arXiv:2512.20587v1 [quant-ph] 23 Dec 2025

基于 Wolfram 模型多路重写系统的量子门

Furkan Semih Dündar[1, 2, 3, *] Xerxes D. Arsiwalla[3, †] Hatem Elshatlawy[3, ‡]

[1]机械工程系，工程学院，阿马西亚大学，土耳其[2]物理系，理学院，萨卡里亚大学，土耳其[3]*Wolfram* 科学计算基础研究所，伊利诺伊州，美国

摘要

我们展示了如何利用非确定性重写系统构造有限维量子算子的表示。具体而言，我们研究了基于字符串替换的 Wolfram 模型多路重写系统。S. Wolfram 提出多路系统，将其作为多重计算过程的通用模型系统，强调了它们作为复杂性、非确定性以及测量结果分支结构建模基础的重要意义。在此，我们研究了一类基于具有邻域约束的循环字符串的特定多路系统——后者称为莱布尼茨字符串。我们证明，此类字符串的字符邻域占据数期望值呈现费米–狄拉克分布。莱布尼茨字符串充当 N-费米子系统的抽象表示。这些字符串构成的多路系统以非确定性的方式编码重写事件之间的因果关系。字符字符串的集合实现了一个带有对称 $\mathbb{Z}$双线性形式的 $\mathbb{Z}$-模。对于离散空间，这将向量域上的内积概念推广到更一般的情形。由此可为莱布尼茨字符串的多路系统导出路径积分的离散类比以及一个 S-矩阵。该 S-矩阵的元素给出了多路系统状态之间的跃迁振幅，其基础是定义在一系列莱布尼茨字符串上的作用量。随后我们证明，这些 S-矩阵给出了量子比特和多能级量子比特的量子门的显式表示，以及由此类量子门组成的电路。我们发现，作为非确定性计算的形式模型，具有因果结构的莱布尼茨字符串重写系统编码了受控非门、$\pi/8$和哈达玛门的表示。因此，利用多路系统可以表示量子比特的量子电路。

关键词：非确定性重写系统、莱布尼茨字符串、因果 N–费米子、离散状态空间、量子算子的表示。

*f.semih.dundar@gmail.com
†x.d.arsiwalla@gmail.com
‡hatemelshatlawy@gmail.com

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 4

3 莱布尼茨式字符串的信息论方面及其枚举 6

3.1 信息论考量.6 3.2 莱布尼茨式字符串的枚举.7

4 Wolfram 模型与抽象重写系统 **9**

5 物理与最大多样性路径 **11**

6 莱布尼茨式字符串与费米-狄拉克统计 13

7 多重　　路径和与 S-矩阵 15

7.1 二维 S-矩阵：非相互作用.18 7.2 二维 S-矩阵：相互作用.19 7.3 高维 S-矩阵.20 7.4 关于恢复酉性的评论.22

8 应用　　章节 24

8.1 单量子比特：哈达玛和 $\pi/8$门.25 8.2 两个量子比特.26 8.2.1 CNOT门.26 8.2.2 交换门.26 8.3 量子多能级比特.27 8.4 从多路系统到量子电路.29 8.5 ZX蜘蛛算子的生成.30 8.6 关于通用量子计算的说明.31

9 结论与讨论 **33**

1 引言

符号系统广义上构成一个由抽象实体（即符号）以及一套操作这些符号的规则组成的框架。也就是说，它是一种配备了生成语法或代数的句法，用以支配符号的组合。尽管这些符号及其操作纯属句法层面，但在实际应用中，它们往往指向关于现实或虚拟世界中对象和关系的特定知识或信息（按照形式上可接受的语义来理解）。符号系统的常见例子包括形式语言、逻辑和算法等。本文聚焦于计算系统，尤其是基于字符串替换的非确定性重写系统。尽管这些系统作为计算形式模型已广为人知 [7, 12, 21, 36],，但我们在此希望探究重写系统如何编码有限维量子算子的表示。对后者进行符号表示，往往有助于设计量子信息与计算领域的算法和协议。

此前，对于有限维量子理论的符号表示，已有一些研究方法，包括基于字符串图的范畴论过程理论，例如“范畴量子力学”（CQM）（其中，CQM 的“字符串”指的是算子之间的连接器）[1, 20],，以及与之相关的 ZX演算 [18, 19]（也可以考虑 ZX图的多路系统，如 [29–31] 所示）。这类量子理论符号化方法的有趣之处在于，它们提供了一种独立于任何背景时空几何的表述。相反，它们利用了更为基本的因果序概念。这种方法促成了各种图示演算，并已证明对量子计算协议十分有用 [18,20,44,60]。这与我们在此倡导的计算范式非常一致：该范式不依赖背景，并利用重写系统的因果结构。另一方面，我们的形式体系与上述某些方法存在两个重要差异：(i) 我们不处理瞬时的系统配置，而是采用一种基于路径系综的统计力学方法，其中路径指的是重写事件的序列；(ii) 我们形式体系的构建块本身并不是量子态或算子（也不是对它们的直接引用），而是抽象计算系统的句法实体。

更具体地说，我们研究基于循环字符串的非确定性重写系统。这些字符串按照所有指定的重写规则，以所有可能的顺序进行更新。这种系统称为字符串多路重写系统。术语“多路系统”由 S. Wolfram 在 [63], 中创造，也指基于图重写和超图重写的更一般的重写系统。重写系统是与图灵机等价的计算模型，常用于定理证明协议 [7, 12, 21]。在 [64] 中，有人提出超图重写系统是当代物理学理论所依托的计算基。随后，基于高阶范畴论的数学形式化方法确立了从多路重写系统构造拓扑空间的方法 [2, 5, 6]。关于这种计算方法在重新表述当代物理学理论方面的意义与挑战，参见 [4, 23, 46, 47]。

在 [28, 29, 31, 64]中，人们已经讨论了从重写系统中寻求量子理论的初步研究。在这项工作中，我们进一步深入研究了从多路系统中提取有限维量子算子的具体问题。我们明确解决了这一问题

并计算了来自多路数据的量子门表示。为此，我们考虑由循环字符串组成的系综。此外，我们将研究范围限制在所谓的莱布尼茨式字符串上。这些字符串源于对可辨识性的单子式解释。我们采用一种作用于字符串的复杂度量，称为 Barbour-Smolin-Deutsch 多样性或 *BSD* 多样性；该度量最初由 [10], 提出，后来又在 [22]中得到进一步阐述。事实证明，莱布尼茨字符串的系综对涉及字符串邻域的占据数期望值呈现出费米–狄拉克分布。通过仅考虑多路系统中的莱布尼茨字符串，我们研究由状态转移序列形成的多路图上的路径。我们考虑对由此类字符串序列形成的路径求和。这相当于对相空间中轨迹进行量子力学路径积分的离散类比。利用这一点，我们随后构造 S矩阵，其元素由基于作用于一系列莱布尼茨字符串上定义的作用量、在多路图上的路径系综中加权的跃迁振幅组成。这些 S矩阵为我们提供了酉算符的表示。

我们在此构造的 S-矩阵，刻画了非确定性重写系统更新序列中涉及的底层统计力学。非确定性因果结构（其本身源自重写规则）对于确定多路状态之间的跃迁振幅至关重要。这表明，可以从统计学视角看待非确定性计算。尽管本文仅研究非确定性计算系统中量子算子表示这一非常具体的方面，但值得注意的是，探究量子理论基础的计算方法具有更广泛的意义。特别是，G. ‘t Hooft [33–35] 和 C. Wetterich [41,61,62],的工作备受关注；他们都提出，量子理论源自元胞自动机。前者倡导基本决定论，后者则倾向于采用基于概率元胞自动机的统计力学方法，并提出量子理论涌现于一个底层经典统计系统。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍预备定义和概念。第 3 节定义莱布尼茨字符串，并对其结构进行信息论刻画。第 4 节介绍 Wolfram 模型、抽象重写系统和多路图。第 5 节确定物理路径和最大多样性路径。第 6 节展示莱布尼茨字符串的单子视角占据数符合费米-狄拉克统计。第 7 节阐述路径求和形式，并为多路演化构造 S-矩阵。第 8 节介绍其在量子计算中的应用，展示抽象计算系统如何编码有限维量子门的表示，包括量子比特和多能级量子比特的量子门。最后，第 9 节讨论其影响和未来研究方向，并作总结。

2 预备知识

本节介绍文献 [10]中的预备材料。有时，我们会使用与所引文献不同的修改后的记号。

定义 2.1 (字符邻域 [10])。 对于给定的位置 (i) 和半径 (m)，位置 (i) 处字符的半径为 (m) 的邻域是从位置开始的子串

$i-m$ 到 $i+m$，按照循环拓扑计算，并包含位置 *(i)* 处的字母。如果字符串长度为 N，则 m 的最大值如下：

$$m_{max} = \begin{cases} N/2-1 & N\ is\ even \\ (N-1)/2 & N\ is\ odd \end{cases} \tag{1}$$

定义 2.2 (字符串同构 [10])。 给定两个字符串，如果它们相同，或其中一个是另一个的镜像，则称它们同构。

定义 2.3 (相对不可区分度 [10])。 给定字符串中的两个不同位置，即可计算相对不可区分度。它是这些字符的邻域不再同构时的最小邻域半径。我们将位置 i 和 j 处字符之间的相对不可区分度记为 r_{ij}。

定义 2.4 (莱布尼茨字符串 [10])。 如果字符串中所有字符位置都能通过各自的邻域彼此区分，则称该字符串为莱布尼茨式。具体而言，对于每一对不同的位置 $i \neq j$，都存在某个半径 $m \leq m_{\max}$，使得位置 i 和 j 处半径为 m 的邻域不同构。如果两个或更多位置在所有半径下的邻域都同构，则该字符串不是莱布尼茨式。

示例 2.1。 考虑循环字符串 *"AAABBB"*。第一个 *A* 和第三个 *A* 具有相同的邻域。第一个 *B* 和第三个 *B* 也是如此。因此，这些位置无法区分，所以 *"AAABBB"*不是莱布尼茨式。

示例 2.2. 相较之下，考虑*" AABABB"*。在最大半径 $m = 2$ 下（为了确定一个词是否为莱布尼茨式，只需检查最大半径的邻域）：

- 位置 *1 (A)*：邻域 $=$ *"BBAAB"*
- 位置 *2 (A)*：邻域 $=$ *"BAABA"*
- 位置 *3 (B)*：邻域 $=$ *"AABAB"*
- 位置 *4 (A)*：邻域 $=$ *"ABABB"*
- 位置 *5 (B)*：邻域 $=$ *"BABBA"*
- 位置 *6*（*B*）：邻域 $=$ *"ABBAA"*

六个邻域各不相同，因此*"AABABB"*是莱布尼茨式的。这里微妙之处在于，尽管整个字符串是循环的，但这些邻域并非如此。

莱布尼茨字符串这一概念的定义，源于莱布尼茨的单子论 [42]。用他的话来说 [42]:

> 单子 [...] 无非是一种构成复合体的简单实体；所谓简单，就是没有部分。

根据莱布尼茨的不可分辨者同一性原理 [48] ，如果两个对象具有相同的属性，那么它们就是同一对象。对于字符字符串而言，其属性就是字符串中每个位置的邻域。为此，我们要求莱布尼茨字符串中每个字符邻域都不同于其他字符的邻域。因此，莱布尼茨字符串可以对被解释为由单子构成的物理系统进行建模。单子本身可以被视为“形而上学原子”。莱布尼茨字符串在我们的研究中至关重要。

定义 2.5 （绝对无差异度 [10]）。 绝对无差异度是针对字符串中的单个位置计算的。它是给定位置（i）与字符串中其他位置之间相对不可区分度值的最大值。其表示为 $a_i = \max\{r_{ij} | j \neq i\}$。

接下来，我们讨论“BSD 多样性”，它在 [10] 中被引入，作为字符字符串的复杂度量。“BSD”一词源自“Barbour-Smolin-Deutsch”这几个名字，并于 [22] 以这种形式被提出（因为 Barbour 和 Smolin 的原始论文 [10] 引用了 Deutsch 于 1989年提出这一特定多样性函数的私人通信——参见 [10]中的 [30] ）。

定义 2.6 （BSD 多样性 [10]）。 给定一个莱布尼茨字符串，*BSD* 多样性的计算方式为 $\mathrm{Var} = \sum_i 1/a_i$。

例 2.3。 字符串“*AABABB*”是莱布尼茨式的。各字符的绝对无差异值为 2、2、1、1、2、2。因此，其 *BSD* 多样性为 4。

这个定义与 Smolin 在参考文献 [54, 55] 中最近使用的定义有所不同。在我们的研究中，由于我们只考虑莱布尼茨字符串，因此将非莱布尼茨字符串的多样性值设为零。不过，在更一般的情况下，可以对 $a_i \neq 0$ 求和，并忽略 $a_i = 0$ 项。当字符位置 i 处的完整字符邻域与其他某个字符的字符邻域相同时，就会出现 $a_i = 0$ 的情况。这样一来，也可以说 $a_i \to \infty$ ，而这些项不会对计算 BSD 多样性的总和作出贡献。不过，在我们的算法中，我们将非莱布尼茨字符串中的 $a_i = 0$ 设为一个数值，以便在计算机中存储。

3 莱布尼茨字符串的信息论方面及其枚举

本节讨论与莱布尼茨字符串相关的信息论概念，以及莱布尼茨字符串的数量。

3.1 信息论考量

如果一个循环字符串在遍历整个字符串时，任意两个位置都不会呈现同构局部邻域，那么它就被视为莱布尼茨式。举两个例子：“AAABBB”是非莱布尼茨式字符串，而“AABABB”是莱布尼茨式字符串。这个定义可以避免冗余的符号结构，确保字符作为单子 [42]得到有意义的诠释

