrow{\sim} {}^\sigma X\}_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/L_0)}$，它们满足余循环条件

$$f_{\sigma\tau} = {}^\sigma f_\tau \circ f_\sigma .$$

在我们的拓扑框架中，这转化为一个**上升**问题：将覆盖的定义从群 A 扩展到更大的群 A'。我们将**映射类群上升数据** 定义为一族同胚对 $\{(f_\sigma, \hat{\ }\sigma)\}_{\sigma \in A'/A}$，其中 $f_\sigma \colon X \to {}^\sigma X$ 将覆盖映射到其扭曲，并满足类似的余循环条件：

$$(f_{\sigma\tau}, \widehat{\sigma\tau}) = ({}^\sigma f_\tau, {}^{\sigma}\hat{\tau}) \circ (f_\sigma, \hat{\sigma}).$$

这一比较揭示了一个引人注目的对偶性：算术下降数据允许几何对象下降到较小的域，而拓扑上升数据则允许该对象上升到更大的对称群。

定理 A. (定理 46). 设 $A \lhd_{\mathrm{f}} A' \leq$ 模群(B^*)，且 $X \to (B, A)$ 是定义在 A上的覆盖。当且仅当该覆盖具有关于商 A'/A 的映射类群上升数据时，它才能定义在更大的群 A' 上。

这一结果与 Dèbes 定理的拓扑表述（定理 56、57、58）共同完善了我们的算术拓扑观点，并确立了这样一点：拓扑中扩大定义群的上同调障碍，与算术中下降定义域的障碍在形式上完全相同。

单值化上的下降。 在算术情形下，覆盖的下降理论由 Dèbes 和 Douai [22] 的结果所支配。他们的主定理 表明，对于一个定义在 K_s 上且模域为 K 的覆盖 $X \to B$，若要使 K 成为定义域，其障碍属于 $H^2(K, Z(G))$ 中的一个特定上同调类，其中 G 是伽罗瓦闭包的自同构群。我们利用纯粹的群论技巧，将这一结果推广到拓扑情形。关键的一步是从群论角度刻画“伽罗瓦闭包中的常数扩张”，它在该障碍中起着核心作用。将伽罗瓦群 Gal(K_s/K) 的伽罗瓦作用替换为子群 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$ 的作用后，我们对单值表示 $\Pi_A \to G$ 运用相同的技巧，推导出相应的拓扑类比。

设 $f \colon X \to B$ 是定义在 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$ 上的覆盖，其模群为 A'，其中 A'/A 是有限群；设 G 为伽罗瓦闭包所关联的自同构群。分别用 N, C 表示 G 在 S_d中的正规化子和中心化子，其中 d 为覆盖次数。第一障碍仅在非伽罗瓦覆盖的情形下非平凡，它将伽罗瓦闭包中的常数扩张与同态$\Lambda \colon A'/A \to N/G$联系起来。

定理 B （定理 56）。 [22, 的映射类群表述主定理 （I）]
设 $f \colon X \to (B, A)$ 是一个群为模群 A'的（G）覆盖，且 $\phi \colon \Pi_{A'} \twoheadrightarrow N/C$与 f的单值表示 $\Pi_A \to N$相关联。那么，存在唯一一个与 ϕ相容的同态 $\lambda \colon A'/A \to N/CG$。

f 的每个 A'-模型都会给出 λ 到 Λ: $A'/A \to N/G$的一个提升。因此，存在一个延拓λ 的同态 Λ，是该覆盖可定义在其模群上的必要条件。

直观地说，这一条件要求到伽罗瓦闭包的扩张与 G-作用相容。随后给出的定理确定了主要障碍，并判定这样的提升 Λ: $A'/A \to N/G$arisesfrom 是否源自覆盖的一个 A'-模型。

T定理 C（定理 57）。 [22, 主定理 （II）的映射类群表述)]

设 A' 是相对于 A'/A 的 f: $X \to (B, A)$ 的（G）-覆盖的模群。假设定理 B 的必要条件成立，并固定 λ 的一个提升 Λ: $A'/A \to N/G$ 。当且仅当特定的 2- 余循环 Ω_Λ 的逆属于余边界算子 δ: $H^1(A'/A, CG/G) \to H^2(A'/A, Z(G))$ 的像时，模群 A' 才是 f 的定义群。也就是说，存在一个 1-余循环 θ，使得 $\delta(\theta)\Omega_\Lambda$ 在 $H^2(A'/A, Z(G))$ 中是平凡的。

下一个结果给出了正合列 $1 \to \Pi_A \to \Pi_{A'} \to A'/A \to 1$ 分裂时的一个简化判据。特别地，单值表示为 Ψ: $\Pi_A \to N$ 的 A- 模型 f: $X \to B$ 能够下降到模群 A'，当且仅当存在 A'/A 在 N 上的作用与 Ψ 相容，也就是说，它保持半直积结构 $\Pi_{A'} \cong \Pi_A \rtimes A'/A$。

The理 58（定理 58）。 [22, 主定理 （III）的映射类群表述]

保留定理 B 的假设，并进一步假设 s: $A'/A \to \Pi_{\underline{A'}}$ 是一个截面。该覆盖定义在其模群 A'上，当且仅当 $\phi \circ s$: $A'/A \to N/C$存在一个提升 ϕ: $A'/A \to N$。

Birman-Hilden 性质。 我们探讨覆盖空间的映射类群与基底映射类群之间的关系。经典的*Birman-Hilden* 性质 探讨覆盖空间的映射类何时能满射到基空间的映射类。在我们的框架中，定义在 $A \leq$ 上的覆盖 $X \to (B, A)$ 会诱导一个同态 $A \to$Out($\pi_1(X)$)。我们将其视为 Birman-Hilden 性质的对偶性质。众所周知，Birman-Hilden 性质的理论着重研究将映射类从 Mod(X)映射到 Mod(B^*)时，同伦代表元之间的相容性；而为了与本文其余部分相衔接，我们用群论术语对其作了经典的重新诠释。此外，我们还探讨了这一性质与 Mod(B^*)在 X 的 Teichmüller空间 $T(X)$上的作用之间的联系，其中 X 是一个亏格为 g 的曲面。

等变范畴与韦伊定理。 等变范畴的框架为我们统一下降理论提供了自然的背景。本工作的核心主题之一是认识到，韦伊经典下降条件——历史上通过余循环 $\{f_{\sigma\tau} = {}^{\sigma}f_\tau \circ f_\sigma\}$表述——恰好是一个对象能在等变范畴中具有线性化 的条件。通过将韦伊下降数据或其拓扑对应物——映射类群上升数据——识别为线性化，我们为算术簇和拓扑覆盖分别得到以下范畴等价。

我们用 Var_L 表示 L-簇的范畴，用 $\mathsf{Cov}^{(B,A)}$ 表示分歧除子位于 B 且定义在 A 上的伽罗瓦覆盖 $X \to (B, A)$ 的范畴（定义42）。

定理 E. (命题 67 和 68)。 设 L/L_0 是有限伽罗瓦域扩张， $A \lhd_{\mathrm{f}} A'$ 是 模群(B^*) 的子群。簇的范畴 Var_L 配备了自然的严格伽罗瓦 L/L_0 作用，而覆盖的范畴 $\mathsf{Cov}^{(B,A)}$ 配备了映射类群商群 A'/A 的自然非严格作用。任一范畴中的对象 X 可定义在基底上（分别为 L_0 或 A'，定义*38*和*45*），当且仅当它相对于该范畴上的自然群作用具有线性化。特别地，我们得到如下范畴等价:

$$\mathsf{Var}_L^{\mathrm{Gal}(L/L_0)} \simeq \mathsf{Var}_{L_0} \quad and \quad \mathsf{Cov}_{(B,A)}^{A'/A} \simeq \mathsf{Cov}_{(B,A')}.$$

这一范畴论视角澄清了这些定义，并为定义群提供了另一种看法。请注意，该定理的两部分分别由 Weil 的算术与拓扑定理导出。

等变导出范畴与 Weil 下降。有限群在相干层范畴 Coh(X) 上的作用，自然会在其有界导出范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$ 上诱导出一个作用。对于阿贝尔范畴，等变范畴的定义很直接；但在三角范畴框架中，要确定“正确”的等变结构则更为微妙。一般而言，等变阿贝尔范畴的导出范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A}^G)$ 与导出范畴的等变范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})^G$ 并不相同。然而，在我们的情形中——有限群的作用阶与基域的特征互素——这两种观点是一致的。具体而言，存在典范等价 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathrm{Coh}^G(X)) \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G$，使我们能够将

等变导出范畴在几何上解释为商栈 $[X/G]$ 的导出范畴。因此，我们将导出范畴本身视为一种几何不变量，并研究它在下降过程中的行为。

我们的主要目标是将簇 X 上的 Weil 下降数据提升到其导出范畴。我们首先证明， X 上的 Weil 下降数据 $\{f_\sigma\}$ 使我们能够构造 X上的 $G = \mathrm{Gal}(L/L_0)$ 的典范自同构作用，使得商 X/G 与下降簇 Y同构。这引出了韦伊定理的现代范畴论扩展：

定理 F。（命题 69、72 和 74）。设 X 是定义在 L 上的簇，配备了相对于有限伽罗瓦扩张 L/L_0的 *Weil* 下降数据，并设 Y 是相应的 L_0-簇。此外，假设$\mathrm{char}(L_0) \nmid |G|$，其中 $G = \mathrm{Gal}(L/L_0)$。

(1) 下降数据在 X 上诱导一个自由的 G-作用，使得 $X/G \simeq Y$。*(2)* 在 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$ 上存在良定义的 G-作用，使得等变导出范畴与基底的导出范畴同构：

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(Y),$$

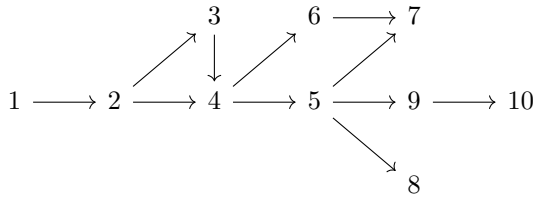
前提是 $|G|$ 在 L_0 中可逆。

该定理传达了两层含义。首先， X 上的 Weil 下降数据足以构造 X 上的群作用，使得商 X/G 是定义在子域 L_0 上的簇。其次，给定定义在 L_0 上的簇 Y，那么 $Y \times_{L_0} L$ 的标量扩张可视为在这一特定情形下的“去等变化”过程，见备注 75。

最后，在注 71 中，我们讨论了 Bondal 和 Orlov 的开创性著作 [15] 中的一个歧义：关于具有丰沛（反）典范层的光滑射影簇的自等价群 $\mathrm{Aut}(X) \ltimes (\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z})$。我们澄清，群 $\mathrm{Aut}(X)$ 必须解释为一般概形自同构群，而非 k-自同构群，这与通常的预期相反。

椭圆曲线不变量上的辫群作用。在 [65] P. Seidel 和 R. Thomas 证明，辫群在维数为 ≥ 2 的 Calabi-Yau 流形上有忠实作用，这表明同调镜像对称猜想可能成立。这项工作基于这样一种解释：将球面拉格朗日流形视为 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$ 中的球面对象，并将拉格朗日一侧的广义 Dehn 扭转视为 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$ 一侧满足辫关系的自等价。本文主要关注曲线，而 Calabi-Yau 流形的概念在此处归结为椭圆曲线理论。然而，Seidel 和 Thomas 表明，在这种情况下，$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(E)$ 上存在一个非忠实的 B_4 作用，其中 E 是一条椭圆曲线。在小节 3.4 中，我们考察 $\pi_1(E)$ 上的作用 B_4，并证明它同样不是忠实作用。我们想指出，这两种作用的相似之处不仅在于它们都是辫群在椭圆曲线某个不变量上的非忠实作用，还在于它们都不是由椭圆曲线本身上的作用诱导而来。

逐节分析。除最后两章外，所有章节均采用三部分结构：算术小节、拓扑小节和比较小节。采用这种结构旨在凸显这两个世界之间的共同基础，并引入统一记号；该记号汇总于每个比较小节末尾的表格中。本文的逻辑脉络如下：



在第 2 节中，我们通过建立函数域的有限扩张与黎曼曲面的分歧覆盖之间的对应关系，为全文奠定基础。我们明确区分一般覆盖与伽罗瓦覆盖，从而为平行研究算术基本群 $\Pi_K(B^*)$ 与拓扑基本群 $\pi_1(B^*)$做好准备。本节的一个关键成果是构造出一套统一的“对应关系”记号，使我们能够在后文始终使用同一形式体系来处理算术扩张 $K(X)/K(B)$和拓扑覆盖 $X \to B$ 。

第 3 节致力于研究绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$，将其视为由副有限辫构成的群。我们回顾井原表示，并将其与经典的辫群阿廷表示进行比较。我们还回顾映射类群 $\mathrm{Mod}(S)$ 的定义，并陈述德恩-尼尔森-贝尔定理 10，该定理是我们在拓扑情形中的主要工具。重点在于比较 Grothendieck 的

算术同伦正合列与伯曼正合列。我们证明命题 11，该命题借助不动点的存在，为两种情形下基本正合列的分裂提供统一的群论证明。本节还包括小节 3.4，我们在其中构造 B_4 在椭圆曲线基本群上的非忠实作用。

在第 4 节中，我们发展了关于曲线和簇上的群作用的理论。我们首先简要介绍环化空间上的同胚作用，并得出结论：非平凡的扭曲作用对于下降理论至关重要。随后，我们定义簇上的伽罗瓦群(K_s/K)作用，并处理这样一个技术难题：在不存在函数域的拓扑情形下，如何定义模群(B^*)作用。我们建立了簇 X 上的作用与其单值表示 Ψ上的作用之间的对应关系。主要结果命题 25 表明，簇上的自然伽罗瓦作用与其单值表示上的作用等价（差一个共轭），从而为研究下降问题提供了一种无坐标的方法。另一个关键点是定义 27，其中我们正式定义了拓扑覆盖 $X \to B$ “定义在”子群 $A \leq$ 模群(B^*)上的含义。

第 5 节致力于明确界定算术情形和拓扑情形中的模、定义和不变性群。我们深入研究算术情形中的这些群，并为拓扑情形提供适当的定义。我们用这些群的术语重新表述 Weil 下降条件，并回顾其下降定理 39。随后我们证明定理 46——Weil 下降定理的拓扑类比，表明在子群 A 上定义的覆盖可以扩张到更大的群 A'（其中 $A \lhd_{\mathrm{f}} A'$），当且仅当它具有一个“映射类群上升数据”。最后，我们在第 5.4 和 5.5 小节中给出示例，说明模域与定义域之间的区别。

在第 6 节中，我们分析覆盖的正则性——即常数域扩张是平凡的条件（即 $K_s \cap K(X) = K$）。我们证明，这一算术性质完全可以由群指数刻画。具体而言，命题 50 表明，当且仅当几何基本群在算术群中的指数保持不变时，覆盖才是正则的（$[\Pi_A : H] = [\Pi_1 : R]$）。

第 7 节将 Dèbes 和 Douai 的下降理论应用于拓扑情形。我们在定义 53 中表述“模群”条件 **(CMod)**，并系统地分析模型存在性的障碍。主要结果定理 56 和定理 57 将障碍分解为两部分：一个中心约束，以及一个属于 $H^2(A'/A, Z(G))$ 的上同调类。这为构造模群严格大于定义群的覆盖提供了一种严谨的方法。

第 8 节回顾经典的 *Birman-Hilden* 性质——从覆盖到基底的同胚的同伦类之间的满射——并对其作出群论解释，以讨论它与本文其他方面的联系。我们还给出一个关于 B^* 的标记点及其在 X 中未标记纤维之间相互作用的初等结果（引理 59）。具体而言，我们分析伽罗瓦覆盖情形下 Out($\pi_1(X)$) 和 Out($\pi_1(B^*)$) 的相应子群如何相互作用。最后，我们提出一个问题：这一性质是否存在伽罗瓦拟有限类比?

第 9 节介绍等变范畴的框架。在给出必要的定义，以及层范畴及其导出范畴上群作用的一些众所周知的例子（这些内容将在最后一节用到）之后，我们在命题 67 中证明，定义在域 L_0 上的簇范畴等价于等变范畴 $\mathrm{Var}^{\mathrm{Gal}(L/L_0)}{}_L$。最后，我们在命题 68 中建立拓扑覆盖的类似结果，并将算术和拓扑情形中的 Weil 上循环条件重新诠释为范畴的线性化。

最后，在第 10 节中，我们从一个 L-簇X 上的 Weil 下降数据构造出规范的 Gal(L/L_0)-作用（命题 69），并证明商 X/G 就是下降的 L_0-簇（命题 72）。我们将这些结果推广到相干层的有界导出范畴，最后以命题 74 作结，该命题证明等变导出范畴 $\mathrm{D^b}(X)^G$ 可恢复下降簇的导出范畴 $\mathrm{D^b}(Y)$。此外，我们阐明了 Bondal & Orlov 关于自同构群的工作（注 71），并提出了一个关于通过标量扩张实现去等变化的想法（注 75）。

记号与约定。除非另有说明，本文固定素数 $\ell \neq p$、特征为 p 的域 K。我们将 K_s 记为 K 的一个可分闭包（本文稍后将固定该域），并将 $K \subseteq L \subseteq K_s$ 记为一个域扩张。本文所说的定义在 L 上的代数簇，是指带有结构态射 p: $X \to \mathrm{Spec}(L)$ 的整概形 X，且该态射是分离的有限型态射。符号 X、Y 和 B 表示定义在此扩张中某个域上的簇；例如，通常 X 定义在 K_s上，Y 定义在 L 上，而 B 定义在 K 上。若扩张 L/K 是伽罗瓦扩张，我们用 Gal(L/K) 表示其伽罗瓦群。自然映射 $K, \to L$（反变地）对应于仿射簇的映射 Spec$L \twoheadrightarrow$Spec$K$，因此，给定一个定义在 K 上的簇 B，我们将其扩张标量至定义在 L 上的簇 $B \times_{\mathrm{Spec}K} \mathrm{Spec}L$，为方便起见，仍记作 $B \times_K L$。

我们用符号 $<$（分别用 $\leq$）表示真子群（分别表示非真子群）。类似地，我们用 $\subset$（分别用 $\subseteq$）表示真集合包含（分别表示非真集合包含）——这尤其适用于子集、开子集和子域。

致谢。本研究项目在国家复苏与韧性计划“Greece 2.0”框架下实施，由欧盟下一代欧盟资助，属于 H.F.R.I. 的“基础研究资助（所有科学领域横向支持）”征集项目（H.F.R.I. 项目编号：14907）。

Greece 2.0 NATIONAL RECOVERY AND RESILIENCE PLAN Funded by the European Union NextGenerationEU H.F.R.I. Hellenic Foundation for Research & Innovation

我们还要感谢 Ilias Andreou，在本项目期间与我们进行了富有启发性的交谈。

2. 覆盖

我们首先建立簇的算术覆盖（视为函数域扩张）与复流形的拓扑分歧覆盖之间的对应关系。通过区分拓扑、几何和算术基本群——它们分别对不同类型的覆盖进行分类——我们为比较绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 的算术作用与映射类群的拓扑作用奠定基础。由于辫群是映射类群的一种特殊情形，这一对应关系自然引出了在第 3 章中将绝对伽罗瓦群作为仿射有限辫群来研究。

2.1. 算术覆盖。

我们采用 [22] 的方法来定义算术情形下的覆盖。

定义 1。设 B 是一个正则、射影、几何不可约的 K-簇。

- B 在 K 上的**单纯覆盖**是一个有限且泛点处非分歧的态射 $f\colon X \to B$，其中 X 假定为正规且几何不可约的 K-簇。• **伽罗瓦覆盖**是一个单纯覆盖 $X \to B$，满足 $|\mathrm{Gal}(K(X)/K(B))| = [K(X)\colon K(B)],$，其中 $K(X)$ 和 $K(B)$ 分别表示簇 X 和 B 的函数域。• G B 的-**覆盖**是一个在 K 上的伽罗瓦覆盖 $X \to B$，并附带一个同构 $h\colon G \to \mathrm{Gal}(K(X)/K(B))$。

注意，B 的正则性意味着对于 K 的任意可分闭包 K_s，都有 $K_s \cap K(B) = K$。为推广这一点，我们引入以下定义，并将在第 6 节中进一步探讨。

定义 2. 扩张 $K(X)/K(B)$称为**正则**，如果 $K_s \cap K(X) = K$。

函数域函子给出了一个双射：

$$\left\{ \text{mere cover } f\colon X \to B \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{finite, separable, regular field} \\ \text{extensions } K(X)/K(B) \end{array} \right\}$$

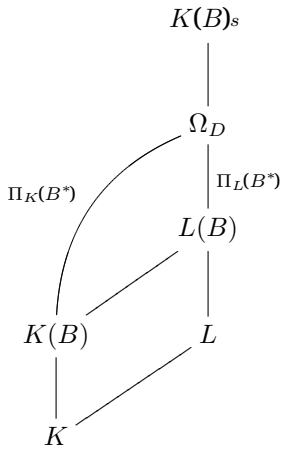
当覆盖定义在 K 上时，通过标量扩张 $X \times_K L \to B \times_K L$，它也可以视为定义在任意中间域扩张$K \subset L \subset K_s$ 上。此外，若 B 是一个 K-簇，且 X 是一个 L-簇，则覆盖 $X \to B \times_K L$ 是 L 上的覆盖。为简便起见，我们也将其记为 $X \to B$。

对于 K 上的每个单纯覆盖 $f\colon X \to B$，并将其进一步扩张至 K_s 上，我们赋予其该覆盖的伽罗瓦群，即群 $\mathrm{Gal}(K_s(X)/K_s(B))$，其中 $K_s(X)$ 表示扩张 $K_s(X)/K_s(B)$ 的伽罗瓦闭包。我们还赋予其分歧轨迹 $D \subset B$，这是一个具有简单分量的除子，即每个分量在形式和中至多出现一次。定义在 K 上的覆盖的分歧除子也定义在L上。全文中，我们假设 D 是 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$-不变的。后文需要时可能会再次明确这一假设。我们用 $B^* = B - D$ 表示分歧除子的补集。

固定 $K(B)$ 的可分闭包 $K(B)_s$，并令 $K_s \subset K(B)_s$ 为 $K(B)_s$ 中 K 的可分闭包。对于每个中间域 $K \subset L \subset K_s$，B^* 在 L 上的**算术基本群**记作 $\Pi_L(B^*)$，定义如下。

令 $\Omega_D \subset K(B)_s$ 为 $K(B)$ 关于 B^* 非分歧的极大代数可分扩张。那么，$\Pi_L(B^*) :=$伽罗瓦群$(\Omega_D/L(B))$，如以下图所示。

(3)



我们主要关注 $L = K_s$ 的情形，即群 $\Pi_{K_s}(B^*)$，该群称为几何基本群。

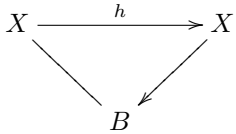
注 3. 在 Grothendieck 的 SGA1 [35] 语境中，群 $\Pi_K(B^*)$ 记作 $\pi_1(B^*, \xi)$，其中ξ 是对应于选择 $K(B) \to K(B)_s$的 B 的几何一般点，或者等价地，对应于映射 $\mathrm{Spec}(K(B)_s) \to \mathrm{Spec}(K(B)) \to B^*$。

2.2. **拓扑覆盖**。我们回顾代数拓扑中的一些基本概念。作为参考资料，我们将依赖其中关于黎曼曲面及其分歧覆盖的理论，参见 [29]。设 X, B 为拓扑空间，其中 B 是连通的。设 X, B 为拓扑空间，并假设 B 是连通的。

连续映射 $f\colon X \to B$ 称为拓扑覆盖（或非分歧覆盖），如果对每个点 $b \in B$，都存在一个开邻域 $V_b \subset B$，使得 $f^{-1}(V_b)$ 是开集 $U_i \subset X$ 的不交并，其中 $U_i \subset X$由某个指标集 I标记；并且对每个 $i \in I$，限制映射 $f|_{U_i}\colon U_i \to V_b$ 都是同胚。指标集 I 的基数等于 $f^{-1}(b)$ 的原像个数。注意，这不依赖于 b。如果 $\#f^{-1}(b) = d < \infty$，我们称 f 为次数为 d的有限覆盖。

若 X 和 B 是复流形，且 $f\colon X \to B$ 是一个次数为 d 的全纯映射（采用通常的复解析意义；例如 [29, 定义 1.6]），我们将 分歧轨迹 $D \subset B$ 定义为满足 $\#f^{-1}(b) < d$ 的点 $b \in B$ 的集合。令 $X^\circ = X - f^{-1}(D)$ 且 $B^* = B - D$。如果限制 $f|_{X^\circ}\colon X^\circ \to B^*$ 是如上所述的次数为 d 的拓扑覆盖，则称 f 为一个 次数为 d 的有限分支覆盖。回顾以下概念：

定义 4。对于一个拓扑覆盖（分别为分支覆盖） $X \to B$，覆盖变换群 $\mathrm{Deck}(X/B)$ 由所有使下图交换的同胚（分别为全纯映射） $h\colon X \to X$ 组成：



对于分歧覆盖 $f\colon X \to B$ 及其对应的非分歧覆盖 $f|_{X^\circ}\colon X^\circ \to B^*$，它们的覆盖变换群相同，即 $\mathrm{Deck}(X/B) = \mathrm{Deck}(X^\circ/B^*)$，参见 [29, 定理 8.5]。

B^*上的环路，即起点和终点均为 b_0 且可连续变形的路径，构成一个群（群运算由路径的串接给出），称为拓扑基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(B^*, b_0)$。基点的选择无关紧要，但在许多情况下，我们需要记录最初的选择，$\widetilde{\ }$否则就简单地记作 $\pi_1(B^*)$。存在一个位于 B^* 上的空间 $\widetilde{B^*}$，称为万有覆盖空间$\widetilde{\ }$，它将基本群实现为 $\pi_1(B^*) = \mathrm{Deck}(\widetilde{B^*}/B^*)$。覆盖空间理论断言如下命题，这与伽罗瓦理论类似：每个（有限）覆盖 $X^\circ \to B^*$ 都对应于一个（有限指数）$\widetilde{\ }$子群 $R \leq \pi_1(B^*)$，其中 $R = \mathrm{Deck}(\widetilde{B^*}/X^\circ)$。此外，$\pi_1(B^*)$作用于基点的纤维 $f^{-1}(b)$。如果该作用是传递的，我们就称 $X^\circ \to B^*$ 为伽罗瓦覆盖；这等价于 R 是 $\pi_1(B^*)$ 中的正规子群，

参见 [71, 第 2 章，命题 2.2.7]。此时，我们有一个同构 $\pi_1(B^*)/R \simeq \mathrm{Deck}(X^\circ/B^*)$。如果子群$R$ 不是正规子群，那么 $\mathrm{Deck}(X^\circ/B^*) \simeq N_{\pi_1(B^*)}R/R$，其中 $N_{\pi_1(B^*)}R$ 表示 $\pi_1(B^*)$ 中 R 的正规化子，参见 [31，习题 13.12，第 184] 页。因此，我们引入以下术语。

- 单纯覆盖 of B is a (possibly branched) cover $f\colon X \to B$ of topological spaces over $\mathbb{C}$, with associated cover $X^\circ \to B^*$.
- A 伽罗瓦覆盖is a mere cover $X \to B$, where R is a normal subgroup of $\pi_1(B^*)$ corresponding to the associated cover.
- A $G\text{-}cover$ of B is a Galois cover $X \to B$, together with an isomorphism $h\colon G \to \mathrm{Deck}(X/B)$.

2.3. 比较 - 常用记号：覆盖。根据前面的讨论，我们注意到，一方面存在函数域的有限扩张 $K_s(X)/K_s(B)$，其中只有有限多个赋值点发生分歧。另一方面，存在分歧覆盖 $X \to B$，其分歧发生在有限个点上（分支轨迹）。这两类几何覆盖分别由算术基本群 $\Pi_{K_s}(B^*)$ 和拓扑基本群 $\pi_1(B^*)$ 分类。

如果域 K 的特征为零，那么根据 GAGA 定理，存在如下对应关系：覆盖$K_s(X)/K_s(B)$ 对应于解析空间 $X(\mathbb{C}) \to B(\mathbb{C})$ 的分歧覆盖，它们在 D 之外非分歧；而这些分歧覆盖又对应于带有复拓扑的拓扑覆盖 $X^\circ \to B^*$。在这种情况下，$\Pi_{K_s}(B^*)$ 是 $\pi_1(B^*)$ 的前有限完备化。

注 5. 在存在几何覆盖理论的其他情形下，同样的原理也成立。例如，关于 Mumford 曲线，参见 [19], [20], [57], ；对于 Berkovich 空间，参见 [6]。在这些情形下，算术基本群 $\Pi_{K_s}(B^*)$ 同样是 $\pi_1(B^*)$ 的前有限完备化。

实际中，人们常考虑次数为 ℓ 的幂的覆盖。我们可以将 $\Omega_{D,\,\ell}$ 定义为 Ω_D 的 ℓ-部分，使得对于 $\Omega_{D,\,\ell}$ 中的每个有限子扩张 $L(X)/K(B)$，都有 $[L(X)\colon K(B)] = \ell^m$，其中 $m \geq 1$。那么，$\mathrm{Gal}(\Omega_{D,\,\ell}/K_s(B))$ 就是 $\pi_1(B^*)$ 的 pro-ℓ 完备化。

数论	拓扑学	常用记号
$K(X)/K(B)$ 正则扩张	$f\colon X \to B$ 分歧覆盖	$f\colon X \to B$, 分歧轨迹 D, $B^* = B - D$
$\Omega_D =$ 最大非分歧 K在 D之外的B(B)扩张	$\widehat{B^*} =$ 泛 $B - D$的覆盖空间	
$\Pi_{K_s}(B^*) =$ 几何 基本群	$\pi_1(B^*) =$ 拓扑 基本群	
伽罗瓦群($\Omega_D/K_s(X)$)	$\mathrm{Deck}(\widetilde{B^*}/X)$	$R \leq \Pi_{K_s}(B^*)$，或 $R \leq \pi_1(B^*)$

3. 辫群与副有限辫

3.1. 算术。 在本节中，设 B 是一个正则、射影、几何不可约的 K-簇。这意味着，对于任意域扩张 L/K，都有 $L \cap K(B) = K$。因此，$\mathrm{Gal}(L(B)/K(B)) \simeq \mathrm{Gal}(L/K)$。根据（3）中所示的域图，我们有，扩张 L/K 所对应的算术基本群构成如下短正合列：

$$1 \to \Pi_L(B^*) \to \Pi_K(B^*) \to \mathrm{Gal}(L/K) \to 1$$

其中，商映射就是从 Ω_D 到 L 的限制 $\sigma \mapsto \sigma|_{L(B)}$。特别地，对于 $L = K_s$，我们得到以下短正合列：

$$1 \to \Pi_{K_s}(B^*) \to \Pi_K(B^*) \to \mathrm{Gal}(K_s/K) \to 1. \tag{4}$$

每当我们有如下形式的副有限群正合列时：

$$1 \to N \to G \to H \to 1,$$

商群 H 通过其在 G 中的原像，以共轭的方式作用于 N。然而，这个作用只在模去 N 的内自同构后才良定义，因此得到一个连续同态 $H \to \mathrm{Out}(N)$。在我们的情形中，这个

映射为:

$$\phi_K\colon \mathrm{Gal}(K_s/K) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_{K_s}(B^*)).$$

关于这个同态会产生一些有趣的问题，例如：对于各种域K 和簇 B^*，它的像或核是什么?

