arXiv:2512.20597v1 [math.GT] 23 Dec 2025

彩色环面结纽结同调的双重分次指数增长

LUKE CONNERS

Abstract. 我们为任意链环构造约化 HOMFLY 同调的不变量，其中约化可取在任意颜色的分支上，并证明了该不变量与未约化 HOMFLY 同调之间的一些结构性质。结合先前的结果，我们得到彩色正环面纽结及某些彩色正环面链环的约化 HOMFLY 同调的递归公式。我们证明，遗忘量子分次后，正环面纽结所得到的双重分次不变量随颜色增长恰好呈指数增长，从而解决了 Gorsky–Gukov– Sto˘si´c 于 2013 年提出的猜想。最后，我们通过许多实例验证了 Gukov–Nawata–Saberi–Sto˘si´c–Su-lkowski 的“颜色平移”猜想。

Contents

1. 引言 1
2. 背景 3. 带色 HOMFLY 同调 4. 环面链环 参考文献 1
5
10
26
33

1. Introduction

1.1. 背景与结果陈述。 在 [KR08b], 中，Khovanov 和 Rozansky 定义了一种链环的三重分级同调不变量，称为*HOMFLY* 同调，它是著名 HOMFLY 多项式的范畴化。颇为出人意料的是，Dunfield–Gukov–Rasmussen 在 [DGR06]中猜想了这一不变量的存在，早于其严格构造。从这些作者的视角来看，HOMFLY 同调之所以存在，正是因为现有各种 $\mathfrak{sl}(N)$链环同调（同样由 Khovanov–Rozansky 提出 [KR08a]）背后存在严谨的结构，这一点为其提供了有力佐证。DGR 猜想远不止预测 HOMFLY 同调的存在，还预言了丰富的结构性质，推动了一个蓬勃发展的研究领域，至今已逾 20 年。特别值得一提的是，通往 $\mathfrak{gl}(N)$同调 [Ras15],、通往“对称的” $\mathfrak{gl}(-N)$同调 [RW22, RW20, QRS18], 以及（最近）通往纽结 Floer 同调 [BPRW25]的谱序列；还有“镜像对称”猜想，该猜想由 Oblomkov–Rozansky 和 Gorsky–Hogancamp–Mellit 借助与希尔伯特概形代数几何之间深刻而出人意料的联系得以解决 [GHM21, GH22, OR18, OR19, OR20, GNR21]。即使 20 年后，确定这些谱序列何时退化并揭示这一几何构造的深层内涵，仍是活跃的研究领域。

HOMFLY 同调有若干种推广，可得到带色链环的不变量，其中每个链环分支都标记一个正整数。在 Mackaay–Sto˘si´c– Vaz 和 Webster–Williamson [MSV11, WW17], 对其进行严格构造之后，Gukov–Sto˘si´c 也在 [GS12]中对这些不变量的许多结构性质提出了猜想。为了提出这些猜想，作者们借助链环同调的物理诠释，通过弦理论所产生的 BPS 态的计数几何，

这一理论由 Gukov–Schwarz–Vafa 在 [GSV05]中建立。这种物理联系已被证明是一种尤为丰富的视角，Gorsky–Gukov–Stošić 和 Gukov–Nawata–Saberi–Stošić–Su-lkowski 在 [GGS18, GNS+16]中围绕带色 HOMFLY 同调提出了大量新猜想。为方便起见，我们将这些猜想称为GGS 和$GNSSS$ 猜想。

本文旨在研究 GGS 和 GNSSS 猜想。为了表述这些猜想，GGS 和 GNSSS 依赖于一种猜想中的约化HOMFLY 同调；这种同调通过消去一个多项式代数的作用而得到，该代数自然地与链环上的点相关联。我们的首要成果之一是为任意链环构造约化彩色 HOMFLY 同调不变量。

定理 1.1。给定任意一个分支标记为 $k_1,\dots,k_d$的着色链环 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\sqcup\cdots\sqcup\mathcal{L}_d$，以及任意一个位于任意分支上的点 $p\in\mathcal{L}_i$，存在一种约化彩色 HOMFLY 同调 $HHH(\mathcal{L}(p))$，它与普通（未约化）彩色 HOMFLY 同调 $\overline{HHH}(\mathcal{L})$ 之间的关系为

$$HHH(\mathcal{L})\cong HHH(\textstyle\bigcirc_{k_i})\otimes\overline{HHH}(\mathcal{L}(p)). \tag{1.1}$$

定理 1.1 将在下文以定理 3.44 和 3.50 的形式给出。Wedrich 已取得部分进展：他在 [Wed19], 中为非分裂链环构造了一个不变量，即在最小颜色的分支处约化的彩色 HOMFLY 同调版本（但未证明 (1.1)）。在这些限制条件下，我们的构造与 Wedrich 的构造一致。我们的证明方法大体上与 Wedrich 的方法一致，只是将矩阵分解的语言转换为导出范畴的语言，并采用奇异 Soergel 双模的一套非标准生成元与关系，同时研究不同分次下导出范畴与同伦范畴之间微妙的相互作用。

为陈述下一个结果，我们将三重分次向量空间 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 的维数记录为三个变量 A、Q、T 的 Laurent 级数。对于专家，我们指出，这些分别是几何 Hochschild、量子和同调分次；它们与代数分次（用小写字母表示）之间的关系为 $A=aq^{-2}$,$Q=q^2$, $T=t^2q^{-2}$。我们证明了 k-颜色正（m、n）环面纽结 $T(m,n)_k$ 满足某种精细指数增长 性质；这一性质最初由 [GGS18] 猜想提出。

定理 1.2. $T(m,n)_k$ 的约化 HOMFLY 同调满足

$$\dim\left(\overline{HHH}\left(T(m,n)_k(p)\right)\right)\Big|_{Q=1}=\left(\dim\left(\overline{HHH}\left(T(m,n)_1(p)\right)\right)\Big|_{Q=1}\right)^k \tag{1.2}$$

定理 1.2 将在下文作为定理 4.4 出现。这是对 Wedrich 在 [Wed19], 中另一结果的精细化；他在那里为任意纽结建立了如下形式的未分次总维数的一般上界

$$\dim\left(\overline{HHH}(\mathcal{K}_k(p))\right)\Big|_{A=Q=T=1}\geq\left(\dim\left(\overline{HHH}(\mathcal{K}_1(p))\right)\Big|_{A=Q=T=1}\right)^k$$

对于任意纽结 $\mathcal{K}$。GGS 还预言了（1.2）的三重分次、甚至四重分次精细化，这依赖于经过修正的 Q-分次，以及将 T-分次拆分为两个分支的猜想。在更早的工作中， [Wed16], Wedrich 还针对二分支有理缠结，在相对于某个对象生成集的庞加莱多项式层面证明了（1.2）的三重分次类比。我们在此不讨论这些推广，不过我们的方法或许可以进一步发展为三重分次版本。我们将在下文第1.2节讨论这种方法。

我们在此讨论的第三个也是最后一个猜想，涉及当 p 位于 $\mathcal{L}$ 的一个平凡结分支 $\mathcal{L}_i$ 上时，$HHH(\mathcal{L}(p))$ 的行为。GNSSS 猜想，在这种情形下，约化同调可分解为同调块，且该分解与 $\mathcal{L}_i$ 的颜色 k_i 无关，并在 k_i 变化时满足某些颜色平移性质。

猜想 1.3 ([GNS+16]). 设 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\sqcup\cdots\sqcup\mathcal{L}_d$ 是一个链环，满足 $\mathcal{L}_1\sim\bigcirc$，并且假设 $p\in\mathcal{L}_1$。对于任意一组颜色 $k_1,\dots,k_d$，记相应着色链环在 p 处约化的 HHH 的分次维数为

着色链环记为 $\mathcal{P}_{k_1,\dots,k_d}(A,Q,T)$。那么存在某个多项式 $f_{k_2,\dots,k_d}(A,Q,T,x)$，它与 k_1 无关，并满足

$$\mathcal{P}_{k_1,\dots,k_d}(A,Q,T) = f_{k_2,\dots,k_d}(A,Q,T,x=Q^{k_1}) \tag{1.3}$$

对所有 $k_1 \geq 0$（其中这里 $\mathcal{P}_{0,\ k_2,\ \dots,\ k_d} := \dim(HHH(\mathcal{L}-\mathcal{L}_1))$）。

在着色 HOMFLY 多项式的去范畴化层面，Wedrich 在 [Wed16] 中证明了猜想 1.3：首先计算 $\mathcal{L}-\mathcal{L}_1$ 在环带的 HOMFLY skein 中的像，然后与平凡结分支 $\mathcal{L}_1$配对。尽管这一技术在范畴化层面并不可用，我们仍对正环面链环 $T(2,\ 2n)$ 和 $T(3,\ 3)$ 在广泛的颜色范围内显式验证了 (1.3)，在许多情况下可达到 $k_1 = 90$。这是首次对任何非平凡链环确认猜想 1.3；事实上，即便是计算 (1.3) 的左侧，也需要一个版本的定理 1.1，以便在非最小颜色下进行约化。

1.2. **计算**。我们通过显式计算列着色正环面结的约化同调来证明定理 1.2。利用定理 1.1，只需计算未约化同调；我们已在先前的工作 [Con25]中完成了这项工作。在那里，我们采用了类似的比较定理，将问题归结为计算一个更大的不变量，即所谓的“y-化列投影子着色 HOMFLY 同调”。我们在 [Con24b], 中直接计算了这一不变量，并推广了 Elias–Hogancamp–Mellit 在 [EH19, HM19]中的先前工作。

所得结果是 $\dim\left(HHH(T(m,\ n)_k(p))\right)$ 的显式递归公式；具体表述见定理 4.2。事实上，我们的公式足以计算所有至多有一个非平凡着色分支的正环面链环的带色 HOMFLY 同调。该公式非常适合用计算机求值，我们已在 SageMath 中实现了一个程序来计算这些不变量 [Con24a]。借助此程序，我们可以进行大规模计算；例如，只需几秒钟便可计算 3 着色 $T(4,\ 7)$（总维数为 1，685，159）和 1 着色 $T(13,\ 14)$（维数：71，039，373）的同调。该程序可从作者的网站免费获取，我们欢迎大家进一步探索！

我们关于猜想 1.3 的全部证据都直接来自这些计算。另一方面，定理 1.2 源于对定理 4.2 中递归的细致分析。在设定 $Q=1$ 并谨慎处理形如 $(1-Q)^{-1}$ 的分母后，这一递归得到了极大简化；参见命题 4.6。我们直接证明，当最大公因数$(m,\ n) = 1$ 时，所得递归呈现指数增长。为此，我们再次从根本上利用了这样一个事实：我们的递归计算的是更大的投影算子着色同调。后一个不变量部分通过缆化实现着色，而我们证明，该递归以一种精确的方式限制到相应缆的每个链环分支上。

1.3. **未来方向**。许多 GGS 和 GNSSS 猜想仍有待解决。下面列出一些与本文工作相关的猜想，顺序不分先后。

1.3.1. 颜色平移。猜想 1.3 在一般情形下仍然远未解决。特别是，研究这一行为是否适用于非环面链环将极具意义，因为即使是计算这些链环的平凡着色的 HOMFLY 同调，也仍然困难到几乎无法完成。GNSSS 还猜想，他们的所有微分都作用于每个同调块内部，从而极大地简化所得的谱序列。