从莱布尼茨思想的角度来看，这是通过不可辨识者同一性原理 [48]实现的。由于莱布尼茨式字符串中的每个邻域都是独一无二的，因此从某种意义上说，它们比非莱布尼茨式字符串包含更多信息。对于非莱布尼茨式字符串而言，大约有一半的字符串是冗余的。关于莱布尼茨式字符串的详细说明以及（BSD）多样性的计算，请参阅 [10, 22]。读者也可参阅 [9] ，作为莱布尼茨思想的补充读物。我们先从定义香农熵开始。

定义 3.1 (字符字符串的香农熵 [51])。 对于长度为 n 的字符串，若字母取自字母表 $\{\lambda_i|i=1,\cdots,\nu\}$，且每个字母出现的概率为 $p_i=\#\lambda_i/n$，则香农熵定义为总和 $H=-\sum_{i=1}^{\nu}p_i$ 对数$_2\,p_i$。

通过改变上述定义中对数的底数，可以得到以其他单位表示的信息，例如使用自然对数时，单位为奈特 。可以看出，香农熵只关注字符串中字母出现的频率。因此，它无法 反映莱布尼兹字符串中字符局部邻域的复杂结构。另一方面，条件 香农熵（讨论见参考文献 [32] ）在定义字符串的信息内容时更有用。

定义 3.2 (条件香农熵 [32])。 条件 香农熵定义为 $H(Y|X)\equiv H(X,Y)-H(X)$。项 $H(Y|X)$ 是给定 X时 Y的条件熵，项 $H(X,Y)$ 是联合熵，而 $H(X)$ 是香农熵。

利用我们刚刚给出的条件香农熵定义，让我们在字符字符串的语境下对其进行定义。

定义 3.3 （字符字符串的条件香农熵）。 设 H（X）为整个字符串的香农熵，设 H（X, Y）为联合熵。为了计算H（X,Y），我们考虑字符串中两个连续字母组成的列表。因此，H（X,Y）是由两个字母“字符”组成的列表的香农熵。

我们考察了不同长度的随机莱布尼茨式字符串，并计算了 BSD 多样性和条件香农熵。结果见图 1。正如我们所看到的，这两个概念之间存在相关性。这一关键观察表明，字符串的信息内容与 BSD 多样性呈正相关。

3.2 莱布尼茨字符串的枚举

莱布尼茨字符串的数量是可数无穷的。可数部分显然易见。然而，我们需要证明这样的字符串有无穷多个。对于一个字母 λ ，我们用 λ^n 表示字母 λ n 次重复。例如 $A^2=AA$ 、$A^3=AAA$ ，依此类推。在本小节中，我们考虑一个由若干字母组成的字母表，其中不同字母的数量为 ν。因此，该字母表是集合 $\{\lambda_i|i=1,\cdots,\nu\}$。

定义 3.4 （分形词）。 分形词是形式为$\otimes_{i=1}^{n}\lambda_1^i\cdots\lambda_\nu^i$、由正整数 n 参数化的词。

示例 3.1 （双字母表）。 考虑一个双字母表： $\{A,B\}$。当 $n=1$、2、3 时，对应的分形词分别为“*AB*”、“*ABAABB*”和“*ABAABBAAABBB*”。

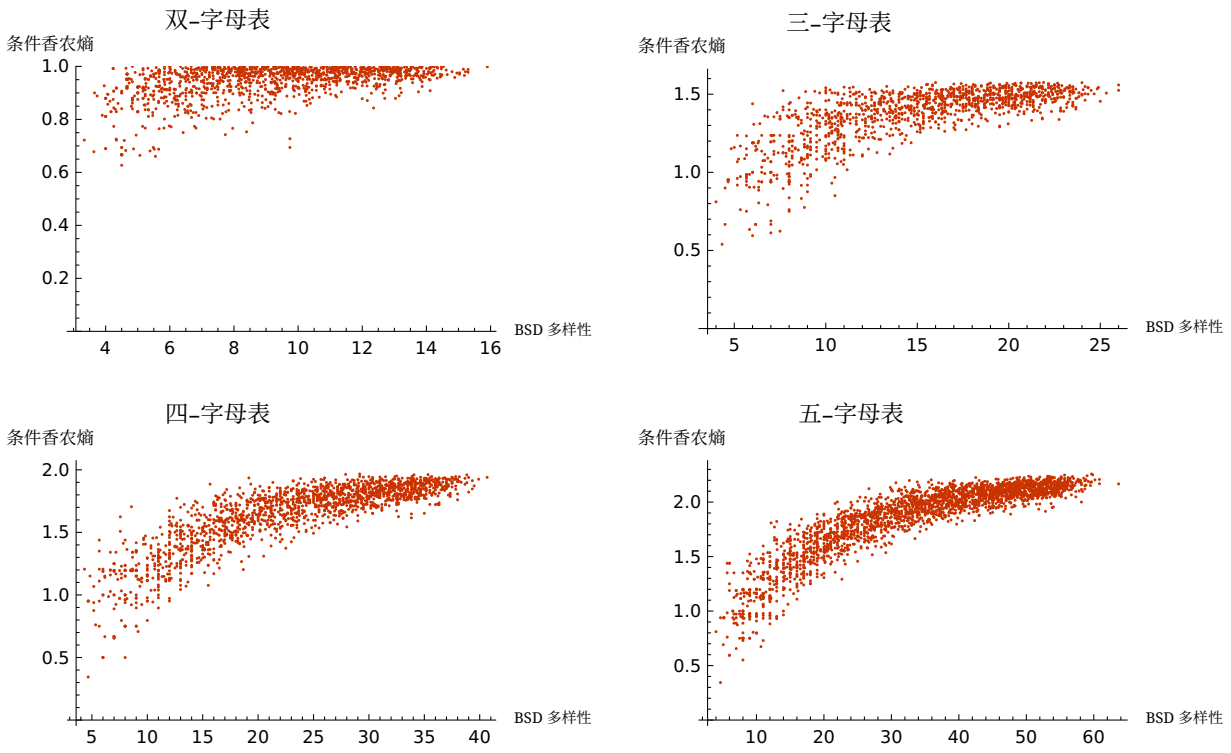


图 1：不同字母表下，一组莱布尼茨字符串的 BSD 多样性与条件香农熵的关系图。可以看出，BSD 多样性与词的信息内容呈正相关。双字母表：1281 个长度为 8–50 的词。三字母表：1289 个长度为 8–50 的词。四字母表：1704 个长度为 8–65 的词。五字母表：2490 个长度为 8–90 的词。

命题 3.1。 对于 $n > 1$，所有分形词都是莱布尼茨式的。

证明。 我们先证明双字母表的情形。介绍我们的方法后，将其推广到更大的字母表显然易如反掌。现在考虑双字母表$\{A, B\}$ 和 $n > 1$。如果 $n = 1$ ，该词就只是“AB”，因此不是莱布尼茨式的。现在假设 $n > 1$。对于 $i < j$，考察 A^iB^i 和 A^jB^j 中的 A 块；比较这两个不同子串中 A 的邻域，可以发现它们有所区别。原因是，主体 j 中 A 的邻域必须包含连续的 j A，同理，主体 i 中的邻域必须包含连续的 i 个 A。由于 $i \neq j$ ，两个不同子串块中的 A 并不相同。

因此，若该字符串是莱布尼茨式的，只需检查子串同一块中的字母即可。为此，我们考虑部分 A^iB^i。取该部分中的第一个 A。只需检查第一个 A 与最后一个 A的邻域。它们在 $m = i$中可以区分。考虑第 r 个 A 时，只需将其与块 A^iB^i中的第 $(i - r + 1)$ 个 A 进行比较。它们同样可以区分。不过，我们需要确认区分这些 A 的半径小于定义 2.1 中定义的 m_{max} 。若 i 为偶数，最大半径为 $i/2 - 1 + i = 3i/2 - 1$ ；若 i 为奇数，则为 $(i + 1)/2 - 1 + i = (3i - 1)/2$。容易验证，对于 $n > 2$，在子串 A^iB^i 中区分两个不同 A 所需的半径小于 m_{max} ，利用的事实是 i 的最大值为 n。由于字符串长度为偶数，我们应有 $m_{max} = (n+2)(n-1)/2$。若 $n = 2$ ，字符串为“ABAABB”，且它是莱布尼茨式的。对字母“B”也可以进行类似的分析，从而确认分形词都是莱布尼茨式的。证明完毕。

□

推论 3.1 （莱布尼茨式词有无穷多个）。 根据命题 *3.1*，对于任意 $n > 1$，相应的分形词都是莱布尼茨式的。因此，莱布尼茨式词集合的基数为 $\aleph_0$。

利用命题 3.1，还可以计算分形词的 BSD 多样性。

4 Wolfram 模型与抽象重写系统

本节简要概述 Wolfram 模型和抽象重写（约化）系统。

Wolfram 模型 [63,64] 是一种基于非确定性重写系统的计算框架。该模型试图从抽象重写系统出发，对基本物理现象进行描述。它旨在捕捉简单的计算程序如何产生与物理结构相关的复杂符号系统。这种方法构成了一种基于形式符号系统的物理学基础的建构主义形式化。这补充了范畴论视域下物理学和数学基础的持续研究，例如与合成几何和同伦类型论计划相关的研究 [25,45,50,52]。关于高阶范畴和同伦类型论视域下 Wolfram 模型的数学基础，已有文献加以阐述 [2,5,6]。Wolfram 模型的哲学基础见 [4,46,47]。

Wolfram 模型的一般框架以非形式化计算为基础，因此摒弃了连续统结构，转而采用离散描述，包括涉及

空间、时间和物质的描述。该模型提出了一种基于事件之间因果关系的组合式描述，从而揭示了当代物理学背后的计算架构。在这一框架中出现的典型结构就是所谓的“多路系统”。这些系统是具有因果结构的非确定性抽象重写系统。“多路”一词指的是，这些系统会以所有可能的顺序实例化重写规则的所有允许应用，从而产生多个重写项序列，并由二元关系对这些序列进行偏序排列。该偏序体现了一种因果结构。根据对这些项的具体解释，Wolfram 模型多路系统可以实现为基于图、超图、字符字符串或其他符号结构的重写系统。下文中，我们主要关注字符字符串的多路系统。

现在让我们从抽象重写（约化）系统的定义开始。

定义4.1（抽象重写（约化）系统 [12]）。抽象约化系统（*ARS*）是一种结构 $\mathcal{A} = (A, \{\rightarrow_\alpha | \alpha \in I\})$，由一个集合 A 以及 A 上的一组二元关系$\rightarrow_\alpha$ 构成，这些关系由集合 I 索引。对于 $\alpha \in I$，关系 $\rightarrow_\alpha$ 称为约化关系或重写关系。

从单个元素和一组规则 $\{\rightarrow_\alpha\}_\alpha$ 开始，抽象重写系统可以生成一整类能够通过这些规则获得的元素。规则的应用称为约化 [12]。

Wolfram 模型是任何具有指定初始状态的抽象重写系统。Wolfram 模型的典型结构是多路重写系统。

定义4.2（多路重写系统 [63, 64] ）。*Wolfram* 模型的多路重写系统是一个抽象重写系统 $\mathcal{A} = (A, \{\rightarrow_\alpha | \alpha \in I\})$，具有指定的初始状态 $a_{ini} \in A$；从集合 $\{\rightarrow_\alpha | \alpha \in I\}$ 中取所有可能的规则，以所有可能的顺序应用于每个序列中的每个元素，从而生成重写事件序列（只要规则应用有效）。

Wolfram 模型多路系统通常表示为多路图。

定义4.3（多路图 [64] ）。多路图 或多路演化图 是与抽象重写系统 $\mathcal{A} = (A、\{\rightarrow_\alpha | \alpha \in I\})$ 相对应的有向图，其中图的顶点表示元素 $a \in A$，而有向边 $a \rightarrow b$表示存在一个重写事件，将元素 a转换为元素 b。每个多路图还由一个根顶点进一步指定，该根顶点对应于重写序列的初始元素。

字符串替换（使用字符字符串）多路系统的示例如图2所示，其初始状态为“BBBAAACC”，并有两条重写规则：BA $\rightarrow$ AB，CB $\rightarrow$ BC。在这种情况下，多路图包含有限个元素，重写过程最终会终止。这是因为经过一定数量的重写事件后，字符串将会排好序。不过，一般而言，多路系统不一定会终止。