这一构造的一个深刻应用是考虑 $K=\mathbb{Q}$ 和 $B=\mathbb{P}^1$ 且分歧轨迹为 $D=\{P_1,\dots,P_s\}$的情形。相应带穿孔曲线的拓扑基本群 $B^*=\mathbb{P}^1-\{P_1,\dots,P_s\}$是由 $s-1$ 个自由生成元生成的自由群 F_{s-1}，其表示为

$$F_{s-1}=\langle x_1,x_2,\dots,x_{s-1},x_s \mid x_1x_2\cdots x_{s-1}x_s\rangle,$$

其中每个生成元 x_i 都表示绕穿孔 P_i的环路的一个同伦类。因此， $\Pi_{\mathbb{Q}}(B^*)$成为由 $s-1$ 个生成元生成的自由副有限群 $\mathfrak{F}_{s-1}$。如果我们改为用 Ω_D 替换 $\Omega_{D,\ell}$，那么 $\Pi_{\mathbb{Q}}(B^*)$就成为由 $s-1$ 个生成元生成的自由 pro-ℓ 群。

20世纪80年代，Grothendieck [36], 、Deligne [25], 、Belyi [5] 和 Ihara [40], 等几位杰出的数学家独立研究了这类大型伽罗瓦表示。本文采用 Ihara 关于副有限辫的观点，详见 [40]。关于现代教科书式的论述，请参阅 [71, 第4]章。

在开创性论文 [40], 中，Ihara 考虑了 pro-ℓ 框架下的情形 $B^*=\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$，并证明 $\phi_{\mathbb{Q}}$的像：$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})\to\mathrm{Out}(\mathfrak{F}_2)$，由下式给出

$$\mathrm{Im}(\phi_{\mathbb{Q}})=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_2):\sigma(x_i)\cong x_i^{\alpha},1\le i\le 3,\ \alpha\in\mathbb{Z}_\ell^*\}/\mathrm{Inn}(\mathfrak{F}_2),$$

其中符号“≅”表示 $\mathfrak{F}_2$ 中的共轭，而 α 仅取决于 σ，与生成元的选取无关 x_i。事实上， α 与 ℓ-分圆特征 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})\to\mathbb{Z}_\ell^*$ 一致。

更一般地，Ihara 考虑了一个 pro-ℓ 群 $\mathfrak{B}$，并对生成 $\mathfrak{B}$ 的元素 $x_1,\dots,x_s$ 定义了副有限辫群为

$$\mathrm{Brd}(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\mathfrak{B}:\sigma(x_i)\cong x_i^{\alpha},1\le i\le s \text{ for some } \alpha\in\mathbb{Z}_\ell^*\}/\mathrm{Inn}\mathfrak{B},$$

其中包含正规子群

$$\mathrm{Brd}_1(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\mathfrak{B}:\sigma(x_i)\cong x_i,1\le i\le s\}/\mathrm{Inn}\mathfrak{B}.$$

在这一特殊情形下，可以定义范数映射:

$$\begin{aligned} N\colon \mathrm{Brd}(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s) &\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^* \\ \sigma &\longmapsto \alpha \quad \text{such that } \sigma(x_i)\cong x_i^{\alpha} \text{ for all } i. \end{aligned}$$

Ihara 进一步证明，这给出了短正合列

$$1\to \mathrm{Brd}_1(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s)\longrightarrow \mathrm{Brd}(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s)\xrightarrow{N}\mathbb{Z}_\ell^*\longrightarrow 1. \tag{5}$$

在讨论映射类群之后，我们将能够把群 $\mathrm{Brd}_1(\mathfrak{B};x_1,\dots,x_s)$ 看作 B^* 的无向映射类群的伽罗瓦拟有限类比。在 pro-ℓ 情形下，对于 $B^*=\mathbb{P}^1-\{P_1,\dots,P_s\}$，有

$$\begin{aligned} \phi_K(\mathrm{Gal}(K_s/K))&\le \mathrm{Brd}(\mathfrak{F}_{s-1};x_1,\dots,x_s),\\ \phi_K(\mathrm{Gal}(K_s/K(\mu_{\ell^\infty}))&\le \mathrm{Brd}_1(\mathfrak{F}_{s-1};x_1,\dots,x_s), \end{aligned}$$

其中 $K(\mu_{\ell^\infty})=\bigcup_{n=1}^{\infty}K(\mu_{\ell^n})$，而 μ_{ℓ^n} 表示 ℓ^n 次单位根群。

ϕ_K to $\mathrm{Brd}(\mathfrak{F}_{s-1};x_1,\dots,x_s)$目标的细化被称为 *Ihara*表示，它是映射 Ih: $\mathrm{Gal}(K_s/K)\to\mathrm{Brd}(\mathfrak{F}_{s-1};x_1,\dots,x_s)$。我们将 Ih 的像中的元素称为“算术的”。

注6。对于 $B^*=\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$，Ihara 和 Anderson 在 [2] 中给出了核和不动域 $\Omega_{D,\ell}^{\ker\phi_{\mathbb{Q}}}$，的完整描述。他们证明，该不动域是 $\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})$ 的非阿贝尔 pro-ℓ 扩张，在 ℓ 之外非分歧。随后他们提出了以下问题：$\Omega_{D,\ell}^{\ker\phi_{\mathbb{Q}}}$，是否是 $\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})$ 在 ℓ 之外非分歧的最大 pro-ℓ 扩张?

当 ℓ 是奇正则素数时，答案是肯定的。这是一个深刻的结果，源于 Sharifi 对 Deligne-Ihara猜想的 [67] 部分所做的工作；该猜想近年由 Brown[16]证明。对于所有素数，这个问题仍未解决。此外，与 Ihara 的问题相关的是挠

阿贝尔簇的点，这些簇是覆盖 $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$的曲线的雅可比簇；也就是说，存在一些雅可比簇 J，其上有 ℓ 幂挠点 $J[\ell^\infty]$，使得 $\mathbb{Q}(J[\ell^n])$包含在 $\mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})$的最大 pro-$\ell$ 扩张中，且该扩张在 ℓ之外非分歧。因此，这个问题或许可以通过此类曲线的例子来探讨。关于近期提出的天界阿贝尔簇 A 及相关猜想，可参见 [61] [62]；这些猜想满足 $K(A[\ell^\infty])\subset K(\mu_{\ell^\infty})$的最大扩张在 ℓ之外非分歧。

ˆ 在副有限情形中，构造仿射有限辫群时，必须考虑 Ω_D 和 $\mathbb{Z}$，而不是 $\Omega_{D,\ell}$ 和 $\mathbb{Z}_\ell$；并且要使用副有限群 $\mathfrak{B}$，而不是 pro-ℓ 群。不过，由于贝利定理 [5]，前述关于$B^*=\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ 的备注在副有限情形下会有很大不同。该定理指出，复数域 $\mathbb{C}$ 上的每条代数曲线 X 都存在一个 $\mathbb{Q}$-模型，当且仅当存在一个分歧覆盖映射 $f\colon X\to\mathbb{P}^1$，且其在 $\mathbb{P}^1$中的三个点处分歧。因此，映射 $\phi_{\mathbb{Q}}$ 变为单射，即 $\phi_{\mathbb{Q}}$: 伽罗瓦群$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ →外自同构群$(\mathfrak{F}_2)$。这本身就十分有趣，因为它将 $\mathbb{Q}$上的绝对伽罗瓦群嵌入到由两个生成元生成的自由副有限群的外自同构群中；前者源于对数域的研究，而后者则是一个纯粹的组合对象。

贝利定理还为正合列 4 提供了一个有用的截面，即所谓的贝利代表。Ihara 在 [40] 中利用它，通过提升 $\phi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_2)$ 中的像来研究副有限辫。另一个类似且重要的构造是 Deligne 的切向基点，该构造在 [25] 中引入。

备注 7. 一般而言，众所周知，选择一个 K-有理点作为 B^* 中的基点，会使正合列 (4) 分裂。这可通过将 Ω_D 嵌入完备化域 $K_s((t))$ 来证明，其中 t 是 K-有理点处的局部一致化参数；参见 [21，第 220] 页。

在拓扑情形下，类似的分裂条件可以用映射类群来表述。在下一小节中，我们将给出一个同时适用于拓扑和算术背景的群论证明，参见命题 11。

3.2. **拓扑。** 考虑一个定向曲面 S，令 $\mathrm{Homeo}^+(S)$ 表示 S 上保定向同胚的同伦类所成的群。令 $\mathrm{Homeo}^0(S)$ 表示紧开拓扑下的恒等连通分支。S 的映射类群 $\mathrm{Mod}(S)$ 是以下商群：

$$\mathrm{Mod}(S)=\mathrm{Homeo}^+(S)/\mathrm{Homeo}^0(S).$$

我们也用 $\mathrm{Mod}^\pm(S)$ 表示扩展映射类群，它是 S 上所有同胚（包括反转定向的同胚）的同伦类所成的群。群之间有一个众所周知的正合列

$$1\to\mathrm{Mod}(S)\to\mathrm{Mod}^\pm(S)\to\mathbb{Z}^*\to 1, \tag{6}$$

其中 $\mathbb{Z}^*=\{\pm1\}$ 是环 $\mathbb{Z}$ 的单位群；参见 [28, 第 8] 章。我们可以将其视为正合列 (5) 的离散类比，前提是将这些群解释为拓扑基本群的外自同构，并探究它们与辫群的联系。

阿廷辫群 B_{s-1}（有 $s-1$ 股）是由 $s-2$ 个生成元 $\sigma_1,\dots,\sigma_{s-2}$ 生成、满足以下辫关系的群：

$$\begin{aligned}\sigma_i\sigma_j&=\sigma_j\sigma_i, && \text{if } |i-j|\geq 2,\\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i&=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, && i=1,2,\dots,s-2.\end{aligned}$$

为与数论视角相联系，我们将其视为自由群 F_{s-1}的自同构群的忠实表示，该表示称为 阿廷表示；见 [8, Cor. 1.8.3]。更确切地说，存在一个群同态

$$\mathrm{Ar}\colon B_{s-1}\to\mathrm{Aut}(F_{s-1}),$$

其中，略微滥用记号，将每个辫群生成元 σ_i 映射为 $F_{s-1}=\langle x_1,x_2,\dots,x_{s-1},x_s\mid x_1x_2\cdots x_{s-1}x_s=1\rangle$ 的一个自同构 σ_i，满足

$$\sigma_i(x_k)=\begin{cases}x_i & \text{if } k=i+1,\\ x_ix_{i+1}x_i^{-1} & \text{if } k=i,\\ x_k & \text{otherwise.}\end{cases}$$

特别地，存在 $s-2$个生成元 σ_i，它们都满足 $\sigma_i(x_1x_2\cdots x_{s-1})=x_1x_2\cdots x_{s-1}$。存在 B_{s-1}的一个正规子群 P_{s-1}，即所谓的 纯辫群，其有 $s-1$ 股；在阿廷表示下，它被识别为

$$P_{s-1}=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(F_{s-1}):\sigma(x_i)\cong x_i,\ i=1,2,\dots,s\},$$

这里，“≅”同样表示共轭。这解释了为何相应的算术对象被称为“副有限辫”。尽管在这种情形下无需对内自同构取商，但辫群的一个商将成为 $\mathbb{P}^1$ 减去 s 个点的映射类群，从而与算术情形恰当地对应。

现在我们说明辫群如何在拓扑上作为映射类群出现。设 D_{s-1} 表示带有 $s-1$ 个标记点的圆盘，D_{s-1} 表示去掉了 $s-1$ 个开圆盘、从而形成 $s-1$ 个内部圆形边界的圆盘。对于 D_{s-1}，如果假设每个同胚都保持标记点集合不变，则得到全辫群 B_{s-1}，即 $\mathbf{Mod}(D_{s-1})$；参见 [28, 9.1.3], [44, Ch.1]。如果改为假设标记点集合中的每个点都固定不动，则得到纯辫群 P_{s-1} 作为映射类群。对于 D_{s-1}，如果要求每个同胚在边界上限制为恒等映射，则得到纯框架辫群 $\mathscr{H}_{s-1} = \mathbb{Z}^{s-1} \rtimes P_{s-1}$作为映射类群；参见 [13], [28, Ch. 2, P. 45], [60, Th. 7.6]。

注记 8. 空间 D_{s-1} 和 D_{s-1} 的基本群同构，但映射类群不同。事实上，存在一个“封口映射”，其构造方式是用一次穿孔圆盘封住每个边界分支。由 [28, 命题 3.19] 可得以下正合列：

$$1 \to \langle T_b \rangle \to \mathrm{Mod}(S, \{p_1, \dots, p_k\}) \to \mathrm{Mod}(S', \{p_0, \dots, p_k\}) \to 1,$$

其中 S' 是通过用一个带单个标记点的圆盘封住边界分支 b 得到的曲面，我们称之为p_0。令 $\mathbf{Mod}(S, \{p_1, \dots, p_k\})$ 表示 $\mathbf{Mod}(S)$ 的子群，其中的元素固定穿孔点$p_1, \dots, p_k$, $k \geq 1$。核 $\langle T_b \rangle$ 由对应于边界分支 b的德恩扭转生成。

回忆一下，$S_{g,\ n}$ 表示一个曲面，其中 g 是曲面的亏格，n 是穿孔点的数量 s.

例 9. $\mathbb{P}^1 - \{P_1, \dots, P_s\}$ 的映射类群是由 s 股组成的球辫群，记作 $\mathbf{Mod}(S_{0,s})$。它是辫群 B_{s-1} 添加两条关系后得到的商，其表示如下 [28, P. 123]:

$$\mathrm{Mod}(S_{0,s}) = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{s-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ |i-j| \geq 2, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ 1 \leq i \leq s-2, \\ (\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1})^s = 1, \\ (\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_{s-1} \cdots \sigma_1) = 1 \end{array} \right\rangle. \tag{7}$$

考虑这样一种情形很有意思：其中一个穿孔点，比如说 $P_s = \infty$，被逐点固定，这反映了人们可能预期在伽罗瓦群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ 的作用下出现的固定行为。注意，$\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ 与开圆盘 D° 同胚。其余穿孔点 $\{P_2, \dots, P_s\} \subset D^\circ$ 可视为标记点；若允许置换这些点的同胚，映射类群便成为

$$\mathrm{Mod}(D^\circ - \{P_2, \dots, P_s\}) = B_{s-1}/Z(B_{s-1}),$$

其中 $Z(B_n)$ 是 B_n 的中心，由德恩扭转 $(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})^n$ 生成。其做法是对闭圆盘 D_{s-1} 上位于第∞个穿孔处的边界进行封口。封口操作给出正合列

$$1 \to Z(B_{s-1}) \to \mathrm{Mod}(D_{s-1}) = B_{s-1} \to \mathrm{Mod}(S_{0,s}),$$

这表明 $B_{s-1}/Z(B_{s-1})$ 同构于 $\mathbf{Mod}(S_{0,n})$ 的一个子群，该子群由固定∞处穿孔点的元素组成。此外，这个子群的指数为 $s-1$。更详细的讨论见 [28, P. 248]。这与如下事实相符：我们可以将 $x_s \in F_{s-1} = \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{P_1, \dots, P_{s-1}, \infty\})$ 取为绕∞处穿孔点的环路的同伦类。于是，由于 B_{s-1} 中的任意辫子都固定 $x_1x_2 \cdots x_{s-1}$，它也固定 x_s。

带穿孔和无穿孔曲面的映射类群的代数结构由以下定理给出。没有穿孔时，我们使用记号 $S_g = S_{g,0}$ 。回顾一下，如果 $2-2g-n < 0$，则 $S_{g,n}$ 是双曲的。群 $\mathbf{Out}^*(\pi_1(S_{g,n}, b_0))$ 表示 $\mathbf{Out}(\pi_1(S_{g,n}, b_0))$ 的子群，其中包含所有保持围绕各个穿孔点的简单闭曲线的共轭类集合的元素。

定理 10（德恩–尼尔森–贝尔）。对于 $g \geq 1$ 和 S_g “闭”曲面，即无边界的紧曲面，存在一个同构

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(S_g) \cong \mathrm{Out}(\pi_1(S_g, b_0)).$$

对于 $g \geq 0$ 和 $S_{g,\ n}$ 双曲曲面，存在群的典范同构

$$\mathrm{Mod}^{\pm}(S_{g,n}) \cong \mathrm{Out}^{*}(\pi_1(S_{g,n}, b_0)).$$

证明。 参见 [28, Th. 8.1] 和 [28,Th. 8.8]。 □

基于上述讨论，我们现在构造一个正合列，作为算术短正合序列 (4) 的拓扑类比。

对于 Mod(B^*) 中的元素 h，我们将其对应的自同构类记为 $h_* \in \mathrm{Out}^*(\pi_1(S_{g,\ n}, b_0))$。设 $\pi\colon X^\circ \to B^*$ 是双曲曲面的一个拓扑覆盖，并设 $R \leq \pi_1(B^*, b_0)$ 是一个子群，满足$\sim B^*/R = X^\circ$。假设存在一个子群 $A \leq$ Mod(B^*)，使得对于所有 $a \in A$，诱导自同构$a_*([R]) = [R]$，其中 $[R]$ 表示 $R \leq \pi_1(B^*, b_0)$ 的共轭类。对于这些数据，即与 R 和群 A 相对应的覆盖$\pi\colon X^\circ \to B^*$，我们赋予如下正合列

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \Pi_{A,X^\circ} \to A \to 1, \tag{8}$$

其中，$\Pi_{A,\ X^\circ}$ 是 $\{\sigma \in \mathrm{Aut}(\pi_1(B^*, b_0))\colon\ \sigma([R]) = [R]\}$ 中与 A 对应的子群（依据定理 10 的同构），因为 Mod(B^*) $\to$ Mod$^{\pm}$(B^*)。$\Pi_{A,\ X^\circ} \to A$ 的核是群 Inn($\pi_1(B^*, b_0)$)。然而，在双曲情形下，群 $\pi_1(B^*, b_0)$，或者更一般地，任何福克斯群，其中心都是平凡的。因此，其内自同构与群本身重合。若考虑 X° 是 B^* 的万有覆盖的情形，即 $R = 1$ 时，Mod(B^*) 的每个子群都保持 $[R]$。因此，对于任意 $A \leq$ Mod(B^*)，都存在一个自同构群 $\Pi_A \leq \mathrm{Aut}(\pi_1(B^*, b_0))$，使其构成如下正合列：

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \Pi_A \to A \to 1, \tag{9}$$

特别地，对于 $A =$模群(B^*)，我们得到：

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)} \to \mathrm{Mod}(B^*) \to 1. \tag{10}$$

该正合列与算术正合列 (4) 相呼应，并突出了算术情形中的伽罗瓦群与拓扑情形中的映射类群所扮演角色之间的类比。

注意，在 $A = \{1\}$ 的特殊情形下，我们得到 $\Pi_1 = \pi_1(B^*)$。现在我们给出一个判据，用于判断式 (9) 的分裂，该判据类似于备注 7，其证明同时涵盖算术情形和拓扑情形。

命题 11. 式 *(9)* 的短正合列

$$1 \to \pi_1(B^*) \to \Pi_A \to A \to 1.$$

如果存在分裂 存在一个点 P，使得所有 $\sigma \in A$ 都有一个同胚代表元 $\widehat{\ }\sigma$，该代表元固定 P。

证明。设 $s\colon A \to$ Homeo+(B^*) 是一个集合论截面，并设 $P \in B^*$ 是一个由 A 通过 $\sim s(\sigma) = \widehat{\ }\sigma$ 固定的点，即对所有 $\sigma \in A$ 均成立。记 $\pi\colon B^* \to B^*$ 为万有覆盖空间的投影。注意， B^* 中的任意点都是非分歧的，因此 Π_1 在任意点 $b \in B^*$ 的纤维 $\pi^{-1}(b)$ 上传递地作用。此外，通过 s，点 P 是 A-不变量，且 A 作用于纤维 $\pi^{-1}(P)$。取纤维 $\pi^{-1}(P)$ 中的一个点 Q。由覆盖空间提升性质 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，[31, 13.5] 存在唯一的同胚 $\tilde{\sigma}\colon B^* \to B^*$，使得 $\tilde{\sigma}(Q) = Q$ 且 $\widehat{\ }\sigma \circ \pi = \pi \circ \tilde{\sigma}$。唯一性源于这样一个事实：固定纤维中的点 Q 等价于固定 B^* 中位于 B^* 基点上方的一个基点 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。特别地，每个 $\tilde{\sigma}$ 都是保向同胚群 Homeo+($\widetilde{B^*}$) 中 Deck(B^*/B^*) 的正规化子里的元素。考虑余循环 $c(\sigma, \sigma') = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'\widetilde{\sigma\sigma'}^{-1}$. $\widetilde{\ }$ 这是 $\Pi_1 \cong$ Deck(B^*/B^*) 的一个元素，因为它在 B^* 上的限制是经由 π 得到的恒等映射。根据定义， $c(\sigma, \sigma')$ 稳定 Q；然而，由于 P 非分歧， $c(\sigma, \sigma')$ 是平凡的，这是因为 Π_1 对纤维的作用具有传递性。因此， $\widetilde{\sigma\sigma'} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'$，由唯一性可得 $\widehat{\sigma\sigma'} = \widehat{\ }\sigma\widehat{\ }\sigma'$，即 s 是一个同态。结论随之成立，因为映射 $A \to \Pi_A \leq \mathrm{Aut}(\pi_1(B^*))$，其定义为 $\sigma \mapsto s(\sigma)_*$，也是一个同态。

□

正合列 10 有一种由 Birman 提出的拓扑解释。若我们在 B^* 中标记一个新点b_0，并考虑群 Mod(B^*, b_0)，就可以通过遗忘这个标记点，将其满射到 Mod(B^*)。通过将 b_0 的环路视为该点的同伦，并将它们推送为映射类，可以发现这个映射的核为 $\pi_1(B^*, b_0)$。关于构造的具体细节，参见 [28, 第 4.2 章。1] 由此得到伯曼正合列：

$$1 \to \pi_1(B^*, b_0) \to \mathrm{Mod}(B^*, b_0) \to \mathrm{Mod}(B^*) \to 1. \tag{11}$$

令 $\mathrm{Aut}^*(\pi_1(B^*, b_0))$ 表示与 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 对应的自同构群子群，其中的对应关系由 Dehn-Nielsen-Baer 定理给出。我们针对当前情境改编了 [28, 第 235] 页中的构造。考虑以下图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(B^*, b_0) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(B^*, b_0) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(B^*) & \longrightarrow & 1 \\ & & \cong\downarrow & & \vdots & & \downarrow\cong & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(\pi_1(B^*, b_0)) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}^*(\pi_1(B^*, b_0)) & \longrightarrow & \mathrm{Out}^*(\pi_1(B^*, b_0)) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

如果用一个同态替代虚线箭头，使图交换，那么短五引理表明该同态是同构。这个同态确实存在：指定标记点 b_0 为基本群的基点即可。要求 b_0 始终固定为唯一的标记点这一事实，确保我们得到的是真正的自同构，而不是外自同构，因为对 π_1（B^*, b_0）进行共轭会改变基点。更准确地说，我们有 $\mathrm{Mod}(B^*, b_0) \cong \mathrm{Out}^*(\pi_1(B^* - \{b_0\}))$，并且对每个外自同构类 ϕ，都存在唯一一个逐点固定绕 b_0 点的环路的代表元。此外，这个代表元就是所需的 $\pi_1(B^*, b_0)$ 自同构。因此，伯曼正合列 11 与正合列 10 等价。值得注意的是，无穿孔曲面 S_g 的伯曼正合列版本并不分裂，这一点也在 [28] 中得到了证明。然而，在带 puncture 的情形下，分裂可能发生，尽管很少见。例如，对于带 s 个穿孔点的圆盘的纯映射类群，我们有如下纯辫群正合列

$$1 \to F_{s-1} \to P_s \to P_{s-1} \to 1,$$

通过添加一条额外的辫股，将 P_{s-1} 嵌入 P_s，即可得到分裂。然而，由于 $\mathrm{Mod}(S_{0,\ s})$ 的表示，我们无法将这一论证用于带 puncture 的射影直线。

这一现象与算术情形相呼应：算术正合列 (4) 的截面对应于 K-有理点，而这类点往往不存在。因此，在拓扑和算术这两种背景下，我们所考虑的正合列的分裂都面临着一个重要障碍。

3.3. 常用记号。 在前几小节中，我们探讨了 B_{s-1} 中的辫与 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 中元素之间的相似性。具体而言，通过分别经由 Artin 表示和 Ihara 表示作适当的提升，两者都可以分别视为 $\mathrm{Aut}(F_{s-1})$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{F}_{s-1})$ 中的元素。pro-ℓ 自由群 $\mathfrak{F}_{s-1}$ 及其自同构群，是离散情形的插值，即 F_{s-1}，$\to$ $\mathfrak{F}_{s-1}$。这一情形令人联想到刚性几何或形式几何，见 [30], [37, 第 9] 章。这种相似性源于一个更深层的事实：映射类群和 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 分别在基本群及其前有限完备化上作用为外自同构。

更具体地说，纯辫群 P_{s-1} 中的元素可以看作带穿孔的圆盘的映射类群中的元素，而该圆盘同胚于射影直线去掉 s 个点后的空间。全辫群中的元素在穿孔点集合 Σ上如同置换一样作用。这些元素还以相当复杂的同胚方式作用于 D_{s-1} 个 $s-1$ 点的补集上。群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 的作用方式完全相同，即通过置换作用于分歧的（$s-1$）个点的集合，其中点 ∞ 相对于伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 的作用而言，是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-不变量的，这里 $L/\mathbb{Q}$ 是某个有限扩张。此外，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 以一种颇为“神秘”的方式作用于补集 $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} - \Sigma$。

就算术拓扑而言，也就是研究素数与纽结之间的类比，参见 [54],我们给出如下相似性。在 B_{s-1} 或 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 中，纽结和素数都是群元素的共轭类。事实上，纽结形式上是三维流形上的 S^1 的单射，而链环是它们的不交并；根据亚历山大定理 [44, Thm. 2.3]，二者都可以切割成辫群。根据马尔可夫定理[44, Thm. 2.8]，，如果两个辫群在 B_{s-1} 中（严格地）同样闭包，则它们诱导出同一个纽结或链环，当且仅当这两个辫群共轭。在算术意义下，取一个位于 $\mathbb{Q}$ 之上的素数 p，这对应于作出选择 $\overline{\mathbb{Q}}$，$\to \overline{\mathbb{Q}}_p$。群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ 同构于素数 p 的分解群 D_p，并且在共轭意义下嵌入ˆ到 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 中。如果 I_p 是 p 的惯性群，那么存在一个同构 $D_p/I_p \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}$，其中后者在拓扑上由 p 的弗罗贝尼乌斯自同构生成。也就是说，从商中提升之后，我们可以将素数 p 看作 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 中的一个共轭类。

注 12. $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ 的 étale 基本群是 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}}$，而 $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$。这进一步体现了素数与纽结之间的类比，并凸显了 profinite 完备化如何在离散世界与连续世界之间起到调和作用。

我们将前两节的核心对应关系总结在下表中：

数论	拓扑学
伽罗瓦群$(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$	模群(B^*)
$\Pi_K/\Pi_{K_s} \cong$伽罗瓦群(K_s/K)	$\Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)}\ /\pi_1(B^*) \cong$模群$(B^*)$
$\phi_K(\mathrm{Gal}(K_s/K)) \leq \mathrm{Out}(\Pi_{K_s}(B^*))$	模群$(B^*) \leq \mathrm{Out}(\pi_1(B^*))$
$\mathrm{Brd}/\mathrm{Brd}_1 \cong \mathbb{Z}_\ell^*$	模群$^{\pm}(B^*)$/模群$(B^*) \cong \mathbb{Z}^*$
Ih : 伽罗瓦群$(K_s/K) \to \mathrm{Brd}(\mathfrak{F}_{s-1})$ 以及基点提升到自同构群$(\mathfrak{F}_{s-1})$	阿廷表示：$B_{s-1} \to$ 自同构群(F_{s-1})
素数：伽罗瓦群$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$中的共轭类	结：B_{s-1}中的共轭类

3.4. 椭圆曲线上的非忠实作用示例。 在本例中，我们研究椭圆曲线及辫群在其基本群上的作用。设 E 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、具有短魏尔斯特拉斯方程 $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ 的椭圆曲线。映射 $E \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$（由 $(x,y) \to x$ 定义）给出一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分歧覆盖，其从射影直线出发，在四个点 $\{0,1,\lambda,\infty\}$ 处分歧。$\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\lambda,\infty\}$ 的拓扑基本群是自由群

$$F_3 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 : x_1x_2x_3x_4 = 1\rangle,$$

其中，x_1, x_2, x_3 是绕着点 $0, 1, \lambda$ 和 $x_4 =$ 的环路，$x_1x_2x_3^{-1}$ 是绕着点 ∞的环路。调整记号，使其与 [48], 中的记号对应，开非分歧覆盖 E° 对应于自由群 R_2。使用 Reidemeister–Schreier 方法 [14] ，R_2 的一组自由生成元为

$$\{x_jx_1^{-1}, j = 2,3\} \cup \{x_1x_j, j = 1,2,3\},$$

参见 [48, 引理 13]。一方面，辫群 B_3 通过阿廷表示忠实地作用于 F_3 ，并保持∞ 不变量。另一方面，辫群 B_4 的作用不忠实，因为带 puncture 的射影直线的映射类群是式（7）给出的球辫群，即

$$\mathrm{Mod}(S_{0,4}) = B_4/\langle(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4, (\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1)\rangle,$$

另见 [48, 备注 3]。元素 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是群 F_3 的自同构，其作用方式如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1) &= x_1x_2x_1^{-1}, & \sigma_1(x_2) &= x_1, & \sigma_1(x_3) &= x_3, & \sigma_1(x_4) &= x_4,\\
\sigma_2(x_1) &= x_1, & \sigma_2(x_2) &= x_2x_3x_2^{-1}, & \sigma_2(x_3) &= x_2, & \sigma_2(x_4) &= x_4,\\
\sigma_3(x_1) &= x_1, & \sigma_3(x_2) &= x_2, & \sigma_3(x_3) &= x_3x_4x_3^{-1}, & \sigma_3(x_4) &= x_3.
\end{aligned}$$

由于 $x_4 = x_3^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}$，对 x_4 的作用由前三列决定。特别地，$\sigma_3(x_3) = x_2^{-1}x_1^{-1}x_3^{-1}$。

经过直接计算可验证，群 B_4 作用于自由群 R_2，即对所有 $\sigma \in B_4$，$\sigma(R_2) = R_2$ ，且 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$ 和 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2\sigma_1)$ 均为平凡作用。例如，

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_2x_1^{-1}) &= x_1x_1x_2^{-1}x_1^{-1} = (x_1)^2(x_1x_2)^{-1}.\\
\sigma_2(x_3x_1^{-1}) &= x_2x_1^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，我们有 B_4 在 $\pi_1(E^\circ) \simeq R_2 \leq \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0,1,\lambda,\infty\})$ 上的非忠实作用。此外，B_4 的作用保留了 F_3 内的正规闭包 $\langle x_i^2,\ 1 \leq i \leq 4\rangle$，以及 $R_2' = [R_2, R_2]$。通过紧化尖点，我们得到

$$\pi_1(E(\mathbb{C})) = H_1(E(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \cong \frac{R_2}{R_2' \cdot \langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\rangle},$$

它可以　　表示为 $\pi_1(E^\circ)$ 的一个商，因此我们有 B_4 在 $\pi_1(E(\mathbb{C})$ 上的非忠实作用　　).