即使对于环面链环，这个猜想也可能带来重大影响。假设我们知道颜色平移猜想成立。通过计算具有一个非平凡着色分支的 $T(n,\ dn)$ 在某些较小颜色下的着色同调，便可以推导出每个同调块的一般公式。已知总同调会在 $d \to \infty$ 时稳定下来，也可以设想每个同调块也会稳定下来。如果已知 $\mathfrak{gl}(N)$ 微分 d_N 保留每个同调

块，那么我们就能进一步限制哪些项可能相消，从而得到环面纽结的稳定$\mathfrak{gl}(N)$同调。计算这一同调仍是一项尚待解决的重要问题；例如，可参见 Ballinger–Gorsky–Hogancamp–Wang 的近期工作 [BGHW25]。

1.3.2. 任意颜色的约化同调。 本文讨论的是列着色同调，其中链环分支携带正整数 k ，这些整数对应于 $\mathfrak{sl}(N)$ 的稳定表示论中的分拆 (1^k)。据我们所知，目前尚未构造出适用于其他分拆的约化彩色 HOMFLY 同调。针对这些颜色的大多数非约化着色 HOMFLY 构造，都借助了 Cautis [Cau17]以及 Elias–Hogancamp [EH17]的范畴化投影算子；这些理论的汇总见 [Con25] 的引言。本文研究的是“内禀的”列着色同调，同时也存在这一不变量的“投影子着色”版本，而定理 1.1 可以作相应修改，将 HHH 与该版本联系起来。我们预计一般情况下也存在类似关系。对于非矩形颜色，这一点尤其值得关注，因为 GGS 和 GNSSS 通常只考虑矩形情形。

1.3.3. 镜像对称。 GGS 猜想，对于由分拆 λ 着色的纽结，其约化带色 HOMFLY 同调与由其转置 λ^t 着色的纽结的约化带色 HOMFLY 同调，应当通过交换 Q 和 T 分次而相互关联。这将使 Liu 和 Peng [LP09, LP11] 提出的着色 HOMFLY 多项式一个著名对称性得到范畴化。这种现象令人惊讶，因为在 HOMFLY 同调的构造中， Q 和 T 分次所起的作用截然不同。对于无色 HOMFLY 同调（其中 $\lambda = \square$ 在转置下保持不变），Oblomkov–Rozansky 已对纽结解决了这一问题，Gorsky–Hogancamp–Mellit 则对链环解决了这一问题，详见第 1.1 节。在着色情形下，作者先前的工作 [Con24b]，证明了正环面纽结的行着色同调和列着色同调满足镜像对称，但在这一情形之外尚无相关结果。尤其令人感兴趣的是，这一结果是否适用于矩形颜色之外的情形。

1.3.4. 超群微分。 DGR 猜想包含一族由 Z 索引的微分d_N ，作用于无色 HOMFLY 同调，并诱导出第 1.1 节所述的谱序列。GGS 猜想之一是将这一族微分推广为由 Z × Z 索引的一族微分 $d_{m|n}$ ，作用于带色 HOMFLY 同调。预期这些微分也会再次诱导谱序列，收敛至 $\mathfrak{gl}(m|n)$ 同调；这是一族猜想中的不变量，旨在将 $\mathfrak{gl}(m|n)$ Reshetikhin–Turaev 链环多项式范畴化。即使仅在这一框架下理解 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 同调，也会极具意义，因为人们普遍预期它与纽结 Floer 同调一致。关于这一方向的近期结果，参见[BPRW25]。

1.3.5. 四重分次同调。 [GGS18]的核心猜想是带色 HOMFLY 同调存在一种 4th 分次，它将同调 t分次细化为彼此不同的 t_c (c 意为“列”)分次和t_r (r 意为“行”)分次。几乎所有 GGS 和 GNSSS 猜想都存在更简洁或更一般的四重分次版本，因此这样的构造将开启无限可能。尽管如此，这一猜想仍远未解决。

1.4. **组织结构**。 在第 2 节中，我们回顾构造带色 HOMFLY 同调所需的同调代数。这些内容大多已广为人知；其中最有趣的结果是推论 2.10，它讨论了 $K^b(D^b(\mathrm{SSBim}))$ 中导出范畴与同伦范畴之间的相互作用。我们在第 3 节中构造 HHH 并证明定理 1.1。如上所述，我们采用一种通过生成元与关系给出奇异 Soergel 双模的非标准表示法，这种表示法本身或许也值得关注；详情见定义 3.7。最后，在第 4 节中，我们专门研究正环面链环的情形，证明定理 1.2，并为猜想 1.3 提供一些佐证。

1.5. **致谢**。 我们感谢 William Ballinger、Anna Beliakova、Elijah Bodish、Ben Elias、Eugene Gorsky、Matt Hogancamp、Lukas Lewark、David Rose、Paul Wedrich、Arno Wildi 和 Haihan Wu 的宝贵讨论。特别感谢 Josh Wang，他最先让我们注意到定理 1.2，并建议我们尝试在计算机上实现定理 4.2。

在准备这项工作期间，作者获得了美国国家科学基金会 CAREER 奖助金 DMS-2144463以及西蒙斯合作项目“低维拓扑中的新结构”的部分资助。

1.6. **约定**。 文献中存在各种整体归一化约定，它们会使 $HHH(\mathcal{L})$ 的值相差某个单项式 $a^i t^j q^k$。由于我们大量依赖涉及有理函数的计算机代数，在比较不同不变量时，要追踪这些绝对偏移很快就会变得非常困难。鉴于此，本文中所有涉及链环不变量的陈述都应视为在某种此类相对偏移下成立。

在第 4 节中，我们经常使用几何 变量 $A := aq^{-2}$, $Q := q^2$, $T := t^2q^{-2}$。在定理 4.2 中，我们也使用量子阶乘 $[k]! = [k][k-1]\dots[2][1]$，其中 $[j] := q^{j-1} + q^{j-3} + \cdots + q^{-j+3} + q^{-j+1}$。

2. Background

2.1. **Koszul 复形**。 本节回顾同调代数中的一些结果。这些内容大多相当标准，专家可以略过。主要的新意在于推论 2.10，我们将在其中证明两个不同同调方向上的 Koszul 复形之间的关系。

记号 2.1。 给定一个分次环 R，用 R –Mod 表示分次 R-模及其（次数为 0 的）分次 R-模同态所构成的范畴。我们将 R 上的分次群记为 Z_q，并用 q的幂乘法地表示元素的次数。我们也用 q 的幂表示 $R-$ Mod 上的分次移位函子。例如，给定一个模 $M \in R$ –Mod，模 q^3M 的分次分支为 $(q^3M)_i = M_{i-3}$。我们常将此分次称为量子分次 或内部度。

我们用 $D^b(R$ –Mod) 表示分次 R-模的有界导出范畴。我们将导出同调分次群记为 Z_a，并再次用 a的幂乘法地表示次数和分次移位函子。我们常将此分次称为*Hochschild* 分次 或导出分次。我们用记号 $C \cong_{q.i.} C'$ 表示 $D^b(R$–Mod) 中的同构（即拟同构）。

最后，我们用 $K^b(D^b(R-\text{Mod}))$ 表示 $D^b(R$ –Mod) 的有界同伦范畴。该范畴具有一个新的同调分次群，我们将其记为 Z_t。类似地，我们将使用 t 的幂来表示元素的次数和分次移位函子。我们称 Z_t 分次为 同调分次。我们将在 $K^b(D^b(R$ –Mod)) 中使用记号 $C \simeq C'$ 表示同构（即同伦等价）。

定义 2.2。 固定一个分次环 R、一个复形 $C \in D^b(R$ –Mod) 以及一个齐次元素序列（r_1, ..., r_n） $\in R$，其次数为 $\deg(x_i) = q^{d_i}$。对于每个 $1 \le i \le n$，令 θ_i 为一个次数为 $a^{-1}q^{d_i}$ 的形式变量。则关于 C 中元素 r_1, ..., r_n 的 *Hochschild Koszul* 复形 是复形

$$K_a(C; r_1, \dots, r_n) := \Big(C \otimes \bigwedge[\theta_1, \dots, \theta_n], d_C \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes \theta_i^\vee\Big) \in D^b(R - \text{Mod}).$$

现在固定一个复形 $C \in K^b(D^b(R$ –Mod))。对于每个 $1 \le i \le n$，令 ξ_i 为一个次数为$t^{-1}q^{d_i}$的形式变量。那么，关于 C中元素 r_1、.....、r_n的同调 *Koszul* 复形是复形

$$K_t(C; r_1, \dots, r_n) := \Big(C \otimes \bigwedge[\xi_1, \dots, \xi_n], d_C \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} r_i \otimes \theta_i^\vee\Big) \in K^b(D^b(R - \text{Mod})).$$

备注 2.3。 值得指出的是，Koszul复形保持拟同构和同伦等价，因此定义 2.2 延拓后可在范畴 $D^b(R\text{–Mod})$ 和$K^b(D^b(R-\text{Mod}))$ 上产生函子。例如，假设我们在 $D^b(R\text{–Mod})$ 中有一个从 C 到 C' 的态射。那么存在一个形如以下的屋顶

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ C & & C' \end{array}$$

其中 f 是拟同构。对一个次数为 d 的元素 $r \in R$ 应用 $K_a(-;r)$，我们得到如下形式的屋顶图

$$\begin{array}{ccccccc} & & \theta D & \xrightarrow{r} & D & & \\ & {\scriptstyle -f}\swarrow & & {\scriptstyle f}\swarrow\quad\searrow{\scriptstyle -g} & & \searrow{\scriptstyle g} & \\ \theta C & \xrightarrow{r} & C & & \theta C' & \xrightarrow{r} & C' \end{array}$$

要使这个屋顶图表示从 $D^b(R\text{–Mod})$ 中的 $K_a(C;\, r)$ 到 $K_a(C';\, r)$ 的态射，我们需要验证那些向左的对角箭头构成从 $K_a(D;r)$ 到 $K_a(C;\, r)$ 的拟同构。这些箭头显然构成一个链映射 $K_a(f)$（因为 f 是 R-线性的），并且 $K_a(f)$ 是拟同构，当且仅当 Cone($K_a(f)$) 无环。我们可以将 Cone($K_a(f)$) 写成如下复形

$$\begin{array}{ccc} a^{-1}\theta D & \xrightarrow{r} & a^{-1}D \\ {\scriptstyle -f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \theta C & \xrightarrow{r} & C \end{array}$$

这正是 r 对映射锥 Cone(f) 的作用所对应的映射锥，因此只需证明这个作用是拟同构。但由于 f 是拟同构，Cone(f) 本身无环，所以 Cone(f) 上的任意自同态都是拟同构。

当序列 $(r_1, \dots, r_n)$ 是正则序列时，Koszul复形对于构造投射分解特别有用，下面我们将回顾这一点。

定义 2.4. 若序列 $(r_1, \dots, r_n) \subset R$ 满足：对每个 $1 \le i \le n$， r_i 在 $R/\langle r_1, \dots, r_{i-1}\rangle$中都不是零因子，则称该序列为正则的 。

命题 2.5. 取交换环 R及正则序列 $\{r_1, \dots, r_n\} \subset R$，并令 $S{:=}R/\langle r_1, \dots, r_n\rangle$。那么，对于每个复形 $C \in D^b(R-\text{Mod})$，都存在一个拟同构

$$K_a(C; r_1, \dots, r_n) \cong_{qi} C \overset{L}{\otimes}_R S \in D^b(R-\text{Mod}).$$