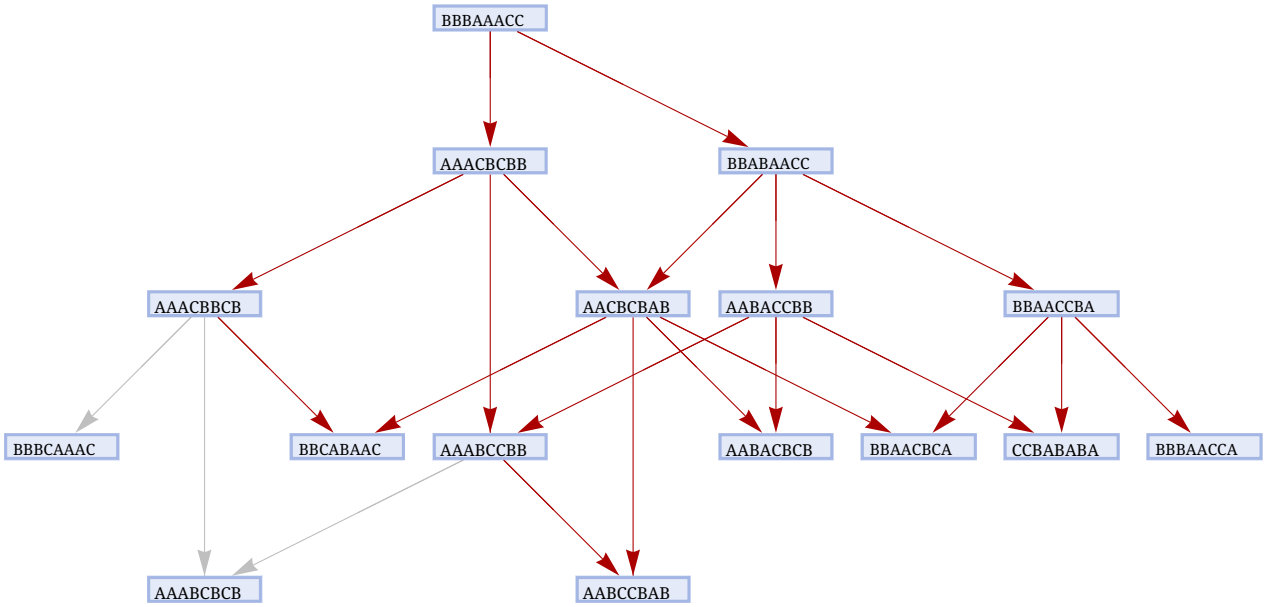


图2：字符串“BBBAAACC”的多路系统图的初始部分，规则为：BA $\rightarrow$ AB，CB $\rightarrow$ BC。红色高亮显示的物理 多路系统仅包含莱布尼茨字符串。

5 物理与最大多样性路径

多路系统中的物理路径完全由莱布尼茨字符串构成。这些路径通过离散替换过程演化。它们可以在多路系统中分支并合并。

定义 5.1（物理路径 [22]）。 多路系统中的物理路径或莱布尼茨路径，是指其包含的所有顶点均为莱布尼茨式的路径。

定义 5.2（最大多样性路径 [22]）。 最大多样性路径是深度为 d 的多路系统中的物理路径，并且其顶点的（*BSD*）多样性值之和最大。

需要注意的是，最大多样性路径并不 具有可加性。考虑深度为 d 和 $d+1$ 的最大多样性路径。在这两种情况下，深度为 d 的最大多样性路径中可能存在某些字符串构型，而它们可能不会出现在深度为 $d+1$ 的最大多样性路径中。另一方面，物理（莱布尼茨式）路径具有可加性。该表达式意味着，对于某个 d ，深度为 $d+1$ 的物理路径可以通过将深度为 d 的物理路径向前延伸一步而获得。

为便于说明，我们考虑一个小型多路系统，见图3。为了定义最大多样性路径，我们计算所有物理路径上的 BSD 多样性值之和，并选择总和最大的物理路径作为最大多样性路径。

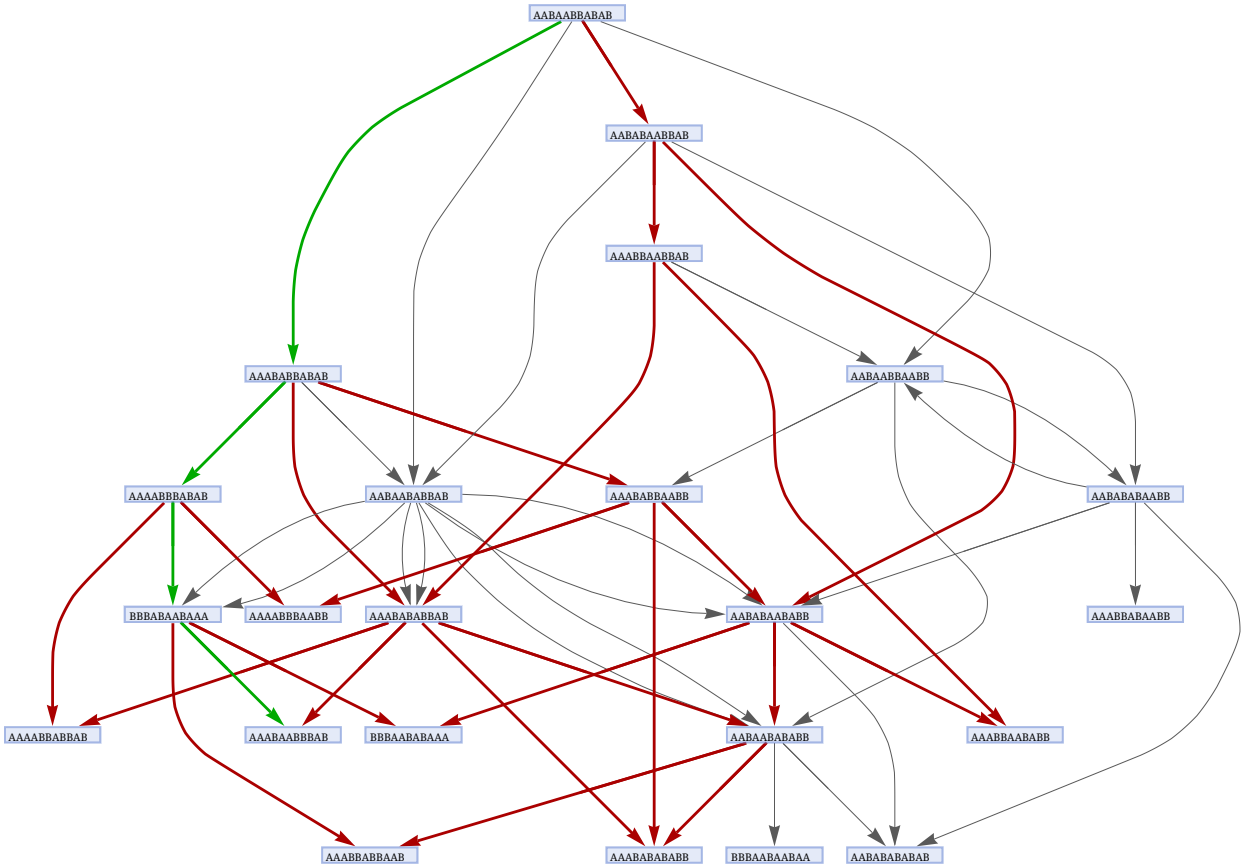


图3：以下内容所指定的多路系统的初始部分（深度4）的表示：初始状态：“AABAABBABAB”。重写规则：BA→AB。红色突出显示的路径是莱布尼茨式（物理）路径，而绿色路径是最大多样性路径。

6 莱布尼茨字符串与费米-狄拉克统计

每个单子都是独一无二的。这是由莱布尼茨的不可辨者同一性原则所决定的。关于这一原则的详细哲学讨论，敬请读者参阅 [48]。在当前的字符串本体论中，一个单子与另一个单子的区别在于它们的局部邻域。能够将一个字母与其他邻域区分开来的最小邻域，可以称为该单子的视域 。“视域”一词也用于 [54]。不过， [54] 中的语境更接近因果集理论。另一方面，我们使用“视域”一词的方式，更接近 [10]中的讨论。单子的视域是其局部邻域，其半径为绝对无差异值。单子可以通过其视域来定义，而特定视域在莱布尼茨字符串中至多出现一次，也可能从不出现。从这个意义上说，单子表现出费米子 行为。我们很快会对此作进一步阐述。

可能的视域集合由字母表中所有可能的字母组合构成，半径为 $m = 1$、2、.....其中，特定半径 m 对应的视域长度为 $2m + 1$。例如，在双字母表中，半径为 $m = 1$ 的视域集合为

$$\{\mathrm{AAA}, \mathrm{AAB}, \mathrm{ABA}, \mathrm{ABB}, \mathrm{BAA}, \mathrm{BAB}, \mathrm{BBA}, \mathrm{BBB}\}$$

半径为 $m = 0$的视域，也就是仅包含一个字母的视域，不会出现在莱布尼茨字符串中。我们用字母 ϕ表示一个单子的视域。

现在我们考虑长度相同的莱布尼茨字符串构成的气体，也就是说， N。我们用参数 j 对字符串中的每个字符进行参数化。某种意义上， j 就是字符的位置。我们用 n_ϕ 表示视域 ϕ 的占据数。由于我们只考虑莱布尼茨字符串，n_ϕ 只能为零或一。莱布尼茨字符串的这一性质将是证明它们表现出费米子行为的关键。本节余下内容将以参考文献 [8] 为指引，并在推导视域占据数的期望值时遵循该文献。

长度为 N 的莱布尼茨字符串系综的配分函数记作 $Z = \sum_l e^{-E_l/\kappa T} = \sum_l e^{-\beta E_l}$，其中 $\beta = 1/\kappa T$，索引 l 遍历系综中的所有莱布尼茨字符串，而 κ 是玻尔兹曼常数。对于特定视域 ϕ ，其占据数的期望值定义为：

$$\langle n_\phi \rangle = \frac{1}{Z} \sum_l n_\phi e^{-\beta E_l}. \tag{2}$$

这里我们假定能量 E_l 与相应字符串 $\mathcal{S}_l$ 的 BSD 多样性成正比，并写作 $E_l = \gamma \mathrm{Var}(\mathcal{S}_l)$，其中 γ 是联系多样性与能量的比例常数。作为记号约定，记 a_i 为视域 n_{ϕ_i}的绝对无差异值，即视域 n_{ϕ_i} 的半径。若一个莱布尼茨字符串由若干视域 $\{n_{\phi_i}\}_i$ 构成，其中 $1 \leq i \leq M$，且 M 使得长度为 N 的字符串中可能出现的所有视域都包含在内。这将是一个有限的视域集合。我们可以将其 BSD 多样性写成如下总和：

$$\mathrm{Var}(S_l) = \sum_i \frac{n_{\phi_i}}{a_i}. \tag{3}$$

这一观察对接下来的内容很重要。我们展开求和，在计算 Z 中求出 n_{ϕ_1} ，如下所示：

$$\langle n_{\phi_1}\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n_{\phi_1}}\sum_{n_{\phi_2}}\cdots n_{\phi_1}\exp\left[-\beta\gamma\left(\frac{n_{\phi_1}}{a_1}+\cdots+\frac{n_{\phi_M}}{a_M}\right)\right]. \tag{4}$$

在条件 $n_{\phi_1}+\cdots+n_{\phi_M}=N$ 下。省略号表示对其他可能观点求和的算子。上面的求和仅由 $n_{\phi_1}=1$ 的取值贡献，因此我们可以写成：

$$\langle n_{\phi_1}\rangle = \frac{e^{-\beta\gamma/a_1}}{Z}\sum_{n_{\phi_2}}\cdots\exp\left[-\beta\gamma\left(\frac{n_{\phi_2}}{a_2}+\cdots+\frac{n_{\phi_M}}{a_M}\right)\right]. \tag{5}$$

在条件 $n_{\phi_2}+\cdots+n_{\phi_M}=N-1$下。其思路是将上面的总和写成如下形式 ：

$$\sum_{n_{\phi_1}}\sum_{n_{\phi_2}}\cdots(1-n_{\phi_1})\exp\left[-\beta\gamma\left(\frac{n_{\phi_1}}{a_1}+\cdots+\frac{n_{\phi_M}}{a_M}\right)\right] \tag{6}$$

在条件 $n_{\phi_1}+\cdots+n_{\phi_M}=N-1$ 下。如果我们将长度为 N 的莱布尼茨字符串系综的配分函数参数化为 $Z(N)$，便可看出，上面的表达式等于 $Z(N-1)-\langle n_{\phi_1}\rangle_{N-1}Z(N-1)$，其中期望值的下标 $N-1$ 表示该期望值是针对长度为 $N-1$ 的字符串系综计算的。因此，我们得到以下有用的表达式：

$$\langle n_{\phi_1}\rangle = \frac{e^{-\beta\gamma/a_1}}{Z(N)}\left(Z(N-1)-\langle n_{\phi_1}\rangle_{N-1}Z(N-1)\right) \tag{7}$$

对于单个莱布尼茨字符串而言，如果某个视域出现过一次，那么移除相应字母后，它就不会再出现在子字符串中。然而，我们考虑的是由莱布尼茨字符串组成的系综，因此它也可能出现在其他字符串中。这意味着$\langle n_{\phi_1}\rangle_{N-1}$ 并非 平凡地为零。在大 N 极限下，我们可以写成 $\langle n_{\phi_1}\rangle \approx \langle n_{\phi_1}\rangle_{N-1}$。此外，化学势 ($\mu$) 表示为 $e^{\beta\mu}=Z(N-1)/Z(N)$。在这些考量下求解上面的方程，我们得到本节的最终结果：

$$\langle n_{\phi_1}\rangle = \frac{1}{e^{\beta(\gamma/a_1-\mu)}+1} \tag{8}$$

现在我们已经证明，莱布尼茨字符串表现出费米子行为。从莱布尼茨字符串推导出这一表达式，关键在于认识到单子是由其视域定义的。占据数的期望值就是某个视域的占据数期望值，相应的类能量项为 γ/a_1。再重申一遍， γ 是将 BSD 多样性与能量联系起来的比例常数，而 a_1 是该视域的半径，换言之，也就是它的绝对无差异值。对于其他视域的占据数，类似的计算同样成立。因此，可以省略上面方程中的下标“1”。

7 多路路径和与 S-矩阵

由莱布尼茨字符串构成的多路系统是一个纯符号系统。这种形式系统在物理上的抽象是什么？在这方面，由 N 个字符组成的莱布尼茨字符串可以解释为一个 N费米子系统，其中每个字符（费米子）都占据一个不同的邻域（状态）。这相当于字符字符串的泡利不相容原理。此外，除了类似费米子的字符串，多路系统还具有因果结构，这种结构源于通过给定的一组重写规则促成的状态转移。因此，字符串之间的转移（这些字符串构成多路系统的状态）可以视为入射和出射 N费米子状态之间的散射过程。