注意，这并不意味着可以通过某些自同态在椭圆曲线 E 本身上诱导出 B_4 的作用。根据 [48, 第 20], 页，表示 $\pi_1(E(\mathbb{C}))$ 为 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的两个元素，是 R_2 的商中的 x_2x_1 和 x_3x_1。在此基底上的作用给出了一个取值于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的表示，

$$\sigma_1, \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

例如，$\sigma_2(x_2x_1) = x_2x_3x_2^{-1}x_1 = 2x_2x_1 - x_3x_1$ 其中等式模 $R_2'\langle x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\rangle$成立。特别地，$\sigma_1\sigma_3^{-1}$作用平凡。

障碍在于，这两个矩阵都不对应于复数乘法。回顾 [68, 第 4], 章， E 与 $\mathbb{C}/\Lambda$同构，其中 Λ 是一个格，例如由 ω_1,ω_2生成。根据 [68, 命题 5.6],$H_1(E(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$作为阿贝尔群与 Λ 同构；根据[68, 定理 4.1] ， E 的自同态对应于满足 $\alpha\Lambda\subseteq\Lambda$的复数 α。然而，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$中的像 σ_i对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$都不满足 $\sigma_i(\omega_1,\omega_2)^T=\alpha(\omega_1,\omega_2)^T$。因此，在此情形下， B_4 作用并非源于自同态。

注记 13. 我们想指出，这与 Seidel 和 Thomas 的论文 [65], 中所考察的作用有关。他们证明，在维数为 ≥ 2 的 Calabi-Yau 流形的相干层有界导出范畴 $\mathrm{D^b}(X)$ 上存在忠实作用。然而， B_4 在 $\mathrm{D^b}(E)$ 上的作用并不忠实，其中 E 是一条椭圆曲线，参见 [65, 第 3 节d]。值得注意的是， $\pi_1(E(\mathbb{C}))$ 也存在非忠实作用，但它并非作用在曲线本身上。这两种作用的相似之处恰恰在于：它们在 E 的不变量上都有非忠实作用，而这些作用并非由 E 本身上的作用诱导而来。

4. 曲线、簇及其单值化上的群作用

W我们以一段较长的引言作为本节的开篇，旨在阐明以下问题背后的思路：应当如何理解一个拓扑空间（带局部环）的群作用？更确切地说，我们应该研究哪一种才是“正确的”群作用？

那么，我们从一个（局部）环化空间（$X,\mathscr{O}_X$）以及另一个记作 ${}^hX$ 的拓扑空间开始，并给定它们之间的一个同胚 $h\colon X\to {}^hX$。相关记号将在后续章节中变得更加清晰。现在，我们可以把 ${}^hX$ 理解为群元素 h 作用于 X 后得到的拓扑空间。为简化记号，我们也用 h 表示由此得到的同胚。

我们的目标是在 ${}^hX$ 上定义一个（局部）环化空间结构。为此，我们将 ${}^hX=h$（X）的结构层 $\mathscr{O}_{{}^hX}$ 定义为诱导结构层，即沿 h 拉回截面。具体而言，对于任意开集$U\subseteq {}^hX$，我们规定：

$$\mathscr{O}_{{}^hX}(U)=\mathscr{O}_X(h^{-1}U).$$

这就在 ${}^hX$ 上定义了一个环层，使（${}^hX,\mathscr{O}_{{}^hX}$）成为一个（局部）环化空间。相应的（局部）环化空间态射记作：

$$\tilde{h}\colon (X,\mathscr{O}_X)\to({}^hX,\mathscr{O}_{{}^hX}).$$

回忆一下， 对于一个层 $\mathscr{F}$，我们用 $\tilde{h}^{-1}\mathscr{F}$ 表示它在 $\tilde{h}$ 下的逆像。根据定义，这意味着 s:

$$\tilde{h}^{-1}\mathscr{F}(U)=\mathscr{F}(h(U)),\text{ for all open sets }U\subseteq X.$$

注意，无需像 [37, 第 65], 页那样，考虑对覆盖 $h(U)$ 的开集取极限，因为 h 是一个同胚，且 $h(U)$ 先验地是开集。还要注意， $\tilde{h}^{-1}\mathscr{O}_{{}^hX}=\mathscr{O}_X$。因此，映射 $\tilde{h}\colon X\to {}^hX$ 是局部赋环空间意义下的满射开浸入，即 h 是一个同胚，且 $h^{-1}\mathscr{O}_{{}^hX}\to\mathscr{O}_X$ 是一个同构。由此可知，在此情形下，拉回函子 $\tilde{h}^*$ 与 $\tilde{h}^{-1}$ 重合，因为逆像已经给出了 $\mathscr{O}_X$-模层。

现在假设 X 具有复流形结构，且 (U,z_U) 是 X 上的一组全纯图册，其中 $z_U\colon U\to\mathbb{C}^n$，那么 ${}^hX$ 也继承了复流形结构，其图册为 $(h(U),z_U\circ h^{-1})$,

$$\begin{array}{ccccc} {}^hX & \xrightarrow{h^{-1}} & X & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ h(U) & \xrightarrow{h^{-1}} & U & \xrightarrow{z_U} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

请注意， ${}^hX$ 中的所有过渡函数都是全纯的，尽管 h 本身未必是全纯的。事实上，若$h(U_a)\cap h(U_b)\neq\varnothing$，则交集上的过渡映射由 $z_{U_a}\circ h^{-1}\circ(z_{U_b}\circ h^{-1})^{-1}=z_{U_a}\circ z_{U_b}^{-1}$给出。由于它是来自原流形 X的过渡映射，因此是全纯的。

特别地，对于 $\mathbb{C}$上的代数曲线，等价地，对于紧黎曼曲面，这种构造保留局部解析结构。若 z_P 是 $P\in X$处的局部一致化参数，则 $h(z_P)$是$h(P)\in {}^hX$处的局部一致化参数。这意味着元素 $f=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z_P^\nu\in\widehat{\mathscr{O}}_P$被映射到 $h(f)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu h(z_P)^\nu\in\widehat{\mathscr{O}}_{hP}$。

注记 14。 我们希望捕捉的基本思想是：可以通过同构或同胚作用于空间 X ，从而对其进行“扭曲”，然后考察所得空间上的诱导结构。然而，仅此并不特别有趣：这种扭曲所得到的空间作为一个（局部）环化空间，与原空间是平凡同构的。

相反，在下文中，我们将同时扭曲拓扑空间 X 及其结构层。在这种情况下，所得的（局部）环化空间不再先验地与原空间同构。这为研究真正影响结构的非平凡对称性或变形打开了大门，而不只是对其进行简单的重新标记。

4.1. 算术作用。 我们先考虑经典代数集（仿射情形）上的作用，然后再推广到更抽象的概形世界。

回顾一下， K 是一个特征为 $p \geq 0$ 的域，且 K_s 是 K的一个固定可分闭包。任意 L-概形（其中$K \subseteq L \subseteq K_s$）都可以通过标量扩张视为一个 K_s-概形。因此，本章中我们始终在 K_s上进行讨论。考虑绝对伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$。每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$都定义了一个双射

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}\colon K_s^n &\longrightarrow K_s^n \\ (y_1,\dots,y_n) &\longmapsto \big(\sigma(y_1),\dots,\sigma(y_n)\big). \end{aligned}$$

此外，对于每个多项式 $P \in K_s[z_1,\dots,z_n]$，我们用 ${}^{\sigma}P$表示对 P的系数施加 σ后得到的多项式。对于每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$，我们用$\widehat{\ }\sigma$ 表示映射 $K_s[x_1,\dots,x_n] \to K_s[x_1,\dots,x_n]$，它将多项式 P映射为$\widehat{\ }\sigma(P) := {}^{\sigma}P$。下图交换：

$$\begin{array}{ccc} K_s^n & \xrightarrow{P} & K_s \\ {\scriptstyle\widehat{\sigma}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ K_s^n & \xrightarrow{{}^{\sigma}P} & K_s \end{array} \tag{12}$$

其中， P（分别地， ${}^{\sigma}P$）表示由 P（分别地， ${}^{\sigma}P$）诱导的多项式函数。若 X是由一组多项式 $P_1,\dots,P_r$ 的零点集定义的簇，即

$$X = \{(y_1,\dots,y_n) \in K_s^n : P_j(y_1,\dots,y_n) = 0, 1 \leq j \leq r\},$$

那么对于 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$，我们定义簇

$${}^{\sigma}X = \{(y_1,\dots,y_n) \in K_s^n : {}^{\sigma}P_j(y_1,\dots,y_n) = 0, 1 \leq j \leq r\}.$$

利用式 (12)，我们看到 $P \in X$ 当且仅当 $\widehat{\sigma}(P) \in {}^{\sigma}X$。

现在，设 $p\colon X \to \mathrm{Spec}(K_s)$ 是一个 K_s-概形。群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 按如下方式作用于 X。环同态 $\sigma\colon K_s \to K_s$ 对应于映射 $\tilde{\sigma}\colon \mathrm{Spec}(K_s) \to \mathrm{Spec}(K_s)$（反变地），也就是说，对于 $\tau \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$，我们有 $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$。概形 ${}^{\sigma}X$ 定义为纤维积 ${}^{\sigma}X = X \times_{\tilde{\sigma}} \mathrm{Spec}(K_s)$，也就是说，它是使下图交换的唯一（在同构意义下）概形：

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi_1} & {}^{\sigma}X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ \mathrm{Spec}(K_s) & \xleftarrow[\tilde{\sigma}]{} & \mathrm{Spec}(K_s) \end{array} \tag{13}$$

注 15。 在此我们强调，尽管 $X \simeq {}^{\sigma}X$ 作为概形彼此同构，但当取 ${}^{\sigma}X$ 的结构态射为扭曲后的结构态射（记作 π_2）时，它们作为 K_s-概形未必同构。更确切地说，自然投影 $\pi_1\colon X \to {}^{\sigma}X$ 是概形同构，因为同构在基变换下保持不变。然而，一般而言，这个同构并不保持 K_s-概形的结构，原因如下文所述。这一现象自然会出现，因为概形态射严格多于 K_s-概形态射。

回顾一下， L-概形范畴的对象是映射 $X \to \mathrm{Spec}L$，态射则是满足下列三角图交换的映射 $X_1 \to X_2$：

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{Spec}L & \end{array}$$

概形 ${}^{\sigma}X \to \mathrm{Spec}(K_s)$ 有两种自然的结构映射选择，即 $\tilde{\sigma}\circ\pi_2$ 和 π_2，由此在 K_s-概形范畴中得到两个不同的对象，分别为 ${}^{\sigma}X \xrightarrow{\sigma\pi_2} \mathrm{Spec}(K_s)$ 和 ${}^{\sigma}X \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Spec}(K_s)$。

- 利用 $\tilde{\sigma}\circ\pi_2$，我们得到一个 K_s-概形的平凡同构 ${}^{\sigma}X \simeq X$。

- 利用 π_2，投影映射 π_1 仍是概形之间的同构 ${}^{\sigma}X \to X$，但不是K_s-概形之间的同构。

这种差异源于 ${}^{\sigma}X$ 上扭曲的 K_s-代数结构。为了理解这一现象，我们将其与前面描述的仿射情形进行比较。方程（13）中的图（逆变地反转箭头）展示了伽罗瓦作用如何影响坐标环：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, leftrightarrow, "\text{corresp.}"] & K_s[z_1,\ldots,z_n]/\langle P_1,\ldots,P_r\rangle \arrow[r, "\hat{\sigma}"] & K_s[z_1,\ldots,z_n]/\langle {}^{\sigma}P_1,\ldots,{}^{\sigma}P_r\rangle \arrow[r, leftrightarrow, "\text{corresp.}"] & {}^{\sigma}X \\
& K_s \arrow[u] \arrow[rr, "\sigma"] & & K_s \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

其中，K_s-代数 $K_s[z_1,\ldots,z_n]/\langle {}^{\sigma}P_1,\ldots,{}^{\sigma}P_r\rangle$ 配备了借助复合 $\tilde{\sigma}\circ\pi_2$ 给出的 K_s-代数结构，即遵循以下规则：

$$\lambda \odot \hat{\sigma}(\omega) = \sigma(\lambda)\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\sigma}(\lambda\omega)$$

对于 $\lambda \in K_s$ 和 $\omega \in K_s[z_1,\ldots,z_n]/\langle P_1,\ldots,P_r\rangle$。

这意味着 ${}^{\sigma}X$ 和 X 可能并不同构为 K_s-概形。若确实存在 K_s-概形之间的同构，它也不是典范的；也就是说，存在一个态射 f_σ：$X \to {}^{\sigma}X$，使得下图可交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "f_\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & & {}^{\sigma}X \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& \mathrm{Spec}(K_s) &
\end{tikzcd}$$

并不能保证。

定义 16。 在本文中，我们使用对象 ${}^{\sigma}X \to \mathrm{Spec}(K_s)$，其中结构态射取为 π_2，并将其简单记为 ${}^{\sigma}X$。

投影映射 π_1: ${}^{\sigma}X \to X$ 源自沿域自同构 σ 的基变换，并（略微滥用记号）记为 $\tilde{\sigma}$。

上述伽罗瓦作用也自然延拓到 K_s-概形的态射。具体而言，一个 K_s-态射 f: $X \to Y$ 会被映射为唯一确定的 K_s-态射 ${}^{\sigma}f$：${}^{\sigma}X \to {}^{\sigma}Y$，该态射由纤维积的泛性质诱导。

此外，对于 $\sigma,\tau \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$，我们有如下概形的交换图：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & {}^{\sigma}X \arrow[l, "\tilde{\sigma}"'] \arrow[d] & {}^{\tau}({}^{\sigma}X) \arrow[l, "\tilde{\tau}"'] \arrow[d] \\
\text{谱}(K_s) & \text{谱}(K_s) \arrow[l, "\tilde{\sigma}"'] & \text{谱}(K_s) \arrow[l, "\tilde{\tau}"'] \arrow[ll, bend left, "\widetilde{\sigma\tau}"]
\end{tikzcd}$$

由于 $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\tau}\tilde{\sigma}$，我们得到以下纤维积恒等式：

$$(14) \qquad {}^{\tau}({}^{\sigma}X) = (X \times_{\tilde{\sigma}} \mathrm{Spec}(K_s)) \times_{\tilde{\tau}} \mathrm{Spec}(K_s) = X \times_{\widetilde{\sigma\tau}} \mathrm{Spec}(K_s) = {}^{\sigma\tau}X$$

以下命题告诉我们，将一个 L-簇通过扩张标量扩展为 K_s-簇是“无害的”。

命题 第 17 节。设 X 是一个 L-簇。当且仅当 X 定义在子域 $L_0 \subseteq L$ 上时，f

$${}^{\sigma}X = X \quad \textit{for all } \sigma \in \mathrm{Gal}(L/L_0).$$

在这种情况下，X 下降为一个 L_0-簇。

证明。设 X_0 是定义在 L_0 上的簇，并令 $X = X_0 \times_{L_0} L$ 为它在 L 上的基变换。对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/L_0)$，我们计算：

$${}^{\sigma}X = (X_0 \times_{L_0} L) \times_{\sigma} L = X_0 \times_{L_0} (L \otimes_{\sigma} L).$$

但 $L \otimes_{\sigma} L = L$，因为左侧的域 L 被视为一个 L-模，其作用通过恒等映射给出；而右侧的域 L 是一个 L-模，其作用通过 σ: $L \to L$ 映射给出。

反过来，如果 ${}^{\sigma}X = X$ forall $\sigma \in$ 伽罗瓦群(L/L_0)，那么下降数据是平凡的，并且根据标准的忠实平坦下降（参见 [35, SGA1]），X 下降为一个 L_0-簇。□

注18. 因此，如果我们从一个 L-概形 X 出发，并通过扩张标量将其扩张为一个 K_s-概形，那么伽罗瓦群(K_s/L) 保持 X 不变，即作为 K_s-概形有 ${}^{\sigma}X = X$ 。用代数簇的语言来说，这仅仅反映了这样一个事实： X 是由 L 上的多项式的零点集定义的，因此伽罗瓦作用于这些多项式的系数不会改变这组多项式。因此，伽罗瓦群(K_s/L) 的一个大有限指数子群保持 X 不变。

关键在于，完整伽罗瓦群 Gal(K_s/K) 中不保持 X 的那部分作用，经过有限商群 Gal(K_s/K)/Gal(K_s/L) $\simeq$Gal(L/K) 分解。

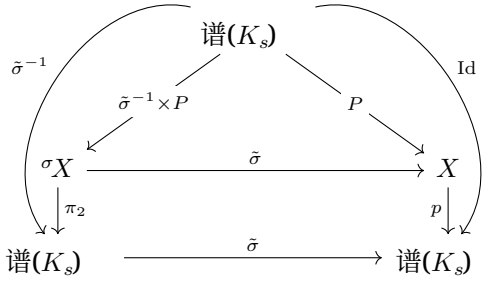
简而言之，这意味着我们可以按照上文针对 K_s-概形所述的相同思路，在 L-概形 X 上定义一个 Gal(L/K)-作用。等价地说，将 Gal(K_s/K) 的作用限制到 Gal(L/K) 后，所得作用是良定义的。之后，我们将使用这个有限群 Gal(L/K) 来研究这些作用，因为它包含了作用的本质信息，例如参见第5.1节或命题 67。

下面的注释对上述内容稍作推广。

注 19. 请注意，对于某个域扩张 $K \subseteq L_0 \subseteq K_s$，若我们有一个子群 Gal($K_s/L_0$) $\leq$Gal(K_s/K)，那么这个子群也会在 X 上诱导一个作用。还要注意，与前面的注 18 一样，只有形如 Gal(L/L_0) 的有限子群才会在不保持 X 的情况下作用。

我们以最后一条评注结束本节，说明该作用如何移动概形的 K_s-点，以培养理解拓扑情形所需的直觉。

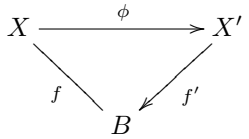
评注 20. 用概形的语言来说，几何点 P 对应于一个映射 P: 谱(K_s) $\to X$。因此，我们有如下交换图



其中，映射 $\tilde{\sigma}^{-1} \times P$: 谱($K_s$) $\to {}^{\sigma}X$ 是由纤维积的泛性质应用于映射 P: 谱(K_s) $\to X$ 和 $\tilde{\sigma}^{-1}$: 谱(K_s) $\to$ 谱(K_s)所诱导的。

4.2. **算术单值群**。回顾第2.1节，单纯覆盖 $X \to B$ over K指的是 K-概形之间的一个态射，我们可以通过标量扩张在任意域 $K \subseteq L \subseteq K_s$ 上考察它。还要回顾的是，如果 $X \to B$ 是一个 L-覆盖，那么 B 可以是一个 K-簇，我们通过标量扩张将其扩张为 L-簇。

定义21。两个单纯覆盖 $f\colon X \to B$ 和 $f\colon X' \to B$ over K 称为同构的，如果存在一个同构 $\phi\colon X \to X'$ 使下图交换:



一个同构 G-覆盖的同构是纯覆盖之间的同构，同时也与 G-作用兼容 n.

上一节所述的 Gal(K_s/K) 作用自然延伸为对覆盖 f 的作用： $X \to B$在 K_s 上。也就是说，元素 $\sigma \in$ Gal(K_s/K) 将覆盖 $f\colon X \to B$ 映射到 ${}^{\sigma}f\colon {}^{\sigma}X \to {}^{\sigma}B$。因此，覆盖 ${}^{\sigma}f$ 没有理由与 f 同构，因为基底 B 已经改变。为解决这一问题，我们要求基底在 σ 的作用下保持不变；这等价于 ${}^{\sigma}B = B$，也等价于 B 是 Gal(K_s/K)-不变量。当 B 定义在 K上时，这一条件自动成立；此时根据命题 17，我们有 B是 Gal(K_s/K)-不变量。

现在我们开始建立单纯覆盖与由算术基本群 $\Pi_K(B^*)$ 导出的单值表示之间的对应关系。具体而言，每个次数为 d 的有限覆盖 $X \to B$ ，都对应一个表示 $\Psi\colon \Pi_K(B^*) \to S_d$，其中 S_d 表示 d 个元素上的对称群，见命题22。将这些表示限制到几何基本群 Π_{K_s} 后，它们便成为

拓扑学中 $\pi_1(B^*)$ 的经典单值表示的拟有限类比。建立这一对应关系后，我们将考察单值表示上的作用，以及它们与覆盖上的原始作用之间的关系。众所周知， $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$ 在覆盖 $X \to B$ 上的自然作用会将其映射为 ${}^{\sigma}X \to B$，其对应表示为 Ψ'。若以 ${}^{\sigma}\Psi$ 表示 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$ 在单值表示上的作用，那么这些表示在 S_d 中共轭，即对某个 $h \in S_d$，有 ${}^{\sigma}\Psi = \sigma\Psi'\sigma^{-1}$。更准确地说， ${}^{\sigma}\Psi$ 是 ${}^{\sigma}X \to B$ 的表示，差一个共轭。对此也可以这样理解：与 ${}^{\sigma}\Psi$ 对应的覆盖同构于 ${}^{\sigma}X \to B$，但不一定相等。命题 25 对此作了精确说明，其中我们假设 B 和分歧除子 D 都在作用下保持不变。下一个命题是建立这一对应关系的第一步。

首先，回顾第 2 节，次数为 d 的单纯覆盖对应于 $\Omega_D/K(B)$ 中次数为 d 的有限正规子扩张 $E/K(B)$ ˆ。此外，E 的伽罗瓦闭包 $E/K(B)$ 对应于 $\Pi_K(B^*)$ 的一个商。

命题22。 分歧轨迹包含于 D 的 K 上的 B 次单纯覆盖对应于传递表示

$$\Psi\colon \Pi_K(B^*) \longrightarrow S_d,$$

使得对 $\Pi_{K_s}(B^*)$ 的限制也具有传递性。

[22]，中给出了一个证明，我们在此重述，以便引出群 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/\hat{E})$ 与 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/E)$ 之间的关系。

证明。 伽罗瓦闭包 ˆE 对应于正规子群 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/\hat{E})$，或等价地对应于一个满同态

$$\Phi\colon \Pi_K(B^*) \to G = \mathrm{Gal}(\hat{E}/K(B)).$$

如图 1 所示，下面给出了域塔。

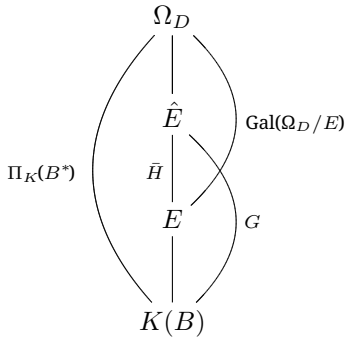


图 1. 域塔。

众所周知，

$$\mathrm{Gal}(\Omega_D/\hat{E}) = \bigcap_{g\in\Pi_K(B^*)} g\mathrm{Gal}(\Omega_D/E)g^{-1}, \tag{15}$$

参见 [53, 第 I 章，习题 8，第 60] 页。令 $\bar{H} = \mathrm{Gal}(\hat{E}/E)$，则 G 在 G 中的 $\bar{H}$ 陪集上有忠实作用，也就是说作用在集合 $H, g_2H, \ldots, g_dH$ 上。事实上，如果某个 $g \in G$ 对这些陪集的作用是平凡的，那么

$$gg_i\bar{H} = g_i\bar{H}, \text{ for all } g_i \in \{g_1{=}e, g_2, \ldots, g_d\}.$$

因此，我们有

$$g \in \bigcap_{\nu=1}^{d} g_\nu \bar{H} g_\nu^{-1} = \mathrm{Gal}(\hat{E}/\hat{E}) = \{1\},$$

也就是说，该作用是忠实的。因此，我们有表示 $i\colon G \to S_d$ and $\Psi = i \circ \Phi$，这就是所需的传递表示 $\Pi_K(B^*) \to S_d$。

现在，我们继续证明限制到 $\Pi_{K_s} := \Pi_{K_s}(B^*)$ 也是传递的。记 H 为群 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/E)$，使得

$$\bar{H} = \frac{\mathrm{Gal}(\Omega_D/E)}{\mathrm{Gal}(\Omega_D/\widehat{E})} = \frac{H}{\bigcap_{g\in\Pi_K} gHg^{-1}}.$$

Φ 到 Π_{K_s} 的限制是商映射

$$\Phi|_{\Pi_{K_s}}\colon \Pi_{K_s} \to \frac{\Pi_{K_s}}{\mathrm{Gal}(\Omega_D/K_s\cdot\hat{E})},$$

由于 $\Pi_{K_s}\cap$ 伽罗瓦群$(\Omega_D/\hat{}E) =$ 伽罗瓦群$(\Omega_D/K_s\cdot\hat{}E)$。通过标量扩张得到的 K_s 上的单纯覆盖对应于$H\cap\Pi_{K_s}=$伽罗瓦群$(\Omega_D/K_s\cdot E)$，我们将其记为 R。单纯覆盖及其伽罗瓦$\hat{}$闭包上的正则性假设保证 $G\cong$ 伽罗瓦群$(K_s\cdot E/K_s(B))$ 和

$$\bar{H}\cong \mathrm{Gal}(K_s\cdot\hat{E}/K_s\cdot E)=\frac{\mathrm{Gal}(\Omega_D/K_s\cdot E)}{\mathrm{Gal}(\Omega_D/K_s\cdot\widehat{E})}=\frac{R}{\bigcap_{g\in\Pi_{K_s}} gRg^{-1}},$$

$\hat{}\hat{}$ 其中，同构映射是从 $K_s\cdot E$ 到 E的限制。

¯重复先前用于 Π_K的论证，可证明 Π_{K_S} 对 G 中 H 的陪集的作用也是传递的。

反过来，给定一个映射 $\Psi\colon \Pi_K(B^*)\to S_d$，我们可以考虑 1 的稳定子，也就是群

$$\Pi_K(1) \coloneqq \{g\in\Pi_K(B^*)\colon \Psi(g)(1)=1\} \tag{16}$$

然后考虑不动域扩张 $\Omega^{\Pi_{K(1)}}{}_D \quad /K(B)$。这对应于一个真单纯覆盖，也就是说，根据限制$\Psi|_{\Pi_{K_s}}$的传递性，它是正则的。□

¯请注意，映射 Ψ 的定义取决于对 G/H的陪集进行标记的选择。不过，不同的标记对应于 S_d中 G 的正规化子元素所作的共轭。特别是，虽然 $\Psi(x)$在 S_d中只在共轭意义下有定义，但像 $\Psi(\Pi_K)=G$ 是良定义的。

在第 6 节将正则性条件重新表述为纯粹的群论术语之后，我们将给出限制 $\Psi|_{\Pi_{K_s}}$具有传递性的另一种证明。上述构造启发了下面的引理；由于它完全以群论术语表述，因此也适用于拓扑情形。回顾一下， S_d 中 G 的正规化子 $\mathrm{N}_{S_d}G$ 是群

$$\mathrm{N}_{S_d}G=\{s\in S_d : sGs^{-1}=G\},$$

而中心化子 $\mathsf{Cen}_{S_d}G$ 是群

$$\mathrm{Cen}_{S_d}G=\{s\in S_d : sgs^{-1}=g \text{ for all } g\in G\}.$$

¯**引理 23.** 设 G 是一个群， H 是 G 的一个子群，其指数为 d。考虑 G 在¯ ¯ ¯陪集 $H, g_2H,\dots,g_dH$ 上的自然左作用，它诱导出一个表示

$$\Psi_{\bar{H}}\colon G\longrightarrow S_d.$$

对于 $\bar{H}$ 的共轭子群 $n\bar{H}n^{-1}$ ，相应的表示

$$\Psi_{n\bar{H}n^{-1}}\colon G\longrightarrow S_d$$

是由元素 $\varphi\in\mathrm{N}_{S_d}G$ 共轭 $\Psi_{\bar{H}}$ 得到的。

证明。 根据定义，对于 $g\in G$ ，有

$$gg_i=g_{\sigma(g)(i)}h,\ \text{for some } h\in\bar{H}$$

并且 $\sigma(g)\in S_d$ 是在单射 $G\hookrightarrow S_d$ 下与 g 对应的置换。

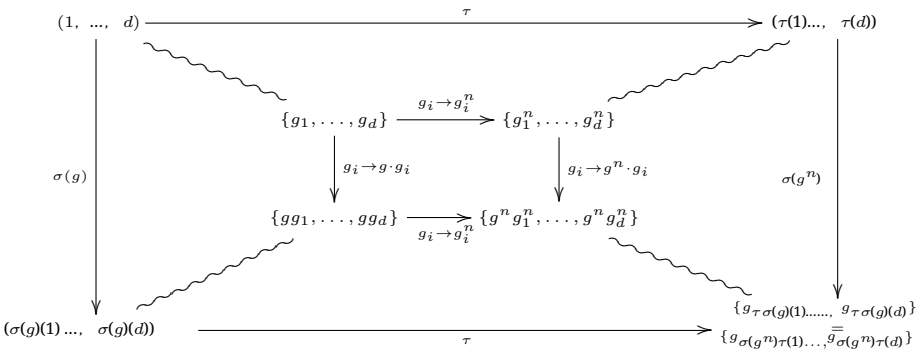
对于 $n\bar{H}n^{-1}$，我们可以选择元素 ng_in^{-1}作为陪集代表元，对于 $i=1,\dots,d$，相应的 ngn^{-1} 作用为

$$ngn^{-1}ng_in^{-1}=ng_{\sigma(g)(i)}n^{-1}nhn^{-1}.$$

这意味着元素 ngn^{-1} 以与 g 在 G中作用于 $\bar{H}$的陪集相同的方式作用于 $n\bar{H}n^{-1}$ 的陪集。这证明了 $\Psi_{\bar{H}}(g)$ $=\Psi_{n\bar{H}n^{-1}}(ngn^{-1})$（对于 $n\bar{H}n^{-1}$的陪集的特定标记方式，至多相差一个来自 $\mathrm{N}S_d(G)$ 中元素的共轭）。将 g替换为 $n^{-1}gn =: g^n$，使得 $\Psi_{\bar{H}}(g^n)=\Psi_{n\bar{H}n^{-1}}(g)$。通过 n 的共轭作用引入元素 $\tau\in S_d$，写作

$$g_i^n=n^{-1}g_in=g_{\tau(i)}h,\ \text{for some element } h\in\bar{H}.$$

¯在下图中，我们追踪内部交换图中 H 的陪集代表元，同时追踪对代表元进行每次操作后在 S_d 中出现的置换。



上述图的交换性由以下关系表示

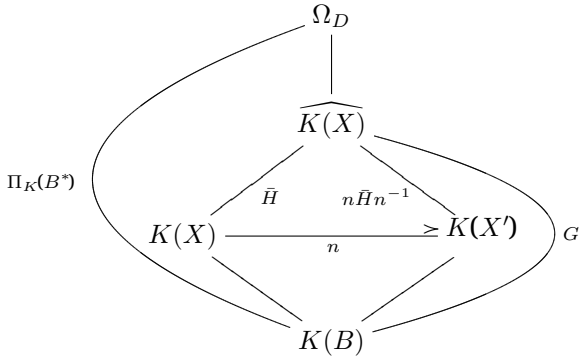
$$\sigma(g)\tau = \tau\sigma(g^n),$$

也就是说，元素 n 对应于元素 $\tau \in \mathrm{N}_{S_d}G$，如所要求的。 □

命题 24. 两个在 K 上的纯覆盖 $X \to B$、$X' \to B$ 是同构的，作为 K-覆盖，当且仅当相应的表示 Ψ, Ψ': $\Pi_K(B^*) \to S_d$ 被像群 $G = \Psi(\Pi_{K_s}) = \Psi'(\Pi_{K_s})$ 的正规化子 $\mathrm{N}_{S_d}(G)$ 中的某个元素 φ 共轭，即

$$\Psi'(x) = \varphi\Psi(x)\varphi^{-1} \ for\ all\ x \in \Pi_K(B^*).$$

证明。事实上，如果这些覆盖同构，那么它们的函数域 $K(X), K(X')$ 对应于 伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/K(B)) = \Pi_K(B^*)$ 的共轭子群。也就是说，存在一个元素 $n \in \Pi_K(B^*)$，使得 $\mathrm{Gal}(\Omega_D/K(X')) = n\mathrm{Gal}(\Omega_D/K(X))n^{-1}$。设 $K(X)$ 和 $K(X')$ 分别是 $K(X)$ 和 $K(X')$ 在 Ω_D 中的伽罗瓦闭包。根据式 (15)，显然 $K(X) = K(X')$。设 $H = \mathrm{Gal}(K(X)/K(X))$，则有以下图。

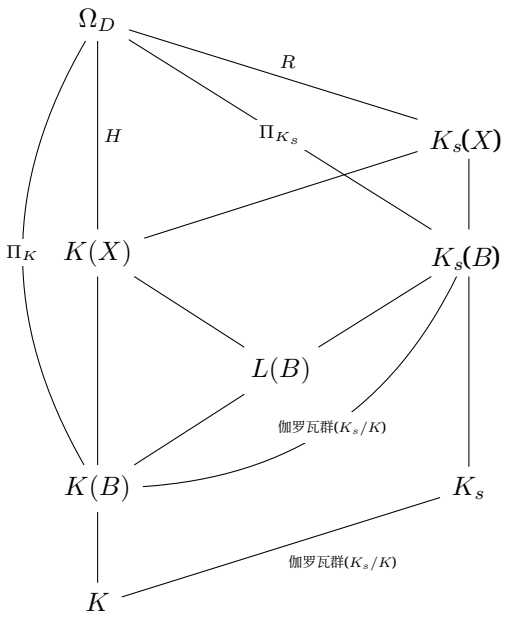


ϕ 的存在性由引理 23 得出。

反过来，考虑 Π_K 的子群 H, H'，它们分别是如等式 (16) 所示的 Ψ, Ψ' 中 1 的稳定子。这些子群分别对应于覆盖 $X \to B$, $X' \to B$。元素 $\phi \in \mathrm{N}_{S_d}(G)$ 确定了 Π_K 中 H 和 H' 的陪集标记，因为重新标记纤维对应于用 $\mathrm{N}_{S_d}(G)$ 中的另一个元素共轭 ϕ。令 $j = \phi^{-1}(1)$。在此选择下，H' 与 Ψ 的像作用下 j 的稳定子重合。任取 $n \in \Pi_K$，使得 $\Psi(n)(j) = 1$，则 $nH'n^{-1} = H$，这意味着这些覆盖同构。□