L L证明。 </style>这基本上就是 的定义。为说明这一点，回顾一下，可以通过先取 -模 的投射分解来计算。根据标准的同调代数，我们可以取 *Koszul*分解 $(;, \dots, r_n) \cong_{qi} S \in D^b(R-\text{Mod})$。与 C取张量积后，恰好得到 $K_a(C; r_1, \dots, r_n)$。□

一般来说，序列 $(r_1, \dots, r_n)$ 是否为正则序列可能取决于元素的顺序。幸运的是，关于分次环的以下标准结果使我们无需处理这种歧义；例如参见 [Mat80] 中的定理27及其后续评注。

引理 2.6. 设 $R = \bigoplus_{i\ge 0} R_i$ 是一个非负分次环，并且 $(r_1, \dots, r_n)$ 是 R 中由正次数齐次元素组成的正则序列。那么，$(r_1, \dots, r_n)$ 的任意置换都是 R 中的正则序列。

接下来，我们介绍用于处理 Koszul 复形的主要技术工具。下文中的许多结论在 Hochschild 情形和同调情形下都成立。在这种情况下，我们不区分二者，例如用 $K(C;\ r)$ 表示复形 $K_a(C;r)$（其中 $C \in D^b(R-\mathrm{Mod})$），或复形 $K_t(C;r)$（其中 $C \in K^b(D^b(R-\mathrm{Mod}))$。

引理 2.7. 设复形 C，并假设 r 和 r' 在 C 上的作用通过某个满足 $[d_C, h] = r - r'$的同伦 h 同伦。那么映射

$$\Psi := 1 \otimes 1 + h \otimes \theta^\vee \colon K(C;r) \to K(C;r')$$

是一个链同构。

证明. 直接计算。 □

推论 2.8. 设 $s_1, s_2, r \in R$ 为齐次元素，满足 $\deg(rs_1) = \deg(s_2)$。那么对于任意复形 C，我们有一个链同构 $K(C; s_1, s_2) \cong K(C;\ s_1, rs_1 + s_2)$。

证明. 根据定义，我们有一个链同构 $K(C;\ s_1, s_2) \cong K(K(C; s_1);\ s_2)$。 s_2和 $rs_1 + s_2$ 在 $K(C; s_1)$上的作用通过同伦 $r\theta_1$是零伦，而该同伦满足 $[d, r\theta_1] = rs_1$。所需的同构立即由引理 2.7 得出。□

最后，我们介绍一些有用的工具，用于关联同调方向和Hochschild方向上的 Koszul 复形。

命题 2.9. 固定一个交换环 S，并令 $R = S[x]$。那么对于每个复形 $C \in K^b(D^b(R\text{–Mod}))$，我们有

$$C \overset{L}{\otimes}_R S \simeq \mathrm{Cone}_t(x) \in K^b(D^b(S-\mathrm{Mod})).$$

这里， S 通过沿商映射 $\pi\colon\ R \to R/\langle x\rangle \cong S$ 扩张标量，被视为一个 R-模；并且我们默认通过沿包含映射 $\iota\colon\ S \hookrightarrow R$ 限制标量，将 $K^b(D^b(R\text{–Mod})) \hookrightarrow K^b(D^b(S\text{–Mod}))$ 纳入其中。

证明。 我们将 [Wed19, 引理 3.39 和 [Ras15],引理 5.15 中给出的类似命题的证明，从矩阵分解的情形改写到导出范畴的情形。

取一个由自由 R-模构成的 C 的分解（在导出层次 $D^b(R\text{–Mod})$）；于是我们可以通过通常的未导出张量积 $C^f \otimes_R S$ 计算 $C \overset{L}{\otimes}_R S$。我们也用这个分解来构造 $\mathrm{Cone}_t(x)$，即

$$\mathrm{Cone}_t(x) := t^{-1}C^f \xrightarrow{\ x\ } C^f.$$

现在，由于 C^f 的每个链模都是 R 上的自由模， C^f 按 x-次数具有递减滤过 $C^f = C_0^f \supset C_1^f \supset \ldots$，而 $C^f \otimes_R S$ 正是关于此滤过的商 C_0^f/C_1^f。乘以 x 将 C_0^f 映到 C_1^f 上，且此映射是一个 S-线性同构。特别地，我们可以沿着 $\mathrm{Cone}_t(x)$ 在 $K^b(D^b(S\text{–Mod}))$ 中微分的这一分支进行高斯消去，剩下的恰好是（未移位的）商 C_0^f/C_1^f。□

结合命题 2.5 和 2.9 可得一个有用的推论。

推论 2.10. 取一个交换环 S，并令 $R = S[x_1, \ldots, x_n]$。那么，对于每个复形$C \in K^b(D^b(R\text{–Mod}))$，都有

$$K_a(C; x_1, \ldots, x_n) \simeq K_t(C; x_1, \ldots, x_n) \in K^b(D^b(S-\mathrm{Mod})).$$

证明. 由于（$x_1, \dots, x_n$）是 R 中的正则序列，我们可以应用命题 2.5，得到每个同调次数为 i 的复形 $C^i \in D^b(R-\text{Mod})$ 上的拟同构 $K_a(C^i; x_1, \dots, x_n) \cong_{qi} C^i \overset{L}{\otimes}_R S$ in $D^b(S-\text{Mod})$。这些拟同构组装起来，构成一个同伦等价$K_a(C; x_1, \dots, x_n) \simeq C \overset{L}{\otimes}_R S$ in $K^b(D^b(S-\text{Mod}))$。结论直接由命题 2.9 得出。□

2.2. **对称多项式**。

定义 2.11. 设 N 为一个非负整数。N 的合成 是一个（可以为空的）正整数有序序列$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$，满足 $\sum_{i=1}^n a_i = N$。我们用$\mathbf{a} \vdash N$表示$\mathbf{a}$ 是 N的一个合成。

定义 2.12. 设 X 是由形式变量组成的字母表 $\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$，并将多项式代数 $R[\mathrm{X}]$ 视为一个 $\mathbb{Z}_q$-分次环，其中令 $\deg(x_i) = q^2$。对称群 $\mathfrak{S}_N$ 通过置换变量自然地作用在 $R[\mathrm{X}]$ 上。给定一个合成$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \vdash N$，我们将 $R[\mathrm{X}]$ 在抛物子群 $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}} := \mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_n}$ of$\mathfrak{S}_N$ 作用下的不变子代数记为 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathrm{X})$。

例 2.13. 当 $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1) \vdash N$ 时，抛物子群 $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}}$ 是平凡的，并且 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathrm{X}) = R[\mathrm{X}]$。

例 2.14. 当 $\mathbf{a} = (N) \vdash N$, $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}} = \mathfrak{S}_N$ 时，$\mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathrm{X})$ 是 X 中对称多项式构成的环，我们将其记为 Sym(X)。

我们将用到 Sym(X) 的几个特殊生成集。

定义 2.15. 对于每个 $i \geq 0$，i^{th} 初等对称多项式 $e_i(\mathrm{X}) \in \mathrm{Sym}(\mathrm{X})$ 是字母表 X 中所有次数为 i 的无平方因子单项式之和。i^{th} 完全对称多项式 $h_i(\mathrm{X}) \in \mathrm{Sym}(\mathrm{X})$ 是字母表 X 中所有次数为 i 的单项式之和。

命题 2.16（对称多项式基本定理）。设 X 是一个大小为N的字母表。那么 $\mathrm{Sym}(\mathrm{A}) \cong R[e_1(\mathrm{X}) \dots, e_N(X)] \cong R[h_1(\mathrm{X}) \dots, h_N(\mathrm{X})]$。

对于大小为 N 的字母表 X，$e_i(\mathrm{X}) = 0$ 对所有 $i > N$ 都成立。尽管如此，我们仍会发现，利用以下结果人为地扩展 Sym(X)，使其包含这些元素，是很有用的。

推论 2.17. 设 A、B 是两个大小为 $|\mathrm{A}| = m \leq n = |\mathrm{B}|$ 的字母表。令

$$\mathcal{I} := \langle e_i(\mathbb{B}) \mid m < i \leq n \rangle \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{B}).$$

那么存在一个代数同构 $\mathrm{Sym}(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Sym}(\mathrm{B})/\mathcal{I}$，它将 $e_i(\mathrm{A})$ 映到 (等价类 $e_i(\mathrm{B})$)。

给定一个 任意的合成 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \vdash N$，我们有一个分次代数的同构 as

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_n) \cong \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathbb{X}),$$

其中，对于每个 i，X_i 是一个大小为 a_i 的字母表。将 X 看作字母表 X_i 的并集时，此同构将形如 $e_{k_1}(\mathrm{X}_1) \otimes \cdots \otimes e_{k_n}(\mathrm{X}_n)$ 的纯张量映到乘积 $\prod_{i=1}^n e_{k_i}(\mathrm{X}_i)$。为强调这一分解，我们常采用以下记号

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1 | \mathbb{X}_2 | \dots | \mathbb{X}_n) := \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathbb{X}).$$

更一般地，给定大小分别为 m 和 n 的两个（不一定不相交的）字母表 A 和 B，我们常记 Sym(A|B) 表示部分对称多项式环 $\mathrm{Sym}^{(m,n)}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$。在这个环中，除了分别关于任一字母表的通常初等对称多项式和完全对称多项式之外，还有

一些非常有用的此类线性组合，通常称为字母表线性组合的初等对称多项式。这里只回顾这一极其有用的形式体系中我们所需的一小部分；更全面的介绍参见 [HRW24] 的第 §2 节。

定义 2.18. 给定两个（不一定不相交的）字母表 A，B，对每个 $i \geq 0$，我们定义

$$e_i(\mathbb{A}+\mathbb{B}) := \sum_{j+k=i} e_j(\mathbb{A})e_k(\mathbb{B}) \in \mathrm{Sym}(\mathbb{A}|\mathbb{B});$$
$$e_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) := \sum_{j+k=i} (-1)^k e_j(\mathbb{A})h_k(\mathbb{B}) \in \mathrm{Sym}(\mathbb{A}|\mathbb{B}).$$

我们将频繁用到以下消去性质：

命题 2.19. 设 A、B、C 是三个（不一定不相交的）字母表。那么对每个 $k \geq 0$，有

$$\langle e_i(\mathbb{A}-\mathbb{C}) - e_i(\mathbb{B}-\mathbb{C}) | 1 \leq i \leq k\rangle = \langle e_i(\mathbb{A}) - e_i(\mathbb{B}) | 1 \leq i \leq k\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathbb{A}|\mathbb{B}|\mathbb{C}).$$

证明。 由归纳法，只需证明

$$((e_i(\mathbb{A}-\mathbb{C}) - e_i(\mathbb{B}-\mathbb{C})) - (e_i(\mathbb{A}) - e_i(\mathbb{B})) \in \langle e_j(\mathbb{A}) - e_j(\mathbb{B}) | 1 \leq j < i\rangle$$

对每个 $i \geq 1$。我们通过直接计算来证明：

$$\begin{aligned}(e_i(\mathbb{A}-\mathbb{C}) - e_i(\mathbb{B}-\mathbb{C})) &= \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}e_j(\mathbb{A})h_{i-j}(\mathbb{C})\right) - \left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}e_j(\mathbb{B})h_{i-j}(\mathbb{C})\right)\\ &= (e_i(\mathbb{A}) - e_i(\mathbb{C})) + \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}h_{i-j}(\mathbb{C})\left(e_j(\mathbb{A}) - e_j(\mathbb{B})\right).\end{aligned}$$