为得到上述散射振幅，我们将基于定义在一系列莱布尼茨字符串上的作用量构造一个多路路径和，然后用它计算对应于酉变换的 S矩阵。

首先，我们定义多路系统中莱布尼茨路径上的作用量：

定义 7.1 (莱布尼茨路径的作用量（改编自 [22]）。 给定一个形式如 $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$ 的莱布尼茨路径，其中 a_i 是多路图上的节点/顶点，沿此路径的作用量定义为

$$\mathcal{S}\left(a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n\right) = -\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Var}(a_i)$$

对于 $n > 1$。

例如，给定一条从 $a \to b$ 出发的路径，作用量为 $\mathcal{S}(a \to b) = -\mathrm{Var}(a)$；或者，给定 $\mathcal{S}(a \to b \to c) = -\mathrm{Var}(a) - \mathrm{Var}(b)$。定义中使用负号的原因将在下一小节中说明。

字符串状态之间的跃迁振幅通过一种离散路径和计算，该路径和的定义方式类似于费曼路径积分。此前已在 [28,64] 中讨论过多路系统上的路径积分。我们在此采用的构造基于一系列莱布尼茨字符串上的 BSD 多样性。因此，路径和中的被加数为 $\exp(i\mathcal{S}/k)$，其中 $\mathcal{S}$ 是上文定义的作用量。实数无量纲耦合常数（k）对约化普朗克常数（$\hbar$）进行了推广。在下文中， S矩阵的元素编码了跃迁振幅，用以描述字符串在符号替换规则作用下的演化。

接下来，我们将 S矩阵定义如下：

定义 7.2 (S-矩阵)。 S矩阵的元素定义为

$$\langle out | in \rangle = \sum_{\gamma} \omega(\gamma)\, e^{i\mathcal{S}(\gamma)/k} \tag{9}$$

这是从 |输入词⟩开始获得 |出词⟩的跃迁振幅；该和是在连接“输入词”和“输出词”的每条物理路径 γ 上求得的。 $\mathcal{S}(\gamma)$ 在定义 *7.1* 中定义，而$\omega(\gamma)$ 是适用于路径的合适的 $\mathbb{R}$ 值权重函数，可以是常数。通过相应地选择权重 $\omega(\gamma)$ ，可以对跃迁振幅进行归一化。对于在多路系统中不存在因果路径连接的词，跃迁振幅为零，因为在这种情况下，权重 ω 恒为零。

请注意，此处使用“S-矩阵”一词，并非量子场论意义上的用法。相反，我们使用这个术语，是为了表示与字符串变换相对应的输入词和输出词之间的跃迁。

注 7.1。 当我们考察标准非相对论量子力学的路径积分表示时（例如，参见 *[49]*），每条路径的路径权重都相同，而作用量在不同路径上的取值则各不相同。然而，在这里的路径和中，路径权重是取值于 $\mathbb{R}$的自由参数。正如我们将在哈达玛门的情形中看到的，我们还需要负的 权重值。只有在我们所称的非相互作用情形中，才能使所有$\omega(\gamma) > 0$ 都对应于现有路径；这意味着从一个确定的输入词到一个确定的输出词之间只有一条路径。从这个意义上说，这里定义的组合路径和是一种比路径积分的严格对应形式更一般的结构。

输入词和输出词是离散空间中的元素，这种空间是对传统向量空间的推广。更具体地说，我们上文使用的字符字符串是一个 $\mathbb{Z}$–模的元素。环上的模是自然的代数结构，超越了域上的向量空间。对于这里采用的离散设定，这通过阿贝尔群的直和来实现。考虑一个长度为 l的字符串 w，其字符 c_i位于位置 $i \in \{1, 2, ..., l\}$

$$w = c_1\, c_2\, \cdots c_l$$

每个 c_i 都是一个有限字符集中的元素，该字符集的基数为 n。为这个集合赋予模运算后，它映射到循环阿贝尔群 $\mathbb{Z}_n$。于是，我们有：

$$w \in \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_n$$

其中右侧是 l 个 $\mathbb{Z}_n$的直和，而它本身是一个阶为 n^l的 $\mathbb{Z}$–模。如果多路系统由长度各异的字符串构成，那么 l的选择取决于最长的字符串（其长度始终是有限正整数）。此外，就这里的讨论而言，我们只处理在循环置换下保持对称的字符字符串。因此，还必须将上述模对字符串的循环置换取商。

现在，对于任意 $\mathbb{Z}$–模 M，都可以定义一个对称的 $\mathbb{Z}$–双线性复值形式：

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle \,:\, M \times M \to \mathbb{C}$$

这取代了向量空间上的内积概念。在我们的情形中，此映射如方程（9）所定义，并使得能够计算输入词与输出词之间的跃迁振幅。请注意，方程（9）中的映射是一个部分映射（相对于字符串模而言），因为其定义用到了给定多路系统的因果路径。

由方程（9）中的映射定义的 S-矩阵具有什么样的组合性质？由于多路图中的边权重是自由参数，这些权重的约束决定了多路系统中连续 S-矩阵的组合方式，以及乘积随后满足的结合律。现在，我们将求解这些约束，以证明矩阵

乘法具有如下形式

$$\sum_c \langle w_{out}|w_c\rangle\langle w_c|w_{in}\rangle = \langle w_{out}|w_{in}\rangle \tag{10}$$

作为多路系统上的一个构造，该条件得到满足：通过遍历多路系统若干层的路径所获得的 S-矩阵，与对关联于中间层的 S-矩阵进行矩阵乘法所得的结果相同。

首先，考虑三个连续的多路层。参见图 4。输入词用索引 i表示，输出词用索引 j表示，而中间层中的词用 c表示。我们计算 j，i S-矩阵的分量。为此，索引 c 遍历中间层中的所有词。对于这一三层设置，方程（10）给出如下结果：

$$\sum_c \omega_{jc}\omega_{ci}e^{i(S_{ci}+S_{jc})/k} = \sum_c \omega_{jci}e^{i(S_{ci}+S_{jc})/k} \tag{11}$$

其中我们使用了记号 $\omega_{ci} = \omega(\gamma_{ci})$、$\omega_{jc} = \omega(\gamma_{jc})$ 和 $\omega_{jci} = \omega(\gamma_{jci})$。同样地，出现在涉及作用量的各项中的下标表示对其求取作用量的路径。方程（11）的一种直接解恰好是

$$\omega_{jc}\,\omega_{ci} = \omega_{jci} \tag{12}$$

也就是说，复合路径的权重就是多路边权重（视为不可约路径）的乘积。该解法确保，由穿过多路系统多个层的路径得到的 S-矩阵，与对各个中间层构造的 S-矩阵进行矩阵乘法所得的结果完全相同。也就是说，现在可以保证矩阵乘法是仅通过对多路系统进行操作而得到的非平凡复合。

此外，当涉及多个中间层级时，若每个层级由索引 c_i 参数化，其中 $i = 1$、.....、n，上述解法可推广为

$$\omega(\gamma) = \omega_{jc_n\ldots c_1 i} = \omega_{jc_n}\omega_{c_nc_{n-1}}\cdots\omega_{c_2c_1}\omega_{c_1 i} \tag{13}$$

上述内容还确保 S-矩阵的复合满足结合律。

这里需要说明两点：

注 7.2. 关于构成 S-矩阵的矩阵元素，沿路径 γ 的作用量 $\mathcal{S}(\gamma)$完全由指定该路径 γ 的词／字符串决定。然而，边权重以及相应的路径权重 $\omega(\gamma)$是自由参数。这就产生了一族 S-矩阵（不一定是酉矩阵）。事实上，对于任意一组固定的输入词和输出词，多路系统都会编码多个 S-矩阵。只有在确定边权重之后，才能提取出一个特定的 S-矩阵，这正是我们将在下一节中展示的内容。

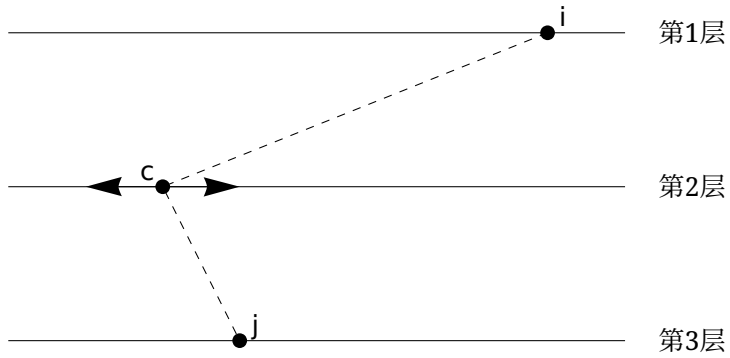


图4：三层系统示意图。输入词用 i 表示，输出词用 j 表示。第二层的元素用标签 c 表示，并对这些标签求和。

注 7.3. 如果两个不同的多路系统具有相同的因果结构（例如，除演化步骤顺序外完全相同），那么它们各自的 S-矩阵在对应于具有相同连通性的相同多路层时，将以特定方式相关联。这是因为由多路系统中两个连续层构造的 S-矩阵可分解为路径权重矩阵 ω_{ji} 与一个对角矩阵的乘积，其矩阵元素为 $e^{i\mathcal{S}_i/k}$，其中 j 遍历所有输入词

$$\langle w_{out}|w_{in}\rangle_{ji} = \omega_{ji}\ (e^{i\mathcal{S}_i/k})_{ii}$$

（上文未采用爱因斯坦求和约定）。在这种情况下，权重矩阵 ω_{ji} 的形式对于两个 S 矩阵相同，也就是说，权重矩阵中非零元素的位置相同。只有对角矩阵不同，其元素形式为 $e^{i\mathcal{S}_i/k}$。此外，连续的 S 矩阵通过矩阵乘法进行复合。因此，与具有相同因果结构的多路系统相关联的相应 S矩阵，将具有相似的结构形式。

7.1 二维 S矩阵：非相互作用

我们从构造最简单类型的 S-矩阵开始：二维且不存在相互作用。为此，我们考虑两个输入词和两个输出词。在非相互作用情形中，一个输入词只连接到一个输出词。例如，当连通图为$\{1_{in} \to 1_{out},\ 2_{in} \to 2_{out}\}$ 时（我们将在本小节末尾看到，情形 $\{1_{in} \to 2_{out},\ 2_{in} \to 1_{out}\}$ 也属于非相互作用情形），S-矩阵的形式如下：

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & 0 \\ 0 & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

其中 ω 为实值权重。幺正性要求 $\omega_{11}^2 = \omega_{22}^2 = 1$。我们将这些值设为 1。因此，非相互作用情形的 S矩阵为：

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\mathcal{S}_1/k} & 0 \\ 0 & e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

将这个 S矩阵表示为离散时间系统 $U = \exp(-iH\Delta t)$ 的时间演化算符，可得哈密顿量：

$$H = \frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} -\mathcal{S}_1/k & 0 \\ 0 & -\mathcal{S}_2/k \end{pmatrix}. \tag{16}$$

请注意，为了使哈密顿量正定，我们需要将作用量定义为在词 1 和 2 上计算得到的 BSD 多样性的相反数。这促使我们使用多样性作为势能的度量。在 [54, 55] Smolin 也将多样性用作一种势能形式。

除全局相位因子外，二维非相互作用 S-矩阵的一般形式可以写成以下形式之一：

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{or} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

对于相应的某些相位 α取值。上面的第二种形式是在改变输入词的顺序后从第一种形式得到的，也就是说，此时连通性数据为 $\{1_{in} \to 2_{out},\ 2_{in} \to 1_{out}\}$。当 $\alpha = \pi/4$ 时，可以得到 $\pi/8$-门的一种实现。

7.2 二维 S-矩阵：相互作用

现在，我们讨论二维相互作用 S-矩阵。我们向多路图中添加边，以构成词之间的相互作用。例如，输入词 in-1 与输出词 out-2 之间，或输入词 in-2 与输出词 out-1 之间的相互作用。然而，这里有一个微妙之处。如果相互作用是单向的，例如，in-1 与 out-2 相连，但 in-2 与 out-1 不相连，反之亦然，则非对角元素必须为零。主要原因在于计算酉矩阵的逆时所涉及的转置运算。更一般地说，对于由 N 个输入词和 N 个输出词构成的相互作用系统， S-矩阵的 i, j 元素（该矩阵也是酉矩阵）非零，当且仅当 j, i元素非零。也就是说，在多路系统层面，相互作用必须是相互的，才能确保幺正性：如果 in-j 与 out-i 路径连通，那么 in-i 与 out-j 也必须路径连通。

考虑一个相互作用的二维 S-矩阵时，每个输入词都与每个出词相连。于是， S-矩阵如下所示：

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{12}e^{i\mathcal{S}_2/k} \\ \omega_{21}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

施加幺正性条件可得：

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \lambda e^{i\mathcal{S}_2/k} \\ -\lambda e^{i\mathcal{S}_1/k} & \sqrt{1-\lambda^2}e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix} \tag{19}$$