我们的目标是定义伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 在函数域 $K(X)$ 和 $K_s(X)$ 上的作用。记 $R = \mathrm{Gal}\big(\Omega_D/K_s(X)\big)$ 和 $H = \mathrm{Gal}\big(\Omega_D/K(X)\big)$，并令 $K \subseteq L \subseteq K_s$ 为一个域扩张。我们得到如下函数域图:

(17)



˜考虑式 (4) 中给出的短正合列。元素 $h \in \mathsf{Gal}(K_s/K)$ 可提升为元素 $h \in \Pi_K = \Pi_K(B^*)$，但若该短正合列不分裂，这种提升就不是典范的，并且可能因一个元素$\tau \in \Pi_{K_s} = \Pi_{K_s}(B^*)$而有所不同。

因此，除非属于以下情形之一，否则不存在通过共轭定义伽罗瓦群(K_s/K)对 R 的作用的规范方式：

- R 是 Π_{K_s}的正规子群，即 $K_s(X)/K_s(B)$是伽罗瓦的。在此情况下，对于所有$\tau \in \Pi_{K_s}$， $\tau(K(X)) = K(X)$。•式（4）中的短正合列分裂。因此存在截面s的规范选取：$\mathsf{Gal}(K_s/K) \to \Pi_K$，并且 $h \in \mathsf{Gal}(K_s/K)$ 的作用可定义为 $h(R) = s(h)Rs(h)^{-1}$。

另一方面，注意到群 Π_K 通过共轭作用于 $\mathsf{Gal}(\Omega_D/K(B))$ 的子群集合上，因此也作用于 $H = \mathsf{Gal}(\Omega_D/K(X))$。于是形成如下子群集合：

$$S_H = \{\tau H \tau^{-1}\}_{\tau \in \Pi_K/\mathrm{N}_{\Pi_K} H},$$
$$S_R = \{\tau R \tau^{-1}\}_{\tau \in \Pi_{K_s}/\mathrm{N}_{\Pi_{K_s}} R},$$

其中，记 $\mathsf{N}_{\Pi_K} H = \{g \in \Pi_K \colon gHg^{-1} = H\}$（分别地，$\mathsf{N}_{\Pi_{K_s}} R$）为 H（分别地， R）在 Π_K（分别地， Π_{K_s}）中的正规化子。因此，群 $\mathsf{Gal}(K_s/K)$ 作用于 S_R 和 S_H，且该作用定义良好并且独立于截面的选取。这与我们在第3.1小节讨论的外自同构视角一致，并进一步说明我们应当关注与 R对应的覆盖的伽罗瓦闭包，即 $\cap_{g \in \Pi_{K_s}} gRg^{-1}$。更一般地，在伽罗瓦作用下需要跟踪的正确不变量是子群$R \subseteq \Pi_{K_s}$ 和 $H \subseteq \Pi_K$的共轭类。

一种解决由 Π_K 和 Π_{K_s}的内自同构所产生的这一歧义的有效方法，是通过伽罗瓦作用于单值表示来实现。遵循 [22], ，我们采用（G）-覆盖这一术语，指代 G-覆盖或单纯覆盖。在这两种情况下， G 表示覆盖的群，即

$$G = \begin{cases} \mathrm{Gal}(K(X)/K(B)) & \text{for Galois covers} \\ \mathrm{Gal}(\widehat{K(X)}/K(B)) & \text{for mere covers} \end{cases}$$

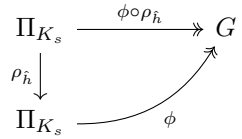
我们还设

$$N = \begin{cases} G & \text{for Galois covers} \\ \mathrm{N}_{S_d} G & \text{for mere covers} \end{cases}$$

and

$$C = \begin{cases} Z(G) & \text{for Galois covers} \\ \mathrm{Cen}_{S_d} G & \text{for mere covers} \end{cases}$$

其中， $Z(G)$ 是 G 的中心，$\mathrm{N}_{S_d}G$ 和 $\mathrm{Cen}_{S_d}(G)$ 分别表示 S_d 中 G 的正规化子和中心化子。给定覆盖 $\phi\colon \Pi_{K_s} \twoheadrightarrow G \leq N$ 和 $h \in \mathrm{Gal}(K_s/K)$，我们定义作用 $h\cdot\phi$ 如下：选取 h 的一个提升 $h \in \Pi_K$，并令 $\rho_{\hat{h}}$ 表示 Π_K 的内自同构，即由 h 共轭得到的自同构。然后，新的覆盖 $h\cdot\phi$ 定义为复合 $\phi\circ\rho_{\hat{h}}$，如下图所示：



具体而言，这意味着：

$$h\cdot\phi(x) = \phi(\hat{h}x\hat{h}^{-1}), \tag{18}$$

$\hat{}$ 该定义与提升 h 的选择无关。事实上，像 $\Psi(\Pi_K) \leq S_d$ 在共轭意义下是良定义的，因此对于任意 $\tau \in \Pi_{K_s}$，我们有 $\phi(\hat{h}\tau x\tau^{-1}\hat{}h^{-1}) = \phi(\hat{h}x\hat{}h^{-1})$，二者相差 N 中元素的共轭。

现在回顾上一小节讨论的 K_s-簇上的自然伽罗瓦作用，以及对每个 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 中的 h 在覆盖 $X\to B$ 到 ${}^hX\to B$ 上诱导的作用，假设 B 是一个 K-簇。令 ϕ 为单纯覆盖 $X\to B$ 对应的表示，并用 ϕ_h 表示与 ${}^hX\to B$ 对应的表示。正如我们将在下一个命题中所证明的，假设分歧 D 保持不变，则覆盖 ${}^hX\to B$ 与由式（18）定义的、对应于 $h\cdot\phi$ 的覆盖同构。

命题 25. 设 $X\to B$ 是定义在 K_s 上、次数为 d 的单纯覆盖，且 $h \in$ 伽罗瓦群(K_s/K)。假设 B 和分歧除子 D 均为 伽罗瓦群(K_s/K)-不变量。那么，映射 ϕ_h 和 $h\cdot\phi$ 的像由 $N_{S_d}G$ 中某个固定元素共轭。特别地，覆盖 ${}^hX\to B$ 与对应于 $h\cdot\phi$ 的覆盖作为 (G)-覆盖是同构的。

证明. 为说明最后一个断言，注意若映射 ϕ_h 和 $h\cdot\phi_h$ 的像由 N 中某个固定元素共轭，则根据命题 24，这些覆盖是同构的。

对于第一个断言，回顾 $\Pi_{K_s}(1) = \{x \in \Pi_{K_s} \colon \phi(x)(1) = 1\}$，也就是说，1 在 S_d 中的稳定子。于是，覆盖 $K_s(X)$ 是 $\Omega^{\Pi_{K_s}(1)\,D}$，这意味着 $\Pi_{K_s}(1) =$ 伽罗瓦群$(\Omega_D/K_s(X))$。取 $h \in$ 伽罗瓦群(K_s/K) 中 $h \in \Pi_k$ 的一个提升。则函数域 $K_s({}^hX)$ 是 Ω_D 的不动域，对应的子群是：

$$\hat{h}\Pi_{K_s}(1)\hat{h}^{-1} = \mathrm{Gal}(\Omega_D/K_s({}^hX))$$

令 $\hat{}X$ 为覆盖 $X\to B$ 和 ${}^hX\to B$ 的公共伽罗瓦闭包，并记 G 为群 $\mathrm{Gal}(K_s(\hat{}X)/K_s(B))$，它是 Π_{K_s}的一个商。在商映射 $\Pi_{K_s}\twoheadrightarrow G$下，子群 $H := \Pi_{K_s}(1)$ 和 $H' := \hat{}h\Pi_{K_s}(1)\hat{}h^{-1}$ of Π_{K_s} 下降为 G的子群。于是，我们有 $H' = nHn^{-1}$，其中 $n := \hat{}h|_{K_s(\hat{}X)}\hat{}$ 是商映射下的类 $[h]$。由引理 23 得出结论。□

现在我们看到，对于 K_s-簇上的伽罗瓦作用，有两种等价的观点：系数上的自然作用，以及对单值表示的诱导作用；后者与 B^*的有理基点的选择无关。注意，在等式 18) 中，由 h 给出的共轭并非 Π_{K_s}内部的共轭，$\hat{}$因为 h 不一定属于 Π_{K_s}，而是在 Π_K中的一个提升。解释单值上的作用时，这一区别至关重要。此外，若从一个定义在 L 上、其基底为 G的覆盖 $X\to B$ 以及相应的 $\hat{}$同态 $\phi\colon \Pi_L\to N$ 出发，并选取 $\mathrm{Gal}(K_s/L)$ 中元素 $h\in$ 的一个提升 $h \in \Pi_L$，那么我们有

$$h\cdot\phi(x) = \phi(\hat{h})\cdot\phi(x)\cdot\phi(\hat{h})^{-1},$$

即 $h\cdot\phi$ 和 ϕ 在 N中共轭。换言之，与 $h\cdot\phi$ 对应的覆盖在 L上始终与 $X\to B$ 同构。进一步而言，如果在 L 上定义的（G）-覆盖对应于 $R\leq\Pi_{K_s}$，$\hat{}$那么对于 $\mathrm{Gal}(K_s/L)$ 中的任意元素 $h\in$，提升 $h\in\Pi_L$ 的共轭作用会保持 Π_{K_s}中 R的共轭类不变。这大致可表述为：$\mathrm{Gal}(K_s/L)$ $\hat{}$中的算术信息的作用将保持 R 不变量，而提升 h 作为该覆盖的覆盖变换。因此，尽管 $X\to B$定义在 L上，$\mathrm{Gal}(K_s/L)$ 对其单值表示的作用并不会稳定该覆盖本身，而是稳定其同构类。

我们将在拓扑情形下采用这一视角，在那里它将体现为可定义性的条件以及对映射类群作用的要求。

最后，我们可以从单值表示的角度来思考覆盖在域 L 上的可定义性。因此，尽管下面的结论可由基本的伽罗瓦对应推出，我们仍将其表述为一个命题。

命题 26. 设 $f\colon X \to B$ 是 K_s 上的一个(G)覆盖，对应于同态 $\phi\colon \Pi_{K_s} \twoheadrightarrow G \leq N$。当且仅当同态 ϕ 可扩张为同态 $\Pi_L \to N$ 时，(G)覆盖 f 才定义在域 L 上。

4.3. 拓扑作用。 本节将介绍拓扑覆盖和黎曼曲面分支覆盖的单值表示经典理论 $X \to B$，遵循 [52, 第 3 章4]。我们的目标是用映射类群来构造上一节内容的对应版本。从现在起，在所有拓扑情形中，我们都只考虑代数曲线。也就是说，由于我们的方法依赖于德恩-尼尔森-贝尔定理 10 的穿孔版本，因此假设所诱导的拓扑覆盖 $X^\circ \to B^*$ 发生在双曲曲面之间。请记住，作为一条总体指导原则，维数大于一的簇的基本群可能是有限的，也可能难以计算；例如，塞尔定理指出，对于任意有限群 G，都存在一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇，其拓扑基本群为 G [66, 命题 15]。相比之下，曲线的基本群由其亏格完全分类，因此这一限制仍然很有意义。

回顾一下，两个拓扑覆盖 $f\colon X^\circ \to B^*$和 $f'\colon Y^\circ \to B^*$同构，当且仅当存在一个同胚 $g\colon X^\circ \to Y^\circ$使得 $f' \circ g = f$。若这两个覆盖分别对应于子群 $R, R' \leq \pi_1(B^*, b_0)$，则当且仅当 R 和 R' 在 $\pi_1(B^*, b_0)$中共轭时，这两个覆盖同构。这便导出了如下双射：

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes}\\ \text{of connected coverings}\\ f\colon X^\circ \to B^*\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Conjugacy classes}\\ \text{of subgroups}\\ R \leq \pi_1(B^*, b_0)\end{array}\right\}$$

对于有限覆盖，利用 $\pi_1(B^*, b_0)$在 b_0的纤维上的作用，该双射可扩展到单值表示。我们有如下双射：

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes}\\ \text{of connected coverings}\\ f\colon X^\circ \to B^*\\ \text{of degree } d\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Homomorphisms}\\ \text{with transitive image}\\ \Phi\colon \pi_1(B^*, b_0) \to S_d\\ (\text{up to conjugacy in } S_d)\end{array}\right\}$$

若 $X \to B$ 是紧黎曼曲面之间的一个分歧覆盖，其分歧除子为 D，且满足$B^* = B - D$，那么，在要求映射为全纯并对尖点作适当处理后，双射变为：

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes}\\ \text{of holomorphic maps}\\ f\colon X \to B \text{ of degree } d,\\ \text{with branch points in } D\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Homomorphisms}\\ \text{with transitive image}\\ \Phi\colon \pi_1(B^*, b_0) \to S_d\\ (\text{up to conjugacy in } S_d)\end{array}\right\}$$

参见[52, 第 3 章4] ，了解精确的构造。

与算术情形不同，在算术情形中，这样的描述自然产生；而对于代数曲线上的拓扑作用，则没有类似的方式可以通过系数来描述。因此，我们引入以下定义。

定义 27。 设 $X \to B$ 是一个分歧覆盖，并带有相应的拓扑覆盖 $X^\circ \to B^*$，对应于$R \leq \pi_1(B^*, b_0)$。设 A 是 $\mathsf{Mod}(B^*)$ 的一个子群，使得对于 A 中的每个 α，所诱导的自同构类α_* 保持 $\pi_1(B^*, b_0)$ 中 R 的共轭类不变。对于子群 $H \leq \Pi_A$，考虑以下条件：

(1) $H \cap \pi_1(B^*, b_0) = R$. **(2)** $H \leq N_{\Pi_A}(R)$. **(3)** 如果 H 是 Π_A 的正规子群，那么 R 是 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的正规子群。

(4) $H/R \cong A$ （正则性条件）。

如果存在满足条件（1）–（3）的子群 H，我们就称覆盖 $X \to B$ 是在 A 上定义的，其对应的群为 $H \leq \Pi_A$，并记作 $X \to (B, A)$。此外，如果条件（4）成立，我们就称该覆盖相对于 A 是正则的，或简称为 A-正则。

注 28. 这些条件旨在模拟算术情形：覆盖 $X \to B$ 定义在 K上，从而产生子群 $H = \mathrm{Gal}(\Omega_D, K(X))$ 和 $R = \mathrm{Gal}(\Omega_D, K_s(X))$。具体而言，(1) 关乎我们能将一个 K-簇 X 视为 K_s-簇这一事实；(2) 表示扩张 $K_s(X)/K(X)$ 是伽罗瓦扩张；(3) 模拟这样一个事实：若 $K(X)/K(B)$ 是伽罗瓦扩张，那么 $K_s(X)/K_s(B)$ 也是；而 (4) 则关乎该扩张的群是否为全群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$。

注意，在对伽罗瓦覆盖 $X \to (B, A)$ 作出正则性假设且其甲板变换群为 $G = \pi_1(B^*, b_0)/R$ 时，有 $G \cong \Pi_A/H$；这与算术情形 $\mathrm{Gal}(K_s(X)/K_s(B)) \cong \mathrm{Gal}(K(X)/K(B))$ 相对应。

因此，我们可以扩展 (G)-覆盖的概念，将群 A 所赋予的额外结构纳入其中。也就是说，我们不再仅仅写作 $X \to B$，而是使用记号 $X \to (B, A)$，以体现 A 在拓扑情形中的作用——无论 R 和 H 是否分别是 $\pi_1(B^*, b_0)$ 和 Π_A 中的正规子群。为与 [22], 的框架保持一致，我们要求 (G)-覆盖是正则的。

现在，我们讨论与单纯覆盖 $X \to (B, A)$ 相关联的 G-覆盖的概念。$X \to (B, A)$ 的伽罗瓦闭包是良定义的。事实上，设 H 和 R 是如前所述与该覆盖相对应的子群。记 $\widehat{H} = \cap_{g \in \Pi_A} gHg^{-1}$ 为 Π_A 中 H 的正规闭包；类似地，记 $\widehat{R}$ 为 $\pi_1(B^*, b_0)$ 中 R 的正规闭包。于是，

$$\begin{aligned}
\widehat{H} \cap \pi_1(B^*, b_0) &= \bigcap_{g \in \Pi_A} gHg^{-1} \cap \pi_1(B^*, b_0) \\
&= \bigcap_{g \in \Pi_A} gRg^{-1} \\
&= \bigcap_{g \in \pi_1(B^*, b_0)} gRg^{-1} \\
&= \widehat{R}
\end{aligned}$$

由 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的正规性以及 A 的外作用对任意提升的 R 的共轭类保持不变这一事实可知上述结论。以上还证明了 $N_{\Pi_A}(R) = \Pi_A$，因此定义 27 中的 (2)-(3) 自动由 $\widehat{H}$ 满足。请注意，$\widehat{H}$ 与 H 对应的覆盖不一定是正则的，因为我们只能得到一个单射 $H/R \to A$. $\widehat{\ }$事实上，观察到 $R \cap H = R$，所以 $H/R = H/H \cap R \cong HR/R$ 嵌入 $H/R \cong A$。因此，覆盖 $\widehat{\ }$ 是一个 G-覆盖，即相对于 A 正则，当且仅当 $HR = H$。在算术情形中，这相当于伽罗瓦闭包 $K(X)/K(B)$ 是 $K(X)/K(B)$ 的正则扩张。

现在，我们已经具备必要的工具，可以针对 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 的子群扩展单值表示，因此，命题22的类似结论如下。

命题29. 次数为 d 的纯覆盖 $X \to (B, A)$、 $A \leq$ 模群(B^*)，其分歧轨迹位于 D，对应于传递表示

$$\Psi \colon \Pi_A \longrightarrow S_d,$$

使得对 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的限制也具有传递性。

$\widehat{\ }$证明。设 $R \leq \pi_1(B^*, b_0)$ 和 $H \leq \Pi_A$ 是分别对应于覆盖 $X \to (B, A)$ 的子群，并设 H 是如上所述的 H 的正规闭包。与命题$\widehat{\ }$22 证明中的算术构造类似，我们有 $G = \Pi_A/H$，并在固定一个标号（使 1 对应于 H/H）后，通过 G 对 H/H 的陪集的作用得到传递表示。对 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的限制可经由商映射$\widehat{\ }$ $\pi_1(B^*, b_0) \to \pi_1(B^*, b_0)/R \cong G$ 分解；其传递性同样由经典单值理论得出。

反过来，给定这样的同态 $\Psi\colon \Pi_A \to S_d$，记 $\Pi_A(i)$ 为 i 在 S_d中的稳定子，记 $\pi_1(i)$ 为 $\Psi|_{\pi_1(B^*,\, b_0)}$ 的稳定子。令 $H = \Pi_A(1)$，并设 $R = H \cap \pi_1(B^*, b_0) = \pi_1(1)$。目标是证明，相对于 R，定义 27 的条件 (2)–(4) 对 H 成立。

条件 (2)：对于任意 h，显然 hRh^{-1} 通过其在 Ψ下的像稳定 1。此外，$hRh^{-1} \subset \pi_1(B^*, b_0)$，因为 A 的外作用保持 R 在 $\pi_1(B^*, b_0)$中的共轭类。因此$hRh^{-1} = R$。

条件（3）：假设 H 在 Π_A中是正规的。注意，对于任意 g 属于 Π_A，群 gHg^{-1} 稳定 $\Psi(g)(1)$。由于 H 是正规群，这意味着 $\Psi(g)(1) = 1$；特别地，对所有 g 属于 $\pi_1(B^*, b_0)$，这一点都成立，由此可知，对所有 g 属于 $\pi_1(B^*, b_0)$，$gRg^{-1} = R$ 都成立。因此，若 H 是正规群，则 R 也是正规群。

条件（4）：证明正则性相当于证明 $H\pi_1(B^*,b_0) = \Pi_A$，因为

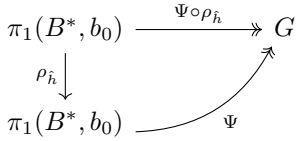
$$H/R = H/H\cap\pi_1(B^*,b_0) \cong H\pi_1(B^*,b_0)/\pi_1(B^*,b_0)$$

嵌入到 $\Pi_A/\pi_1(B^*,b_0) \cong A$ 中。由 Ψ 的传递性及其对 $\pi_1(B^*,b_0)$ 的限制，可得 $[\Pi_A:H] = [\pi_1(B^*,b_0):R] = d$。设 $\pi_1(B^*,b_0) = \sqcup_{i=1}^{d} g_i R$ 是一个陪集分解，其陪集代表元 g_i 属于 $\pi_1(B^*,b_0)$，对所有 $i=1,\dots,d$ 均如此。那么，$g_iH = H$ 当且仅当 $g_i \in H\cap\pi_1 = R$，这意味着 $g_i = 1$。通过类似的论证，$g_iH = g_jH$ 当且仅当 $g_i = g_j$。因此，尽管 g_i 位于 $\pi_1(B^*,b_0)$ 中，它们仍是 Π_A/H 的陪集代表元。□

与算术情形类似，(G)-覆盖 $X \to B$ 当且仅当相关表示 $\Psi\colon \pi_1(B^*,b_0) \to S_d$ 可延拓为表示 $\Pi_A \to S_d$ 时，才定义在 $A \le \mathrm{Mod}(B^*)$ 上，因为这意味着存在定义 27 中所述的对 R,H。由于关于 A 的可定义性意味着关于每个子群 $A' \le A$ 的可定义性，我们将上述陈述正式表述为一个与命题 26 类似的命题。

命题30。设 (G)-覆盖 $X \to (B,A')$ 对应于一个同态 $\Psi\colon \Pi_{A'} \twoheadrightarrow G \le N$。该$(G)$-覆盖定义在群 A 上，其中 $A' \le A \le$ 模群(B^*) 当且仅当同态 Ψ 可延拓为同态 $\Pi_A \to N$。

与算术情形相对应，我们也可以通过以下方式定义 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 对这些表示的作用。给定一个元素 $h \in \mathrm{Mod}(B^*)$，选取一个提升 $h \in \Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)}$。令 $\rho_{\hat{h}}$ 表示由 h 的共轭所确定的 $\Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)}$ 的内自同构。新表示 $h\cdot\Psi$ 定义为复合 $\Psi\circ\rho_{\hat{h}}$，如下面的图所示。



具体而言，这意味着：

$$ {}^{h}\Psi := h\cdot\Psi(x) = \Psi(\hat{h}x\hat{h}^{-1}), \tag{19}$$

$\hat{}$ 这一构造与提升 h 的选取无关，因为表示在 S_d 中的像在共轭意义下是良定义的。更准确地说，对于任意 $\tau\in\pi_1(B^*,b_0)$，在 S_d 中 G 的正规化子内的元素共轭意义下，我们有 $\Psi(\hat{h\tau x\tau^{-1}}\hat{h^{-1}}) = \Psi(\hat{h}x\hat{h^{-1}})$。

为了比较表示 $\Psi, {}^{h}\Psi$，我们首先需要将覆盖 $X\to B$ 之间的同构概念扩展到定义在 $A\le\mathrm{Mod}(B^*)$ 上的 (G)-覆盖情形。在算术情形下，如果两个覆盖$X\to B$ 和 $X'\to B$ 在 K 上通过同构 $\chi\colon X\to X'$同构，那么扩张 $K(X)/K(B)$ 和 $K(X')/K(B)$ 在 $\Pi_K(B^*)$ 中被某个元素 g_χ 共轭。也就是说，$g_\chi\mathrm{Gal}(\Omega_D/K(X))g_\chi^{-1} = \mathrm{Gal}(\Omega_D/K(X'))$。这引出了以下定义：

定义 31。设 $X\to(B,A)$ 和 $X'\to(B,A)$ 是定义在 $A\le\mathrm{Mod}(B^*)$ 上的两个覆盖。若存在一个同胚 $\chi\colon X\to X'$，使得相应的子群 $H,H'\le\Pi_A$ 共轭，即存在元素 $g_\chi\in\Pi_A$使 $H' = g_\chi H g_\chi^{-1}$，则称这两个覆盖在 A上同构，或简称为 A- 同构。

注意，同胚 χ 通过考察其在模群 $\mathrm{Mod}(B^*,b_0)$ 中的同伦类，诱导出一个元素 $g_\chi\in\Pi_A\le\Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)}$；此时基点 b_0 被视为带标记点，而由伯曼正合列 (11) 得到的 $\Pi_{\mathrm{Mod}(B^*)}\cong\mathrm{Mod}(B^*,b_0)$ 的同构。此外，A-同构覆盖的定义与同构的拓扑覆盖相容；也就是说，若 χ 是一个 A-同构，则它是拓扑覆盖的同构。

命题 24 的拓扑类比如下：

命题 32. </style}两个单纯覆盖 (B,A)、 $X'\to(B,A)$ </style}在 上同构，当且仅当相应的表示：$\Pi_A\to S_d$ 被正规化子 $N_{S_d}(G)$ 中的某个元素 φ 共轭，其中该正规化子对应于像群 $G=\Psi(\Pi_A)=\Psi'(\Pi_A)$*</style}*，也就是说

$$\Psi'(x) = \varphi\Psi(x)\varphi^{-1} \ for\ all\ x\in\Pi_A.$$

证明。在对子群 R,H 作适当调整后，与命题 24 的证明相同。□

因此，对于对应于表示 $\Psi\colon \Pi_A \to G \le N$ 的 (G)-覆盖 $X \to (B, A)$，元素 $h \in A$ 对 Ψ 的作用给出如下表示：

$$ {}^{h}\Psi(x) = \Psi(\hat{h})\Psi(x)\Psi(\hat{h}^{-1}) = \Psi_h \cdot \Psi(x) \cdot \Psi_h^{-1}, \quad \Psi_h \in N_{S_d}(G) $$

其中 $\hat{}\, h \in \Pi_A$ 是 h的一个提升。这表明，对应于 ${}^{h}\Psi$ 的覆盖与 A 上的覆盖$X \to (B, A)$同构。

注 33. 注意，对于一个 (G)-覆盖 $X \to (B, A)$，其中 $A \le \mathrm{Mod}(B^*)$，相应的正合列

$$ 1 \to R \to H \to A \to 1, $$

通过 A 对 R的外共轭作用，得到一个同态 $\phi\colon A \to \mathrm{Out}(R)$。由于在带 puncture 的情形中，我们要求映射类群保持与 B^*的穿孔点相对应的环路的共轭类，因此 A 在 R 上的作用必须保持与 X的分歧点相对应的环路，而这些分歧点恰好就是 X°的穿孔点。这意味着前述同态的像实际上落在 $\mathrm{Out}^*(R)$中，即

$$ \phi : A \to \mathrm{Out}^*(R) \cong \mathrm{Mod}(X^\circ) \le \mathrm{Out}(R). $$

这本身就很有意思，因为它给出了一个从 $\mathrm{Mod}(B^*)$的子群到映射类群 $\mathrm{Mod}(X^\circ)$的映射。这自然引出了诸如以下的问题：

- 这个同态的核与像是什么？它们如何随覆盖 $X \to (B, A)$ 的不同选择而变化？这些问题类似于第 3 章中关于各种 B^* 的算术问题。• 这与 Birman-Hilden 性质有关吗？请参阅综述 [50] 以及后面的第 8 章。具体来说，由于 $A/\ker\phi$ 同构于子群 $S \le$模群(X°)，我们能否将这一同构视为 Birman–Hilden 性质的对偶？后者讨论的是覆盖上的映射类何时能下降到底空间；而我们在此关注的是底空间上的映射类何时能映入覆盖的映射类群。

4.4. 非同构覆盖。 到目前为止，本节考虑的是映射类群的作用保持初始覆盖 $X \to B$的同构类不变的情形。若要得到一个与 X 非同构的覆盖，只需要求对某个 $h \in$模群(B^*)，$h_*[R] \neq [R]$。这意味着，对于 h 的任意提升 $\hat{}\,\hat{}h$，其像 $h_*(R)$ 都不与 R 共轭，因此不对应于同构的拓扑覆盖。

更确切地说，任意提升 $\hat{h}$ 的 $h \in$ 模群(B^*) 都是一个同胚 $\hat{h}\colon B^* \to B^*$ 根据~ 路径提升的唯一性，见[31, 命题 13。5]，，会诱导出另一个同胚 $h\colon X^\circ \to Y^\circ$，其中 $Y^\circ = B^*/h(R)$ 当且仅当 $h_*(R)$与 R共轭。注意，底层拓扑空间保持不变，但对应于 R 和 $h_*(R)$的覆盖映射不同。

对于代数曲线，一旦我们通过添加全纯结构将 B^* 补全为 B，就有唯一的方法将拓扑覆盖 $X^\circ \to B^*$紧化，例如由 [31, 命题 19.9、例 19.10]，，将其紧化为全纯分歧覆盖 $X \to B$。此外，假设底层基底 B^* 在两种情形下具有相同的全纯结构，则子群 R 和 $h_*(R)$分别有唯一的紧化，成为曲线 X和 ${}^{h}X$。这意味着后一种情形下，我们不选择经 h 变换后的全纯结构，而是采用初始结构。将此与算术情形作比较；回想一下方程 (13) 中相同的结构两难问题。

此外，在我们关注的双曲情形下，$\pi_1(B^*, b_0)$是非阿贝尔的有限生成群。众所周知，例如参见[14, 定理 29. 10]，，任何有限生成群对于给定的指数 d，都只有有限多个子群。因此，与子群 R对应的次数为 d 的覆盖只有有限多个，特别是，共轭类 $[R]$ 也是有限的。

我们希望能够定义 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 中 h 在有限分支覆盖 $X \to B$ 集合上的作用。然而，在 h 的共轭类中选择不同的代表元（它们在 Dehn–Nielsen–Baer 对应下相差一个内自同构），通常会使这一点变得复杂，因为子群 $h(R)$ 随 $[R]$ 中的元素而变化，对应于不同的覆盖。根据前面的讨论，这个轨道是有限的。事实上，如果覆盖 $X \to B$ 是伽罗瓦的，那么 ${}^{h}X$ 就是良定义的。然而，对于单纯覆盖 $X \to B$，${}^{h}X$ 并非良定义，因为对于 $[R]$ 中的每个元素，它都可能落在有限多个曲线中的任意一条上。因此，它或许可以变得良定义，但这种定义并非典范的。

然而，对于 ${}^{h}X$ 的任意非规范选择，其覆盖同构类都是良定义的，由所有与 $[h(R)]$，中元素相对应的此类可能选择组成，其中 h 是 h 的任意提升。我们可以利用 h 在 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 上对单值表示 Ψ 的作用来避免这种歧义：$\pi_1(B^*, b_0) \to S_d$，从而得到我们先前定义的 ${}^{h}\Psi$。尽管 ${}^{h}X$ 并非良定义，因为存在有限的轨道集 $\{\hat{}\,X : h$ 对 $h \in$的提升

Mod(B^*)}，与表示 ${}^h\Psi$ 对应的覆盖将位于该轨道内，因此对于所有可能的提升，都与$\hat{}^hX$ 同构。这近似于说 ${}^hX$ 与和 ${}^h\Psi$ 对应的覆盖作为 (G)-覆盖是同构的。

我们已经讨论过群 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$ 在表示 Ψ 上的作用： $\Pi_A \to S_d$ 对于一个 (G)-覆盖 $X \to (B, A)$，不过我们也可以让整个映射类群作用于此，从而得到一个新的表示

$$ {}^h\Psi : \Pi_{hAh^{-1}} \to S_d,$$

定义如下

$$ {}^h\Psi(x) \coloneqq \Psi(\hat{h}x\hat{h}^{-1}),$$

对应于一个新的覆盖 $X' \to (B, hAh^{-1})$。

4.5. 比较。 我们讨论了一个共同框架，用于描述伽罗瓦群 Gal(K_s/K) 和模群 Mod(B^*) 对 (G)-覆盖 $X \to B$ 的群作用，这些作用通过几何基本群的外自同构实现。通过考察单值化表示上的作用来处理内自同构所带来的歧义，本文末尾的表格总结了这些内容。