□

推论 2.20. 设 A、B、C 是三个（不一定互不相交的）字母表。那么对于每个 $k \geq 0$，我们有

$$\langle e_i(\mathbb{A}) - e_i(\mathbb{B}+\mathbb{C}) | 1 \leq i \leq k\rangle = \langle e_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) - e_i(\mathbb{C}) | 1 \leq i \leq k\rangle \in \mathrm{Sym}(\mathbb{A}|\mathbb{B}|\mathbb{C}).$$

证明. 由命题 2.19，我们立即得到

$$\langle e_i(\mathbb{A}-\mathbb{B}) - e_i((\mathbb{B}+\mathbb{C})-\mathbb{B}) | 1 \leq i \leq k\rangle = \langle e_i(\mathbb{A}) - e_i(\mathbb{B}+\mathbb{C}) | 1 \leq i \leq k\rangle.$$

因此，只需证明对于每个 i，$e_i((\mathbb{B}+\mathbb{C})-\mathbb{B}) = e_i(\mathbb{C})$。展开左侧表达式，得到

$$e_i((\mathbb{B}+\mathbb{C})-\mathbb{B}) = \sum_{j+k+l=i} e_j(\mathbb{C})\left((-1)^l e_k(\mathbb{B})h_l(\mathbb{B})\right).$$

所需结果随即由众所周知的恒等式 $\sum_{l+k=n}(-1)^l e_k(\mathbb{B})h_l(\mathbb{B}) = 0$ 对所有$n \geq 1$成立得出。□

3. Colored HOMFLY Homology

3.1. 奇异 Soergel 双模。

定义 3.1。 对于每个 $N \geq 0$，我们将 Bim_N 记为这样一个二范畴：其对象是合成$\mathbf{a} \vdash N$，从$\mathbf{a}$到$\mathbf{b}$的 1-态射是分次的 $(\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(X), \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(X))$-双模，而 2-态射是分次双模同态。沿对象$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c}$ 的 1-态射和 2-态射的水平合成（记作 $\star$）由关于 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(X)$ 的张量积给出，而 2-态射的垂直合成是同态的合成。对于不同的 N，二范畴 Bim_N 汇集成一个幺半二范畴 $\mathrm{Bim} := \bigsqcup_{N\geq 0}\mathrm{Bim}_N$，其张量积为

$$\boxtimes\colon \mathrm{Bim}_{N_1} \times \mathrm{Bim}_{N_2} \to \mathrm{Bim}_{N_1+N_2}$$

在对象上由拼接给出（即 $\mathbf{a} \boxtimes \mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{b})$），在 1-态射和 2-态射上则由关于 R 的张量积给出。

我们用 $\mathrm{Bim}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}$ 表示普通范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Bim}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$。

当 $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}} \subset \mathfrak{S}_{\mathbf{b}}$ 时，我们可以将 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(X)$ 视为 $\mathrm{Bim}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}$（分别为 $\mathrm{Bim}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}$）中的一个对象，其左作用（分别为右作用）由沿着包含映射 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(X) \subset \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(X)$ 限制标量给出。在这种情况下，我们有特殊的合并 和拆分 双模

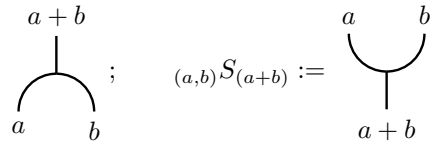
$$ {}_{\mathbf{b}}M_{\mathbf{a}} := q^{\ell(\mathbf{b})-\ell(\mathbf{a})}\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(\mathbb{X}) \otimes_{\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(\mathbb{X})} \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathbb{X}); \quad {}_{\mathbf{a}}S_{\mathbf{b}} := \mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(\mathbb{X}) \otimes_{\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(\mathbb{X})} \mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(\mathbb{X}).$$

这里，$\ell(\mathbf{a})$ 是抛物子群 $\mathfrak{S}_{\mathbf{a}} \subset \mathfrak{S}_N$ 中每个组合$\mathbf{a} \vdash N$所对应的最长词的长度。

定义 3.2。 奇异 *Bott-Samelson* 双模 是指由形如 ${}_{\mathbf{b}}M_{\mathbf{a}}$ 和 ${}_{\mathbf{a}}S_{\mathbf{b}}$ 的双模，经分次平移、水平和垂直合成以及直和生成的双模。奇异 Soergel 双模的二范畴 SSBim 是 Bim 中包含所有 Bott-Samelson 双模且对取直和项封闭的最小满幺半二子范畴。与 Bim 一样，我们将普通范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SSBim}}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 记作 $\mathrm{SSBim}^{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}}$。

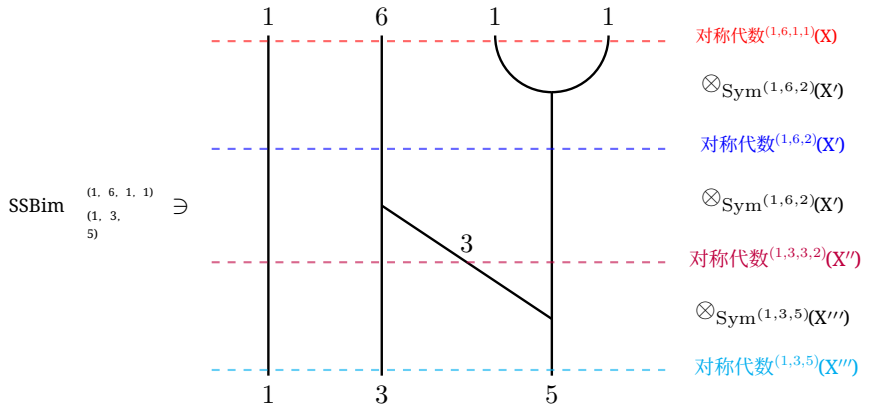
奇异 Bott-Samelson 双模最方便的描述方式是使用 A 型网的图示语言，例如 Cautis–Kamnitzer–Morrison [CKM14]所发展的语言。在这种描述中，一对组合 $(a,b),(a+b) \vdash a+b$所对应的合并双模和拆分双模用三价顶点表示如下：

$${}_{(a+b)}M_{(a,b)} := \quad ; \qquad {}_{(a,b)}S_{(a+b)} :=$$



通过将双模的水平复合（即 $\star$）描绘为垂直拼接，并将幺半乘积 $\boxtimes$描绘为水平拼接，这一描述可推广至所有奇异 Bott-Samelson 双模。奇异 Bott-Samelson 双模之间的双模同态，在这一演算中也有相应的描述，即网之间的泡沫图，从而得到此类对象的图示 2-范畴与代数 2-范畴之间的等价；完整的对照表请参见例如 [HRW21], 附录 1。

例3.3。给定奇异 Bott-Samelson 双模的图示描述（即网的直和），通过考察水平截面上的标记，就可以轻松读出张量因子。这些标记表示从左到右读取时，各相关多项式代数中部分对称的字母表大小。例如，下方的网表示右侧所示的张量积（相差一个分次平移）：



请注意，虽然我们没有明确标记每条边，但可以利用“基尔霍夫流”条件轻松推断出缺失的权重：每个顶点的入权重之和必须等于出权重之和。

网中的每个三价顶点都表示在一个部分对称多项式代数上的张量积。我们还可以通过以下方式描述这些张量积：将奇异 Bott-Samelson 双模表示为某个多项式代数的显式商，其中我们将那些可以穿过此类顶点滑动的对称多项式加以识别。下面的表示是众所周知的。

命题 3.4。 对于每一对正整数 a，b，设 X 是大小为 a 的字母表，Y 是大小为 b 的字母表，M 是大小为 $a+b$ 的字母表。那么我们有代数[1] 同构

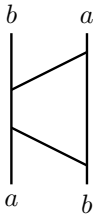
$$q^{-ab}{}_{(a,b)}M_{(a+b)} \cong_{(a+b)} S_{(a,b)} \cong \frac{\mathrm{Sym}(\mathbb{X}|\mathbb{Y}|\mathbb{M})}{\langle e_i(\mathbb{X}+\mathbb{Y}) = e_i(\mathbb{M}) | 1 \le i \le a+b \rangle}.$$

取张量积可以将所有奇异 Bott-Samelson 双模显式描述为多项式代数的商。此外，任何此类商中分母的生成元都构成一个正则序列。

证明。 唯一需要检查的是，商的分母中的生成元构成一个正则序列。根据引理 2.6，该性质与它们的顺序无关。对于合并双模或拆分双模，每个关系都包含一个形如 e_i(M) 的唯一求和项。根据命题 2.16，这些项在 Sym(X|Y|M) 中代数独立，因此它们当然构成一个正则序列。一般奇异 Bott-Samelson 双模的结果可通过对顶点数量进行简单归纳得到。 □

定义 3.5。 固定 a，$b \ge 0$。于是我们定义

$$W_k := \quad \in \mathrm{SSBim}^{(b,a)}{}_{(a,\ b)}.$$

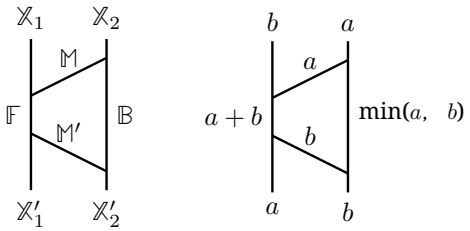


我们将形式为 W_k 梯形网 的奇异 Soergel 双模称为梯形网。

[1]这些并非双模同构，因为对于合并双模和拆分双模，左右作用并不相同（而在商中则未作规定）。

我们发现，将梯形网表示为商时，采用不同于命题 3.4 中给出的表示会更方便。这种表示并不标准，但其显著优点是，对于固定的 a 和 b，所有梯形网 W_k 都是同一个多项式代数 $\mathcal{R}_{a,\ b}$ 的商。这里我们会稍微滥用图示记法，用标签不合逻辑的“网”来表示我们希望施加的关系。

记号 3.6。对于每一对正整数 $a,\ b$，我们赋予左侧所示、大小标于右侧的字母表：



定义 3.7。对于每一对正整数 $a,\ b$，令

$$\mathcal{R}_{a,b} := \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1|\mathbb{X}_2|\mathbb{M}|\mathbb{M}'|\mathbb{F}|\mathbb{B}|\mathbb{X}'_1|\mathbb{X}'_2).$$

我们用 $\mathcal{I}_{a,\ b} \subset \mathcal{R}_{a,\ b}$ 表示由以下元素生成的 $\mathcal{R}_{a,\ b}$ 的理想：

$$\mathcal{I}_{a,b} \ = \ \begin{array}{ll} e_i(\mathbb{X}_2) - e_i(\mathbb{M} + \mathbb{B}) & 1 \le i \le a, \\ e_i(\mathbb{X}'_2) - e_i(\mathbb{M}' + \mathbb{B}) & 1 \le i \le b, \\ e_i(\mathbb{F}) - e_i(\mathbb{X}_1 + \mathbb{M}) & 1 \le i \le a+b, \\ e_i(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2) & 1 \le i \le \max(a,b) \end{array}$$

最后，对于每个 $1 \le k \le \min(a,\ b)$，我们用 $\mathcal{J}_k \subset \mathcal{R}_{a,\ b}$ 表示由以下元素生成的理想：

$$\mathcal{J}_k \ = \ \begin{array}{ll} e_i(\mathbb{M}) & a-k < i \le a, \\ e_i(\mathbb{M}') & b-k < i \le b, \\ e_i(\mathbb{B}) & k < i \le \min(a,b), \\ e_i(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2) & \max(a,b)+1 < i \le a+b-k \end{array}$$