对于实参数 $\lambda \in [-1, 1]$。这里， λ 是控制相互作用强度的自由参数。二维系统的结构详见图5。

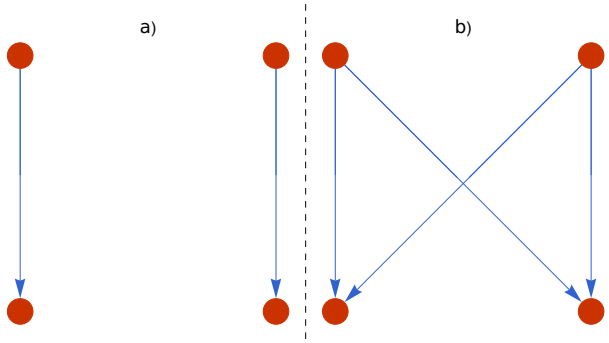


图5：二维系统的构成。（a）非相互作用情形，（b）相互作用情形。所有节点都应是莱布尼茨字符串。请注意，存在词的置换对称性。因此，将 in-1 与 out-2、in-2 与 out-1 相连接的情形，也属于非相互作用设置。

忽略一个全局相位因子后，我们可以将公式（19）中的 U 写成如下形式：

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)e^{i\alpha} \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)e^{i\alpha} \end{pmatrix} \tag{20}$$

7.3 高维 S-矩阵

现在来考虑由 n 个输入词和 m 个输出词构成的更一般形式的 S-矩阵。我们从方形 S-矩阵开始。

一般而言，由于 S-矩阵的结构，对于方形酉矩阵 U（即 $n \times n$），我们可以将矩阵元素写成如下形式：

$$U_{ij} = \omega_{ij} e^{i\mathcal{S}_j/k} \tag{21}$$

U 的每个列向量 c_i 都由元素 $\{\omega_{li}\}_l$ 构成，并乘以常相位 $e^{i\mathcal{S}_l/k}$。U 的酉性要求意味着 $c_i^\dagger c_j = \delta_{ij}$。因此，如果我们写成

$$U = \omega \ \mathrm{diag}(e^{i\mathcal{S}_1/k}, e^{i\mathcal{S}_2/k}, \ldots, e^{i\mathcal{S}_n/k}) \tag{22}$$

可以看出，ω 矩阵是正交的。一般的 3×3 正交 ω 矩阵可表示如下 [27]（不含因子 ± 1）：

$$\omega = \pm \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{23}$$

其中，我们使用欧拉角表示 $SO(3)$ 的一般元素，并添加因子± 1，以构造 $O(3)$ 的元素。因此，我们能够表示的一般 S-矩阵如下：

$$U_{3\times 3} = \omega\,\mathrm{diag}(e^{i\mathcal{S}_1/k}, e^{i\mathcal{S}_2/k}, e^{i\mathcal{S}_3/k}) \tag{24}$$

特别地， 4×4 S-矩阵具有以下形式：

$$U_{4\times 4} \;=\; \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{12}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{13}e^{i\mathcal{S}_3/k} & \omega_{14}e^{i\mathcal{S}_4/k} \\ \omega_{21}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{23}e^{i\mathcal{S}_3/k} & \omega_{24}e^{i\mathcal{S}_4/k} \\ \omega_{31}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{32}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{33}e^{i\mathcal{S}_3/k} & \omega_{34}e^{i\mathcal{S}_4/k} \\ \omega_{41}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{42}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{43}e^{i\mathcal{S}_3/k} & \omega_{44}e^{i\mathcal{S}_4/k} \end{pmatrix} \tag{25}$$

这里是 $\omega \in O(4)$。下面的内容中将用到几个定义。

定义 7.3（完全相互作用系统）。 完全相互作用系统（作为多路系统的子系统）是一个完全二部图（作为多路图的子图）。也就是说，指定的 S-矩阵构造中的所有 n 输入词都与所有的 m输出词相连接。

在存在 n 输入词和 m 输出词的情况下， S-矩阵的维数为 $m\times n$。一般而言， S-矩阵将不是方阵。因此，幺正性的定义需要更加谨慎。注意，当我们定义 S-矩阵时，列会乘以一个形如 $\exp(i\mathcal{S}_i/k)$ 的纯相位函数，其中 $\mathcal{S}_i$ 与 i^{th} 输入词的 BSD 多样性成正比。当我们忽略这些纯相位后，由 ω构成的剩余矩阵将是正交的，因为这些参数均为实值。因此，只需考虑正交矩阵，并将纯相位包含在这些矩阵的列中即可。

将幺正性或正交性推广到非方阵的情形，分别称为半幺正矩阵或半正交矩阵。

定义 7.4（半幺正矩阵）。 如果 U 是满足 $U^\dagger U = I_n$ 的 $m\times n$ 矩阵，我们就称 U 为半幺正矩阵。

在文献中，上述定义可以采用 $U^\dagger U = I_n$ 或 $UU^\dagger = I_m$。然而，由于我们考虑的是作用于初始状态的 S，因此选择了这一特定形式的定义。

定义 7.5（半正交矩阵）。 如果 U 是满足 $U^T U = I_n$ 的 $m\times n$ 矩阵，我们就称 U 为半正交矩阵。

S-矩阵（可能是矩形矩阵）的一般形式，其元素如下。考虑一个双层系统，假设有 n 个输入词和 m 个输出词。如果第 i^{th} 个输入词与第 j^{th} 个输出词相连，那么 $j,\ i$ 个元素在 S-矩阵中的形式为 $\omega_{ji}e^{i\mathcal{S}_i/k}$，其中 ω_{ji} 是一个自由的 $\mathbb{R}$ 值参数。如果这些词未相连，那么 $j,\ i$ 个元素在 S-矩阵中为零。对于使用多路系统两层以上的构造，类似的模式仍然成立（此时必须考虑路径权重以及沿路径求值的作用量）。

例如，我们来考虑一个二乘三系统。该系统有两个输入词和三个输出词。 S-矩阵形式如下：

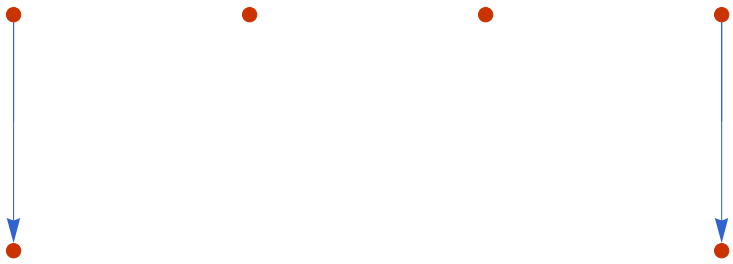


图6：一个包含四个输入词和两个输出词的非相互作用系统。

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{12}e^{i\mathcal{S}_2/k} \\ \omega_{21}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} \\ \omega_{31}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{32}e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

方程 $U^\dagger U = I_2$ 可以求解，因为参数足够多。因此，在这种情况下，我们可以找到一个半酉 S-矩阵。现在我们来考虑一个三乘二系统。该系统由三个输入词和两个输出词组成。 S-矩阵如下：

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{12}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{13}e^{i\mathcal{S}_3/k} \\ \omega_{21}e^{i\mathcal{S}_1/k} & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} & \omega_{23}e^{i\mathcal{S}_3/k} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

如果该矩阵是半酉的，那么应满足矩阵方程 $U^\dagger U = I_3$ ，其中 I_3 是 3×3 单位矩阵。然而，该方程没有解。也就是说，在这种情况下，无论参数取何值，幺正性都不成立。

7.4 关于恢复酉性的评论

通常，幺正性与系统处于封闭状态相关。而当幺正性失效时，这往往意味着系统是开放系统。正如我们将看到的，如果存在未连接的词，就不可能有酉 S 矩阵。此外，在下一层的词数减少的情况下，我们可能没有酉 S 矩阵。另一方面，如果一层中的词数保持不变或增加，我们总是可以得到（半）酉 S 矩阵。

现在来讨论如何通过扩展系统来恢复 S-矩阵的幺正性。举例来说，考虑图6所示的多路系统，它将两个量子比特关联到一个单量子比特。这意味着我们有四个输入词和两个输出词。

图6中的多路系统所产生的量子门可以将 $|00\rangle \to |0\rangle$ 和 $|11\rangle \to e^{i\alpha}|1\rangle$，以及 $|01\rangle \to 0$, $|10\rangle \to 0$ 映射到一起。因此，对于这样的多路系统， S-矩阵不可能是酉矩阵。这个过程描述的是一个非相互作用系统。如果我们想为该系统添加一个扩展，可以将其视为由两个输入词组成，它们与系统的其余部分完全不发生相互作用。如果至少有一个未连接的输入词或输出词，系统本身就无法产生酉 S-矩阵。这意味着至少会有一列或一行是零列或零行。

在图 7 中，我们看到了一个示例：在多路系统中，重写规则与至少一个词不匹配。考察两个连续的层时，我们可以写出

$U = U_2 U_1$ 其中 U_1 是酉的。然而， U_2 不可能是酉矩阵，因为第二列恒为零。由于矩阵乘法的结构， U_2 的零列会消除第二层中第二个词对复合 S-矩阵 U 的所有贡献。

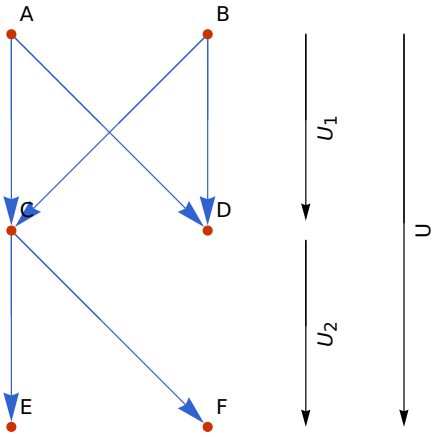


图 7：多路系统示例，其中重写规则至少无法匹配一个词。图中每个词都应为莱布尼茨式。

对于这种情况，我们可以考虑从第一层到第三层的转移矩阵。由于给定的输入词与任意出词之间只有一条路径相连，因此 S-矩阵如下所示：

$$U = \begin{pmatrix} \Omega_{11} e^{i(\mathcal{S}_A + \mathcal{S}_C)/k} & \Omega_{12} e^{i(\mathcal{S}_B + \mathcal{S}_C)/k} \\ \Omega_{21} e^{i(\mathcal{S}_A + \mathcal{S}_C)/k} & \Omega_{22} e^{i(\mathcal{S}_B + \mathcal{S}_C)/k} \end{pmatrix} \tag{28}$$

其中，我们使用 Ω_{ij} 代替 ω_{ij} ，以表明这是一个关联非相邻层的 S-矩阵。就复相位而言，这种形式等同于一个 2×2 相互作用系统。因此，尽管第二层中有一个词无法与某条重写规则匹配，仍然可以找到一个酉转移矩阵来连接第一层和第三层。

另一方面， S-矩阵中不可能存在完全为零的零行，这是因为在生成多路系统时，应当通过至少应用于某个输入词的重写规则的应用找到一个输出词。从现在起，除了不存在零行之外，我们还假设 S-矩阵不存在完全为零的列。假设有 n 个输入词和 m 个输出词，并且在多路系统中，考虑这两个相邻层时不存在不相连的词。 S-矩阵的形状为 $m \times n$。因此，矩阵方程 $U^\dagger U = I_n$ 由 n^2 个独立方程组成。然而，独立方程的数量为 $n(n+1)/2$。另一方面， U 中的自由参数数量为 mn。因此，当 $mn \geq n(n+1)/2 \implies 2m \geq n+1 \implies m \geq (n+1)/2$ 时，可以求解该矩阵方程。所以，如果输入词的数量（m）满足这一不等式，我们就能找到 U ，使得 $U^\dagger U = I_n$。满足（半）酉性条件之后， U 的自由参数数量如下所示：

$$mn - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(2m - n - 1). \tag{29}$$

对于方形 S-矩阵的情况，其中 $m = n$，自由参数的数量为 $n(n-1)/2$。由于 $n \geq 1$，自由参数的数量是非负整数。然而，如果输出词远少于输入词，以至于不等式不满足，换句话说，如果多路系统迅速减少下一层中的词数，则由于缺少自由参数，方程 $U^\dagger U = I_n$ 无法求解。这些自由参数就是我们上文讨论过的路径权重（ω）。

解决这一问题最简洁的方式，是在第二层引入 Δm辅助词，使得 $2(m + \Delta m) \geq n + 1$。因此，$\Delta m$ 的最小数量满足$\Delta m \geq (n+1)/2 - m$。如果 n 为偶数 $\Delta m_{\text{even}} = n/2 + 1 - m$，且如果 n为奇数 $\Delta m_{\text{odd}} = (n+1)/2 - m$。
如果 U 表示一个用于关联输入词和输出词的 S矩阵，而 U_e 是一个形状为 $\Delta m \times n$ 的适当矩阵，那么我们可以将复合 U_c 矩阵写成如下形式：

$$U_c \equiv \begin{pmatrix} U \\ U_e \end{pmatrix} \tag{30}$$

其中，U_e 被视为复合 U_c 矩阵的一部分，用于捕捉信息丢失。矩阵 U_c 具有足够多的参数，因此可以将其写成（半）酉矩阵的形式。写出 $U_c^\dagger U_c = I_n$后，我们可以看到，U和 U_e的参数并非彼此独立。U 有 mn 个自由参数，U_e 有 $\Delta m\, n$ 个自由参数；总而言之，U_c中有足够多的自由参数，这保证了我们能够求解$U_c^\dagger U_c = I_n$。如果我们将 U_e视为 U的函数，这意味着可以求出 U_e的参数。反过来，也可以尝试将 U 视为 U_e的函数来求解。因此，U_c 的幺正性对多路系统中辅助词的连接结构施加了限制。

在下一层中，我们应考虑 Δm 辅助词。换句话说，重写规则不应匹配这些辅助词。这意味着下一层的 S矩阵有些列为零；当我们再考虑一层以及 S矩阵的矩阵乘积时，辅助词的存在不会影响 S矩阵。这是预期的，因为在定义 7.2 中，我们考虑连接输入词和输出词的莱布尼茨路径。因此，在中间层中，重写规则无法匹配的词不会纳入矩阵的计算。