在算术情形下，情况可能会简单一些，因为群 Gal(K_s/K) $\cong$ Gal($K_s(X)/K(X)$) 通过域自同构自然地作用于 $K_s(X)$。在下一步中，考虑到 Π_{K_s} 的内自同构后，这种情况便与拓扑情形相契合。这些内自同构对应于域自同构从 $K_s(X)$ 提升到 Ω_D 的可能提升，其中元素 $\sigma \in$Gal(K_s/K) 被提升到 $\hat{}\sigma \in \Pi_K$。

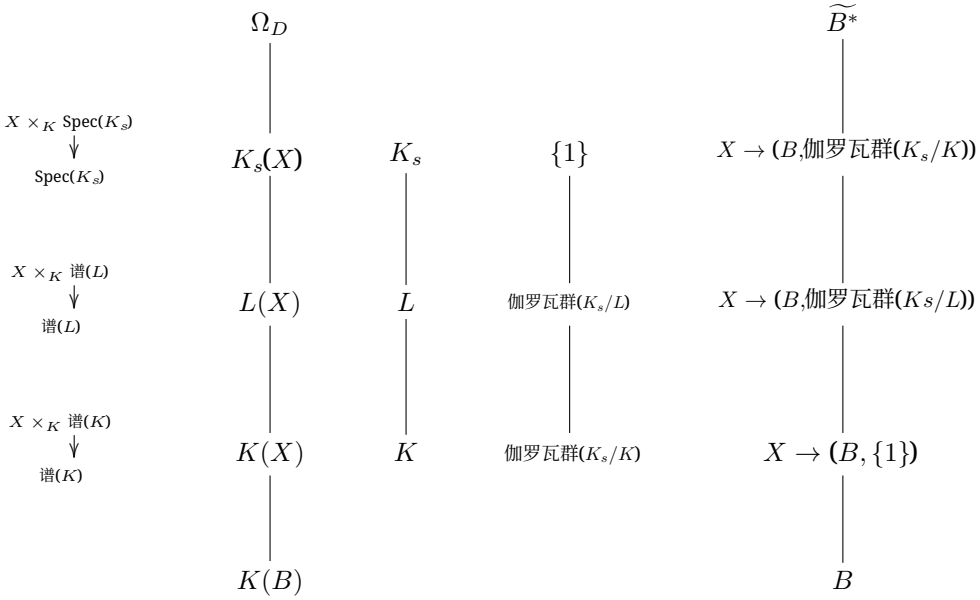
在算术情形下，使用更具体的函数域语言有许多优点。然而，这种语言无法帮助我们处理拓扑情形，因为那里没有与域这一概念相对应的概念。为此，我们采用这样的观点：在没有域的情况下，可以转而使用相应的群作用数据。这构成了算术与拓扑背景之间的共同基础。下文我们希望提出这样一种思路：为了在拓扑情形下处理域的缺失，我们将使用与之相应的群作用数据，以此作为共同基础

假设我们有一个定义在 K 上的 K_s-簇 $X \to$SpecK_s，也就是说，对于所有 $\sigma \in$ Gal(K_s/K)，均有 $X = {}^\sigma X$，参见命题 17。对于任意中间域 $K \subset L \subset K_s$，我们可以考虑以下基变换： $X \times_K K_s \to K_s$,$X \times_K L \to L$。

在等式 (20) 的图中，左侧的域塔对应于图右侧的群作用。记号 (X, G) 表示簇 X 带有一个 G-作用。对于 (G)-覆盖， K 上的 (G)-覆盖 $X \to B$ 简记为 $X \to (B$,Gal(K_s/K))。

我们还将其记为 $\widetilde{B^*}$ 我们将 B^* 的万有覆盖记作 ${}_D$，它对应于 Ω_D，可视为域的万有覆盖的类比。在这种类比中，$\Omega\Pi_K$ 扮演域的“万有覆盖”的角色，因为$B^*({}_D/K)$ 在扩张 $\Omega B(\pi_1)$ 的每个非分歧赋值的纤维上传递地作用；这类似于$X($ $X^\circ \to B^*)$ 在覆盖 的纤维上的作用。

(20)



在上面的图中，第二列由一系列函数域组成，每个函数域都在第四列中各群的作用下保持不变。这些群是 Gal($\Omega_D/K(B)$) 的子群。

格言：域上的下降——群上的上升

这种语言既可用于算术情形，也可用于拓扑情形。事实上，簇 X 关于域 $K_s \supseteq L \supseteq K$ 的下降数据对应于上升数据 $\{(X,$伽罗瓦群$(K_s/L))\}_{K_s\supseteq L\supseteq K}$。通过考虑上升数据 $\{(X,H)\}_{G\geq H}$，这一观点自然延伸到拓扑情形（无需涉及域）；其中 G 是由同胚构成的同伦类群。这便说明了记号$X \to (B, A)$的合理性，其中 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$。

数论	拓扑学	常用记号
$K_s(X)/K_s(B)$	$X \to B$	$X \to B$
$\Psi\colon\ \Pi_{K_s} \to S_d$	$\Psi\colon\ \pi_1(B^*,\ b_0) \to S_d$	
$K(X)/K(B)$	$X \to (B,\ A)$	$X \to (B,\ A)\quad A \leq \mathfrak{d}$
$\Psi\colon\ \Pi_K \to S_d$	$\Psi\colon\ \Pi_A \to S_d$	$\Psi\colon\ \Pi_A \to S_d,\quad A \leq \mathfrak{d}$
${}^{\sigma}X,\ \ \sigma \in$伽罗瓦群$(K_s/K)$,	${}^{h}X,\ \ h \in$ 模群(B^*)	
其中 X 是一个 K_s-簇	其中 $X \to B$ 是伽罗瓦	
${}^{\sigma}\Psi\colon\ \Pi_{K_s} \to S_d$	${}^{h}\Psi\colon\ \pi_1(B^*,\ b_0) \to S_d$	

5. 模域与模群——定义——不变性

本节介绍若干经典概念的细化形式，即模域、定义和不变性的概念，它们分别对应于模群、定义和不变性的概念。我们首先在算术情形中阐述这些思想，以说明一个基本原理：域上的下降对应于群上的上升。这一视角是我们提出这些定义的核心动机，并可自然延伸到拓扑情形，在那里不存在底层域。随后，我们回顾经典的 Weil 下降定理（定理 39），并在拓扑背景下建立一个类似结果（定理 46）。最后，在比较算术与拓扑概念之后，我们给出一些例子来说明这两种情形：模域与定义域重合的情况，以及二者不同的情况。这些内容分别在第 5.4 和 5.5 小节中讨论。

5.1. **算术模域 / 定义**。回顾注 15，作为 K_s-概形，X 和 ${}^{\sigma}X$可能并不同构。因此，探究它们在什么条件下会变得同构是值得的。本节将探讨 X 及其在 Gal(K_s/K)-作用下的像彼此同构的不同方式，并利用由此出现的额外结构，从而下降到定义 X （或与X同构的对象）的域上。我们尽可能在一般情形下定义所有内容，即针对$\mathfrak{d} =$ Gal(K_s/K)的任意子群 A 。当 A 是闭的时，它对应于一个中间域扩张 $K = K_s^{\mathfrak{d}} \subseteq K_s^A \subseteq K_s$。随后，我们将讨论特例 $A = \mathfrak{d}$，这是最有趣的情形。回顾注 19，闭子群 $A =$Gal(K_s/K_s^A)也作用于 X。

定义 34。 对于代数 K_s-簇 X 和闭子群 $A \leq \mathfrak{d}$，定义 X 相对于 的 A

$$A_X^{\mathrm{mod}} = \{\sigma \in A : \exists f_\sigma\colon X \xrightarrow{\simeq} {}^{\sigma}X\},$$

其中，同构定义在 K_s上，并且是 K_s-概形的同构。 X 的绝对模群 （相对于 $\mathfrak{d}$）是群 $\mathfrak{d}_X^{\mathrm{mod}}$。

X 相对于 的相对模域 A 定义为不动域 $F = K_s^{A_X^{\mathrm{mod}}}$ 。 X 的绝对模域 （相对于 $\mathfrak{d}$） 定义为不动域 $F = K_s^{\mathfrak{d}_X^{\mathrm{mod}}}$ 。

注意，由于 [24, 命题 2.1] 以及其下方的讨论，模域是A 的闭子群，因此不动域 $K_s^{A_X^{\mathrm{mod}}}$ 是有意义的。

注 35 （模解释）。 请注意，在模群的定义中， X 与 ${}^{\sigma}X$ 之间的同构不一定由定义 16 中的投影映射 $\tilde{\sigma}$ 诱导。已知， $F = K_s^{A_X^{\mathrm{mod}}}$ （分别是 $F = K_s^{\mathfrak{d}_X^{\mathrm{mod}}}$ ）的模域是 K_s^A（分别是 K）的有限扩张。模域 F 是满足以下条件的最小域 $F \subseteq K_s$： 每个 $\sigma \in A_X^{\mathrm{mod}}$（分别是 $\sigma \in \mathfrak{d}_X^{\mathrm{mod}}$）都将 X 映射到与其自身同构的副本。

在某种意义上，若存在一个空间 $\mathscr{M}$，使得 $\mathscr{M}$ 的点对应于簇的同构类，那么与 X 的同构类对应的点 $[X]$ 是 A-不变的（分别是 $\mathfrak{b}$-不变的）。此外，若将$[X]$ 视为 $\mathscr{M}$中的一个闭点，那么与点 $[X]$ 对应的剩余域 $K([X])$ 等于模域 [3]。

我们指出，在定义模群时，同构族 $f_\sigma\colon X \xrightarrow{\cong} {}^\sigma X$ 并不带有额外结构；也就是说，我们不要求同构 $f_\sigma\colon X \to {}^\sigma X$、 $f_\tau\colon X \to {}^\tau X$ 和 $f_{\sigma\tau}\colon X \to {}^{\sigma\tau}X$ 之间存在任何关系。稍后，我们将需要这一额外结构来定义定义群。

注36。回顾一下，若一个 K_s-簇对应的理想 $I(X)$ 可由系数属于 L 的有限多项式集生成，则称该簇定义在 L 上。每个簇都定义在 K 的某个有限扩张上，因为它是有限个多项式的零点集，而每个多项式都只有有限个系数。在 K_s 中由这些有限个系数生成的域是 K 的有限扩张。

回想命题 17， K_s-簇定义在 L 上，当且仅当它在 $\mathrm{Gal}(K_s/L)$ 下不变。受此启发，我们给出如下定义：

定义 37. 对于一个 K_s-簇 X 和一个闭子群 $A \le \mathfrak{b}$，我们将相对不变群X 在 A

$$A_X^{\mathrm{inv}} = \{\sigma \in A : {}^\sigma X = X\}.$$

以及 X 的绝对不变群（在 $\mathfrak{b}$ 上）定义为群 $\mathfrak{b}_X^{\mathrm{inv}}$。

等价地，在 A 上的不变群是满足以下条件的最大子群 $Z \le A$： X 定义在其不动域 K_s^Z 上。根据注36，它是闭的，因此 A_X^{inv} 对应于 K_s^A 的最小域扩张，使得 X 定义在其上，也就是说， $K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}$ 。我们有 $K \subseteq K_s^A \subseteq K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}} \subseteq K_s$。此外，假设 $A = \mathfrak{b}$，按照上述意义，我们总可以将簇视为定义在 K 上的最小域上。

显然，由于我们要求同构 $f\colon X \to {}^\sigma X$ 均为恒等映射， $A_X^{\mathrm{inv}} \le A_X^{\mathrm{mod}}$是 A 的子群。现在，我们着手定义（ X 在 A上的）定义群，它实际上位于这两个群之间。我们从下面的定义开始，该定义与定义域相对应。

定义 38。 设 X 是一个 L-簇，并设有以下域扩张 $K \subseteq L_0 \subseteq L \subseteq K_s$。如果存在定义在 L_0 上的代数簇 Y_0 以及双有理同构 $R\colon X \to Y_0 \times_{\mathrm{Spec}(L_0)} \mathrm{Spec}(L)$，其中 X 定义在 L上，则称簇 X 关于伽罗瓦扩张 L/L_0可在 L_0 上定义 。

使得 X 可在 L_0 上定义的最小域 L_0 称为 X 的绝对定义域 。

注意，此处我们假设 X 定义在 L 上，而不是像通常那样定义在 K_s 上。我们特别强调这一点，因为后续构造需要域扩张 L/K 是有限的——根据注36，这一点总是成立的。

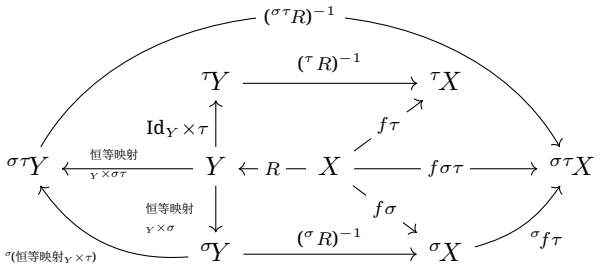
假设 X 是定义在 L 上的簇，且 X 也可定义在 $L_0 \subseteq L$ 上，那么根据定义，存在一个定义在 L 上的双有理同构 $R\colon X \to Y$，其中 $Y := Y_0 \times_{\mathrm{Spec}(L_0)}$ 谱(L)，且 Y_0 定义在 L_0 上。存在双有理同构 ${}^\sigma R\colon {}^\sigma Y \to {}^\sigma X$，使得这些映射

$$\{f_\sigma = ({}^\sigma R)^{-1} \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma) \circ R\colon X \to {}^\sigma X\}_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/L_0)}$$

满足以下条件：

$$f_{\sigma\tau} = {}^\sigma f_\tau \circ f_\sigma \text{ for all } \sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/L_0).$$

事实上，我们有如下图：



根据以下观察，该图是交换的：

$$\begin{aligned} f_{\sigma\tau} &= ({}^{\sigma\tau}R)^{-1} \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= ({}^{\sigma}({}^{\tau}R))^{-1} \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= {}^{\sigma}\big(({}^{\tau}R)^{-1}\big) \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= {}^{\sigma}\Big(({}^{\tau}R)^{-1}) \circ (\mathrm{Id}_Y \times \tau) \circ R \circ \big((\mathrm{Id}_Y \times \tau) \circ R\big)^{-1}\Big) \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= {}^{\sigma}\big(f_\tau \circ R^{-1} \circ (\mathrm{Id}_Y \times \tau)^{-1}\big) \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= {}^{\sigma}f_\tau \circ ({}^{\sigma}R)^{-1} \circ ({}^{\sigma}(\mathrm{Id}_Y \times \tau))^{-1} \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) \circ R \\ &= {}^{\sigma}f_\tau f_\sigma. \end{aligned}$$

请注意，在最后一个等式中，我们使用了恒等式

$$(\mathrm{Id}_Y \times \sigma\tau) = {}^{\sigma}(\mathrm{Id}_Y \times \tau) \circ (\mathrm{Id}_Y \times \sigma).$$

这一族 $\{f_\sigma\}_{\sigma\in \mathrm{Gal}(L/L_0)}$ 称为关于（有限扩张） L/L_0的 X 的 伽罗瓦下降数据。A. Weil 在 [72] 证明了伽罗瓦下降定理，它是上述构造的逆过程。

定理 39 （Weil 下降定理）。 设 L/L_0 是一个伽罗瓦扩张，且 $K \subseteq L_0 \subseteq L \subseteq K_s$；设 X是定义在 L上的一个簇。

(1) 若 X 具有关于 L/L_0的伽罗瓦下降数据 $\{f_\sigma\}_{\sigma\in \mathrm{Gal}(L/L_0)}$，则存在一个定义在 L_0 上的代数簇 Y以及一个定义在 L 上的同构 $R\colon X \to Y$，使得对于每个 $\sigma \in$伽罗瓦群(L/L_0)，都有 $R = {}^{\sigma}R \circ f_\sigma$。

(2) 若还存在另一个定义在 L_0 上的簇 Y，以及一个定义在 L上的同构 $R\colon X \to Y$，使得对于每个 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(L/L_0)，都有 $R = {}^{\sigma}R \circ f_\sigma$，则存在一个同构 $J\colon Y \to Y$，定义在 L_0上，使得 $R = J \circ R$。

我们现在可以定义定义群了。

定义 40. 对于一个 K_s-簇 X 和一个闭子群 $A \le \mathfrak{d}$，我们将相对定义群 X 在 A上定义为

$$A_X^{\mathrm{def}} = \{\sigma \in A_X^{\mathrm{mod}} : \exists f_\sigma\colon X \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma}X \text{ with } f_{\sigma\tau} = {}^{\sigma}f_\tau \circ f_\sigma \text{ for all } \sigma,\tau \in A_X^{\mathrm{mod}}\}.$$

并将 X 的绝对定义群（在 $\mathfrak{d}$上）定义为群 $\mathfrak{d}_{X}^{\mathrm{def}}$。

X 在 $A \le \mathfrak{d}$ 上的定义群是满足以下条件的最大子群 $Z \le A_X^{\mathrm{mod}}$：存在一族$\{f_\sigma\}_{\sigma\in Z}$ 同构 $f_\sigma\colon X \xrightarrow{\sim} {}^{\sigma}X$，使其满足 Weil 下降条件。稍作调整命题 [24, 2.1], 的证明即可得出它是一个闭子群；其中还需额外考虑，在他们的记号中 $f_\sigma = f_{\bar{\sigma}}$。

注意，满足 Weil 伽罗瓦下降数据的群是商群 $A_X^{\mathrm{def}}/A_X^{\mathrm{inv}}$；对于 $L = K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}$ 和 $L_0 = K_s^{A_X^{\mathrm{def}}}$，它是扩张 L/L_0的伽罗瓦群，按照 Weil 下降定理 39 中的记号。这个商是定义良好的，因为 A_X^{inv}总是 A的正规子群。

注 41。 A_X^{inv}的闭子群对应着 X 可定义在其上的各种域 $K_s^A \subseteq L$，而A_X^{def}对应于其中最小的域。关于 $A = \mathfrak{d}$, 即 X的绝对定义域，参见定义 38。

注意，我们引入的群构成如下的递增子群塔

$$\{1\} \le A_X^{\mathrm{inv}} \le A_X^{\mathrm{def}} \le A_X^{\mathrm{mod}} \le A \le \mathfrak{d} = \mathrm{Gal}(K_s/K),$$

而它们各自的不变量域满足反向的正规包含关系

$$K_s \supseteq K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}} \supseteq K_s^{A_X^{\mathrm{def}}} \supseteq K_s^{A_X^{\mathrm{mod}}} \supseteq K_s^{A} \supseteq K$$

值得注意的是，根据注36，扩张 $K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}/K$ 是有限扩张，因此所有其他中间扩张也都是有限扩张。所以韦伊定理总是适用于扩张 $K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}/K_s^{A_X^{\mathrm{def}}}$，也就是说，适用于定义在$K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}$ 上且可定义在 $K_s^{A_X^{\mathrm{def}}}$ 上的簇。

在本节稍后部分，我们将介绍两个众所周知的例子：其中一个例子里，模域 $K^{\mathfrak{d}^{\mathrm{mod}}_{X_s}}$与定义域 $K_s^{\mathfrak{d}^{\mathrm{def}}_{X}}$ 重合（见第 5.4 小节），另一个则是两个域不同（见第 5.5 小节）。

5.2. **拓扑**。 正如我们在本节的序言中所提到的，我们试图在拓扑情形下引入一个概念，使其类似于算术“模群”、“不变群”和“定义群”。由此产生的一个根本困难是，缺乏与域这一概念相对应的规范类比，尤其是缺乏与其可分闭包相对应的规范类比。在第 2 节中，我们通过将扩张 K_s/K 视为扩张 $K_s(B)/K(B)$来解决这一问题，从而以基空间B 去掉分支点后的映射类群 Mod(B^*)取代了 Gal(K_s/K)。采用这种方法，我们旨在为曲线提供算术情形下 Weil下降定理39的一个合理的拓扑类比。我们提出，这就是定理 46，并论证它正确地契合了我们对模空间中韦伊定理的直觉，因为它可以在更广泛的 Teichmüller空间情形中实现。

作为本节的背景设定，我们将注意力限制在双曲曲线的覆盖上，并在以下假设之一的条件下进行讨论：覆盖 $X \to (B, A)$ 是伽罗瓦覆盖，或者正合列 (10) 中存在一个截面。这两个假设都确保对于所有 $\sigma \in$Mod(B^*)， ${}^{\sigma}X$ 都有良好定义。也就是说， ${}^{\sigma}X$ 表示对应于 $\sigma_*(R)$ 的、定义在 $\mathbb{C}$ 上的紧化代数曲线，其中 $X \to B$ 对应于子群 R。

除非另有说明，我们均限于伽罗瓦情形，即 R 是一个正规子群。在本节中，我们主要处理 $\sigma_*(R) \neq R$ 作为 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的子群这一情形，尽管它们作为抽象群可能是同构的。关于 X 的仅由满足 $\sigma_*(R) = R$ 的子覆盖构成的群上升的研究，将在第7章中进行。

我们简要回顾一下拓扑构造的一些细节。 $\pi_1(B^*, b_0)$的子群 R 对应于一个覆盖 $p\colon X^\circ \to B^*$，并附带一个基点 x_0 的选择，其中 X° 满足 $p(x_0) = b_0$ 且$R = p_*(\pi_1(X^\circ, x_0))$。根据伽罗瓦对应， $\sigma_*(R)$对应于一个覆盖 ${}^{\sigma}p\colon {}^{\sigma}X^\circ \to B^*$，以及一个基点 ${}^{\sigma}x_0$的选择，使得 ${}^{\sigma}p({}^{\sigma}x_0) = b_0$。此外，根据提升性质 [31, 13.5], 对于$\sigma \in$ Mod(B^*)的任意提升$\hat{}\sigma$，只要满足$\hat{}\sigma(b_0) = b_0$，就存在唯一的提升 $\tilde{\sigma}\colon X^\circ \to {}^{\sigma}X^\circ$，它保持基点的选择，并使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X^\circ & \overset{\tilde{\sigma}}{\dashrightarrow} & {}^{\sigma}X^\circ \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^{\sigma}p} \\ B^* & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & B^* \end{array} \tag{21}$$

也就是说， $\tilde{\sigma}(x_0) = {}^{\sigma}x_0$。提升 $\tilde{\sigma}$ 在基点的选择意义下是唯一的：可能存在同胚$f_\sigma\colon X^\circ \to {}^{\sigma}X^\circ$ 使得上述图可交换，但满足 $f_\sigma(x_0) \neq {}^{\sigma}x_0$。

为了定义模群 Mod(B^*) 在伽罗瓦覆盖及其态射上的作用，我们假设存在一个保基点 b_0 的集合论截面 $\hat{}\colon$ Mod(B^*) $\to$ Homeo$^+$(B^*)。每个元素 $\sigma \mapsto \hat{}\sigma$ 都唯一地提升为一个同胚 $\tilde{\sigma}\colon X^\circ \to {}^{\sigma}X^\circ$。我们尽可能一般地表述这个集合论截面，以适用于各种几何情形：例如，这些同胚可以被视为 b_0 绕把手的测地环路，或者与 Teichmüller空间[17, Ch.1] 内部的标记存在某种特定的相互作用。

$\sigma \in$ 模群(B^*)的作用意味着，对于覆盖 $X \to (B, A)$及相应的群 R，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} X^\circ & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & {}^{\sigma}X^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B^*, A) & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & (B^*, \sigma A \sigma^{-1}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & {}^{\sigma}X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B, A) & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & (B, \sigma A \sigma^{-1}) \end{array}$$

左图对应于开覆盖，右图对应于紧化后的覆盖。此外， $X^\circ = \sim$ $\sim B^*/R$ 和 $Y^\circ = B^*/\sigma_*(R)$。

我们定义 B 上定义于 A 的覆盖范畴，并在此范畴上进行研究，以区分本节所需的覆盖态射的新结构。为此，我们给出以下定义：

定义42。 令 Cov$_{(B,A)}$ 表示这样一个范畴：其对象是 B中具有公共分歧除子的伽罗瓦覆盖 $X \to B$，也就是说，相关拓扑覆盖的底层拓扑空间是固定的，即为 B^*，且该覆盖定义在 A 上（回顾定义 27）。Cov$_{(B,A)}$ 的态射形式为（f, g）： $\big(X \to (B, A)\big) \to \big(Y \to (B, A)\big)$，其中 f和 g是使下图交换的保向连续映射

以下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B,A) & \xrightarrow[g]{} & (B,A) \end{array}$$

特别是，对于 $A=1$，我们将此范畴记为 Cov_B，其态射是由连续映射组成的有序对 (f,g)：$(X\to B)\to(Y\to B)$，使下图可交换：

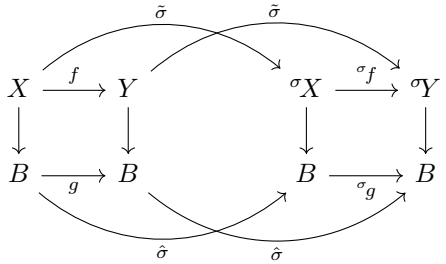
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

其思路是，我们不要求底部箭头为恒等映射，而覆盖的覆盖变换则要求如此。若 f 和 g 都是同胚，则称两个覆盖同构，并用符号“$\simeq$”表示。

注意，$\mathsf{Cov}^{(B,A)}$ 是 Cov_B 的满子范畴，因为前者对象之间的态射，恰好是后者中相同对象之间的态射，只需忘记“定义在 A 上”的结构即可。特别地，这两个范畴之间唯一的区别是，我们要求对象定义在 $\mathsf{Mod}(B^*)$ 的一个非平凡子群上。

为了与第5.1节中算术情形下的下降理论保持一致（其中我们在 $\mathsf{Spec}(K_s)$ 上工作），本节余下部分假设 $A=1$，这是正确的类比对象。不过，我们将在第9.3节重新讨论范畴 $\mathsf{Cov}^{(B,A)}$。

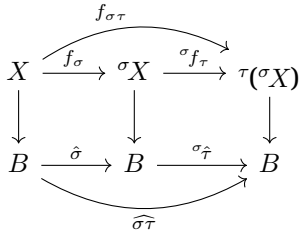
$\sigma\in\mathsf{Mod}(B^*)$ 中的一个元素给出如下图：



其中 ${}^{\sigma}f=\tilde{\sigma}f\tilde{\sigma}^{-1}$ and ${}^{\sigma}g=\hat{}\sigma g\hat{}\sigma^{-1}$，使右侧方块可交换。特别地，$({}^{\sigma}f,{}^{\sigma}g)$ 是 Cov_B 中覆盖的一个态射。此外，这给出了态射 (f,g) 与扭曲态射 $({}^{\sigma}f,{}^{\sigma}g)$ 之间的一个双射。注意，对于一个同构 $(f,g):(X\to B)\to({}^{\sigma}X\to B)$，即一对同胚 (f,g)，则 $g=\hat{}\sigma$，因为截面$\hat{}:\mathsf{Mod}(B^*)\to\mathsf{Homeo}_+(B^*)$ 是满态射。

现在我们来表述 Weil 下降数据的拓扑类比，以及相应的拓扑群。

定义43。设 $A\le$ 模群$(B^*)=\mathfrak{d}$ 为一个子群，且$(f_\sigma,\hat{}\sigma)_{\sigma\in A}$ 为一族同胚对 $(f_\sigma,\hat{}\sigma)$：$(X\to B)\to({}^{\sigma}X\to B)$。若以下图交换，则称其为相对于 A 的映射类群上升数据：



当上面的图交换时，我们将 $(f_{\sigma\tau},\widehat{\sigma\tau})=({}^{\sigma}f_\tau,{}^{\sigma}\hat{}\tau)\circ(f_\sigma,\hat{}\sigma)$ 记作 $\sigma,\tau\in A$，并称其为 σ 和 τ 的余循环条件。我们还定义以下各群：

$$A_X^{\mathrm{mod}}=\{\sigma\in A:\exists(f_\sigma,\hat{\sigma})\colon(X\to B)\xrightarrow{\simeq}({}^{\sigma}X\to B)\},$$

$$A_X^{\mathrm{def}}=\{\sigma\in A:\exists(f_\sigma,\hat{\sigma})\colon(X\to B)\xrightarrow{\simeq}({}^{\sigma}X\to B),\ \text{with}\ (f_{\sigma\tau},\widehat{\sigma\tau})=({}^{\sigma}f_\tau,{}^{\sigma}\hat{\tau})\circ(f_\sigma,\hat{\sigma})\ \text{for all}\ \sigma,\tau\in A\},$$

$$A_X^{\mathrm{inv}}=\{\sigma\in A:{}^{\sigma}X=X\}$$

它们分别对应于模、定义和不变性的相对群。

注 44. </style}显然， $A_X^{\mathrm{inv}} \leq A_X^{\mathrm{def}} \leq A_X^{\mathrm{mod}} \leq A$。另请注意， $\mathfrak{b}_X^{\mathrm{inv}}$是使覆盖 $X \to B$ 得以定义的 $\mathfrak{b}$ 的最大子群。根据前文讨论，我们还观察到以下等式：

$$A_X^{\mathrm{mod}} = \{\sigma \in A \ : \ \sigma_*(R) \simeq R \ \ (\text{as abstract groups})\} = A,$$
$$A_X^{\mathrm{inv}} = \{\sigma \in A \ : \ \sigma_*(R) = R\}$$

其中，第一个等式根据作用的定义总是成立，因为群同构 $\sigma_*(R) \simeq R$ 等价于$\hat{}\sigma$ 是一个同胚，因此提升 $\tilde{\sigma}$ 也是一个同胚。换言之，在拓扑情形中，模群 A_X^{mod}就是整个群，因而不太有趣。然而，对于定义群 A_X^{def}而言，情况并非如此。事实上，对于截面$\hat{}: $模群$(B^*) \to$Homeo+$(B^*)$的任意选择，条件 $\widehat{\sigma\tau} = {}^{\sigma}\hat{\tau}\hat{\sigma}$ 并不必然成立。按照我们的约定，该条件相当于映射$\hat{}$在 σ, τ上是一个同态。还要回想一下，伯曼正合列 (11) 一般不会分裂，因此迄今为止我们的假设都是“合理的”。因此，Weil 下降数据不一定（1）存在，也不一定（2）只能取$f_\sigma = \tilde{\sigma}$，因为可能存在不同的同胚对（$f_\sigma, \hat{}\sigma$）：$(X \to B) \to ({}^{\sigma}X \to B)$，如图 (21) 所示，它们满足上升/下降关系，但不保持基点。

我们给出如下定义，它是定义 38 的拓扑类比。回顾一下，$\mathbf{N}_{\mathrm{Mod}(B^*)}A$表示 A 在模群 Mod(B^*) 中的正规化子。

定义 45。 设 $X \to (B, A)$ 是定义在 A 上的覆盖，并且存在一个子群 $A' \leq \mathrm{Mod}(B^*)$，使得 $A \lhd A'$。如果存在一个覆盖$Y \to (B, A')$以及元素 $\sigma \in \mathbf{N}_{\mathrm{Mod}(B^*)}A$，使得 $\sigma_*(R_X) = R_Y$，其中 R_X, R_Y是分别与拓扑覆盖 X°, Y° 对应的$\pi_1(B^*, b_0)$的子群，则称覆盖 $X \to (B, A)$ 关于 A'/A 可定义于 A' 上。

最大的此类群 A' 称为 X的绝对定义群。

注意，正规化子条件在拓扑上等价于具有 A-不变量性。于是， $\sigma_*(R_X) = R_Y$意味着 σ 在覆盖 $X \to B$ 与 $Y \to B$之间诱导了一个同构。我们现在可以表述拓扑情形下的韦伊上升定理：

定理 46。 设 $A \lhd_{\mathrm{f}} A' \leq$ 模群(B^*)，且设 $X \to (B, A)$ 是定义在 A上的覆盖。那么， X 可定义在 A' 上，当且仅当 $X \to B$ 关于有限群商 A'/A具有一个映射类群上升数据 $\{f_\sigma\}_{\sigma \in A'/A}$。