命题 3.8。对于任意梯形网 $W_k \in \mathrm{SSBim}^{(b,a)}{}_{(a,\ b)}$，存在一个同构[2] $W_k \cong \mathcal{R}_{a,\ b}/(\mathcal{I}_{a,\ b} \sqcup \mathcal{J}_k)$，它保留每个字母表中的初等对称多项式。

证明。考虑命题 3.4 中给出的 W_k 的表示。由推论 2.17 可知，我们可以人为扩大与边 M，M′，F 和 B 相关联的字母表的大小，从而得到环 $\mathcal{R}_{a,\ b}$，代价是需要施加额外的关系。这样便得到 W_k 的一个表示，它是 $\mathcal{R}_{a,\ b}$ 关于以下关系的商：

(1) $e_i(\mathrm{X}_2) - e_i(\mathrm{M} + \mathrm{B})\ 1 \le i \le a$; (2) $e_i(\mathrm{F}) - e_i(\mathrm{M} + \mathrm{X}_1)\ 1 \le i \le a+b-k$; (3) $e_i(\mathrm{F}) - e_i(\mathrm{M}' + \mathrm{X}'_1)\ 1 \le i \le a+b-k$; (4) $e_i(\mathrm{X}'_2) - e_i(\mathrm{M}' + \mathrm{B})\ 1 \le i \le b$; (5) $e_i(\mathrm{M})\ a-k < i \le a$;

[2]相差一个整体分次平移。

(6) $e_i(\mathbb{M}')\ b-k<i\le b$; (7) $e_i(\mathbb{F})$
$a+b-k<i\le a+b$; (8) $e_i(\mathbb{B})$
$k<i\le \min(a,b)$。

关系 (1)、(2) 和 (4) 存在于$\mathcal{I}_{a,\ b}$中，而关系 (5)、(6) 和 (8) 存在于 $\mathcal{J}_k$ 中。对于 $i>a+b-k$, $e_i(\mathbb{M}+\mathbb{X}_1)$，由关系 (5) 可知其为零，因此多余的关系 $e_i(\mathbb{F})-e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{M})$（其中$i>a+b-k$）等价于关系 (7)。

这留下了来自 W_k的关系 (3)，以及来自 $\mathcal{I}_{a,\ b}$和 $\mathcal{J}_k$ 的关系 $\{e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2')\mid 1\le i\le a+b-k\}$。利用 (2)，对于每个 i，我们可以将 (3) 替换为 $e_i(\mathbb{M}+\mathbb{X}_1)-e_i(\mathbb{M}'+\mathbb{X}_1')$。我们在 $\mathcal{R}_{a,\ b}$ 对关系 (1) 和 (4) 取商，并展开此表达式：

$$\begin{aligned}
e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{M})-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{M}') &= \sum_{j+k=i} e_j(\mathbb{X}_1)e_k(\mathbb{M})-e_j(\mathbb{X}_1')e_k(\mathbb{M}')\\
&= \sum_{j+k+\ell=i} (-1)^\ell e_j(\mathbb{X}_1)e_k(\mathbb{X}_2)h_\ell(\mathbb{B})-(-1)^\ell e_j(\mathbb{X}_1')e_k(\mathbb{X}_2')h_\ell(\mathbb{B})\\
&= \sum_{j+k+\ell=i} (-1)^\ell h_\ell(\mathbb{B})\left(e_j(\mathbb{X}_1)e_k(\mathbb{X}_2)-e_j(\mathbb{X}_1')e_k(\mathbb{X}_2')\right)\\
&= \sum_{j+\ell=i} (-1)^\ell h_\ell(\mathbb{B})\left(e_j(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_j(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2')\right).
\end{aligned}$$

特别地，对于每个 $1\le i\le a+b-k$，我们有

$$(e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{M})-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{M}'))-(e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2'))\in\langle e_j(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_j(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2')\mid j\le i\rangle.$$

It 通过对 i进行归纳法可知，在对 (1) 和 (4) 取商后，我们有

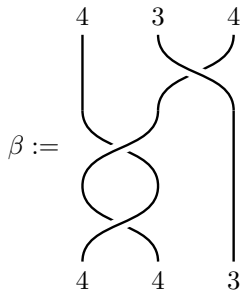
$$\langle e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{M})-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{M}')\mid 1\le i\le a+b-k\rangle=\langle e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2')\mid 1\le i\le a+b-k\rangle.$$

□

3.2. **非约化彩色 HOMFLY 同调**。 本节将回顾如何利用来自 [WW17、MSV11]的奇异 Soergel 双模构造非约化彩色 HOMFLY 同调。我们首先描述与着色辫图相联系的奇异 Soergel 双模的 Rickard 复形。

定义 3.9。 A着色辫图 β 是一个为每股指定颜色的辫图。 β 的底部 和顶部 合成分别是从左到右读取、分配给该图底部和顶部的颜色序列。

例 3.10. 以下是一个着色辫图，其底部合成为 (4，4，3)，顶部合成为 (4，3，4)：



定义 3.11. 固定 a, $b \geq 0$，并令 $m := \min(a, b)$。那么，*2* 股正 *Rickard* 复形$C_{a,\ b}$ 是由奇异 Soergel 双模构成的有界复形

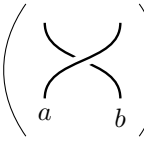
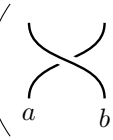
$$C_{a,b} := W_0 \longrightarrow q^{-1}tW_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow q^{-m+1}t^{m-1}W_{m-1} \longrightarrow q^{-m}t^{m}W_m \in \mathcal{C}(\mathrm{SSBim}_{a,b}^{b,a}).$$

类似地，*2* 股负 *Rickard* 复形 $C_{a,b}^{\vee}$ 是由奇异 Soergel 双模组成的有界复形

$$C_{a,b}^{\vee} := q^{m}t^{-m}W_m \longrightarrow q^{m-1}t^{-m+1}W_{m-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow qt^{-1}W_1 \longrightarrow W_0 \in \mathcal{C}(\mathrm{SSBim}_{a,b}^{b,a}).$$

我们不关心此复形中微分的具体形式；详情请参见例如 [Wed19]。

定义 3.12。 设 β 为一个着色辫子词。为每个着色交叉指定一个 2 股正或负 Rickard 复形，如下所示：

$F\Bigg($  $\Bigg) = C_{a,b}$; $\quad F\Bigg($  $\Bigg) = C_{a,b}^{\vee}$.

赋给 β 的 *Rickard* 复形 $F(\beta)$ 是由与 β 的各个交叉对应的所有 2 股 Rickard 复形取张量积得到的复形，其排列方式遵循 SSBim 图示描述中对应于水平拼接和垂直拼接的张量积。

一般 Rickard 复形中出现的链双模将是分配给每个交叉点的梯形网的张量积W_k 。接下来我们为这类双模给出一些术语。

定义 3.13。 给定一个着色辫图 β，固定 β的交叉点的某种排序 $\{c_1, \ldots, c_n\}$。将进入 c_i 的两股的颜色记为 a_i、b_i。 β的一个分解 是指为每个 i选择一个非负整数 $\vec{k} = (k_1, \ldots\ldots, k_n)$，该整数不大于 $0 \leq k_i \leq \min(a_i, b_i)$。对于 β的每个分解 $\vec{k}$，我们将其对应的梯形网张量积记为 $W_{\vec{k}}$；它出现在 Rickard 复形 $F(\beta)$中。

假设 p 是着色辫图 β上的一个点。将包含 p 的股的颜色记为k。对于 β的每个分解 $\vec{k}$，对应的双模 $W_{\vec{k}}$ 都包含一个 Sym(X_p) 张量因子，其中 X_p 是一个大小为 k的字母表。这描述了 Sym(X_p) 通过在该张量因子中进行乘法而作用于 Rickard 复形 $F(\beta)$。其中许多作用最终证明是同伦的。

引理 3.14. $e_i(X_1) - e_i(X_2')$ 和 $e_i(X_2) - e_i(X_1')$ 在一个 2 股 Rickard 复形上的作用是零伦的。此外，可以选择这些同伦使其两两反交换。

证明。 这是标准结果；参见例如 [HRW24], 引理 4.20。 □

我们将引理 3.14 的同伦称为点滑动 同伦。通过对点滑动同伦取线性组合，我们看到，对于 β 中一条标记为 k 的股上的任意两个点p, q，以及任意一个关于 k 个变量的对称多项式 f， $f(X_p)$ 和 $f(X_q)$ 的作用是同伦的。

记号 3.15。 令 $\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$ 分别为 β 的顶端与底端复合。于是，特别地，$\mathrm{Sym}^{\mathbf{a}}(X)$ 和 $\mathrm{Sym}^{\mathbf{b}}(X)$ 在 $F(\beta)$ 上作用；这正是 $\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ 中通常的双模作用。我们分别用 X_i^{ext} 和 $X_i'^{ext}$ 标记顶端与底端相应的字母表，其中指标i 从左向右递增。按照这一约定，我们有 $|X_i^{ext}| = a_i$ 和 $|X_i'^{ext}| = b_i$。

通过将双模视为集中在 Hochschild 次数 0 的复形，可以得到 $\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$ 到 $D^b(\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}})$ 的自然嵌入。这也扩展为相应同伦范畴之间的嵌入，因此我们可以自然地将 Rickard 复形 $F(\beta)$ 视为属于 $K^b(D^b(\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}))$。

记号 3.16. 给定两个大小相同的字母表 $\mathbb{X}_i$、$\mathbb{X}_j$，其中大小为 k，我们将这两个字母表中对应初等对称多项式之差上的 Koszul 复形（沿 Hochschild 方向或同调方向）简记为

$$K(C;\mathbb{X}_i-\mathbb{X}_j):=K(C;\{e_r(\mathbb{X}_i)-e_r(\mathbb{X}_j)\mid 1\le r\le k\}).$$

类似地，我们用 $K(C;\mathbb{X}_i)$ 表示字母表 $\mathbb{X}_i$ 中的初等对称多项式所对应的 Koszul 复形，并以自然的方式将此记号推广到多个字母表以及字母表之间的多个差。

定义 3.17. 给定一个合成 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\vdash N$和一个复形 $C\in K^b(D^b(\mathrm{SSBim}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}}))$，其*Hochschild* 同调 是 Koszul 复形

$$HH(C):=K_a(C;\{\mathbb{X}_i^{ext}-\mathbb{X}_i'^{ext}|1\le i\le n\}).$$

我们将 $H(HH(C))$ 记作由 $HH(C)$ 得到的 $\mathbb{Z}_a\times\mathbb{Z}_q\times\mathbb{Z}_t$ 分次 R-模：先沿 Hochschild方向取同调，得到由 $\mathbb{Z}_a\times\mathbb{Z}_q$ 分次 R-模构成的复形，再对结果取同调。

对于任意顶端与底端合成相同的着色辫图 β，我们都可以考虑 $H(HH(F(\beta)))$。这里的大部分模结构都会退化。由于对称多项式在任意给定辫子股上的作用彼此同伦，因此在沿 t 方向取同调后，这些作用就完全相同。此外，对定义 3.17 中的 Koszul 复形沿 a 方向取同调，会使每个 i 对应的 $\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_i^{ext})$ 和 $\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_i'^{ext})$ 的作用完全相同。总之，最终剩下的是下述环的作用。