一般来说，多路系统会产生许多非酉的 S矩阵。这对于研究与开放系统相关的算子可能很有用，其中包括非酉 ZX 图。另一方面，如果需要使用酉跃迁矩阵，则可以实施上文所述的恢复酉性的方案：也就是说，按照方程（30）考虑复合 U_c 矩阵，并在每一步 $2m < n + 1$ 适用之处指定系统的扩展。

8 应用

在本节中，我们将探讨该系统在量子门方面的各种应用。在本节末尾，我们将讨论多能级量子比特的量子电路，将其作为进一步的应用领域。

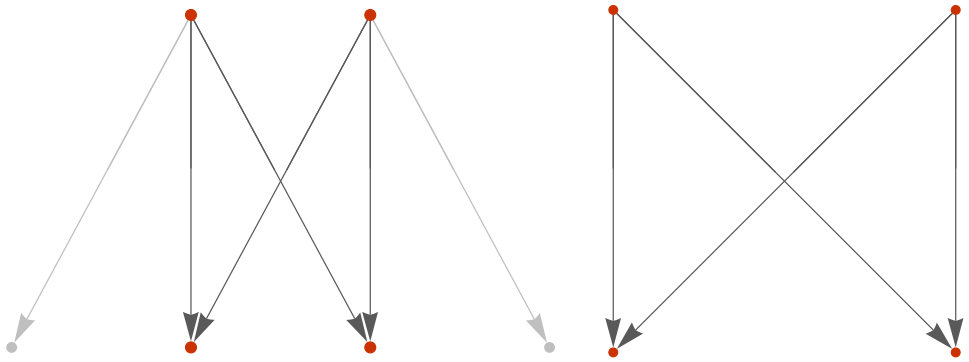


图 8：多路系统的单步演化。输入词为“AABBD- CABABDC”和“ABABCDABABDC”，重写规则为 BA→AB、DC→CD。左侧是完整的多路系统，右侧是其物理子集。输入词的 BSD 多样性为 10，输出词的 BSD 多样性为 12。

8.1 单量子比特：哈达玛门和 $\pi/8$ 门

在本小节中，我们将考察一个完全相互作用的 2×2 系统，特别是图 8 所示的系统。

该系统的 S矩阵与一个正交矩阵成比例，因为我们可以提取出在 S矩阵每一列中都相同的相位项。对输入词和输出词进行置换后， S矩阵可写成以下形式

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

如果我们选择 $\theta = -\pi/4$ ，则得到：

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

我们看到 $U = H\sigma_x$。由于输入词和输出词可以置换，不失一般性，我们可以写成 $U \sim H$，这意味着我们可以表示哈达玛门。如果考虑一个包含两个输入词和两个输出词的非相互作用系统，则可以将 S矩阵写成如下形式：

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11} e^{i\mathcal{S}_1/k} & 0 \\ 0 & \omega_{22} e^{i\mathcal{S}_2/k} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

如果我们将 $\omega_{11} = \omega_{22} = 1$ 选定到相差一个全局因子的范围内，就可以将 U 写成如下形式：

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\mathcal{S}/k} \end{pmatrix} \tag{34}$$

其中 $\Delta S \equiv S_2 - S_1$。如果 $\Delta S = \pi/4$ ，那么我们的系统可以表示 $\pi/8$ 门 .

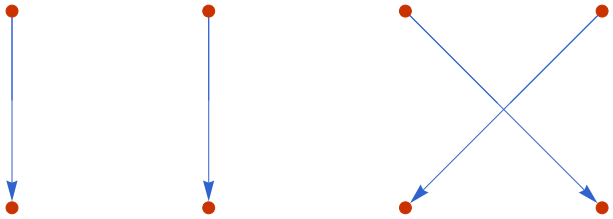


图9：一个双层多路系统。这是一个表示 CNOT 门的非相互作用系统。我们假设每个输入词的多样性值都相同。

8.2 两个量子比特

在这一部分，我们将展示如何使用多路系统对受控非门和 SWAP 门进行编码。这两个门对应非相互作用系统，可以通过置换特定层中适当单词的顺序来表示。

8.2.1 CNOT 门

在本小节中，我们考虑图9所示的双层多路系统。因此，我们可以将 S-矩阵的一般形式写为：

$$U = \begin{pmatrix} \omega_{11}e^{i\mathcal{S}_1/k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22}e^{i\mathcal{S}_2/k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{34}e^{i\mathcal{S}_4/k} \\ 0 & 0 & \omega_{43}e^{i\mathcal{S}_3/k} & 0 \end{pmatrix} = e^{i\mathcal{S}/k} \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{34} \\ 0 & 0 & \omega_{43} & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

其中，我们假设每个输入词的多样性值都相同： S。这种 S-矩阵形式的一个解称为 CNOT门：

$$U = e^{i\mathcal{S}/k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

这里，全局相位 $e^{i\mathcal{S}/k}$ 没有物理作用，多路系统可以编码 CNOT门。

8.2.2 SWAP 门

在本小节中，我们考虑图 10 所示的系统。物理多路系统中字符串的 BSD 多样性相同，即为 8。物理多路系统中的两层结构相同。为此，我们考虑第一层。其 S-矩阵形式如下：

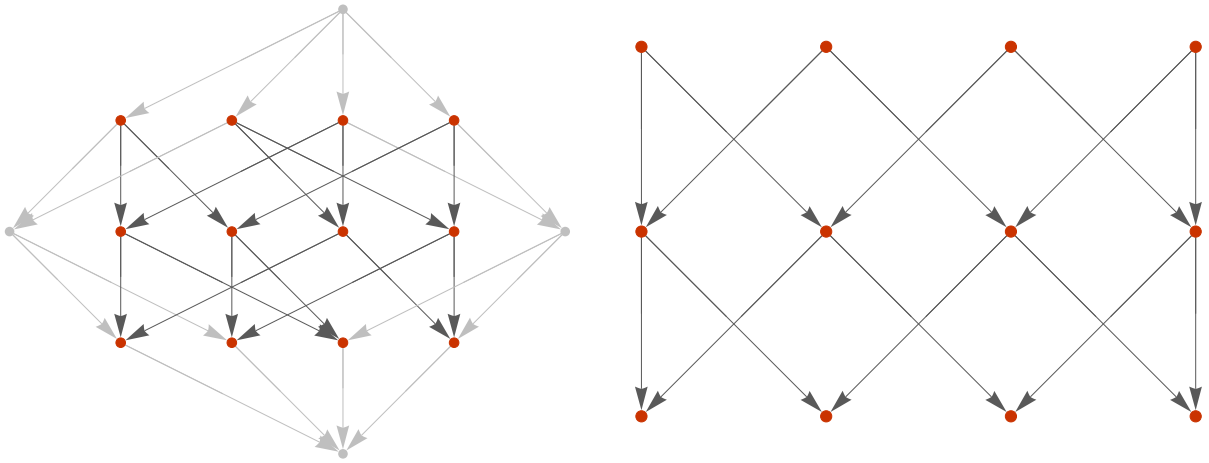


图 10：左侧为完整的多路系统，右侧为其物理子集。头节点为“BADCBADC”，重写规则为 $\{BA \to AB, DC \to CD\}$。

$$U = e^{-iV/k} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & 0 & 0 \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} & 0 \\ 0 & \omega_{32} & 0 & \omega_{34} \\ 0 & 0 & \omega_{43} & \omega_{44} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

由于所有输入词都具有相同的 BSD 多样性，我们可以提出指数相位因子。满足幺正性条件的这类矩阵的一个解如下：

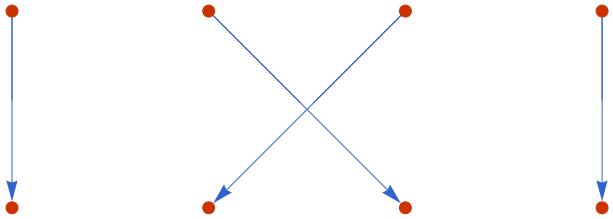
$$U = e^{-iV/k} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

除去全局相位因子，这个矩阵就是众所周知的交换门。它可以用三个受控非门表示。编码交换门的最简多路系统只是一个非相互作用系统，类似于图9所示的情形，只不过其中第二个词和第三个词的顺序互换了，而不是第三个词和第四个词的顺序互换。见图11。

8.3 量子多能级比特

一般而言，我们的系统可以看作是为量子多能级比特生成量子电路。量子多能级比特是将双能级量子比特推广到更高维度的概念，我们将在下文中对其进行定义。

定义8.1（量子多能级比特）。 量子多能级比特是一种具有 d 个能级的量子系统。其基态可以标记为 $|0\rangle$、$|1\rangle$、……、$|d-1\rangle$。对于 $d=2$，就是通常的量子比特。



Fig图 11：可编码交换门的最简双层多路系统 .

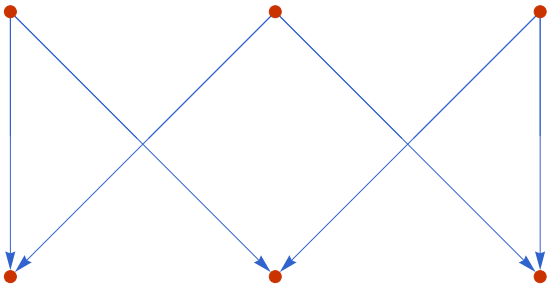


图 12：与三能级量子比特对应的（假设的）多路系统的一部分。我们假设每个输入词的多样性相同： V。

然而，并非所有可能类型的电路都允许使用。对应于量子多能级比特各组成部分的字符字符串数组应满足莱布尼茨式条件。另一方面，量子多能级比特也可以看作由更小的量子多能级比特组成。若 $d = p_1^{n_1} \dots p_a^{n_a}$ 是正整数 d 按其素因子 p_1、……、p_a 表示的形式，那么我们可以将这个较大的量子多能级比特视为由 n_1 p_1 维量子多能级比特、 n_2 p_2 维量子多能级比特等构成的复合结构。一个显而易见的例子是 $d = 2^n$ 对某个 n 成立的情形。在这种情况下，该量子多能级比特由 n 个量子比特组成。我们在第 8.2 小节的例子中用到了这一结果，当时我们考虑了一个双量子比特系统。另一个简单的例子是 $d = 6$。这个量子多能级比特由一个量子比特和一个三能级量子比特组成。

让我们考虑一个单个三能级量子比特的系统，它是一个三能级系统。其配置如图 12 所示。 S-矩阵的最一般形式如下：

$$U = e^{-iV/k} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & 0 \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ 0 & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

我们求解了 $U^\dagger U = I_3$ ，得到以下解（共八个），它们在词的置换意义下等价：

$$U = e^{-iV/k} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

将所有矩阵元素都设为 1，这个酉变换在全局相位意义下对应于 $|0\rangle \to |0\rangle$， $|1\rangle \to |2\rangle$， $|2\rangle \to |1\rangle$ 。某种程度上，它可以看作一个交换门 [37]。

在一个多路 随着深度增加而扩展的系统中，某一时间的词所构成的向量空间维数 e

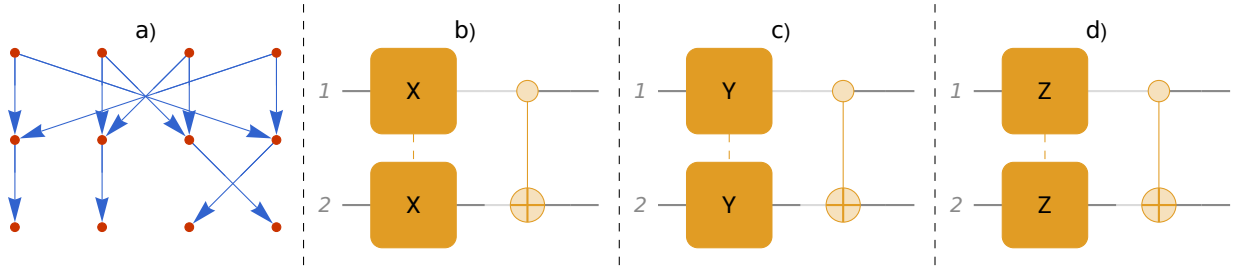


图13：一个三层多路系统（其中单词按计算基排序），以及它可能对应的几个量子电路示例。量子电路中的时间从左向右流动。

会增加，因此多能级量子比特的 d 参数也会增加。从这个意义上说，在 $d \to \infty$ 极限下，我们期望该系统能够表示相当复杂的量子系统。研究如何在我们的系统中表达谐振子等一些简单量子系统的动力学，将是一个有趣的未来研究方向。

8.4 多路系统到量子电路

在上述关于 S-矩阵形式的讨论中，我们大多时候考察的是所谓的计算基。它们是一组正交归一向量。例如，对于一个量子比特，$|0\rangle$，$|1\rangle$；对于两个量子比特组成的系统，$|00\rangle$，$|01\rangle$，$|10\rangle$，$|11\rangle$；对于一个三能级量子比特，$|0\rangle$，$|1\rangle$，$|2\rangle$。在本节其余小节中，我们所说的“多路系统”实际上指多路系统中的莱布尼茨式部分，其中每个顶点都是莱布尼茨式的。

当多路系统在某一深度的元素数量为 2 的幂时，该系统对应于某个数量的量子比特之间的关系。一旦确定了这一组 S-矩阵，就可以生成一组量子电路。

如果输入词和输出词构成的系统形成了一个由不相交子图组成的图，如 $g = \cup_{i=1}^{n} g_i$ 和 $g_i \cap g_j = 0$ 对于 $i \neq j$，那么 S-矩阵应为每个S_i-矩阵的张量积，形式为 $U = \bigotimes_{i=1}^{n} U_i$。在 ZX图中，这些将表示为带有局部操作的平行线。在提出张量积结构之后，我们现在可以考虑不具有不相交子图的输入词和输出词。