证明。 首先注意，余循环条件 $(f_{\sigma\tau}, \widehat{\sigma\tau}) = ({}^{\sigma}f_\tau, {}^{\sigma}\hat{\tau}) \circ (f_\sigma, \hat{}\sigma)$ 等价于 $\widehat{\sigma\tau} = \hat{}\sigma\hat{}\tau$。事实上，这由利用共轭对 σ 的扭曲所作的定义直接推出；这正是余循环的第二个坐标所蕴含的内容。然后，正如我们在图 21 之后的讨论中所解释的， f_σ 和 f_τ 有许多相容的选择。因此，对于以 A'/A为指标的一组适当的（有限）元素，我们有截面 $\hat{}$: Mod$(B^*) \to$Homeo+(B^*) 的行为类似于)一个同态。于是，我们相应地处理映射类群上升数据。

给定一个由有限 A'/A 编号的映射类群上升数据，记作 $A' = \coprod_{i=1}^n \sigma_i A$。元素 $\hat{}\sigma_i$ 上的余循环条件意味着 $\coprod_{i=1}^n \hat{}\sigma_i H$ 是一个良定义的群，并且每个 $\hat{}\sigma_i$ 都正规化 H。存在一个自然投影 $\coprod_{i=1}^n \hat{}\sigma_i H \to \coprod_{i=1}^n \sigma_i A$，并假设 R' 是其核。我们有如下群的正合列交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & R' & \longrightarrow & \coprod_{i=1}^n \hat{\sigma}_i H & \longrightarrow & \coprod_{i=1}^n \sigma_i A & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

这意味着 $R = R'$。这一拓扑构造断言，在定义 45 中， $Y = X$。

反过来，给定任意正合列 $1 \to \sigma_*(R) \to H' \to A' \to 1$，记作 $A' = \coprod_{i=1}^n g_i A$；由于 R 包含于 H，$\sigma_*(R)$ 包含于 $\hat{}\sigma H \hat{}\sigma^{-1}$。因此我们可以写作 $H' = \coprod_{i=1}^n \hat{}g_i \hat{}\sigma H \hat{}\sigma^{-1} = \coprod_{i=1}^n \hat{}g_i H$，因为 σ 正规化 A，从而 $\hat{}\sigma$ 正规化 H。现在我们将证明，有限元素 g_i 关于 A'/A 构成适当的映射类群上升数据。注意，$\hat{}g_i \hat{}g_j \widehat{g_i g_j}^{-1}$ 属于 H，因为其在映射 $H'/H \to A'/A$ 下的像属于 A。然而，由下面的正合列可知，此映射是单射。

$$1 \to \sigma_*(R)/\hat{\sigma}R\hat{\sigma}^{-1} \to H'/\hat{\sigma}H\hat{\sigma}^{-1} \to A'/\sigma A\sigma^{-1} \to 1,$$

由于 $\sigma_*(R) = \hat{}\sigma R \hat{}\sigma^{-1}, \hat{}\sigma H \hat{}\sigma^{-1} = H, \sigma A \sigma^{-1} = A$。因此 $\hat{}g_i \hat{}g_j = \widehat{g_i g_j}$。 □

注 47. 在 Weil 下降定理的拓扑类比中，曲线 X 本身上升为定义在 A' 上的曲线。与算术情形不同，底层模型并未改变：覆盖 $X \to (B, A)$ 直接上升为 $X \to (B, A')$。这一现象可以追溯至定义 27，其中我们要求每个自同构类保持 $\pi(B^*, b_0)$ 中 R 的共轭类不变。如果这一条件能够以一种有意义的方式放宽，那么我们或许可以得到一个不同的覆盖 $Y \to (B, A')$；在某种意义上，对群施加限制后，它与覆盖 $X \to (B, A)$ 同构。

现在，我们从 Teichmüller理论的角度重新诠释前面的结果，以提供更多直观理解。关于下文回顾内容的背景知识，请参见 [17, Ch. 1] and [28, Pt. 2]。全文中，我们固定一个整数 $g \geq 2$。设 S_g 为亏格 g 的参考曲面，并设 $m_X\colon S_g \to X$ 表示覆盖$X \to B$的一个标记，也就是说，一个微分同胚。Teichmüller空间 $T(S_g)$ 是带标记的黎曼曲面 (X, m_X) 按如下等价关系取商所得的集合：若两个带标记的曲面之间存在一个与标记相容的双全纯映射，则将它们视为等价。

一项经典的特希米勒空间理论结果断言，$\mathrm{Mod}(S_g)$ 在 $T(S_g)$ 上作用 v ia

$$\sigma \cdot [(X, m_X)] = [(X, m_X \tilde{\sigma}^{-1})],$$

对任意提升 σ 的同胚 $\tilde{\sigma}$ 。该等价关系确保此作用定义良好，且独立于 $\tilde{\sigma}$。此外，第二项经典结果将商识别为

$$T(S_g)/\mathrm{Mod}(S_g) \cong M_g,$$

其中， M_g 表示亏格为 g的曲线模空间。注意，这个作用在 $T(S_g)$上总是平凡地保纤维的，也就是说，曲线 X 绝不会被替换为某条共轭曲线 Y。

然而，通过 $\mathrm{Mod}(B^*)$ 施加的作用则并非如此，伽罗瓦覆盖 $X \to B$在其中起着核心作用。一方面， $\sigma \in \mathrm{Mod}(B^*)$将 X 映射到 ${}^{\sigma}X$。另一方面，根据 Birman-Hilden 性质（见第 8 章），映射类 σ 在B^* 上的提升是 $\mathrm{Mod}(S_g)$的一个映射类，精确到覆盖的覆盖变换的同伦类。这样便巧妙地处理了穿孔曲面 B^* 与闭无穿孔曲面 S_g 上的映射类之间的区别。

随后，我们通过所选的截面 $\hat{}\colon \mathrm{Mod}(B^*) \to \mathrm{Homeo}^+(B^*)$ 消除了关于覆盖变换映射类的歧义。正如第 8 章所述，该截面使得可以将商 $\mathrm{LMod}(B^*)$提升至 $\mathrm{SMod}(S_g)$。因此，$\mathrm{Mod}(B^*)$的映射类 $\sigma = [\hat{\sigma}]$ 提升为 $\mathrm{Mod}(S_g)$的映射类 $[\tilde{\sigma}]$ 。另请回忆诱导的同胚 $\tilde{\sigma}_X\colon X \to {}^{\sigma}X$。那么，$\mathrm{Mod}(B^*)$在 $T(S_g)$上的作用为

$$\sigma \cdot [(X, m_X)] = [({}^{\sigma}X, \tilde{\sigma}_X m_X \tilde{\sigma}^{-1})].$$

这定义了一个真正的群作用，尽管它未必严格满足 $\widetilde{\sigma\tau} = \tilde{\sigma}\tilde{\tau}$；相关映射是同伦的，因此在 Teichmüller空间层面不会产生歧义。

在这种情况下，曲线 X 作为模空间 M_g中的一个点，不一定在 $\mathrm{Mod}(B^*)$的作用下保持不变。然而，鉴于该点在子群 $A \subseteq \mathrm{Mod}(B^*)$的作用下保持不变，那么关于 A'/A 的映射类群上升数据恰好保证，由 X 表示的点在 A'的作用下也保持不变。这种解释与模域和定义域背后的算术直觉十分吻合。

5.3. **常用记号**。 注意以下相似之处。在算术情形中，给定一个定义在L上的簇 X ，对于 $A =$ 伽罗瓦群(K_s/L)，我们有 $A_X^{\mathrm{inv}} = A$。类似地，对于一个覆盖 $X \to (B, A)$，我们有 $A_X^{\mathrm{inv}} = A$。在这两种情形中，为了进行下降/上升，选取一个大于 A 的群是有意义的，否则就会得到平凡结果。例如，在算术情形中，如果 X 定义在 L 上，且 $A \leq$ 伽罗瓦群(K_s/L)是闭子群，那么根据定义，我们将 X 视为 K_s-簇，进而总能下降到一个子域 K_s^A，使得X 定义在其上。特别地，这个簇是 X的标量扩张，即 $X \times_{K_s^A} L$。当然，如果我们使用$A = \mathfrak{d}$ ，那么这始终是有意义的。

注48。 一个区别是，在算术情形中，我们要求群 A 以及由此得到的子群 $A_X^{\mathrm{mod}}, A_X^{\mathrm{def}},$ 和 A_X^{inv} 是闭的，因为我们需要它们各自对应一个适当的不动域。一般而言，这些定义对任意子群都有意义，但随后必须取其闭包才能得到某个不动域。

数论	拓扑学	常用记号
伽罗瓦群(K_s/K)	模群(B^*)	$\mathfrak{b}$
闭子群 $A \leq$伽罗瓦群(K_s/K) 不动域 $K^A{}_s$	$A \leq$模群(B^*)	$A \leq \mathfrak{b}$
作用于 $X \to$谱(K_s)	作用于 $X \to (B, \{1\})$	
$A_X^{\mathrm{mod}} \hookleftarrow K_s^A \subseteq K_s^{A_X^{\mathrm{mod}}}$	A_X^{mod}	$\{\sigma \in A : \exists f_\sigma : X \xrightarrow{\simeq} {}^\sigma X\}$
$A_X^{\mathrm{def}} \hookleftarrow K_s^A \subseteq K_s^{A_X^{\mathrm{def}}}$ 最小使 X 可在其上定义	A_X^{def}	$\{\sigma \in A_X^{\mathrm{mod}}$: 族 f_σ 是一个下降数据$\}$
$A_X^{\mathrm{inv}} \hookleftarrow K_s^A \subseteq K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}$ 最小使 X 在其上定义	A_X^{inv}	$\{\sigma \in A : {}^\sigma X = X\}$

5.4. 模域的例子 = 定义域。 我们来考察椭圆曲线的情形。我们从 [69, III.1] 得知，在代数闭域 k 上，两条椭圆曲线

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B, \text{ and } E' : y^2 = x^3 + A'x + B'$$

同构，当且仅当它们的 j-不变量相同，也就是说

$$\frac{1728}{16}\frac{(4A)^3}{4A^3 + 27B^2} = \frac{1728}{16}\frac{(4A')^3}{4A'^3 + 27B'^2}.$$

上面的方程意味着，如果 $AB \neq 0 \neq A'B'$，那么下面的映射是一个同构

$$\begin{aligned} f\colon E' &\longrightarrow E \\ (x', y') &\longmapsto (x, y) = (u^2x', u^3y') \end{aligned}$$

其中 $u^4A = A'$、$u^6B = B'$（假设 $j \neq 0, 1728$）。

现在考虑椭圆曲线

$$E : y^2 = x^3 + \sqrt[3]{2}x + i,$$

它最初定义在 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$ 上。

伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 同构于一个阶为 6 的二面体群 D_6，由阶为 3 的元素 σ 和阶为 2 的元素 τ 生成，使得

$$\sigma(\sqrt[3]{2}) = \zeta_3\sqrt[3]{2}, \sigma(i) = i, \tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \tau(i) = -i.$$

椭圆曲线 E 有以下 6 个同构模型：

$$\begin{aligned} E &: \ y^2 = x^3 + (\sqrt[3]{2}) \cdot x + i, \\ {}^\sigma E &: \ y^2 = x^3 + (\zeta_3\sqrt[3]{2}) \cdot x + i, \\ {}^{\sigma^2} E &: \ y^2 = x^3 + (\zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \cdot x + i, \\ {}^\tau E &: \ y^2 = x^3 + (\sqrt[3]{2}) \cdot x - i, \\ {}^{\tau\sigma} E &: \ y^2 = x^3 + (\zeta_3^2\sqrt[3]{2}) \cdot x - i, \\ {}^{\tau\sigma^2} E &: \ y^2 = x^3 + (\zeta_3\sqrt[3]{2}) \cdot x - i, \end{aligned}$$

当 $g \in D_6$ 时，同构 $f_g\colon E \to {}^g E$ 由下式给出：

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow {}^g E \\ (x, y) &\longmapsto (u_g^3 x, u_g^2 y), \end{aligned}$$

其中

$$u_e = 1, \quad u_\sigma = \zeta_6^5, \quad u_{\sigma^2} = \zeta_6, \quad u_\tau = \zeta_{12}^3, \quad u_{\tau\sigma} = \zeta_{12}^5, \quad u_{\tau\sigma^2} = \zeta_{12}$$

我们可以定义伽罗瓦群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$ 在 E 上的作用。注意，群 $H = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 在 E 的模型上平凡作用，即 ${}^h E = E$ 对所有 $h \in H$ 都成立。因此，h 在 E 的点上有良定义的作用，即

$$\begin{aligned} \tilde{h}\colon E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \tilde{h}P \end{aligned}$$

¯ 一般元素 $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 属于六个陪集之一

$$H, \sigma H, \sigma^2 H, \tau H, \tau\sigma H, \tau\sigma^2 H$$

并按如下方式定义 E 上的作用：设 $\gamma = g \cdot h$ 为某个 $h \in H$ 和某个 $g \in D_6$，并令 g 通过对 E 作用 $\tilde{g} f_g$，从而在 E 上定义作用，因此 γ 的作用为

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f_\gamma} & \gamma E & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & E \\ (x,y) & \longmapsto & (u_\gamma^3 x, u_\gamma^2 y) & \longmapsto & (\gamma(u_\gamma^3 x), \gamma(u_\gamma^2 y)) \end{array}$$

¯**注 49.** 注意，由于 E 具有 j-不变的 $j(E) = -13824/19$，该曲线在 $\mathbb{Q}$ 上同构于方程为

$$E' \colon\ y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{j(E) - 1728} \cdot x - \frac{1}{j(E) - 1728}$$

其短魏尔斯特拉斯形式为

$$E'' \colon\ y^2 = x^3 - 1934917632/361 \cdot x + 60183678025728/6859$$

E, E'' 之间的同构由下式给出

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{-\frac{19}{62208} i \cdot 2^{\frac{2}{3}}}, \frac{y}{-\frac{1}{1492992} \left(-\frac{19}{3} i\right)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

5.5. 模域与定义域示例 $\neq$。此例出自第三作者，见 [46]。设 $K = \mathbb{R}$，并令 c 表示 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$中的复共轭。假设 $n, m, q \in \mathbb{Z}_{>1}$，其中 m 为奇数，且 $2q < 2mn$和 $q \mid 2m$。令 X 为由下式定义的曲线

$$X/\mathbb{C} \colon\quad y^q = \prod_{1 \le i \le m} (x^n - a_i) \left(x^n + \frac{1}{c(a_i)} \right),$$

其中 $a_i = (1+i)\zeta_m^i$ 和 ζ_m 表示一个本原 m 次单位根。曲线 X 是射影直线的一个分歧覆盖，通过投影到 x 坐标给出，其中伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{R}(\mathbb{P}^1))$ 是一个 q 阶循环群。共轭曲线

$${}^cX/\mathbb{C} \colon\quad y^q = \prod_{1 \le i \le m} (x^n - c(a_i)) \left(x^n + \frac{1}{a_i} \right),$$

通过 $\mu \colon X \to {}^cX$ 同构于 X，其中该映射由下式定义：

$$\mu(x,y) = \left(\frac{1}{\omega x}, \frac{\omega' y}{x^{2mn/q}} \right),$$

其中 $\omega^n = -1$ 且 $(\omega')^q = -1$。这意味着 X 的模域是 $\mathbb{R}$。

曲线 X 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 是由 $\gamma(x,y) = (x, \zeta_q y)$ 和 $\nu(x,y) = (\zeta_n x, y)$ 分别生成的循环群 $C_q \times C_n$ 的直积，其中 $C_q \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(X)/\mathbb{R}(\mathbb{P}^1))$。因此，任意同构 $f_c \colon X \to {}^cX$ 都可表示为 $f_c = \mu\gamma^i\nu^j$，其中某些 $0 \le i < q$ 和 $0 \le j < n$ 满足条件。对于任意这样的 f_c，根据[46, 命题 5.1]，有 ${}^cf_c \circ f_c \neq 1$。因此，Weil 的余循环条件不成立，因而 X 不承认一个 $\mathbb{R}$-模型。

6. 正则性

本节将给出覆盖上正则性条件的群论描述。我们将采用前几节的常用记号。特别地，令 $\mathfrak{b}$ 表示 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ 或 $\mathrm{Mod}(B^*)$。令 $X \to (B, A)$ 表示簇或曲线的覆盖（即 $X^\circ \to B^*$ 为双曲的），其定义在（闭）子群 $A \le \mathfrak{b}$ 上。另以 Π_1 表示群 Π_{K_s} 或 $\pi_1(B^*, b_0)$。在算术情形下，Π_A 表示 $\Pi_{K_s^A}(B^*)$。下面的命题同时适用于这两种情形。

命题 50。 如果覆盖 $X \to$ （B, A）是正则的，那么

$$[\Pi_A : H] = [\Pi_1 : R].$$

证明。 我们考虑以下群的短正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi_1 & \xrightarrow{i} & \Pi_A & \xrightarrow{p_1} & A & \longrightarrow & 1 \\ & & \uparrow & & \phi\uparrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{i} & H & \xrightarrow{p_2} & A & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

设 aR 是 Π_1/R 中的一个陪集。陪集 $i(a)H$ 是 Π_A/H 中定义良好的陪集。两个陪集 aR 和 bR 所生成的陪集 $i(a)H$、$i(b)H$ 相等，当且仅当 $i(a)^{-1}i(b) \in H$。我们将证明 $i(\Pi_1) \cap H = i(R)$，因此 $i(a)H = i(b)H$ 当且仅当 $aR = bR$。

显然，$i(R) \subseteq H \cap i(\Pi_1)$。设 $h \in H \cap i(\Pi_1)$。若 $h \notin i(R)$，则 $p_2(h) \neq 0$。另一方面，$\phi(h) \in i(\Pi_1)$ 且 $p_1(\phi(h)) = 0$，这意味着 $\phi(h) \in i(R)$，矛盾。因此 $H \cap i(\Pi_1) = i(R)$。这证明映射 $aR \mapsto i(a)H$ 是单射。

为完成证明，我们需要以下引理，现插述于此：

引理 51. 若覆盖 $X \to (B, A)$ 是正则的，则对于每个陪集 xH *in* Π_A/H，我们都可以选取代表元$x \in \Pi_A$。

证明. 我们有 $p_1(x) = \gamma \in A$。存在一个元素 $h \in H$，使得 $p_2(h) = \gamma$。于是 $xH = xh^{-1}H$ 和$p_1(xh^{-1}) = 1$。这意味着 $xh^{-1} \in i(\Pi_1)$。□

引理 51 表明，对于某个 $aR \in \Pi_1/R$，有 $xH = i(a)H$。由此可证，指标 $[\Pi_A : H]$ 和$[\Pi_1 : R]$ 相等。□

现在我们将不变群 A_X^{inv}与正则性条件联系起来。考虑以下交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & N_{\Pi_A}R & \xrightarrow{\pi} & \dfrac{N_{\Pi_A}R}{R} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & H & \longrightarrow & A_X^{\mathrm{inv}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \Pi_1 & \longrightarrow & \Pi_A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{22}$$

上图最下方一行是式 (9) 的短正合列。此外，单射 $A_X^{\mathrm{inv}} \hookrightarrow N_{\Pi_A}R/R$ 存在，这直接源于通常的群同构定理。不过从更广泛的意义上说，群$N_{\Pi_A}R/R$ 包含所有自同构，包括数论（分别为拓扑）和几何自同构，这意味着该单射是自然产生的。当且仅当 $A_X^{\mathrm{inv}} = A$时，覆盖 $X \to (B, A)$是正则的。

7. 单值化上的下降

本节讨论覆盖及其单值表示的下降理论——或等价地，群上升理论。该理论由 Dèbes 和 Douai 在算术情形下于 [22] 中发展。特别是，他们给出了上同调判据，保证模群 相对于某个覆盖 实际上是该覆盖的定义域。我们采用统一的语言和记号来描述算术情形与拓扑情形，并着重指出，他们以群上同调表述的结果可以原样推广到拓扑情形。

回顾一下，在算术情形下，$\mathfrak{o}$ 是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(K_s/K)$；我们用 A'/A 表示有限伽罗瓦扩张 L/K 的伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(K_s/K)/\mathrm{Gal}(K_s/L)$。研究对象是域 $K \subseteq L \subseteq K_s$ 上的簇，而一个次数为 d 的 (G)-覆盖 $X \to (B, A)$ 对应于正则函数域扩张 $K(X)/K(B)$，它由单值表示 $\Psi\colon \Pi_A \to G \leq N$ 决定，其中 N 是 S_d 中 G 的正规化子。在拓扑情形下，$\mathfrak{o}$ 是 $\mathrm{Mod}(B^*)$，研究对象是复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数曲线；对于每个分歧覆盖 $X \to B$，X 的亏格为 $g \geq 2$，相应的拓扑覆盖 $X^\circ \to B^*$ 位于双曲曲面之间。拓扑情形中的其他概念也采用类似的记法，其中伯曼正合列 (11) 扮演算术正合列 (4) 的角色。

特别地，我们需要以下假设，该假设取自 [22]:

$$\textbf{(Seq/Split)} \quad 1 \to \Pi_A \to \Pi_{A'} \to A'/A \to 1 \quad \text{is split.}$$

作为 A 的特殊情形 $= 1, A' = \mathfrak{d}$ 这是算术中 (4) 和 (11) 均分裂的条件，并且
拓扑情形，分别 地。

直接处理下降问题的方法，是研究可能的群扩张 H，它们记录了覆盖的可定义性，其（几何）基本群为 R，并由非阿贝尔上同调中的某个有基点集合 $H^2(\mathfrak{d}, R)$ 分类，如下方图的顶行所示

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \mathfrak{d} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \Vert & & \\ 1 & \longrightarrow & \Pi_1 & \longrightarrow & \Pi_{\mathfrak{d}} & \longrightarrow & \mathfrak{d} & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

[22] 中采用的巧妙思路是，他们没有这样做，而是利用了 (G)-覆盖中的有限群“G”，以及正合列

$$1 \to Z(G) \to C \to CG/G \to 1 \quad \text{and} \quad 1 \to CG/G \to N/G \to N/CG \to 1,$$

涉及 S_d 中 G 的中心化子 C 和正规化子 N，以及 G的中心 Z。这些使得下降问题可以转化为（阿贝尔）群上同调问题，因为 $\mathfrak{d}$ 在 R 上的外作用，通过覆盖的单值表示对应于 G 上的共轭作用。

值得注意的是，后来有人在 [23] 中运用非阿贝尔上同调工具以及 Giraud 在 [33]中发展出的 gerbe 理论，重新探讨了这个问题。

注 52. 这里“覆盖的”这一部分很重要；在本节中，模群是相对于覆盖的同构来定义的。在前面的章节中，模群是相对于 K_s-概形的同构来定义的。这里我们只要求（几何）基本群共轭相等；对于伽罗瓦覆盖，二者则相等。在之前的拓扑情形中，我们允许 $\sigma_*(R)$ 不一定等于 R，但当前框架要求二者相等。此外，在曲线和有限型概形的算术情形中，模群与覆盖的模群通过典范商映射 $X \to X/\mathrm{Aut}(X)$ 联系起来；该映射也是一个覆盖，如 [24, 定理 3.1] 所示。该定理中将问题归约到覆盖，是基于 Weil 的余循环条件，这进一步凸显了当前拓扑框架与第 5.2 节之间的联系。

现在我们来发展覆盖上的群上升理论。假设对于一个（闭）子群 $A \leq \mathfrak{d}$，我们有同态

$$\phi \colon \Pi_A \to G < N,$$

对应于 (G)-覆盖 $f\colon\ X \to (B, A)$。

定义 53。 设 $1 \leq A \leq A' \leq \mathfrak{d}$ 为具有 $A \lhd A'$ 的群。群 A' 被称为相对于 $A \leq A'$ 的 (G)-覆盖 f 的模群，当且仅当分歧除子是 A'-不变量，并且满足以下覆盖的模群条件（**CMod**）：

（**CMod**）：对于每个 $U \in \Pi_{A'}$，存在 $\varphi_U \in N$ 使得

$$\phi(x^U) = \phi(x)^{\varphi_U} \text{ for all } x \in \Pi_A.$$

请注意，关于分歧除子的条件只影响算术情形。在拓扑情形中，该条件自动满足，因为根据定义，映射类群固定标记的分歧分支点。

元素 φ_U在 $C = \mathrm{Cen}_N G$ 中仅在相差某个元素的意义下定义良好。由此，我们得到一个映射 $\bar{\varphi}\colon\ \Pi_{A'} \to N/C$，其定义为 $U \mapsto \varphi_U \mathrm{mod} C$。注意，对于 $U \in \Pi_A \leq \Pi_{A'}$，我们有 $\varphi_U = \phi(U) \bmod C$，因为

$$\phi(x^U) = \phi(UxU^{-1}) = \phi(U)\phi(x)\phi(U)^{-1} = \phi(x)^{\phi(U)} \bmod C.$$

映射 ϕ_U 不一定是同态，但满足

$$\varphi_{\eta_1}\varphi_{\eta_2}\phi(x)\varphi_{\eta_2}^{-1}\varphi_{\eta_1}^{-1} = \varphi_{\eta_1\eta_2}\phi(x)\varphi_{\eta_1\eta_2}^{-1}, \text{ for all } x \in \Pi_A,$$

这意味着

$$\varphi_{\eta_1}\varphi_{\eta_2}\varphi_{\eta_1\eta_2}^{-1} = c(\eta_1, \eta_2) \in C.$$

该映射是一个 2-余循环。此外，如果序列

$$1 \to C \to N \to N/C \to 1$$

可以分裂。在这种情况下，同态 $\bar{\varphi}$ 可以扩展为同态 $\Pi_{A'} \to N$。若存在这样的提升，则该覆盖可以定义在其模群 A' 上，我们称存在一个 A'-模型。这一术语在算术情形中已广为人知，但我们将在下一个定义中对这两种情形作出正式定义。

定义 54。设 $f\colon X \to (B, A)$ 是一个对应于单值化 $\phi\colon \Pi_A \to G < N$ 的 (G)-覆盖。(G)-覆盖 f 的一个 A'-模型 是一个覆盖 $f'_A\colon X_{A'} \to (B, A')$，对应于同态 $\phi_{A'}\colon \Pi_{A'} \to N$，且当限制到 Π_1 时，ϕ 与 $\phi_{A'}$ 共轭。

假设存在这样一个 同态 $\phi_{A'}\colon \Pi_{A'} \to N$ 扩张了 ϕ，并考虑如下图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \ker(\phi) & \longrightarrow & \ker(\phi_{A'}) & \longrightarrow & \ker(\Lambda) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \Pi_A & \longrightarrow & \Pi_{A'} & \longrightarrow & A'/A & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle\phi}\downarrow & & {\scriptstyle\phi_{A'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Lambda} & & \\
1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

同态 Λ 的存在性由 $\phi(\Pi_A) = \phi_{A'}(\Pi'_A) = G$ 推出，而唯一性则因为映射 $\Pi_{A'} \to A'/A$ 是满射。

在本段中，我们仅转向算术情形，以获得一些适用于这两种情形的洞见。设 $A'/A =$ 伽罗瓦群(L/K)，则群 $\ker(\Lambda)$ 是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/\hat{}K)$，其中 $\hat{}K = \widehat{K\ X_{A'}}(\ ) \cap L\hat{}$ 是伽罗瓦闭包中的常数扩张。此外，$\mathrm{Gal}(K/K) = \mathrm{Im}(\Lambda)$，参见[22, 第 2.8] 节。域扩张塔 $K = K_s^{A'} \subseteq \hat{}K = K_s^{\hat{A}} \subseteq L = K_s^A$ 对应于闭伽罗瓦群链$A \leq \hat{} A \leq A' \leq \mathrm{Gal}(K_s/K)$，这一构造可以推广到拓扑情形。

回到常用记号并同时处理这两种情形，核 $\ker(\phi)$ 和 $\ker(\phi_{A'})\hat{}$ 分别对应于相应覆盖的伽罗瓦闭包。它们的商得到一个子群 $\ker(\Lambda) \cong A/A \leq A'/A$，$\hat{}\,\hat{}$ 以及一个（闭）子群序列 $A \leq A \leq A' \leq \mathfrak{b}$。子群 A 体现了“伽罗瓦闭包中的常数扩张”这一概念，并且与算术情形中的概念完全类似。

注记 55. 对于一个 G-覆盖 $f\colon X \to (B, A)$，我们有 $N = G$，因此 $\hat{}A = A$。

7.1. 纯覆盖扩张。现在我们转向纯覆盖的情形。我们回顾 [22] 中引入的两个定理，并考察它们的拓扑解释。原始证明具有群论性质，在拓扑情形下也可逐字照搬。

假设 A' 是 (G)-覆盖 $f\colon X \to (B, A)$ 的模群，其中 $A \lhd A'$。设在定义 53 中给出的 $^-$模群条件 (**CMod**) 成立。令 $\phi\colon \Pi_{A'} \to N/C$ 为 ϕ 模 C 的表示，该表示由模群条件保证存在。

如同 [22]，研究的算术情形，可能存在多个 (G)-覆盖 $\sim f\colon X \to (B, A)$ 的 A'-模型。这类覆盖的一个不变量是群 A，前文将其解释为伽罗瓦闭包中的常数扩张。下述定理相当于 [22, 主定理 I] 中的“第一障碍”。

$^-$定理 56. 设 $f\colon X \to (B, A)$ 是一个(G)-覆盖，其模群为 A'。设 $\phi\colon \Pi_{A'} \to N/C$ 是由模群条件给出的 Π_A 模 C 表示。

(1) 存在唯一的同态 λ，使图可交换

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_{A'} & \twoheadrightarrow & A'/A \\
{\scriptstyle\bar{\phi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} \\
N/C & \twoheadrightarrow & N/CG
\end{array}$$

(2) 对于每个 A'-模型，相应映射 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$ 是 λ 的一个提升。

(3)（λ提升）条件：存在一个提升 Λ，使下图交换

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & A'/A & & & & \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \Lambda} & \searrow{\scriptstyle \lambda} & & & \\ 1 & \longrightarrow & CG/G & \longrightarrow & N/G & \longrightarrow & N/CG & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

对于群 A' 成为该(G)-覆盖的定义群，这是必要的。

映射 $\lambda\colon \Pi_{A'} \to N/C$ 由与 (G)-覆盖 $f\colon X \to (B, A)$ 相关联的表示 $\phi_A\colon \Pi_A \to G \leq N$ 唯一确定。若对某个 $a \in N$，将 ϕ_A 替换为其共轭 ϕ_A^a，则必须将 λ 替换为 $\lambda^{\bar{a}}$，其中 $\bar{a}$ 是 a 模 CG 的陪集。

在 G-覆盖这一特殊情形下，我们有 $N/CG = N/G = \{1\}$，因此 λ 模 C 是平凡映射。因此，平凡映射 $A'/A \to N/C$ 是提升 λ 的唯一可能的常值扩张。因此，(λ/提升)-条件自动成立。

按照 [22, 3.2], ，我们定义作用 $L, L_\Lambda, L_\Lambda^*$ 和群上同调算子 δ^1。符号 L不再像在算术情形中那样表示一个域，而是表示如下定义的作用：

- L 是通过将 $\lambda\colon A'/A \to N/CG$ 与 N/CG 在 $Z(G)$ 上的共轭作用复合而得到的 A'/A 在 $Z(G)$ 上的作用。• L_Λ 是通过将 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$ （λ 的一个提升）与 N/G 在 C上的共轭作用复合而得到的 A'/A 在 C 上的作用。• L_Λ^* 是通过将 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$ 与 N/G 在CG/G上的共轭作用复合而得到的 A'/A 在 CG/G 上的作用。

对于固定的提升 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$，我们考虑短正合列：

$$1 \to Z(G) \to C \to CG/G \to 1.$$

它具有阿贝尔核 $Z(G) \leq Z(C)$，因此群上同调算子

$$\delta_1\colon H^1(A'/A, CG/G, L_\Lambda^*) \to H^2(A'/A, Z(G), L)$$

是有定义的。

定理 57. 设 A 为相对于 A'/A 的(G)-覆盖 $f\colon X \to (B, A)$ 的模群，并假设定理 *56* 的条件 (λ/提升) 成立。固定 λ的一个提升 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$ 。

(1) 设 $s\colon A'/A \to \Pi_{A'}$是映射 $\Pi_{A'} \to A'/A$的一个集合论截面，并设 $\phi\colon \Pi_{A'} \to N/C$是由模群条件给出的 $\Pi_{A'}$ 模 C 的表示。对于每个 $u \in A'/A$，存在一个元素 $\phi_u \in N$，其模 $Z(G)$意义下唯一，使得

$$\phi_u = \Lambda(u) \bmod G \text{ and } \phi_u = \bar{\phi} \circ s(u) \bmod C.$$

(2) 考虑 2-上链 $\Omega_{u,\ v}$，其中 $u, v \in A'/A$，定义为

$$\Omega_{u,v} = \phi_u \phi_v \phi_{uv}^{-1} \big(\phi_A(s(u), s(v), s(uv)^{-1})\big)^{-1}.$$

2-上链 $(\Omega_{u,\ v})_{u,\ v \in A'/A}$ 诱导出一个 2-余循环 $\Omega_\Lambda \in H^2(A'/A, Z(G), L)$，它与 $\phi_u \in N$ 的选择无关；模 $Z(G)$ 以及集合论截面 s 也与之无关。

(3) λ：$A'/A \to N/CG$ 的每个提升 Λ' 都具有如下形式 $\Lambda' = \theta \cdot \Lambda$，其中 θ：$A'/A \to Z(G)$ 是$Z^1(A'/A, CG/G, L_\Lambda^*)$中的任意 1-上链。*(4)* 令 $\tilde{\theta} \in Z^1(A'/A, CG/G, L_\Lambda^*)$，并令 θ 为上同调群 $H^1(A'/A, CG/G, L_\Lambda^*$ 中相应的 1-余循环

).