定义 3.18. 给定一个顶端与底端合成相同的着色辫图 β $\mathbf{a}=\widehat{\ }(a_1,\dots,a_n)$，用 $\pi_0(\beta)$ 表示 $\{1,\dots,n\}$ 在由 β 所对应的置换作用下的轨道集合。令

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{\widehat{\beta}}):=\bigotimes_{[i]\in\pi_0(\widehat{\beta})}\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_i^{ext}).$$

下述定理在未着色情形下归功于 Khovanov [Kho07] 和 Khovanov–Rozansky [KR08b]，在着色情形下则归功于 Mackaay-Stošić-Vaz [MSV11] 和 Webster–Williamson [WW17]。

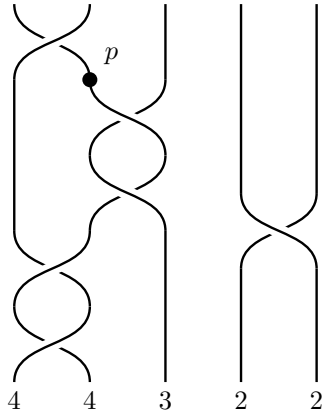
定理 3.19。 设 $\mathcal{L}$ 是一个着色链环，其表示为着色辫图 β的闭包。那么$HHH(\mathcal{L}):=H(HH(F(\beta)))$ 与 β 的选择无关，且在 $\mathrm{Sym}(\mathbb{X}^{\widehat{\beta}})$-等变同构意义下唯一。我们称 $HHH(\mathcal{L})$为 $\mathcal{L}$的（未约化）带色 *HOMFLY* 同调。

3.3. **约化 Rickard 复形。** 现在我们来构造约化带色 HOMFLY 同调，将 [Wed19] 的结果推广到在任意分支处约化的任意着色链环。我们主要沿用 [Wed19]中的记号。

首先，固定一个着色链环 $\mathcal{L}$、一个含有 $\beta=\mathcal{L}$ 的着色辫图 β，以及一个远离交叉点的标记点 $p\in\beta$。我们用 $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ 表示标记β外部边的组成；由于 β 闭合成一个链环，该组成在顶部和底部相同。如果i^{th} 和 j^{th} 辫子股闭合到同一个链环分支，我们记作 $i\sim j$。

沿着 β底部从左向右读取各股，我们用 m 表示包含标记点 p 的那股的索引，其中该点标记为 $\mathbf{m}$。我们将与包含 p 的线段相关联的字母表记为 $\mathbb{X}_p$，因此 $|\mathbb{X}_p|=a_m$。

例 3.20. 下面给出所需数据的一个示例：



这里 有 $=(4,\ 4,\ 3,\ 2,\ 2)\vdash 15$、 $m=1$ 和 $|\mathrm{X}_p|=a_1=4$。注意， β 分解为两个不相交的辫子的并，且 a_m 不是 β 的股线标号中的最小值。

定义 3.21. 回顾定义 3.7 中的记号 $\mathcal{R}_{a,b}$, $\mathcal{I}_{a,b}$ 和 $\mathcal{J}_k$ 。对于每个 (a,b)-交叉，设 $\mathcal{V}_{a,b}:=\mathcal{R}_{a,b}/\mathcal{I}_{a,b}$ ，并将由 $\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_1|\mathrm{X}_2|\mathrm{X}_1'|\mathrm{X}_2')$ 生成的 $\mathcal{V}_{a,b}$ 的子环记为 $\mathcal{S}_{a,b}$ 。

引理 3.22. $\mathcal{S}_{a,b}$ 同构于一个以 R 为系数的多项式代数，而 $\mathcal{V}_{a,b}$ 同构于一个以 $\mathcal{S}_{a,b}$ 为系数的多项式代数。

证明. 利用推论 2.20，我们可以改写 $\mathcal{I}_{a,b}$ 中第一、第二和第三组关系，分别将其生成元 $e_i(\mathrm{M})$、 $e_i(\mathrm{M}')$ 和 $e_i(\mathrm{F})$ 表示为字母表 X_1,X_2,X_2' 和 B 的形式，如下所示：

$$\begin{aligned} e_i(\mathbb{M}) &= e_i(\mathbb{X}_2-\mathbb{B});\\ e_i(\mathbb{M}') &= e_i(\mathbb{X}_2'-\mathbb{B});\\ e_i(F) &= e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{M}). \end{aligned}$$

进行这些代换后，我们得到一个同构

$$\mathcal{V}_{a,b}\cong \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1|\mathbb{X}_2|\mathbb{X}_1'|\mathbb{X}_2'|\mathbb{B})/\langle e_i(\mathbb{X}_1+\mathbb{X}_2)-e_i(\mathbb{X}_1'+\mathbb{X}_2')\mid 1\le i\le \max(a,b)\rangle.$$

现在，若 $b\ge a$，我们可以再次对剩余关系应用推论 2.20，将生成元 $e_i(\mathrm{X}_2')$ 表示为字母表 X_1，X_2，和 X_1' 的形式，或者将生成元 $e_i(\mathrm{X}_1)$ 表示为字母表 X_2,X_1' 和 X_2' 的形式，从而得到同构

$$\mathcal{V}_{a,b}\cong \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1|\mathbb{X}_2|\mathbb{X}_1'|\mathbb{B})\cong \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_2|\mathbb{X}_1'|\mathbb{X}_2'|\mathbb{B}). \tag{3.1}$$

那么 $\mathcal{S}_{a,\ b}\cong\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_1|\mathrm{X}_2|\mathrm{X}_1')\cong\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_2|\mathrm{X}_1'|\mathrm{X}_2')$，因此

$$\mathcal{V}_{a,b}\cong \mathcal{S}_{a,b}[e_i(\mathbb{B})\mid 1\le i\le b].$$

否则 $a>b$，可以用另一个字母表表示 $e_i(\mathrm{X}_2)$ 或 $e_i(\mathrm{X}_1')$；那么 $\mathcal{V}_{a,\ b}$仍然是字母表 $\{e_i(\mathrm{B})\}$ 上的多项式环，且位于 $\mathcal{S}_{a,\ b}$ 中。□

命题 3.23。 $\mathcal{J}_k$ 的生成元在 $\mathcal{V}_{a,\ b}$中构成一个正则序列。

证明。 与命题 3.4 的证明基本相同。 □

推论 3.24。 存在一个拟同构

$$W_k \cong K(\mathcal{V}_{a,b};\mathcal{J}_k) \in D^b(\mathcal{S}_{a,b}-\mathrm{Mod}).$$

现在，我们将上文定义的局部概念推广到整个辫图 β:

定义 3.25. 令 $\mathcal{R}_\beta$ 为与每个交叉点相关联的环 $\mathcal{R}_{a,b}$ 的张量积，其中，将分隔交叉点的同一线段所对应的字母表 X_i 和 X'_i 等同起来。类似地，令 $\mathcal{I}_\beta \subset \mathcal{R}_\beta$ 为分配给各交叉点的所有理想 $\mathcal{I}_{a,b}$ 的乘积，并令 $\mathcal{V}_\beta := \mathcal{R}_\beta/\mathcal{I}_\beta$。用 $\mathcal{S}_\beta$ 表示由分配给每个交叉点的字母表 X_i,X'_i （中的对称多项式）生成的 $\mathcal{V}_\beta$ 的子环。对于 β的每个分解 k，令 $\mathcal{J}_{\vec{k}}$ 表示所有相应理想$\mathcal{J}_{k_i}$的乘积。

上文关于局部数据给出的事实，对于整个辫子也有直接对应的结论。在表述引理 3.22 的全局版本时，需要谨慎处理，以免消去某些字母表。

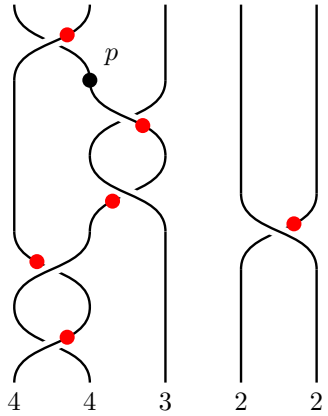
命题 3.26. $\mathcal{S}_\beta$ 同构于 $\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_1'^{ext}|\dots|\mathrm{X}_{m-1}'^{ext}|\mathrm{X}_p|\mathrm{X}_{m+1}'^{ext}|\dots|\mathrm{X}_n'^{ext})$ 上的多项式代数，而 $\mathcal{V}_\beta$ 同构于 $\mathcal{S}_\beta$ 上的多项式代数。

证明. 为了看出 $\mathcal{S}_\beta$ 是适当字母表上的多项式代数，我们可以在每个交叉处运用命题 3.22 的论证；唯一可能的障碍是，我们必须在每个交叉处消去不同的字母表，并且绝不能消去字母表 X_p 或任何一个 $\mathrm{X}_i'^{ext}$（$i \neq m$）。

为选择要消去的字母表，按颜色从高到低排列 β 的各股。每一步，如果下一股不含 p，就从该股底部向上移动，并在每个尚未处理的交叉处，选取从上方进入该交叉、且位于该股上的字母表。如果下一股含有 p，则改为从 p 向外移动，在每个尚未处理的交叉处，选取位于距 p 最远的那股上的字母表。这样便为每个交叉关联了一个不重复的字母表，确保不会选中 X_p 和 $'^{ext}_i$ 对应的 X，并确保与每个交叉关联的字母表都位于穿过该交叉的最高颜色股上。

利用 $\mathcal{I}_\beta$ 中的 4th 系列关系消去这些字母表后， $\mathcal{V}_\beta$ 可表示为由 $\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_p)$、$\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_i'^{ext})$（对于 $i \neq m$）、可能还有其他 $\mathrm{Sym}(\mathrm{X}_i)$，以及每个交叉处的 Sym(B) 生成的多项式代数。通过忽略每个交叉处 Sym(B) 的生成元，我们可以得到对 $\mathcal{S}_\beta$ 的类似描述。□

例 3.27. 在例 3.20 的情境中，沿着 β底部从左到右排列各股。然后，上述算法会消去以下字母表（用红色圆点标记）：



注意，每个交叉处都会消去一个字母表，该字母表总是位于进入交叉处的最大颜色股上；各字母表不会重复，$\mathbf{X}_p$ 不会被选中，并且对于 $i \neq m$，$\mathbf{X}_i^{ext}$永远不会被选中（在本例中 $i = m$ 时也不会被选中，不过这并非必要条件）。

命题 3.28。 $W_{\vec{k}} \cong \mathcal{V}_\beta / \mathcal{J}_{\vec{k}}$，且 $\mathcal{J}_{\vec{k}}$ 的生成元在 $\mathcal{V}_\beta$ 中构成正则序列。

证明。 完全类似于局部情形（命题 3.23）。 □

推论 3.29。 存在一个拟同构

$$W_{\vec{k}} \cong K(\mathcal{V}_\beta; \mathcal{J}_{\vec{k}}) \in D^b(\mathcal{S}_\beta - \mathrm{Mod}).$$

定义 3.30。 令 $\mathcal{S}_\beta(p) := \overline{\mathcal{S}_\beta}$对称代数($\mathbb{X}_p$)。

由于与每个交叉相关联的 Rickard 复形中的微分由双模同态构成，因此与整个辫子相关联的复形 $F(\beta)$ 上的微分是 $\mathcal{S}_\beta$-线性的。因此，在下面的定义中，我们可以将 $F(\beta)$ 视为 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta - \mathrm{Mod}))$ 中的一个复形。