我们在上文讨论了在我们的形式体系中可以得到的 S-矩阵的形式。如果它是一个方阵，当词之间存在相互作用时，i，j^{th} 和 j，i^{th} 分量可以非零。如果下一步中的词数量增加，我们仍然可以找到一个半酉的 S-矩阵；而如果下一层中的词数量减少，我们可以考虑对系统进行可能的扩展，以恢复幺正性。

如果每一层的 S-矩阵维度相同（例如 $n \times n$），我们就可以轻松地用多能级量子比特为给定的多路系统构造一个量子电路。微妙之处在于下一层的单词数量可能不同。如果单词数量增加，我们可以将这种情况视为把一个态矢量嵌入更大的空间中。如果单词数量减少，则可以将环境作为一个（可能是复合的）多能级量子比特纳入其中。

现在来看一个具体的例子。考虑图13中出现的多路系统，前两层和最后两层的 S-矩阵形式如下（我们假设每一层中的单词具有相同的多样性值）：

$$U_{12} = e^{-iV_1/k} \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \omega_{14} \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{23} & 0 \\ 0 & \omega_{32} & \omega_{33} & 0 \\ \omega_{41} & 0 & 0 & \omega_{44} \end{pmatrix}, \quad U_{23} = e^{-iV_2/k} \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{34} \\ 0 & 0 & \omega_{34} & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

其中 U_{12} 和 U_{23} 的参数彼此独立。根据给定 S-矩阵的形式， U_1 可能对应于 $n = x$的 $\sigma_n \otimes \sigma_n$， y， z 或交换门。 U_2 可能对应于 CNOT门。

关于量子门的解释，有一个微妙的问题。假设我们有一个 n量子比特系统，其 S-矩阵维度为 $2^n \times 2^n$。只需考虑 $n = 2$ 情形，就足以说明要点。在这种情况下， S-矩阵的维度为 4×4。这个系统可以看作由 2 个量子比特组成，也可以看作一个 4-多能级量子比特。从矩阵性质来看，两者没有区别。然而，两种情况下对量子门的解释 有所不同。举个简单的例子，考虑上方的 U_{23} 矩阵。如果将该系统视为由 2 个量子比特组成，那么这个量子门可能对应一个 CNOT门：当第一个量子比特处于状态 $|1\rangle$时，对第二个量子比特执行受控非门操作。如果从 4-多能级量子比特的角度来解释这个量子门，我们得到一种交换门，它将 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$映射到。在本质上，我们可以将由 n 个量子比特组成的系统视为一个 2^n-多能级量子比特。不过，从量子计算的角度来看，将该系统视为由 n 个量子比特组成，或许更有助于理解。

8.5 ZX蜘蛛算子的生成

我们来讨论 ZX演算中 Z-蜘蛛和 X-蜘蛛的生成。我们考虑量子比特的 L_i条输入腿和 L_o 条输出腿。对于某个参数 α， Z-蜘蛛是如下线性映射： $|0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| + e^{i\alpha}|1\cdots1\rangle\langle1\cdots1|$。从多路系统的角度来看，这个映射对应一个由 2^{L_i} 个输入词和 2^{L_o} 个输出词构成的非相互作用系统，其中只有两个输入词和两个输出词相连。

至于 X-蜘蛛，对于某个参数 α，它们对应如下映射： $|+\cdots+\rangle\langle+\cdots+ | + e^{i\alpha}| - \cdots -\rangle\langle- \cdots - |$。这里， $|\pm\rangle$ 对应于特征值为 ±1 的 σ_x算子的特征向量。特别地， $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$。我们已经看到，可以表示哈达玛门。如果对 Z-蜘蛛的每条腿都应用哈达玛门，就可以得到 X-蜘蛛。本质上， X-蜘蛛可以用多路系统中的至少四层来表示。

作为一个具体示例，我们来考察哈达玛门，以及用于两个输入腿和两个输出腿的 Z-蜘蛛和 X-蜘蛛。它们的矩阵表示如下：

$$H \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

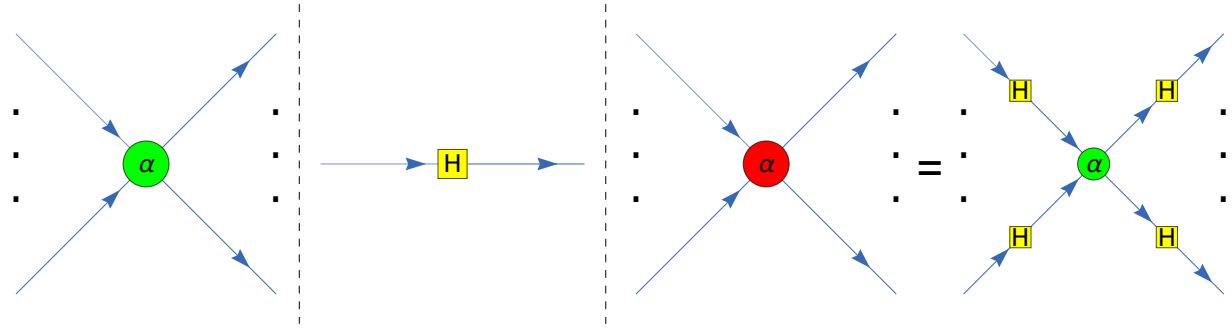


图14： Z X图。（左） Z蜘蛛，（中）哈达玛门。（右） X蜘蛛。

$$Z(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$X(\alpha) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} \\ 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} \\ 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} \\ 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} & 1-e^{i\alpha} & 1+e^{i\alpha} \end{pmatrix} \tag{44}$$

相应的最小多路系统见图15。

我们还可以通过置换非相互作用系统中的词，得到 CNOT 门或交换门。这里的讨论表明，可以从多路系统出发找到一族 ZX图。

8.6 关于通用量子计算的一点说明

到目前为止，我们已经展示了多路系统与量子电路之间存在对应关系。从多路系统到量子电路的映射是一对多的。这是因为需要确定的 S矩阵中存在自由参数。

我们已经看到，对于单量子比特，可以表示哈达玛门和 $\pi/8$门；对于两个量子比特，则可以表示 CNOT 门。这意味着，只需适当选择一个多路系统，就能表示任意给定的量子电路。另一方面，由于利用多路系统可以近似任意量子电路，因此我们可以说，非确定性重写系统对有限维量子系统的编码具有通用性。这意味着，利用多路系统可以表示给定的量子电路。如果表示并不精确，可以考虑一系列多路系统，例如，对于某个指标集 I，$\{\mathcal{M}_i | i \in I\}$可以是 $\mathbb{N}$；在极限情况下（即 $i \to \infty$），该表示会逼近给定的量子电路。

对于给定的多路系统，我们可以确定其中的单词及其 BSD 多样性值。因此，利用这些信息，我们可以生成一个对偶量子电路。在这种情况下，我们有

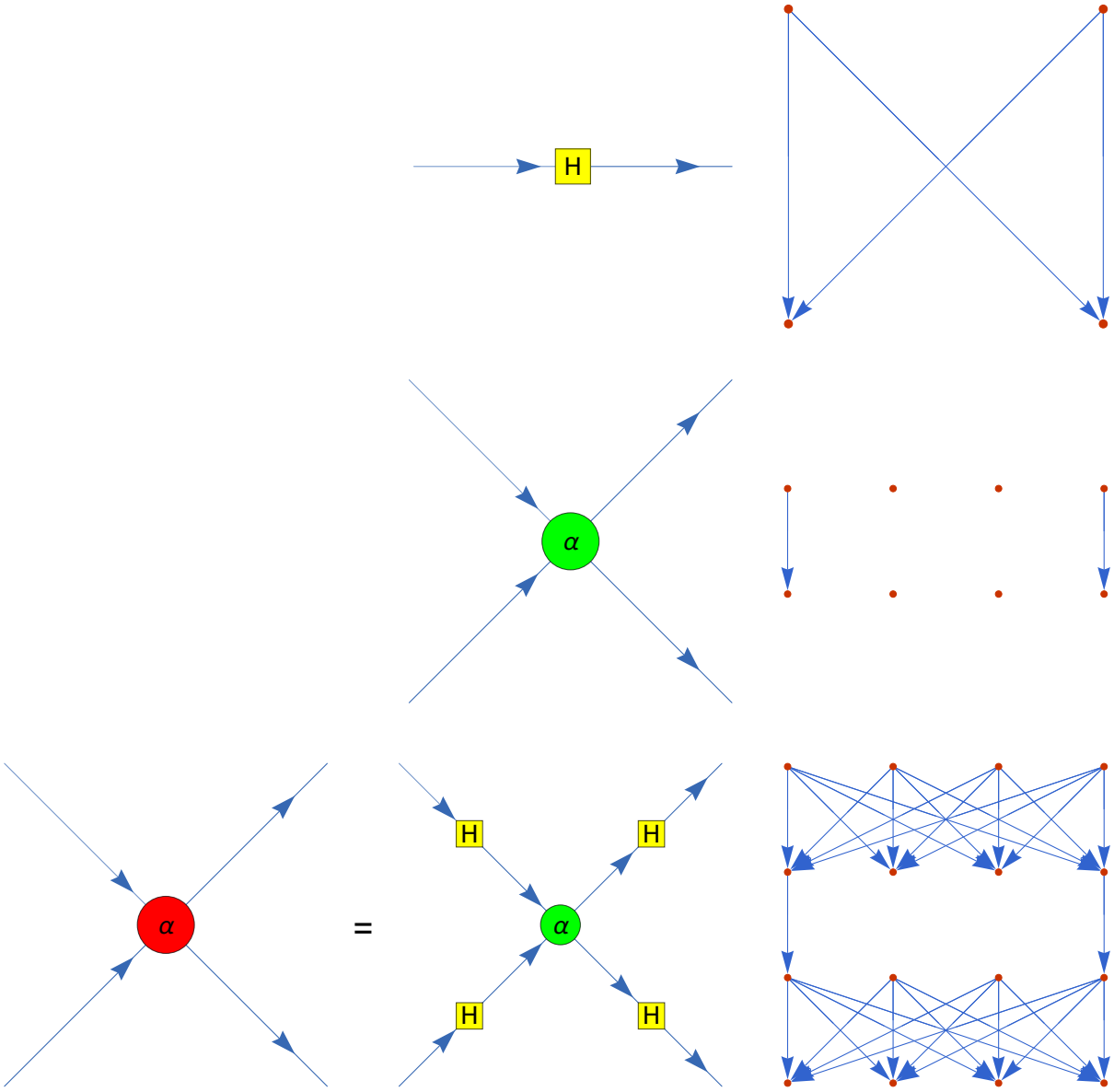


图15： ZX演算元素的最简多路系统表示：哈达玛门、 Z-蜘蛛和 X-蜘蛛。

可以在任意层对词进行重排，因为这是多路系统的一种对称性，而且原则上并没有对每层中的词进行排序的方法。反过来，这种自由度使我们能够为给定的多路系统表示更多量子电路。一个简单的例子是，CNOT门和恒等门作为两层多路系统，具有相同的连接结构。

总而言之，多路系统到量子门之间存在一对多映射。对于每层词数相同的情况（例如 2^n 对于某些 $n \in \mathbb{Z}^+$），多路系统可以表示 H、CNOT门和 $\pi/8$门。这三种门的组合可以实现通用量子计算。

9 结论与讨论

在这项工作中，我们提出了一种基于非确定性重写系统的计算框架，并表明该框架能够编码有限维量子算子的表示，尤其是对应于量子门的量子算子。抽象符号系统到量子算子的映射表明，抽象重写系统具有丰富的符号表示能力。这为研究基于抽象计算系统非确定性因果结构的量子过程提供了一个背景无关框架。我们的工作并非预先假定量子算子的希尔伯特空间，而是采用建构主义方法来构造量子算子。我们形式体系的构件本身并非量子态或量子算子，而是抽象计算系统中的句法实体，不带有任何量子基础。尽管如此，这些抽象符号系统仍能表示特定的量子门及其组合。

更具体地说，我们的形式体系采用一种基于规则的字符串替换系统，其中涉及一种称为莱布尼茨字符串的特殊循环字符串。我们已经证明，这些字符串中字符邻域的占据数期望值呈现费米–狄拉克分布。这是一个 N-费米子系统的组合抽象。在数学上，这组字符字符串构成一个带有对称 $\mathbb{Z}$-双线性形式的 $\mathbb{Z}$-模。我们在此构造的，只是带有内积的向量空间的离散对应物。这正是所需的精确数学工具，它使得基于定义在一系列莱布尼茨字符串上的作用量构造路径积分的离散类比成为可能，并进而为多路重写系统构造一个 S-矩阵。

从某种意义上说，我们可以将其视为计算的统计力学。通过对由因果序支配的离散状态空间中的路径求和作适当定义，我们计算出了 S矩阵，用以捕捉入态与出态之间的跃迁振幅。我们还证明，作为多路构造， S矩阵的连续复合在形式上满足矩阵乘法规则。此外，我们找到了能够确保 S矩阵幺正性的路径权重解。正是这些酉 S矩阵给出了量子算子的表示。值得注意的是， S矩阵通常对应的是一族量子算子，而非某个特定的单一算子。接下来，我们将计算涉及量子比特、多能级量子比特及更一般电路的量子门具体实例。我们发现，作为非确定性计算的形式模型，莱布尼茨式重

包含 c 的字符串因果结构编码了受控非门、 $\pi/8$和哈达玛门的表示 .
这引出了一个重要问题：一个通常用于模拟经典计算的抽象重写系统，究竟如何能够编码量子算子的表示?