以下条件等价：*(a)* $\Omega_\Lambda^{-1} = \delta_1(\theta)$ *(b)* 存在一个 A'-模型，其 (G)-覆盖 f满足 $\lambda\colon A'/A \to N/CG$ 等于映射 $\theta \cdot \Lambda\colon A'/A \to N/G$。*(5)* 以下条件等价：*(a)* $\Omega_\Lambda^{-1} \in \delta_1(H^1(A'/A, CG/G, L_\Lambda^*))$*(b)* 模群 A' 是 (G)-覆盖 f 的定义群。

此外，若满足（**Seq/Split**）条件，则上述定理可简化如下。设 $s\colon A'/A \to \Pi_{A'}$ 是映射 $\Pi_{A'} \to A'/A$的群论截面。那么，按照 Dèbes 和 Douai [22], ，将定义群从 A 提升至 A'，就是构造一个作用 $A'/A \to N \leq S_d$，使其与

给定的 A-模型 $\phi_A\colon \Pi_A \to G \leq N$相容，也就是说，该作用与由 s诱导的半直积 $\Pi_{A'} \cong \Pi_A \rtimes_s A'/A$相容。在这些假设下，定理可简化为以下形式。

定理 58. 假设 A' 是相对于 A'/A 的覆盖 $f\colon X \to (B, A)$ 的模群，并且满足 ¯*(*序列/分裂*)* 条件。固定一个截面 $s\colon A'/A \to \Pi_{A'}$，并令 $\phi\colon \Pi_{A'} \to N/C$ 为由模群条件给出的 $\Pi_{A'}$ 模 C 表示。

(1) 对于 $\lambda\colon A'/A \to N/CG$ 的每个提升 $\Lambda\colon A'/A \to N/G$，*2*-余循环 $\Omega_\Lambda \in H^2(A'/A, Z(G), L)$ 平凡，当且仅当存在一个同态 $\phi\colon A'/A \to N$，它提升同态 $\phi \circ s$ 并诱导出模 G 的 Λ 。*(2)* 特别地，模群 A' 是 *(G)*-覆盖的定义群，当且仅当同态 $\phi \circ s\colon A'/A \to N/C$ 存在提升 $\phi\colon A'/A \to N$。¯*(3)* 对于映射 $\phi \circ s$ 的每个提升 $\phi\colon A'/A \to N$，都对应一个 *(G)*-覆盖 f 的 A'-模型。相应的 A'-模型恰好是与将 $\phi_A\colon \Pi_A \to G \leq N$ 扩张到 $\Pi_{A'} \cong \Pi_A \rtimes_s A'/A$ 相关联的模型；此扩张在 A'/A 分量上与 ϕ 一致，并保持半直积结构。

8. Birman-Hilden 性质

本节讨论 Birman-Hilden 性质及其与我们工作的联系。Birman-Hilden 的文章 [9], [10], [11] 代表了映射类群研究中的一项重大突破，而 Birman-Hilden 性质（简称 BH）是其理论中的核心结果。关于这一主题及其发展的最新全面综述，参见 [50], ；本节将主要遵循该综述。

Birman 和 Hilden 工作的出发点是分歧覆盖下映射类之间的关系。具体而言，他们研究了二重分歧覆盖 $S_2 \to S_{0,\ 6}$，其中六个分支点被视为标记点。他们的目标是通过映射到 Mod($S_{0,\ 6}$) 来计算 Mod(S_2)；后者因与辫群的联系而广为人知，见公式 (7)。该覆盖的覆盖变换是双曲 involution，记作 ι；Birman 和 Hilden 证明了 Mod(S_2)/$\langle\iota\rangle$ ≅Mod($S_{0,\ 6}$)。他们面临的主要困难在于，Mod(S_2) 的元素仅在同伦意义下定义，而同伦未必保持 involution ι。因此，原则上没有理由认为满射 Mod(S_2) →Mod($S_{0,\ 6}$) 是良定义的。然而，Birman 和 Hilden 证明，总能选取保持该 involution 的同伦，从而解决了这一问题。

一般而言，对于双曲曲面之间的（可能带分支的）有限覆盖 $p\colon X \to B$，BH 性质旨在建立 Mod(X) 与 Mod(B^*) 之间的联系。注意， B 的分支点被视为标记点，而 X 的分歧点既不被移除，也不被标记。令 SMod(X) 表示 Mod(X) 中保纤维的元素 σ ，即满足 $\sigma(p^{-1}(b)) = p^{-1}(b')$（其中 b, b' 属于 B^*）的元素 σ 。这些恰好是保持分支点不变的 B 的可提升同胚的提升。若要将 SMod(X) 视为 Mod(X) 的子群，我们必须考虑其元素在同伦意义下的等价类，而不要求同伦过程保纤维。令 LMod(B^*) 为 Mod(B^*) 的子群，其定义性质是每个元素都有一个代表元可提升为 X 的同胚。令 G 表示该覆盖的覆盖变换群，并令 G^* 表示其在 SMod(X) 中的忠实嵌入；覆盖变换显然是保纤维的，并且代表非平凡的映射类 [50][28,命题 7.7]。

若对于 X 中任意两个同伦的保纤维同胚，都可以选取一个保纤维同伦，则 Birman-Hilden 性质成立。在这种情况下，根据 [50, 命题 3.1], ，BH 性质等价于以下序列良定义且正合：

$$1 \to G^* \to \mathrm{SMod}(X) \to \mathrm{LMod}(B^*) \to 1. \tag{23}$$

现在我们陈述双曲曲面之间的有限分支覆盖 $X \to B$ 的 Birman-Hilden 理论中的一些重要结果：

- （Birman-Hilden [50, 命题 3.1]）对于伽罗瓦分支覆盖，BH 性质成立，当且仅当$N_{\mathrm{Mod}(X)}(G^*)/G^* \cong$ LMod(B^*)。
- （Winarski [73]）全分歧覆盖满足 BH 性质。
- （Birman-Hilden [10], [11]）无分支覆盖以及具有可解覆盖变换群的覆盖满足 BH 性质。
- （Maclachlan-Harvey [49]）任意伽罗瓦覆盖都满足 BH 性质。

注意，Winarski 的结果蕴含了最后两个结果，尽管它们是独立且更早证明的。此外，M. Sato [64, 命题 1.2] 将 LMod(B^*) 刻画为 Mod(B^*) 在单值表示 $\Psi\colon \pi_1(B^*, b_0) \to S_d$ 上的作用的稳定子，该表示对应于 $X \to B$。

现在我们转而关注 $X \to B$ 上的代数曲线覆盖 $\mathbb{C}$，其中 $X^\circ \to B^*$ 是双曲的。回想一下，对于曲线，相应的函数域扩张 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(B)$ 无法检测穿孔点；因此，$X \to B$ 是伽罗瓦扩张，当且仅当 $X^\circ \to B^*$ 是伽罗瓦扩张，当且仅当扩张 $\mathbb{C}(X)/\mathbb{C}(B)$ 是伽罗瓦扩张。

Birman-Hilden 性质可以用群论表述如下。设 $R < \pi_1(B^*, b_0)$ 是开曲线 X° 的基本群，它由 $2g+s-1$ 个元素生成；若 $s \geq 1$，则这些元素自由生成，并且具有如下表示

$$R = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_s | \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s[\alpha_1,\beta_1]\ldots[\alpha_g,\beta_g] = 1\rangle.$$

由于覆盖 $X^\circ \to B^*$ 是无分歧的，它满足 BH 性质。正合列 (23) 中的群如下：

$$\begin{aligned} G^* &= \mathrm{N}_{\pi_1(B^*,b_0)(R)}/R, \\ \mathrm{SMod}(X^\circ) &= \{[f] \in \mathrm{Out}^*_+(R) : \exists\, \hat{f} \in \mathrm{Aut}^*_+(\pi_1(B^*,b_0)),\ \hat{f}|_R = f \text{ modulo } \mathrm{Inn}(R)\}, \\ \mathrm{LMod}(B^*) &= \{\sigma \in \mathrm{Out}^*_+(\pi_1(B^*,b_0)) :\ \sigma([R]) = [R]\}. \end{aligned}$$

这里的符号“$+$”和“$*$”分别表示保向自同构，以及保持穿孔点周围环路的共轭类的自同构，如定理 10 中所述。在上述 R 的表示中，它们是抛物元素 γ_i。群 G^* 通过对 R 的外共轭作用嵌入 SMod(X°)。SMod(X°) 的刻画源于以下事实：X° 的每个保纤维自同胚都会唯一地诱导出 B^* 的一个自同胚，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X^\circ & \longrightarrow & X^\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^* & \longrightarrow & B^*. \end{array}$$

这一论证此前已在第 5.2 节使用过，也见于 [64]。在伽罗瓦情形下，我们无需追踪保持 R 不变的 $\pi_1(B^*, b_0)$ 的内自同构，因此得到

$$\mathrm{SMod}(X^\circ) = \{\sigma \in \mathrm{Out}^*_+(R) :\ \exists\, \hat{\sigma} \in \mathrm{Out}^*_+(\pi_1(B^*,b_0)),\ \hat{\sigma}|_R = \sigma\}.$$

现在假设这条紧致曲线 X 的亏格为 $g \geq 2$，因此它是双曲的，并且可以将其一致化为商 $\mathbb{H}/\Gamma$，其中 Γ 有一个表示

$$\Gamma = \langle \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g : [\alpha_1,\beta_1]\ldots[\alpha_g,\beta_g] = 1\rangle. \tag{24}$$

设 $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$ 是 $\pi_1(B^*, b_0)$ 中由绕 $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ 这些穿孔点的环路的同伦类生成的子群的正规闭包。这意味着群 Γ 可以由 R 恢复为如下商

$$\Gamma = \frac{R\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle}{\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle}, \tag{25}$$

通过从 X° 到 X 的紧化，见 [48, 第 5] 节和 [47]。根据 Dehn–Nielsen–Baer 定理 10，X 的映射类群可实现为 Out+(Γ)。

特别地，如果分歧覆盖 $X \to B$ 是伽罗瓦的，因而也满足 BH 性质，那么我们可以用 SMod(X) 替换 SMod(X°)；后者由以下方式得到的元素 $\sigma \in$Out+(Γ) 组成：若 $\hat{}\sigma \in \mathrm{Out}^*_+(\pi_1(B^*, b_0))$ 保持 R 不变，则它在 $\pi_1(B^*, b_0)/\langle \gamma_1, \cdots, \gamma_s\rangle$ 上诱导一个外自同构 $\tilde{\sigma}$，并令 $\sigma := \tilde{\sigma}|_R$。

事实上，这种替换也可以用以下初等方法完成，而无需调用 BH 性质。

引理 59. 设 $h \in$自同构群($\pi_1(B^*, b_0)$)，并设 Γ 由式 (*24*) 给出。假设 $h\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle^{-}$且 $h(R) = R$。那么，自同构 h 诱导出一个映射 $h \in$自同构群(Γ)。

证明。考虑如下群图，其各行均为正合行，且 h 是保持 $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$ 和 R 不变量的自同构：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle & \longrightarrow & R\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle & \longrightarrow & \frac{R\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle}{\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow \bar{h} & & \\ 1 & \longrightarrow & \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle & \longrightarrow & R\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle & \longrightarrow & \frac{R\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle}{\langle \gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

显然， h 诱导出一个群同态 $\bar{h}$: $\Gamma \to \Gamma$。对 h^{-1} 重复同样的构造，我们得到 $\bar{h}^{-1}$ 是 $\bar{h}$ 的逆，因此 $\bar{h}$ 是一个自同构。□

注意，逆向构造由短五引理推出。由于 R 是正规的， $R\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle = R$ 以及前述引理和其逆向构造都可以调整为将 Out$^*_+(R)$ 映射到 Out+(Γ)。此外，G^* 可以解释为 Out(Γ) 的子群：我们有

$$G^* = \frac{\pi_1(B^*, b_0)}{R} = \frac{\frac{\pi_1(B^*,b_0)}{\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle}}{\frac{R}{\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle}} = \frac{\frac{\pi_1(B^*,b_0)}{\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle}}{\Gamma}.$$

这意味着 G^* 通过外共轭作用于 $\pi_1(B^*, b_0)/\langle\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_s\rangle\Gamma$，从而诱导出一个单射 G^* , $\to$ Out+(Γ)。

为了将 BH 性质与前几节联系起来，请注意，在子群 $A \leq \mathrm{Mod}(B^*)$ 上定义的一个（G）-覆盖 $X \to (B, A)$ 诱导出一个同态 $A \to \mathrm{Out}^*_+(R)$，可以将其视为 BH 性质提升映射类这一操作的对偶操作。最后，为结束本节并将其与算术联系起来，我们提出以下问题。

问题。是否存在 Birman-Hilden 性质的 profinite 或 pro-ℓ 类比？也就是说，将 R 替换为其 profinite 或 pro-ℓ 完备化，将 $\langle\gamma_1,\ldots,\gamma_s\rangle$ 替换为其拓扑闭包，并将曲线的基本群替换为其 étale 基本群后，能否建立相应外自同构群之间的关系？这需要谨慎考虑分支点处的惯性子群。此外，能否使这种关系关于经典 Birman–Hilden 问题具有函子性？

9. 范畴上的有限群作用

本节转换一下话题，回顾一些关于范畴上的群作用和等变范畴的概念。本节及最后一章将用到这套术语。关于更全面详尽的论述，请参阅 [27], [70], [59], [4], [18]和 [43] 。

作为本文最后两章内容的引言，并与前几章衔接，我们提到，簇 X 上的自同构有限子群 G 会产生商簇 X/G （在某些假设下）。簇上的这一群作用会在该簇的层范畴上诱导出群作用。特别地，它会在相干层范畴 Coh(X) 上诱导出群作用；该范畴对应簇 X 的相干层，并已得到广泛研究。注意，Coh(X) 已知是代数簇的不变量，这一结果称为 Gabriel 重构定理，参见 [32]。自然可以考虑 Coh(X/G) 范畴的“范畴商作用”类比。这正是等变范畴 Coh^G(X)，它与 Coh(X/G) 有典范等价。我们还将这一等价提升到导出范畴的情形，这正是最后一章关注的主要对象。

我们注意到，等变范畴理论也与算术和拓扑意义上的 Weil 下降数据有关（见第 5 节），本节旨在阐明这些对象之间的关系。事实上，在第9.3小节中，我们证明，对于有限伽罗瓦扩张 L_0/L，定义在 L_0 上的簇的 Gal(L_0/L)-等变范畴与定义在 L 上的簇范畴存在典范等价。类似地，利用 Weil 第46定理的拓扑类比，我们在第9.4节中证明，对于定义在 $A \lhd_{\mathrm{f}} A'$ 上的适当覆盖范畴，也有相应的拓扑类比。

9.1. **加性范畴与阿贝尔范畴上的作用**。

定义60. 设 G 是有限群， $\mathscr{A}$ 是加性范畴。 G 在 $\mathscr{A}$ 上的右群作用由以下数据组成：

(i) 每个 $g \in G$ 对应一个自等价，为简便起见也记作 g: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$；(ii) 一族自然同构 $\theta_{g,h}$: $g \circ h \xrightarrow{\simeq} (gh)$，用于使这些自等价能够相干地复合；(iii) 给定三个自等价 g, h, k， 下图交换：

$$\begin{array}{ccc} g\circ h\circ k & \longrightarrow & g\circ(hk) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gh)\circ k & \longrightarrow & (ghk) \end{array}$$

条件 (iii) 称为*2*-余循环条件。

注意，类似地，我们可以定义一个复合顺序相反的左群作用，即 $\theta_{g,\ h}\colon\ g\circ h\xrightarrow{\sim}(hg)$。如果所有 $\theta_{g,\ h}$ 都是恒等映射，则称范畴群作用为严格的 。此时，2-余循环条件自动成立，并且 $e\in G$ 的单位元对应于 $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$。

例61。 设 G 是簇（或概形） X的自同构有限子群。则 G 通过拉回在 $\mathsf{Coh}(X)$ 上诱导出一个左作用。事实上，每个自同构 g 都诱导出一个自等价 $g^*\colon\ \mathsf{Coh}(X)\ \to\mathsf{Coh}(X)$，并且还有一个典范同构$\theta_{g,\ h}\colon\ \ g^*\circ h^*\ \xrightarrow{\sim}(hg)^*$。2-余循环条件同样成立。这是一个左群作用。类似地，通过使用推前 g_* 而非拉回，也可以定义一个右群作用。

可以考虑该作用的“不变对象范畴”，但这个范畴的表现并不好。具体而言，给定一个阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$，不变对象范畴不一定是阿贝尔范畴。其原因在于，（余）核本身可能不是不变量。正确的概念是等变范畴：

定义 62. 给定一个有限群 G 作用于加性范畴 $\mathscr{A}$，等变范畴 $\mathscr{A}^G$ 的对象为 (E,ϕ)，其中 E 是 $\mathscr{A}$ 中的一个对象，而 ϕ 是同构族 $\{\phi_g\colon\ E\xrightarrow{\sim}gE\}_{g\in G}$，称为 E的线性化，并满足以下交换图 $\forall g,h\in G$:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi_g} & gE & \xrightarrow{g\phi_h} & ghE \\ & \searrow^{\phi_{gh}} & & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{g,h}} \\ & & & & (gh)E \end{array}$$

而态射 $f\colon(E,\phi)\ \to(E',\phi')$ 是 $\mathscr{A}$中的态射，使得对所有 $g\in G$，以下图交换:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {\scriptstyle \phi_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi'_g} \\ gE & \xrightarrow{gf} & gE' \end{array}$$

注意，等变对象 (E,ϕ) 显然是 $\mathscr{A}$ 中的 G-不变对象，但还带有额外结构。使用线性化这一思想源自几何不变式理论，参见 [56, 第 1] 章。还要注意，等变范畴 $\mathscr{A}$的同态集是 $\mathscr{A}$的同态集的子集。特别地，当 E和 E 分别带有线性化 ϕ 和 ϕ'时，等变同态集是由 $f\mapsto(\phi'_g)^{-1}\circ(gf)\ \circ\phi_g$ 诱导的 G对同态集的作用的不动点，其中 $f\colon\ E\to E'$。最后，阿贝尔范畴（分别为加性范畴）的等变范畴也是阿贝尔范畴（分别为加性范畴）。

给定簇 X （或概形）上的一个自同构有限子群，当且仅当每个 G-轨道都包含在某个仿射开集中时，商簇 X/G 才有意义，参见 [35, Exposé V, Proposition 1.8]。注意，当 X 是拟射影的时，每个 G-轨道都包含在某个仿射开集中的条件自动成立，参见[58, Chapter II, Paragraph 7, Remark]。接下来几章将要讨论的所有代数簇都属于这种情况。

例 63. 基于前面的例61，我们得到存在一个等变范畴 $\mathsf{Coh}^G(X)$。这确实是范畴商的正确概念，因为当每个 G-轨道都包含在某个仿射开集中且 G 作用自由时，有范畴等价

$$\mathsf{Coh}^G(X)\xrightarrow{\sim}\mathsf{Coh}(X/G)$$

该等价由沿商映射 $\pi\colon\ X\to X/G$ 拉回层给出。对于自由群作用，这种等价最早在 [58, Proposition 2, Chapter II, Paragraph 7] 中得到证明。注意，当 X 是拟射影的时，每个G-轨道都包含在某个仿射开集中的条件自动成立，参见 [58, Chapter II, Paragraph 7, Remark]。若作用不是自由的，或某个 G-轨道不包含在仿射开集中，那么对堆栈商 $[X/G]$ 也有同样的结论，因此可以将等变范畴视为非交换商范畴。

例 64. 前面例子的仿射情形尤其良好，是一种广为人知的情形。具体来说，给定仿射概形 $\mathrm{Spec}R$ 及其上的有限群作用 G，我们可以在 $\mathrm{Spec}R$ 上得到一个诱导作用，使得

$$(\mathrm{Spec}R)/G=\mathrm{Spec}(R^G).$$

证明见 [26, 命题 4.8] （一般情形）以及 [58, 第二章第 7] 段（簇的情形）。此外，若作用是自由的，则有以下范畴等价:

$$(\mathsf{mod}{-}R)^G\simeq\mathsf{Coh}^G(\mathrm{Spec}R)\simeq\mathsf{Coh}(\mathrm{Spec}R/G)\simeq\mathsf{Coh}(\mathrm{Spec}(R^G))\simeq\mathsf{mod}{-}R^G$$

注意，还可以用另一种方式来理解这个作用。具体来说，环 R 上的群作用会在其模范畴上诱导出一个群作用，使得 $(\mathrm{mod}\text{-}R)^G \simeq \mathrm{mod}\text{-}RG$，其中 RG 是R 被 G 作用得到的斜群代数（它是以 G 的元素为基的自由 R-模，但乘法按规则 $rg = gr^g$定义，其中 r^g 表示 g 对 r的作用）。因此，我们可以在上述等价关系列中加入这一项。

这表明，等变相干层可以视为斜群代数上的层化模。这种解释也广为人知，例如参见 [12] 的第 2 节。关于这一主题完整且较新的论述，请读者参见 [43] 的第 2.4 节。

9.2. 导出范畴上的作用。 代数簇X 的另一个有趣且研究充分的不变量是其上的相干层有界导出范畴，记为 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$。关于 X 上相干层有界导出范畴这一主题，请参见 [39]。因此，将群作用扩展到导出范畴层面并研究由此产生的关系，是合理的。

设 G 是作用于阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$ 上的有限群。在 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})$ 上存在一个定义良好的作用。事实上，由于每个 g （视为 $\mathscr{A}$ 的自等价）都是正合函子，它会诱导出一个导出函子 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(g)$，该函子逐项作用于复形；也就是说，给定 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})$ 中的一个复形 $E^\bullet$，则 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(g)(E^\bullet) = (gE)^\bullet$（当然，$g$ 也逐项作用于复形的微分上）。复合自然同构 $\theta_{g,\,h}$ 提升为导出函子的复合，且 2-余循环条件也成立。由此得到 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})$ 这一加性范畴上的群作用数据。因此，可以考虑等变范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})^G$。

此外，由于等变范畴 $\mathscr{A}^G$ 是阿贝尔的，因此存在其导出范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A}^G)$。事实证明（见 [27, 定理 7.1] 或 [18, 命题 13]），存在范畴等价 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A}^G) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})^G$，该等价由如下函子实现：它将复形 $(E,\phi)^\bullet$ 发送到 $(E^\bullet,\phi^\bullet)$。注意，对于这一等价，我们需要假设一个非模条件，即 $|G|$ 在范畴 $\mathscr{A}$中可逆，这意味着对于每个态射f，都能被 $|G|$唯一整除。还要注意，尽管没有理由认为等变范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathscr{A})^G$先验地具有三角结构，但这一等价赋予了它三角结构。

例 65。 在例 61 和 63 的基础上进一步构建，我们有如下结果。设 X 是一个定义在特征不整除群 G 的阶的域上的簇（这蕴含非模条件），且 X的自同构群为 G。那么我们有以下范畴等价：

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Coh}^G(X)) \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}([X/G]).$$

一般情形下，我们使用堆栈商 $[X/G]$。回想一下，当 X 是拟射影的时，商簇 X/G 存在；若进一步假设作用是自由的，则可以在上述等价中用它取代堆栈商。

9.3. 簇范畴上的作用与 Weil 下降定理。 在下面的例子中，我们规范地构造一个 $\mathrm{Gal}(L/K)$-等变的 L-簇范畴。随后我们证明，所述等变范畴恰好囊括了满足 Weil 下降条件的簇所包含的信息。

例66。 令 $\mathsf{Var}_{\mathsf{L}}$ 表示定义在 L 上的簇范畴。对于域扩张 $K \subseteq L_0 \subseteq L \subseteq K_s$，通过标量扩张（如第 4.1 节所述），我们得到满子范畴 Var_{L_0}，$\to \mathsf{Var}_L$，$\to \mathsf{Var}_{K_s}$ 的自然包含。给定有限伽罗瓦域扩张 L/L_0 及其对应的伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/L_0)$，我们得到 Var_L 上的自然 $\mathrm{Gal}(L/L_0)$-作用。事实上，利用式 14 以及注18和注19，第 4.1 节中描述的作用在 L-簇范畴上给出了一个严格的 $\mathrm{Gal}(L/L_0)$-作用。只需注意，每个 $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/L_0)$ 都会在 Var_L 上诱导一个自等价 $\widetilde{\sigma}$。

因此，我们可以研究等变范畴 $\mathsf{Var}^{\mathrm{Gal}(L/L_0)}{}_L$。其对象具有如下形式：$\big(X, \{f_\sigma\}_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/L_0)}\big)$，其中 X 是一个 L-簇，而 $\{f_\sigma\}_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/L_0)}$ 是一个线性化。

注意，X 有下降数据，当且仅当 X 有线性化。等变对象之间的态射是能够下降为 L_0-簇之间态射的态射。这意味着，等变范畴 $\mathsf{Var}^{\mathrm{Gal}(L/L_0)}{}_L$ 恰好是可定义在 L_0上的 L-簇所构成的范畴。

事实上，我们已经实现了一个范畴等价：

$$\mathsf{Var}_L^{\mathrm{Gal}(L/L_0)} \simeq \mathsf{Var}_{L_0}$$

从 L_0-代数簇到 $(Y_0 \times \mathrm{Spec}(L), \{\mathrm{Id}\times\sigma\}_{\sigma\in\mathrm{Gal}(L/L_0)})$ 的函子由映射 Y_0给出，而逆函子则由 Weil定理39诱导。

注意，根据注36，群 $\mathrm{Gal}(L/L_0)$ 是有限的；即使该簇定义在 K_s 上，我们仍可找到一个有限域扩张 $L_0 \subseteq L$，使得 X 定义在其上，并对商群 $\mathrm{Gal}(K_s/L_0)/\mathrm{Gal}(K_s/L) \simeq \mathrm{Gal}(L/L_0)$ 应用韦伊定理，参见注18和注19。

对于任意闭子群$A \leq \mathfrak{b} = \mathrm{Gal}(K_s/L_0)$，我们也可以使用第5.1节中引入的语言，以更加抽象的方式进行处理。具体而言，就是使用不变群及其对应的域—— X （出于某种原因，我们所关注的一个固定簇）定义在该域上——以及定义群和相应的定义域；也就是说，使用商群的作用

$$\mathrm{Gal}(K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}/K_s^{A_X^{\mathrm{def}}}) \simeq \mathrm{Gal}(K_s/K_s^{A_X^{\mathrm{def}}})/\mathrm{Gal}(K_s/K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}) = A_X^{\mathrm{def}}/A_X^{\mathrm{inv}}$$

并得到 $\mathbf{Var}_{K_s^{A_X^{\mathrm{inv}}}}^{A_X^{\mathrm{def}}/A_X^{\mathrm{inv}}} \simeq \mathbf{Var}^{A_X^{\mathrm{def}}}$。实际上，我们已经证明了以下结论：

命题 67. 设 X 是一个 L-簇。当且仅当它在范畴 Var_L 上的自然 伽罗瓦群(L/L_0) 作用下存在一个线性化时，它可在 L_0 上定义。对于任意闭子群 伽罗瓦群$(K_s/L) \leq A \leq$ 伽罗瓦群(K_s/K)， X 在 A 上的定义群 A_X^{def} 是伽罗瓦群(K_s/K_s^A) 的最大子群，使得 X 在商群 $A_X^{\mathrm{def}}/A_X^{\mathrm{inv}}$ 的自然作用下存在一个线性化。 X 的定义群 $\mathfrak{b}_X^{\mathrm{def}}$ 是 伽罗瓦群(K_s/K) 的最大子群，使得 X 在商群 $\mathfrak{b}_X^{\mathrm{def}}/\mathfrak{b}_X^{\mathrm{inv}}$ 的自然作用下存在一个线性化。

9.4. 覆盖范畴上的作用与上升定理。 在下面的例子中，我们以典范方式构造一个 A'/A-等变覆盖范畴。

回顾定义42，$\mathbf{Cov}^{(B,A)}$ 表示覆盖范畴 $X \to (B, A)$，其态射具有如下形式（f, g）： $\big(X \to (B, A)\big) \to \big(Y \to (B, A)\big)$。对于群 $\{1\} \leq A \leq A' \leq \mathbf{Mod}(B^*)$，我们得到满子范畴的自然包含 $\mathbf{Cov}^{(B,A)} \hookrightarrow \mathbf{Cov}^{(B,A')} \to \mathbf{Cov}^{(B,\{1\})}$，如定义42下方所述，因此如果这样能简化记号，我们可以将（B, A）简写为 B 。给定一个有限群商 A'/A ，我们得到由 $\mathbf{Mod}(B^*)$ 的作用诱导的 $\mathbf{Cov}^{(B,A)}$ 上的左非严格A'/A-作用，具体如第5.2小节所述。

事实上，请注意，对于 $\sigma \in A'/A$ ，我们得到一个函子，为简便起见也记作 σ： 它将覆盖$X \to (B, A)$映射到 ${}^{\sigma}X \to (B, A)$（由 $\mathbf{Mod}(B^*)$ 的作用诱导），并按照第5.2小节中的描述，将覆盖的态射（f, g）映射到（${}^{\sigma}f, {}^{\sigma}g$）。注意，对于 $\sigma \in A$ ，覆盖 ${}^{\sigma}X \to (B, A)$ 恰好是 $X \to (B, A)$，因为该覆盖定义在 A 上（该小节中也讨论了这一点），因此该作用对元素 $\sigma \in A'/A$ 是良定义的（另参见注18）。此外，我们有 σ 保持任意覆盖 $X \to (B, A)$ 的恒等态射（$\mathrm{Id}_X, \mathrm{Id}_B$），并保持态射的复合 $\big({}^{\sigma}(ff'),\ {}^{\sigma}(gg')\big) = ({}^{\sigma}f, {}^{\sigma}g) \circ ({}^{\sigma}f', {}^{\sigma}g')$，因为对于 ff'，以及类似地对于 gg'，我们有

$${}^{\sigma}(ff') = \tilde{\sigma} f f' \tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma} f \tilde{\sigma}^{-1} \tilde{\sigma} f' \tilde{\sigma}^{-1} = {}^{\sigma}f {}^{\sigma}f'$$

注意， ${}^{\sigma}({}^{\sigma^{-1}}X) = X$，它由 $\sigma_*(\sigma_*^{-1}(R)) = R$ 诱导，因此 σ 是满射。此外， σ 在第5.2小节中也讨论过的同态集上诱导了一个双射。因此，函子 σ 是范畴等价。