定义 3.31。 对于 β 的 p 在 p 处的约化 Rickard 复形是复形

$$F_p(\beta) := F(\beta) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{S}_\beta} \overline{\mathcal{S}_\beta(p)} \in K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta - \mathrm{Mod})).$$

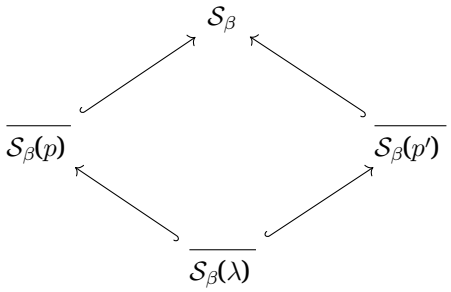
我们通过确立约化 Rickard 复形的一个不变性结果来结束本节；见下文的定理 3.34。

命题 3.32。 $F_p(\beta) \simeq K_t(F(\beta); \mathbf{X}_p) \in K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta(p) - \overline{模})$。

证明。 由命题 3.26 以及反复应用命题 2.9 可得。 □

定义 3.33。 对于 β 的每一股 λ，将 $\mathcal{S}_\beta(\lambda)$ 记为由不在$\overline{该股}$ λ 上的字母表中的（对称多项式）生成的 $\mathcal{S}_\beta$ 的子环。

根据命题 3.26，我们可以将 $\mathcal{S}_\beta(p)$ 视$\overline{为由}$除 $\mathbf{X}_p$ 外的所有字母表中的（对称多项式）生成的 $\mathcal{S}_\beta$ 的子环。因此，对于每个 $p \in \lambda$，都有一个自然嵌入 $\mathcal{S}_\beta(\lambda) \hookrightarrow \mathcal{S}_\beta(p)$。给定两个点 p，$p' \in \lambda$，我们$\overline{有一个}$由嵌入构成的交换图



由此得到一个函子交换图，它由沿这些包含映射进行的标量限制给出；在下文中，我们将隐式地应用这些限制。

定理 3.34. 给定一条辫子股 λ，其中有 β 个点，以及两个点 $p, p' \in \lambda$，约化 Rickard 复形之间存在一个同伦等价

$$F_p(\beta) \simeq F_{p'}(\beta) \in K^b(D^b(\overline{\mathcal{S}_\beta(\lambda)} - \mathrm{Mod})).$$

证明. 由命题 3.32，我们在 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta(\lambda)))$ 中有同伦等价 $F_p(\beta) \simeq K_t(F(\beta); X_p)$ 和 $F_{p'}(\beta) \simeq K_t(F(\beta); X_{p'})$。由于 p 和 p' 位于同一条股上，对于每个 i，自同态 $e_i(X_p)$ 和 $e_i(X_{p'})$（它们作用于 $F(\beta)$）都通过一族分次交换的同伦彼此同伦。于是，反复应用引理 2.7 即得所需结果。□

注 3.35。我们想强调的是，定理 3.34 中的同伦等价发生在 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta(\lambda)\text{–Mod}))$ 中，而不是在 $\overline{K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta\ \text{–Mod}))}$ 中。尽管每个约化 Rickard 复形 $F_p(\beta)$ 和 $F_{p'}(\beta)$ 最自然地属于 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta\ \text{–Mod}))$，但它们之间的等价并不保留 $\mathcal{S}_\beta$ 的完整作用。例如，$\mathrm{Sym}(X_p)$ 在左侧的每个链模上都作用为 0，而在右侧的每个链模上则作用非平凡。

这带来了一个选择：约化 Rickard 复形应定义为在点处约化并带有 $\mathcal{S}_\beta$ 的作用，还是在股处约化并带有 $\mathcal{S}_\beta(\lambda)$ 的作用？我们采用前一种做法：我们最终感兴趣的不是辫子不变量，而是链环不变量；在下文提取 Hochschild 同调时，更大的环 $\mathcal{S}_\beta$ 的作用至关重要。我们很希望看到一种对该不变量的表述，其中 Rickard 复形是在取 Hochschild 同调之前先在股处约化。

3.4. **约化列着色同调**。

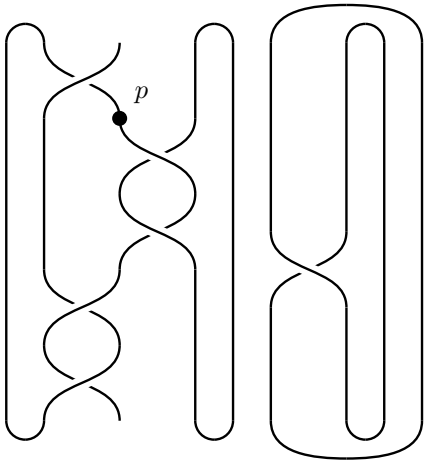
定义 3.36. 我们将 $HH_{\neg p}$ 记作定义在 $D^b(\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}})$ 上的函子，其定义如下：

$$HH_{\neg p}(C) := K_a\left(C; \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext} \mid i \neq m\}\right).$$

$HH_{\neg p}$ 是可加的，因此它会自动延拓到 $K^b(D^b(\mathrm{SSBim}_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}}))$。

从图形上看，$HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 对应于将辫子 β 的所有股除了包含 p 的那一股 λ 之外都闭合，并让该股在底部保持开放。在贯穿本文的示例中，读者可以想象如下图：

$HH_{\neg p}(F_p(\beta)) :=$



定义 3.37. 给定 $\mathcal{L}$ 的一个分支 $\mathcal{L}_p$，我们将 $\mathcal{S}_\beta(\mathcal{L}_p)$ 记作由不位于 $\mathcal{L}_p$ 上的字母表（中的对称多项式）生成的 $\mathcal{S}_\beta$ 的子环。

命题 3.38。</style}在 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta(\mathcal{L}_p)\ \text{–Mod}))$ 中存在一个同伦等价

$$HH_{\neg p}(F_p(\beta)) \simeq K_t\left(K_a\left(F(\beta); \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{i \not\sim m}\right); \mathbb{X}_p \sqcup \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{m \neq i \sim m}\right).$$

换言之，命题 3.38 表明，在定义 $HH_{\neg p}$ 的 Hochschild方向 Koszul 复形中，那些与 p 位于 $\mathcal{L}$ 同一分支上的复形，可以替换为同调方向的 Koszul 复形。

证明。 根据命题 3.26， $\mathcal{S}_\beta$ 同构于一个多项式代数，其中生成元包括对于 $m \neq i \sim m$ 和 $1 \leq j \leq a_m$ 的 $e_j(\mathbb{X}_p)$ 以及 $e_j(\mathbb{X}_i'^{ext})$。通过变量代换，我们可以将 $\mathcal{S}_\beta$ 实现为基于以下元素集合的多项式代数： $\{e_j(\mathbb{X}_i^{ext}) - e_j(\mathbb{X}_i'^{ext}) \mid i \neq m,\ i \sim m,\ 1 \leq j \leq a_m\}$。于是，结论立即由推论 2.10 得出。□

定理 3.39. 假设 p, p' 位于 $\mathcal{L}$的同一分支 $\mathcal{L}_p$ 上。那么存在一个同伦等价

$$HH_{\neg p}(F_p(\beta)) \simeq HH_{\neg p'}(F_{p'}(\beta)) \in K^b(D^b(\overline{\mathcal{S}_\beta(\mathcal{L}_p)} - \mathrm{Mod})).$$

证明. 回忆一下，我们用 m 表示包含 p的 β 的股的指标；类似地，我们用 m' 表示包含 p'的股的指标。由于 p 和 p' 位于 $\mathcal{L}$的同一分支上，因此有$m \sim m'$。将命题 3.38 应用于两个约化 Rickard 复形，得到

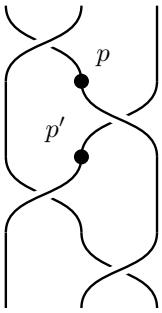
$$HH_{\neg p}(F_p(\beta)) \simeq K_t\left(K_a\left(F(\beta); \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{i \not\sim m}\right); \mathbb{X}_p \sqcup \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{m \neq i \sim m}\right);$$
$$HH_{\neg p'}(F_{p'}(\beta)) \simeq K_t\left(K_a\left(F(\beta); \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{i \not\sim m'}\right); \mathbb{X}_{p'} \sqcup \{\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}\}_{m \neq i \sim m'}\right).$$

由于 $m \sim m'$，这两个表达式中的内层（Hochschild）Koszul 复形完全一致。在外层（同调）Koszul 复形中，从 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 变为 $HH_{\neg p'}(F_{p'}(\beta))$，需要将 $\mathbb{X}_p$ 替换为 $\mathbb{X}_{p'}$，并将 $\mathbb{X}_{m'}^{ext} - \mathbb{X}_{m'}^{ext}$替换为 $\mathbb{X}_m^{ext} - \mathbb{X}_m'^{ext}$。要进行前一种替换，可以利用点滑动，将 $\mathbb{X}_p$ 替换为 $\mathbb{X}_q$，其中 q 是位于包含 p 的 β 的股上的任意其他点。如果 p 和 p' 位于同一股上，这样就足够了。否则，选取位于该股顶部的 q。那么，对于某个 $m \neq i \sim m$，有 $\mathbb{X}_q = \mathbb{X}_i^{ext}$。根据推论 2.8，我们可以利用 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 的同调 Koszul 复形中的分支 $\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}$，将 $\mathbb{X}_q$ 替换为 $\mathbb{X}_i'^{ext}$。这个字母表位于 β的另一股上，因此可以继续这一过程。

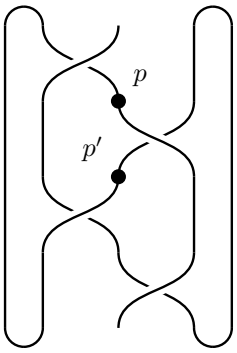
通过一系列涉及差值 $\mathbb{X}_i^{ext} - \mathbb{X}_i'^{ext}$ 的点滑动和行变换，可以用类似的步骤将 $\mathbb{X}_{m'}^{ext} - \mathbb{X}_{m'}'^{ext}$ 替换为 $\pm(\mathbb{X}_m^{ext} - \mathbb{X}_m'^{ext})$。进行这些行变换时绝不能使用项 $\mathbb{X}_{m'}^{ext} - \mathbb{X}_{m'}'^{ext}$，但只需沿着 $\mathcal{L}_p$ 从闭包中产生该项的线段向“外”移动即可轻松确保这一点。由于对于任意 f，$\mathrm{Cone}(f) = \mathrm{Cone}(-f)$，所以证明完毕。□

定理 3.39 的证明中所进行的替换序列，最好用图形来说明。

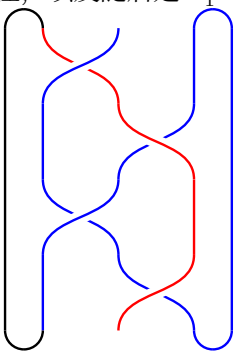
例 3。 **40.** 考虑下面的辫子，其中标出了标记点 β，并作出如下选择： p 和 p':