首先要指出，尽管多路重写系统本身并非量子力学系统，但其因果结构具有非确定性。这源于其偏序（poset）结构。我们在这里所做的，实质上是利用这一偏序，对重写事件序列进行统计力学路径和计算。这是对相空间轨迹的标准路径积分的一种离散类比。我们计算的状态转移振幅，是在由一系列莱布尼茨字符串构成的路径系综上加权得到的。此外，通过固定多路系统的边权重来施加幺正性。酉性确保状态转移满足必要的概率约束。由此，便可以从带有装饰（指节点和边数据）的偏序集结构中获得有限维量子算子的完整表示。

当然，采用不同的边权重选择不会得到酉 S矩阵。我们可以找到一些解，使其能够在多路路径和上编码其他类型的矩阵。多路系统是一种符号因果网络，类似于神经网络，可以根据参数选择编码多种表示。我们的研究揭示了偏序集上的统计力学具有构建极其丰富的编码空间的可能性。

有趣的是，基于偏序集的因果结构已被广泛应用于量子引力研究，尤其是因果集理论 [11, 56] 和因果费米子形式体系[24, 26]。如果我们的形式体系能够补充上述量子引力理论，并使偏序集上的统计力学得以实际应用，那将十分引人注目；更具体地说，它可以用于确定时空上量子可观测量的局部代数。值得注意的是，近期也有研究报告了因果结构上统计力学的另一种实现方式 [38], ，其中的研究重点是经典热力学可观测量。我们的研究方法与该研究相辅相成。

总而言之，我们在此开展的研究进一步证明，从符号性或其他本质上非量子的基础出发考察量子理论是有价值的。对确定性 [34], 经典统计 [13, 39, 40, 43, 62], 且前几何 [3, 14, 15, 25, 57] 系统的研究，已成功提取出量子理论的关键特征。这也为更广泛地实现量子过程理论和类量子现象提供了思路（例如，参见 [3, 58, 59]）。有趣的是，基于幺半范畴结构和图示推理的量子过程理论非时空形式体系，也已应用于众多领域，从自然语言语义学 [16, 17] 到量子认知 [53]。但非时空量子理论形式体系的意义不止于应用：它们强烈指向一个更深层的问题，即对于物理系统以及语言或认知等抽象系统而言，“量子性”的纯粹本质究竟是什么；量子理论的传统代数结构本身是否具有前量子起源（参见 [3] 中的一种此类表述）。对于后一个问题，一种合理的观点是，有限维量子算子可以通过计算的统计力学来实现。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性声明

本研究相关代码可通过 GitHub 获取：

https://github.com/fsdundar/qstr-monads

参考资料

[1] Samson Abramsky 与 Bob Coecke（2009）：范畴量子力学。《量子逻辑与量子结构手册》2，第261–325页。[2] Xerxes D. Arsiwalla（2020）：沃尔夫勒姆模型的同伦基础。《*Wolfram* 社区》。可访问 https://community.wolfram.com/groups/-/m/t/2032113。[3] Xerxes D. Arsiwalla、David Chester 与 Louis H. Kauffman（2024）：经典与量子波函数的算子起源。《量子研究：数学与基础》11，第193–215页。[4] Xerxes D. Arsiwalla、Hatem Elshatlawy 与 Dean Rickles （2023）：前几何、形式语言与物理学的建构主义基础。《*arXiv* 预印本 *arXiv:2311.03973*》。[5] Xerxes D. Arsiwalla 与 Jonathan Gorard（2024）：由沃尔夫勒姆模型重写系统生成的作为同伦类型的前几何空间。《国际理论物理学杂志》63(4)，第83页。[6]Xerxes D Arsiwalla、Jonathan Gorard 与 Hatem Elshatlawy（2021）：多路（非确定性）重写系统中的同伦，作为 n重范畴。《*arXiv* 预印本 *arXiv:2105.10822*》。[7] Franz Baader 与 Tobias Nipkow（1998年）：项重写及其他。剑桥大学出版社。[8] Ralph Baierlein（1999年）：热物理学。剑桥大学出版社。[9] Julian Barbour（2003年）：莱布尼茨哲学的深刻且富有启发性的原则。《哈佛哲学评论》11，第45–58页。[10] Julian Barbour 与 Lee Smolin（1992年）：作为宇宙学量子理论基础的极值多样性。《*arXiv* 预印本 *hep-th/9203041*》。[11] Sam Baron 与 Baptiste Le Bihan（2025年）：因果集理论具有（强）因果性。《物理学基础》55(4)，第63页。

[12] Marc Bezem、Jan Willem Klop 与 Roel de Vrijer（2003年）：项重写系统。剑桥大学出版社。[13] Denys I Bondar、Renan Cabrera、Robert R Lompay、Misha Yu Ivanov 与 Herschel A Rabitz（2012）：超越量子力学与经典力学的操作动力学建模。《物理评论快报》109(19)，第190403页。[14] David Chester、Xerxes D Arsiwalla 与 Louis H Kauffman（2025年）：前子、辫拓扑与基本粒子的表示。《国际理论物理学杂志》64(221)。[15] David Chester、Xerxes D. Arsiwalla、Louis H. Kauffman、Michel Planat 与 Klee Irwin（2024年）：新的正则、协变且辛的哈密顿密度的量子化。《对称性》16(3)，第316页。[16] B Coecke、M Sadrzadeh 与 S Clark（2010）：组合分布式意义模型的数学基础。Lambek Festschirft，《语言学分析》特刊，2010年。[17] Bob Coecke（2021）：文本结构的数学。载于：Joachim Lambek：《数学、逻辑与语言学的交互》，施普林格，第181–217页。[18] Bob Coecke 与 Ross Duncan（2011）：相互作用的量子可观测量：范畴代数与图示法。《新物理学杂志》13(4)，第043016页。[19] Bob Coecke 与 Ross Duncan（2012）：教程：量子电路的图形演算。载于：可逆计算国际研讨会，施普林格，第1–13页。[20] Bob Coecke 与 Aleks Kissinger（2018年）：量子过程图示：量子理论与图示推理入门课程。载于：理论与图示应用国际会议，施普林格，第28–31页。[21] Nachum Dershowitz 与 Jean-Pierre Jouannaud（1990）：重写系统。载于：形式模型与语义，Elsevier，第243–320页。[22] Furkan Semih Dündar（2024年）：Wolfram 模型中的莱布尼茨思想案例研究。《物理学基础》54(3)，第43页。[23] Hatem Elshatlawy、Dean Rickles 与 Xerxes D Arsiwalla（2025年）：迈向广义观察者理论。《arXiv 预印本 arXiv:2504.16225》。[24] Felix Finster（2016）：因果费米子系统的连续统极限。186，施普林格。[25] Domenico Fiorenza、Christopher L Rogers 与 Urs Schreiber（2013）：高阶几何预量子化理论。《arXiv 预印本 arXiv:1304.0236》113，第114页。[26] Patrick Fischer 与 Claudio Francesco Paganini（2025年）：因果费米子系统：时空作为多体量子系统的关联网络。《经典与量子引力》。

[27] *Herbert Goldstein*、*Charles Poole* 与 *John Safko*（*2002*年）：《经典力学》第三版。*Addison Wesley*。[28] *Jonathan Gorard*（*2020*年）：*Wolfram* 模型的一些量子力学性质。《*Complex Systems*》*29(2)*。[29] *Jonathan Gorard*、*Manojna Namuduri* 与 *Xerxes D Arsiwalla*（*2020*年）：*ZX*演算与扩展超图重写系统 *I*：一种范畴量子信息论的多路方法。*arXiv* 预印本 *arXiv:2010.02752*。[30] *Jonathan Gorard*、*Manojna Namuduri* 与 *Xerxes D Arsiwalla*（*2021*年）：利用多路因果结构对字符串图进行快速自动推理。*arXiv* 预印本 *arXiv:2105.04057*。[31] *Jonathan Gorard*、*Manojna Namuduri* 与 *Xerxes D Arsiwalla*（*2021*年）：*ZX*演算与扩展 *Wolfram* 模型系统 *II*：快速图示推理及其在量子电路简化中的应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.15820*。[32] *Robert M Gray*（*2023*年）：《熵与信息论》。*Springer Science & Business Media*。*Https://ee.stanford.edu/ gray/it.pdf*。[33] *Gerard 't Hooft*（*2010*年）：经典元胞自动机与量子场论。《国际现代物理学杂志 *A*》*25(23)*，第*4385–4396*页。[34] *Gerard 't Hooft*（*2016*年）：《量子力学的元胞自动机解释》。*Springer Nature*。[35] *Gerard 't Hooft*（*2023*年）：相对论性有质量玻色子的本体论描述。*arXiv* 预印本 *arXiv:2306.09885*。[36] *Gérard Huet*（*1980*年）：合流归约：抽象性质及其在项重写系统中的应用。《美国计算机协会会刊》（*JACM*）*27(4)*，第*797–821*页。[37] *Aryan Iliat*、*Mark Byrd*、*Sahel Ashhab* 与 *Lian-Ao Wu*（*2025*年）：单个三能级量子比特门的物理动机分解。*arXiv:2506.17797*。[38]*Matthew Kafker* 与 *Xerxes D Arsiwalla*（*2025*年）：流体态、晶态和玻璃态中的硬球非平衡动力学。《物理评论 *E*》*112(034103)*，*doi:10.1103/471m-qjvl*。[39] *Ulf Klein*（*2018*年）：从 *Koopman–von Neumann* 理论到量子理论。《量子研究：数学与基础》*5(2)*，第*219–227*页。[40] *Ulf Klein*（*2020*年）：从概率力学到量子理论。《量子研究：数学与基础》*7(1)*，第*77–98*页。[41] *A Kreuzkamp* 与 *C Wetterich*（*2025*年）：随机概率自动机中的量子系统。《物理评论 *A*》*111(4)*，第*042213*页。[42]*Gottfried Wilhelm Leibniz*（*2005*年）：《形而上学谈》与《单子论》。*Dover*，编者：*Albert R. Chandler*，译者：*George R. Montromery*。

[43]Christian Pehle、Karlheinz Meier、Markus Oberthaler 与 Christof Wetterich（2018年）：利用人工神经网络模拟量子计算。arXiv 预印本 arXiv:1810.10335。[44] Boldizsár Poór、Razin A Shaikh 与 Quanlong Wang（2024年）：ZX演算对有限维希尔伯特空间是完备的。arXiv:2405.10896。[45] 单值基础计划（2013年）：同伦类型论：数学的单值基础。arXiv 预印本 arXiv:1308.0729。[46] Dean Rickles、Xerxes D Arsiwalla 与 Hatem Elshatlawy（2025年）：量子引力与计算：信息、前几何与数字物理学。泰勒与弗朗西斯。[47] Dean Rickles、Hatem Elshatlawy 与 Xerxes D. Arsiwalla（2023年）：规则学：连接计算、观察者与物理定律。arXiv 预印本 arXiv:2308.16068。[48] Gonzalo Rodriguez-Pereyra（2025年）：不可分辨者同一性。载于 Edward N. Zalta 与 Uri Nodelman 编：《斯坦福哲学百科全书》2025年夏季版，形而上学研究实验室，斯坦福大学。[49] Jun John Sakurai 与 Jim Napolitano（2011年）：《现代量子力学》，国际版。培生。[50] Urs Schreiber（2013年）：凝聚无穷拓扑斯中的微分上同调。arXiv 预印本 arXiv:1310.7930。[51] C. E. Shannon（1948年）：通信的数学理论。《贝尔系统技术期刊》27(3)，第379–423页，doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x。[52] Michael Shulman（2021年）：同伦类型论：空间逻辑。《数学中的新空间：形式与概念反思》。Mathieu Anel 与 Gabriel Catren 编，1，第322–404页。[53] Camilo M Signorelli 与 Xerxes D Arsiwalla（2018年）：人工智能的道德困境：关于组合量子认知应用的立场论文。载于：《国际量子交互研讨会》，施普林格，第123–138页。[54] Lee Smolin（2021年）：视域、多样性与量子力学。arXiv:2105.03539。[55] Lee Smolin（2022年）：视域、多样性与天球。arXiv:2202.00594。[56] Sumati Surya（2019年）：量子引力的因果集方法。《相对论活评论》22(1)，第5页。[57]Alireza Tavanfar（2018年）：全息量子超网络理论。arXiv 预印本 arXiv:1801.05286。[58] Alireza Tavanfar、Sahar Alipour 与 Ali T Rezakhani（2025年）：量子力学是否孕育出更宏大、更复杂的量子理论？经验中心量子理论与量子理论互作组的论证。《宇宙》11(5)，第162页。

[59] Alireza Tavanfar、Aliasghar Parvizi 和 Marco Pezzutto（2023年）：由相互作用量子记忆驱动的幺正演化：利用自身状态历史自我引导的封闭量子系统。*Quantum*7，第 1007 页。[60] Quanlong Wang（2021年）：*Qufinite ZX* 演算：量子比特 *ZX* 演算的统一框架。*arXiv:2104.06429*。[61] Christof Wetterich（2022年）：势中的量子粒子的概率细胞自动机。*arXiv* 预印本 *arXiv:2211.17034*。[62] Christof Wetterich（2024年）：概率世界 *II*：从经典统计中得出的量子力学。*arXiv* 预印本 *arXiv:2408.06379*。[63] Stephen Wolfram（2002年）：一种新型科学。Wolfram Media。[64] Stephen Wolfram（2020年）：一类有潜力描述基础物理学的模型。 *Complex Systems*，第 107–536 页。