此外， $\sigma \circ \tau \simeq (\sigma\tau)$，这意味着诱导函子 σ 与 τ的复合自然同构于由群元素 $\sigma\tau$诱导的函子的复合。事实上，通过定义 $\eta_{\sigma,\tau}^X = \widetilde{\sigma\tau}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}$，我们有一个同构族 $\eta_{\sigma,\tau}^X$: $({}^{\sigma}({}^{\tau}X) \to B) \to ({}^{\sigma\tau}X \to B)$；对于任意 (f, g) : $(X \to B) \to (Y \to B)$，它给出以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} ({}^{\sigma}({}^{\tau}X) \to B) & \xrightarrow{\eta_{\sigma,\tau}^X} & ({}^{\sigma\tau}X \to B) \\ {\scriptstyle {}^{\sigma}({}^{\tau}(f,g))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^{\sigma\tau}(f,g)} \\ ({}^{\sigma}({}^{\tau}Y) \to B) & \xrightarrow[\eta_{\sigma,\tau}^Y]{} & ({}^{\sigma\tau}Y \to B) \end{array}$$

交换性可由以下等式验证：

$${}^{\sigma\tau}(f, g)\eta_{\sigma,\tau}^X = \widetilde{\sigma\tau}(f, g)\widetilde{\sigma\tau}^{-1}\widetilde{\sigma\tau}\tilde{\tau}\tilde{\sigma} = \widetilde{\sigma\tau}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(f, g)\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1} = \eta_{\sigma,\tau}^Y {}^{\sigma}({}^{\tau}(f, g))$$

因此，$\eta_{\sigma,\ \tau}$: $\sigma \circ \tau \to \sigma\tau$ 是一个自然同构。此外，自然同构 η 满足 2-余循环条件（见定义60），根据 η 的定义，这一点很容易验证。

我们已经证明，$\mathbf{Cov}^{(B,A)}$ 上存在非严格的 A'/A作用，因此可以考虑等变范畴 $\mathbf{Cov}^{A'/A}{}_{(B,\ A)}$。正如算术情形所示，我们有范畴等价 $\mathbf{Cov}^{A'/A}{}_{(B,\ A)} \simeq \mathbf{Cov}^{(B,A')}$。因此，等变范畴承载着这样的数据：覆盖 $X \to (B, A)$ 上升为覆盖 $X \to (B, A')$，以及相应上升的这些覆盖之间的态射。具体而言，一个等变对象由覆盖 $X \to (B, A)$ 及其线性化 $(f_\sigma, \hat{}\sigma)_{\sigma \in A'/A}$ 组成；该线性化是相对于 A'/A 的映射类群上升数据。根据定理 46，它对应于覆盖 $X \to (B, A')$。逆函子则由扩张给出

将覆盖 $X \to (B, A')$ 扩张为 $X \to (B, A)$，其线性化由上述定理证明中的构造自然给出。

因此，我们可以表述命题 67 的类似结果。

命题 68. 设 $X \to (B, A)$ 是定义在 A 和 $A \lhd_{\mathrm{f}} A'$上的一个覆盖。当且仅当它具有相对于范畴 $\mathsf{Cov}^{(B,A)}$上自然的 A'/A-作用的线性化时，它才可定义在 A' 上。对于任意子群$A \lhd_{\mathrm{f}} A' \leq$ 模群(B^*)， $X \to (B, A)$ 在 A' 上的定义群 A'^{def}_X 是 A' 的最大子群，使得 X 具有相对于商群 $A^{\mathrm{def}}_X/A^{\mathrm{inv}}_X$自然作用的线性化。 X 的定义群 $\mathfrak{o}^{\mathrm{def}}_X$是模群$(B^*)$ 的最大子群，使得 X 具有相对于商群 $\mathfrak{o}^{\mathrm{def}}_X/\mathfrak{o}^{\mathrm{inv}}_X$自然作用的线性化。

10. 同构作用与利用导出范畴进行下降

本节中，我们研究一个 L-簇 X，其中 $K \subseteq L_0 \subseteq L$ 是有限扩张。我们的目标是利用 X 上适当的伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(L/L_0)$-作用，构造定义在 L_0 上的韦伊下降簇 Y；该作用取决于韦伊下降数据。这为韦伊定理提供了一种现代证明。此外，我们将此作用及相应的商推广到 X 上相干层的有界导出范畴。

10.1. 韦伊下降簇。回顾第 4.1 节，特别是注 15，每个 $\sigma \in G =\mathrm{Gal}(L/L_0)$ 都诱导一个概形同构 $\tilde{\sigma}$: ${}^{\sigma}X \to X$，但它不保持底层的 L-概形结构，即它与相应结构层的局部 L-代数结构不相容。

命题 69. 设 X 是定义在 L 上的代数簇。若存在一个族 $\{f_\sigma\}_{\sigma\in G}$，满足韦伊上循环/下降条件

$$f_{\sigma\tau} = {}^{\sigma}f_\tau \circ f_\sigma \ \textit{for all}\ \sigma, \tau \in G$$

那么映射

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ P &\longmapsto \tilde{\sigma} f_\sigma(P) \end{aligned}$$

是 G 在 X 上通过底层簇 X 的自同构所定义的右群作用。

证明。 考察以下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_\tau} & {}^{\tau}X \\ {\scriptstyle\tilde{\sigma}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\tilde{\sigma}} \\ {}^{\sigma}X & \xrightarrow{{}^{\sigma}f_\tau} & {}^{\sigma\tau}X \end{array}$$

我们观察到 ${}^{\sigma}f_\tau = \tilde{\sigma}^{-1} f_\tau \tilde{\sigma}$。

回忆第 4.1 节中的关系 $\widetilde{\sigma\tau} = \widetilde{\tau} \cdot \widetilde{\sigma}$，并计算:

$$(\widetilde{\sigma\tau}) f_{\sigma\tau} = \widetilde{\tau}\widetilde{\sigma}\ {}^{\sigma}f_\tau f_\sigma = \widetilde{\tau}\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma}^{-1} f_\tau \widetilde{\sigma} f_\sigma = (\widetilde{\tau} f_\tau)(\widetilde{\sigma} f_\sigma).$$

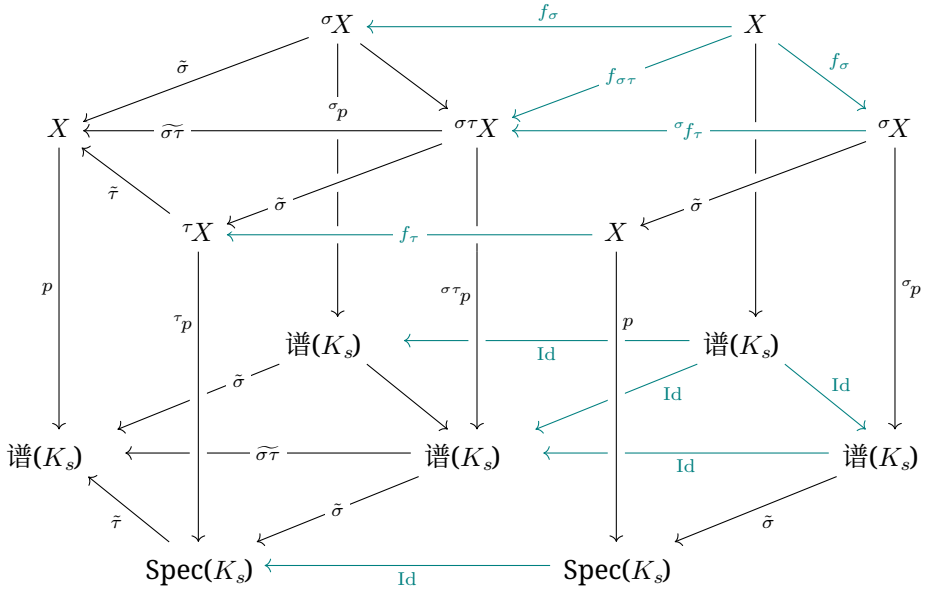
which 是右作用的群运算律。最后， $\tilde{\sigma} f_\sigma$ 是 X 的自同构，因为

$$(\widetilde{\sigma^{-1}} f_\sigma)(\tilde{\sigma} f_\sigma) = \widetilde{\sigma\sigma^{-1}} f_{\sigma\sigma^{-1}} = \tilde{e} f_e = \mathrm{id}_X$$

利用余循环条件 以及单位元 $\tilde{e} = f_e = \mathrm{Id}_X$，其中 $e \in G$ 是群的单位元。 □

注70。 我们记录两条技术性观察。

(i) $(\widetilde{\sigma\tau})f_{\sigma\tau} = (\widetilde{\tau} f_\tau)(\widetilde{\sigma} f_\sigma)$ 的计算进一步体现在图中：



其中，青绿色箭头表示 Spec(K_s)-概形的态射，而 $\tilde{\sigma}$、$\tilde{\tau}$ 和 $\widetilde{\sigma\tau}$ 仅仅是概形之间的同构。例如，如果它们是 K_s-概形之间的同构，那么所有底部箭头的复合都必须是恒等映射。

(ii) 复合 $\tilde{\sigma} f_\sigma$ 用于定义 X 的一个非平凡自同构。非平凡之处在于 f_σ 是 X 的同构。因此，通常 ${}^{\sigma}X$ 与 $\tilde{\sigma}^{-1}$ 不同。当然，对于所有 σ，也可能有 $f_\sigma = \tilde{\sigma}^{-1}$，但这意味着所选的下降数据是平凡的，即 X 实际上定义在 L_0 上，因此下降是平凡的。

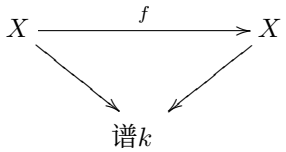
在下面的备注中，我们希望澄清关于 Bondal 和 Orlov 著名的重构定理中 X 的自同构群的一些歧义（至少作者认为这里存在歧义）。

备注 71. A. Bondal 和 D. Orlov 在他们具有开创性的论文 [15], 中研究了定义在域 k 上、典范层（或反典范层）为反 ample 的光滑射影簇 X 的精确自等价群，并证明该群包含群

$$\mathrm{Aut}(X) \ltimes (\mathrm{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}),$$

其中，Pic(X) 是簇 X 的皮卡群，群 $\mathbb{Z}$ 对应于移位函子，而 Aut(X) 是 X 的自同构群。此外，如果典范层或反典范层是 ample 的，那么这就是精确自等价的整个群。

请注意，作者所说的群 Aut(X) 有些含糊。对于定义在代数闭域 K 上的簇，我们所说的 X 的自同构，是指在 L-概形范畴中的自同构，也就是使下图交换的自同构 f：



然而，在我们的设定中，我们允许使用并非 k-自同构的映射。

让我们重复 [15, 定理 3.1] 的证明，假设典范层是丰沛的。对于曲线而言，这意味着曲线的亏格 g X 为 $g \geq 2$。首先，正合自等价应保持可逆对象不变，也就是说，在平移意义下保持可逆层不变。因此，与 Pic(X) 中的一个元素复合后，$\oplus\mathbb{Z}$,我们可以假设该自等价 F 保持 $\mathscr{O}_X$ 不变，并且也保持其任意张量幂 $\omega_X^{\otimes i}$ 不变，因为它与 Serre 函子交换。这意味着 F 诱导出典范层的分次坐标代数$\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(X, \omega_X^{\otimes i})$的一个（扭曲）自同构。因此，就典范嵌入的短正合列而言

$$0 \to I_X \longrightarrow \mathrm{Sym} H^0(X, \omega_X) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(X, \omega_X^{\otimes i}) \to 0$$

F 在所涉及的三个项上都作为扭曲自同构作用，也就是说，第二项和第三项中的代数是扭曲的 Γ-代数，而理想 I_X 具有相容的扭曲作用。因此，群 Aut(X) 被定义为满足以下条件的元素

保持理想 I_X 不变。

我们已在例 65 中说明，同构如何在 $\mathrm{D^b}(X)$ 上诱导一个作用。简言之，同构 $\sigma\colon X \to X$ 通过函子性诱导一个映射 $\sigma^*\colon \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X)$，使得 $\sigma^*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_X$。Coh($X$) 范畴中的这个自等价 σ^* 在 $\mathrm{D^b}(X)$ 上诱导一个自等价。此外，它保持 I_X不变，因此属于 Aut(X)。

注意，若商 X/G作为概形存在，那么对于命题 69 中的作用，它是一个定义在 L_0 上的簇。事实上，群 $G = \mathrm{Gal}(L/L_0)$ 在 X/G 上平凡作用，因此根据命题 17，我们可以得出这一结论。在下面的命题中，我们将说明这个商是构造 Y 的一种方式——它的存在是因为X 具有 Weil 下降数据。请注意，命题 69 中的作用不会影响 Mumford 的商X/G ，尽管他假设自己是在 K-代数簇上工作（见他的证明）。基本上，Mumford 的主张是 A^G 是一个 k-代数，因此 $\mathrm{Spec}A^G = \mathrm{Spec}A/G$ 是一个 k-概形；但在我们的工作中，并不需要这一额外结构。

命题 72. 设 X 是定义在 L上的代数簇，$\{f_\sigma\}_{\sigma\in G}$ 是 X上的 *Weil* 下降数据，其中$G =$伽罗瓦群(L/L_0)，而 Y 是 X 可定义其上的 L_0-簇。另考虑同构对命题 *69* 的 X 所施加的G 的作用。此作用是自由的，且 $X/G \simeq Y$。

证明. 众所周知，对于乘积商栈，以下结论成立

$$\left[\frac{X \times_S Y}{G \times H}\right] \simeq \left[\frac{X}{G}\right] \times_S \left[\frac{Y}{H}\right], \tag{26}$$

对于某些群 G 作用于 X，且 H 作用于 Y，它们定义在某个基概形 S上，参见例如 [38].

在这种情况下，我们有 $X \simeq Y \times_{L_0} \mathrm{Spec}(L)$（其中同构是在 L上进行的），群 $G = \{1\} \times G$在 Y上平凡作用，因此有:

$$\begin{aligned}\left[\frac{X}{G}\right] &\simeq \left[\frac{Y \times_K \mathrm{Spec}(L_0)}{\{1\} \times G}\right] \\ &\simeq \left[\frac{Y}{\{1\}}\right] \times_{L_0} \left[\frac{\mathrm{Spec}(L)}{G}\right] \\ &\simeq [Y] \times_{L_0} \mathrm{Spec}(L^G) \\ &\simeq [Y] \times_{L_0} \mathrm{Spec}(L_0) \simeq [Y].\end{aligned}$$

我们用到了例 64 中的 $\mathrm{Spec}(L)/G = \mathrm{Spec}(L^G)$，以及 $L^G = L_0$，这是由作用的构造得到的。注意，涉及的所有栈实际上都是普通簇，因为 X 是准射影簇（因为代数簇都是准射影的），如例 63 所述。也就是说，$X/G \simeq Y$ 属于簇范畴。另请注意，伽罗瓦群 $G = \mathrm{Gal}(L/L_0)$在 $\mathrm{Spec}(L)$上的作用是自由的，因此其在 $X \simeq Y \times_{L_0} \mathrm{Spec}(L)$上的作用也是自由的。□

10.2. 层范畴上的伽罗瓦作用。以下结果是预期的，并将通常的商簇推广到导出范畴（以及相干层范畴）。不过，我们希望以一些关于范畴去等变化的想法为本文收尾。下一个命题很直接，它说明这一作用如何在 $\mathscr{O}_X$-模上诱导出一个作用。

命题73。设 X 是定义在 L 上的代数簇，且 $\{f_\sigma\}_G$ 是 X 上的 *Weil* 下降数据，其中$G =$ 伽罗瓦群(L/L_0)。考虑命题 *69* 中 G 在 X 上的作用。设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的 $\mathscr{O}_X$-模层，则映射

$$\mathscr{F} \mapsto (\tilde{\sigma} f_\sigma)^* \mathscr{F} \simeq f_\sigma^* \tilde{\sigma}^* \mathscr{F}$$

是 G 在 X 的 $\mathscr{O}_X$-模上的右群作用。

证明。回忆一下，映 射 $\tilde{\sigma}\colon {}^{\sigma}X \to X$ 是概形的一个态射，但不一定是 K_s-概形的映射。在无论如何，我们有

$$(\widetilde{\sigma\tau} f_{\sigma\tau})^* = (\tilde{\tau} f_\tau \tilde{\sigma} f_\sigma)^* \simeq (\tilde{\sigma} f_\sigma)^* (\tilde{\tau} f_\tau)^*.$$

与例61一样，定义60中的群作用数据均满足要求，且很容易验证。请注意，我们确实必须用到该作用由 X 的自同构给出这一事实，因为函子$(\tilde{\sigma} f_\sigma)^*$ 实际上是 $\mathscr{O}_X$-模范畴的自等价。□

证明的最后一个断言成立，是因为有如下观察：给定一个开概形态射 $\pi\colon X \to Y$以及一个 Y的层 $\mathscr{F}$，我们可以如下定义 X的层 $\pi^{-1}\mathscr{F}$以及 $\mathscr{O}_X$-模 $\pi^*\mathscr{F}$：在开集 $U \subset X$

$$\pi^{-1}\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}(\pi(U)) \text{ and } \pi^*\mathscr{F}(U) = \pi^{-1}\mathscr{F}(U) \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_Y(U)} \mathscr{O}_X(U).$$

在上述构 造中，概形态射的定义为我们提供了一个环同态

$$\pi^{-1}\mathscr{O}_Y(U) \to \mathscr{O}_X(U)$$

借此我们可以计算张量积，见 [37, II.5]。事实上，对于任意连续函数π： $X \to Y$，我们知道 π^{-1} 是 π_*的左伴随，也就是说存在一个自然映射

$$\pi^{-1}\pi_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X,$$

此外，由于映射 π 是概形态射，我们有 $\pi_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_Y$, [37, 练习 II.1.18]。这意味着 π^* 将 $\mathscr{O}_Y$-模映为 $\mathscr{O}_X$-模。此外，若 π 是一个等价，特别是 π^{-1} 也是一个开浸入，则 π 是 $\mathscr{O}_X$ 模范畴与 $\mathscr{O}_Y$ 模范畴之间的范畴等价，因为 $\pi^*(\pi^{-1})^* \simeq (\pi^{-1}\pi)^* = e^* \simeq \mathrm{Id} \simeq (\pi\pi^{-1})^* \simeq (\pi^{-1})^*\pi^*$

我们将目前收集 到的各部分结合起来，得到如下结果：

命题 74. 设 X 是定义在 L 上的代数簇， $\{f_\sigma\}_G$ 是 X 上的 *Weil* 下降数据，其中G =伽罗瓦群(L/L_0)，且 Y 是 X 可在其上定义的 L_0-簇。在 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$ 上存在定义良好的 G-作用，且等变范畴 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G$ 与 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(Y)$ 同构，条件是 $|G|$ 在 L_0 中可逆。

证明。 命题 73 中 X 的自同构所给出的（右）群作用限制为 $\mathsf{Coh}(X)$ 上的作用；由例 63 可知，$\mathsf{Coh}^G(X) \simeq \mathsf{Coh}([X/G])$。此外， X 是一个代数簇（特别是拟射影簇），且根据命题 72，该作用是自由的，因此商栈实际上是一个概形，即$[X/G] = X/G$。 G 在范畴 $\mathsf{Coh}(X)$ 上的群作用可延拓至 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$，见第 9.2 小节。此外，由例 65 可知，由于 $|G|$ 在 L_0 中可逆，我们有如下等价关系

$$\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Coh}^G(X)) \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X/G) \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(Y).$$

□

注 75. 注意到， $X/G \times L \simeq Y \times K \simeq X$ 给出了等价关系 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X/G \times K) \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)$，这表明，对这个特定的等变范畴进行标量扩张，即 $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X)^G \simeq \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(X/G)$，或许可以作为一种去等变化的方法。不过，我们只是提出这一想法，并未进一步探讨。

还要注意，上述命题以及由此得到的去等变化论述，也可以用类似方式表述为关于拟凝聚层范畴，甚至关于拟凝聚层的无界导出范畴的论述，参见例如 [43, 备注 7.1]。不过，在此我们仅讨论这种情形，因为它更容易理解，且已得到更多研究。

参考文献

[1] Pramond N. Achar. 《周 *pervers* 层及其在表示论中的应用》，《数学综论与专著》第258卷。美国数学会，2021年。[2] Greg Anderson and Yasutaka Ihara. $\mathbf{P}^1$ 上的仿有限*l* 分歧覆盖与高阶圆单位。《数学年刊》（第*2*辑），128(2):271–293，1988年。[3] Walter L. Baily, Jr. 关于 *θ*函数理论、阿贝尔簇模空间及曲线模空间。《数学年刊》（第*2*辑），75:342–381，1962年。[4] Thorsten Beckmann and Georg Oberdieck. 关于等变导出范畴。《欧洲数学杂志》，9(2):第36号论文，39页，2023年。[5] G. V. Belyĭ. 极大圆分域的伽罗瓦扩张。《苏联科学院消息·数学系列》，43(2):267–276，479，1979年。[6] Vladimir G. Berkovich. 非阿基米德域上的谱理论与解析几何，《数学综论与专著》第33卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1990年。[7] Joseph Bernstein and Valery Lunts.《等变层与函子》，《数学讲义》第9卷。施普林格出版社，柏林、海德堡，1994年。[8] Joan S. Birman.《辫群、链环与映射类群》。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1974年。《数学年刊研究》，第82号。[9] Joan S Birman and Hugh M Hilden. 闭曲面的映射类群作为覆盖空间。载于《黎曼曲面理论进展（会议论文集，纽约州石溪，*1969*年）》，第81–115页，1971年。[10] Joan S Birman and Hugh M Hilden. 黎曼曲面同胚的同伦及关于 Artin 辫群的一个定理。《美国数学会通报》，78(6):1002–1004，1972年11月。[11] Joan S Birman and Hugh M Hilden. 关于黎曼曲面同胚的同伦。《数学年刊》，97(3):424–439，1973年。

[12] Frauke M. Bleher, Ted Chinburg, and Aristides Kontogeorgis. 曲线上全纯微分的伽罗瓦结构。《数论杂志》，216:1–68，2020年。[13] Carl-Friedrich Bödigheimer and Ulrike Tillmann. 辫群嵌入映射类群及其同调。载于《构形空间》，CRM丛书，第173–191页。比萨高等师范学校，2012年。[14] Oleg Bogopolski. 群论导论。EMS数学教科书。欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2008年。由2002年俄文原版翻译、修订并扩充。[15] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. 从导出范畴和自等价群重构簇。《组合数学》，125(3):327–344，2001年。[16] Francis Brown. $\mathbb{Z}$上的混合泰特动机。《数学年刊》（第2辑），175(2):949–976，2012年。[17] Xavier Buff, Jérôme Fehrenbach, Pierre Lochak, Leila Schneps, and Pierre Vogel. 曲线模空间、映射类群与域论，《SMF/AMS文本与专著》第9卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯；法国数学会，巴黎，2003年。由 Schneps 从法文译出。[18] Xiao-Wu Chen. 关于可分函子与单子的一则注记及其在等变导出范畴中的应用。《汉堡大学数学研讨班报告》，85(1):43–52，2015年。[19] Gunther Cornelissen and Fumiharu Kato. p-进二十面体。《美国数学会通告》，52(7):720–727，2005年。[20] Gunther Cornelissen, Fumiharu Kato, and Aristides Kontogeorgis. 正特征下的不连续群与 Mumford 曲线的自同构。《数学年刊》，320(1):55–85，2001年。[21] Pierre Dèbes. p-进数域上的 P^1 的覆盖。载于《逆伽罗瓦问题的新进展（华盛顿州西雅图，1993年）》，《当代数学》第186卷，第217–238页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1995年。[22] Pierre Dèbes and Jean-Claude Douai. 代数覆盖：模域与定义域之比较。《高等师范学校科学年刊》（第4辑），30(3):303–338，1997年。[23] Pierre Dèbes and Jean-Claude Douai. Gerbe 与覆盖。《代数通讯》，27(2):577–594，1999年。[24] Pierre Dèbes and Michel Emsalem. 关于曲线的模域。《代数杂志》，211(1):42–56，1999年。[25] P. Deligne. 射影直线去掉三点后的基本群。载于《Q上的伽罗瓦群（加利福尼亚州伯克利，1987年）》，数学科学研究所出版物第16卷，第79–297页。施普林格出版社，纽约，1989年。[26] Bas Edixhoven, Gerard van der Geer, and Ben Moonen. 阿贝尔簇。自出版，2025年（访问日期。前几章的初稿。[27] Alexey Elagin. 关于等变三角范畴，2015年。[28] Benson Farb and Dan Margalit. 映射类群入门，《普林斯顿数学丛书》第49卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012年。[29] Otto Forster. 黎曼曲面讲义，《数学研究生教材》第81卷。施普林格出版社，纽约，1991年。由 Bruce Gilligan 从1977年德文原版译出；重印1981年英文译本。[30] Kazuhiro Fujiwara and Kato Fumiharu. 刚性几何基础 I。欧洲数学学会，2018年。[31] William Fulton. 代数拓扑，《数学研究生教材》第153卷。施普林格出版社，纽约，1995年。入门课程。[32] Pierre Gabriel. 阿贝尔范畴。《法国数学会通报》，90:323–448，1962年。[33] Jean Giraud. 非阿贝尔上同调，《数学科学基础丛书》第179卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1971年。[34] Alexander Grothendieck. 关于同调代数的若干问题。《东北数学杂志》（第2辑），9:119–221，1957年。[35] Alexander Grothendieck. Étale 覆盖与基本群。第I分册：讲义1至5，《代数几何研讨班》1960/61年卷。高等科学研究所，巴黎，1963年。[36] Alexandre Grothendieck. 计划纲要。载于《几何伽罗瓦作用》第一卷，《伦敦数学会讲义丛书》第242卷，第5–48页。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。第243–283页附英文译文。[37] Robin Hartshorne. 代数几何。施普林格出版社，纽约，1977年。《数学研究生教材》第52号。[38] Dori Bejleri (https://mathoverflow.net/users/12402/dori bejleri). 两个商栈的纤维积。MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/152738（版本：2013-12-24）。[39] D. Huybrechts. 代数几何中的傅里叶–穆凯变换。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2006年。[40] Yasutaka Ihara. 有限生成辫群、伽罗瓦表示与复乘。《数学年刊》（第2辑），106，1986年，123 1 43，( ): – 。[41] Yasutaka Ihara. 辫群的算术类比与伽罗瓦表示。载于《辫群》（加利福尼亚州圣克鲁斯，1986年），《当代数学》第78卷，第245–257页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1988年。[42] Yasutaka Ihara. 辫群、伽罗瓦群与若干算术函数。载于《国际数学家大会论文集》第一、二卷（京都，1990年），第99–120页。日本数学会，东京，1991年。[43] Miltiadis Karakikes, Aristeides Kontogeorgis, and Chrysostomos Psaroudakis. 等变粘合与奇异等价，2025年。[44] Christian Kassel and Vladimir Turaev. 辫群，《数学研究生教材》第247卷。施普林格出版社，纽约，2008年。图示由 Olivier Dodane 协助制作。[45] Hisatoshi Kodani, Masanori Morishita, and Yuji Terashima. Ihara理论中的算术拓扑。《数学科学研究所出版物》，53(4):629–688，2017年。[46] Aristides Kontogeorgis. 射影直线循环覆盖的模域与定义域之比较。《波尔多数论杂志》，21(3):679–692，2009年。[47] Aristides Kontogeorgis and Panagiotis Paramantzoglou. 广义费马曲线同调上的伽罗瓦作用。《季度数学杂志》，71(4):1377–1417，2020年。[48] Aristides Kontogeorgis and Panagiotis Paramantzoglou. 射影直线循环覆盖上的群作用。《几何专论》，207:311–334，2020年。

[49] C. Maclachlan 和 W. J. Harvey. 关于映射类群与特希米勒空间. Proc. London Math. Soc. (3), 30(part):496– 512, 1975.[50] Dan Margalit 和 Rebecca R. Winarski. 辫群与映射类群：Birman-Hilden 理论. Bull. Lond. Math. Soc., 53(3):643–659, 2021. [51] Barry Mazur. 关于亚历山大多项式的评注. 未发表文章，1964年. [52] Rick Miranda. 代数曲线与黎曼曲面，数学研究生教材第 5 卷. 美国数学会，普罗维登斯，RI，1995年. [53] Patrick Morandi. 域与伽罗瓦理论，数学研究生教材第 167 卷. 施普林格出版社，纽约，1996年. [54] M Morishita.《纽结与素数：算术拓扑导论》. SpringerLink : Bücher. Springer-Verlag London Limited，2011年.[55] Masanori Morishita. 关于纽结与素数之间的某些类比.《纯粹与应用数学杂志》，550:141–167，2002年. [56] D. Mumford，J. Fogarty 和 F. Kirwan. 几何不变式理论，Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) 第 34 卷 *[数学及相关领域成果 (2)]*. 施普林格出版社，柏林，第三版，1994年. [57] David Mumford. 完备局部环上退化曲线的一种解析构造.《数学汇编》，24 174，1972 129: – .[58] David Mumford. 阿贝尔簇，塔塔基础研究所数学研究丛书第 5 卷. 由塔塔基础研究所出版，孟买；Hindustan Book Agency，新德里，2008年. 附录作者为 C. P. Ramanujam 和 Yuri Manin，为第二版（1974年）的修订重印本. [59] David Ploog. 有限群作用下的等变自等价. Adv. Math., 216(1):62–74, 2007 年 . [60] V. V. Prasolov 和 A. B. Sossinsky. 纽结、链环、辫群与三维流形，Translations of Mathematical Monographs 第 154 卷. 美国数学会，普罗维登斯，RI，1997年. 低维拓扑新不变量导论，由 Sossinsky [Sosinskiĭ]根据俄文手稿翻译. [61] Christopher Rasmussen 和 Akio Tamagawa. 关于具有受限素数幂挠的阿贝尔簇的有限性猜想. Math. Res. Lett., 15(6):1223–1231, 2008年. [62] Christopher Rasmussen 和 Akio Tamagawa. 具有受限挠的阿贝尔簇的算术. Trans. Amer. Math. Soc., 369(4):2395–2424, 2017年. [63] Idun Reiten 和 Christine Riedtmann. 阿廷代数表示论中的斜群代数. Journal of Algebra, 92(1):224–282, 1985年. [64] Masatoshi Sato. 对称映射类群的阿贝尔化. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 147(2):369–388, 2009年. [65] Paul Seidel 和 Richard Thomas. 辫群在相干层导出范畴上的作用. Duke Math. J., 108 108, 2001 1 37( ): – . [66] Jean-Pierre Serre. 关于代数簇在特征 p 下的拓扑. 载于《国际代数拓扑研讨会》，第 24–53 页. 墨西哥国立自治大学与联合国教科文组织，墨西哥城，1958年. [67] Romyar T. Sharifi. 关于在 p 之外非分歧的 pro-p 伽罗瓦群结构猜想之间的关系. 载于《算术基本群与非交换代数》（加利福尼亚州伯克利，1999年），纯粹数学研讨会论文集第 70 卷，第 275–284 页. 美国数学会，普罗维登斯，RI，2002年. [68] Joseph H. Silverman. 魏尔斯特拉斯点的一些算术性质：超椭圆曲线. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 21(1):11–50, 1990年. [69] Joseph H. Silverman. 椭圆曲线的算术，数学研究生教材第 106 卷. 施普林格，多德雷赫特，第二版，2009年.[70] Chao Sun. 关于加性范畴与三角范畴的等变化的注记.《代数杂志》，534:483–530，2019年. [71] Tamás Szamuely. 伽罗瓦群与基本群，剑桥高等数学研究丛书第 117 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2009 年 .[72] André Weil. 簇的定义域 . Amer. J. Math., 78:509–524, 1956 年 . [73] Rebecca R. Winarski. 对称性、同伦与非正则覆盖. Geom. Dedicata, 177:213–227，2015年.

数学系 ，雅典国立卡波季斯特里亚大学大学城 ，15784 雅典 ，希腊
电子邮箱地址： miltoskar@math.uoa.gr

数学系 ，雅典国立卡波季斯特里亚大学 大学城 ，15784 雅典 ，希腊
电子邮箱地址： sotiriskaran@gmail.com

数学系 ，雅典国立卡波季斯特里亚大学 大学城 ，15784 雅典 ，希腊
电子邮箱地址： kontogar@math.uoa.gr

数学系 ，雅典国立卡波季斯特里亚大学 大学城 ，15784 雅典 ，希腊
电子邮箱地址： dnoulas@math.uoa.gr