那么 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 就是以下闭包：



在这里 $m' = 1$ 以及 $m = 2$，因此我们必须将 $\mathbb{X}_1^{ext} - \mathbb{X}_1'^{ext}$替换为 $\pm(\mathbb{X}_2'^{ext} - \mathbb{X}_2^{ext})$。我们追踪点滑动和行变换的路径，随后是 $\mathbb{X}_1^{ext}$中的 红色 路径，以及随后是 $\mathbb{X}_1'^{ext}$中的 蓝色路径：



这个序列从未使用包含项 $\mathbf{X}_1^{ext} - \mathbf{X}_1'^{ext}$ 的行运算，而我们必须替换该项。这个例子很容易推广：给定点 $\mathbf{X}_{m'}^{ext}$ 和 $\mathbf{X}_{m'}'^{ext}$，可以从这些点沿着分支 $\mathcal{L}_p$ 向外追踪对应的路径，而这些路径最终会到达点 $\mathbf{X}_m^{ext}$ 和 $\mathbf{X}_m'^{ext}$。

定义 3.41。 带色 *HOMFLY* 同调 $\mathcal{L}$ 在 p 处的约化版本是 $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_t$-分次 R-模

$$\overline{HHH}(\mathcal{L}(p)) := H(HH_{\neg p}(F_p(\beta))).$$

注 3.42。 假设 β 是非分裂的，并且 p 位于一条具有最小颜色的股上。那么定义 3.41 与 [Wed19]的约化 HOMFLY 同调完全一致。唯一的难点在于协调这两种记号：Wedrich 的矩阵分解 $UMF(\beta)$ 与 Rickard 复 $F(\beta)$准同构（遗忘负微分之后），Wedrich 的 $UMF(\beta)/\langle \mathbf{X}_j' = \mathbf{X}_j \rangle$ 恰好就是我们的 $HH_{\neg p}(F(\beta))$，而 Wedrich 的 ~~$MF(\mathcal{L}(i))$~~ 就是我们的 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$。

在陈述主要的不变性定理之前，我们先考察 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 上的剩余模作用。考虑到定理 3.39，我们将 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 视为 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta(p)\text{–Mod}))$ 中的一个复形，因此 $\overline{HHH}(\mathcal{L}(p))$ 是一个三重分次的 $\mathcal{S}_\beta(\mathcal{L}_p)$-模。环 $\mathcal{S}_\beta(\mathcal{L}_p)$ 高度依赖于辫表示 β 的选择；然而，与 $\mathcal{L}$ 同一分支上的点相关联的任意两个字母表所诱导的作用都相同，因为这些作用在 $HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 复形上可通过点滑动或闭合实现同伦。这就留下了以下环的作用（参见定义 3.18）。

定义 3.43。 给定一个着色链环 $\mathcal{L}$，其分支的颜色为（k_1，……，k_n），以及一个分支 $\mathcal{L}_i$of $\mathcal{L}$，令

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{X}_{\mathcal{L}-\mathcal{L}_i}) := \mathrm{Sym}(\mathbb{X}_1|\ldots|\mathbb{X}_{i-1}|\mathbb{X}_{i+1}|\ldots|\mathbb{X}_n),$$

其中 $\mathbb{X}_j$ 是一个大小为 k_j的字母表。

第3.4节的其余部分致力于证明以下结论：

定理 3.44。 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 的约化 HOMFLY 同调是 $\overline{\mathcal{L}\text{ 在 }p}$ 处关于着色链环 $\mathcal{L}$ 和链环分支 $\mathcal{L}_p \ni p$ 的一个不变量，即在三重分次的对称代数$\mathbb{X}^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$-模意义下以及整体重新分次意义下同构。

我们将 Wedrich 的论证调整到我们更一般的情形中。这需要一些技术工具 .

引理 3.45。 $f(\mathbb{X}^{ext}) = f(\mathbb{X}'^{ext}) \in W_{\vec{k}}$对于 β的所有分解 $\vec{k}$以及所有对称多项式 f。

证明。 容易使用命题 3.4（或定义 3.7）的关系验证，对于每个梯形网 W_k 和每个对称多项式 f， $f(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = f(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2)$。对整个复形 $F(\beta)$，只需在每个交叉处应用这一观察即可得到相应结果。□

推论 3.46。 $e_i(\mathbb{X}_m^{ext}) - e_i(\mathbb{X}_m'^{ext}) = 0 \in W_{\vec{k}}/\langle \mathbb{X}_j - \mathbb{X}'_j \mid j \neq m\rangle$ 对于每个 $1 \leq i \leq a_m$。

证明。 我们将 $e_i(\mathbb{X}^{ext})$展开为

$$e_i(\mathbb{X}^{ext}) = e_i(\mathbb{X}_m^{ext}) + \sum_{j=0}^{i-1} e_j(\mathbb{X}_m^{ext}) e_{i-j}\left(\sum_{k\neq m} \mathbb{X}_k^{ext}\right)$$

并将 $e_i(\mathbb{X}'^{ext})$ 展开为

$$e_i(\mathbb{X}'^{ext}) = e_i(\mathbb{X}_m'^{ext}) + \sum_{j=0}^{i-1} e_j(\mathbb{X}_m'^{ext}) e_{i-j}\left(\sum_{k\neq m} \mathbb{X}_k'^{ext}\right).$$

然后通过对 i 进行归纳，并消去每个表达式中的第二项，即可得到所需结果。

□

命题 3.47。 $\prod_{i=1}^{a_m}(1+aq^{-2i})HHH(\overline{\mathcal{L}(p)}) \cong H(K_t(HH(F(\beta)); \mathbb{X}_p))$ 作为三重分次的对称代数$\mathbb{X}^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$-模。

证明。 注意，根据定义， $HH(F(\beta)) = K_a(HH_{\neg p}(F(\beta)); \mathbb{X}_m^{ext} - \mathbb{X}_m'^{ext})$。由推论 3.46，我们可以对右侧的表达式进行行变换，将 Koszul 微分中每一项 $e_i(\mathbb{X}_m^{ext}) - e_i(\mathbb{X}_m'^{ext})$ 替换为 0，从而在 $K^b(D^b(\mathcal{S}_\beta\text{–Mod}))$ 中得到如下链同构

$$HH(F(\beta)) = K_a(HH_{\neg p}(F(\beta)); \mathbb{X}_m^{ext} - \mathbb{X}_m'^{ext}) \cong \prod_{i=1}^{a_m}(1 + aq^{-2i}) HH_{\neg p}(F(\beta)).$$

然后，对加性函子 $H(K_t(-; \mathbb{X}_p))$ 应用后即可得到结论。 □

引理 3.48。 $\overline{HHH(\mathcal{L}(p))}$ 是一个有限生成的 $\mathrm{Sym}(\mathbb{X}^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p})$-模。

证明。 在 [Wed19] 的引理 3.45 中已经证明，每个网 $W_{\vec{k}}$ 在 $\mathcal{S}_\beta$.[3] 上都是有限生成的。由此可知，$W_{\vec{k}} \otimes_{\mathcal{S}_\beta} \mathcal{S}_\beta(p)$ 在 $\mathcal{S}_\beta(p)$ 上是有限生成的。复形$HH_{\neg p}(F_p(\beta))$ 的底层模是若干个不同 $W_{\vec{k}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{S}_\beta} \mathcal{S}_\beta(p)$ 的移位副本的有限直和，因此它也是有限生成的。由于 $\mathcal{S}_\beta$ 是多项式环，它是诺特的，因此在 Hochschild 方向和同调方向取同调后仍保持有限生成。□

B在给出定理 3.44 的证明之前，我们先引用引理 3.48 的一个推广，供后文使用 .

[3]注意，我们的 $\mathcal{S}_\beta$ 是 Wedrich 的 $\mathcal{S}_\beta$ 在每个交叉处模去关系 $e_i(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2)$ 后得到的商。对 $W_{\vec{k}}$ 的作用满足这些关系，因此这不会给我们带来任何困难。

命题 3.49. 对于任意 k着色结 $\mathcal{L}$ 及标记点 p， $HHH(\mathcal{L}(p))$是一个有限维R-模。

证明。 参见 [Wed19] 的命题 3.46。 □

定理 *3.44* 的证明： 对于固定的辫子字 β 和变化的 p 选择，由定理 3.39 可知此结论成立。给定两对 (β, p) 和 (β', p')，使得 β 和 β' 闭合后得到同一个链环，则辫子 β 和 β' 必须由一系列辫子关系和马尔可夫移动联系起来。对于固定辫子字，关于 p 选择的不变性保证我们可以使这些移动避开该点 p。于是，辫子关系会诱导 Rouquier 复形之间的 Sym(X_p)-线性同伦等价，从而得到约化同调的同构。

接下来考虑避开标记点的马尔可夫移动；我们将 [Wed19] 的推论 3.41 中的证明改写为我们的表述。设 (β, p) 和 (β', p') 是由此类移动联系起来的两对。根据定理 3.19，此移动会诱导一个 Sym($X_{\mathcal{L}}$)-线性同伦等价 $HH(F(\beta)) \simeq HH(F(\beta'))$。这进而给出一个同构

$$H(K_t(HH(F(\beta)); \mathbb{X}_p)) \cong H(K_t(HH(F(\beta')); \mathbb{X}_{p'}))$$

由命题 3.47 可知，这诱导出一个同构

$$\prod_{i=1}^{a_m}(1+aq^{-2i})\overline{HHH}(\widehat{\beta}(p)) \cong \prod_{i=1}^{a_m}(1+aq^{-2i})\overline{HHH}(\widehat{\beta'}(p')).$$

两边都是多项式环 Sym($X^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$) 上的有限生成分次模。这类模构成克鲁尔-施密特范畴，因此我们可以消去因子 $\prod_{i=1}^{a_m}(1+aq^{-2i})$。□

3.5. **与未约化同调的关系**。一个自然的问题是， $HHH(\mathcal{L})$ 和 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 是否包含相同数量的信息。在非彩色情形下，Rasmussen 在 [Ras15] 中证明，对于所有链环 $\mathcal{L}$ 和所有点 p，存在如下形式的三重分次 R-模同构

$$HHH(\mathcal{L}) \cong HHH(\bigcirc) \otimes \overline{HHH}(\mathcal{L}(p)). \tag{3.2}$$

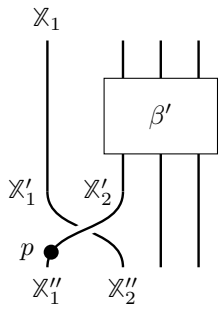
同构 (3.2) 有两个直接推论。首先，可以根据 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 的分次维数立即求出 $HHH(\mathcal{L})$ 的分次维数，反之亦然。其次，由于左边一项 $HHH(\mathcal{L})$ 和因子 $HHH(\bigcirc)$ 都与分支$\mathcal{L}_p \ni p$的选择无关，因此 $HHH(\mathcal{L}(p))$ 也与之无关。

本节中，我们证明了彩色链环的一个类似关系。Wedrich 最初在 [Wed19], 注 3.43 中提出了这样一个同构的猜想。结合定理 3.50 与我们此前的工作 [Con24b, Con25] ，可以计算所有正环面纽结（以及至多有一个非平凡着色分支的正环面链环）的$HHH(\mathcal{L}(p))$；详情参见第 4 节。

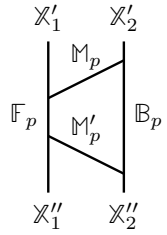
定理 3.50。 对于任意彩色链环 $\mathcal{L}$ ，以及位于颜色为 n 的某个分支 $\mathcal{L}_p$ 上的任意标记点 p ，我们有一个三重分次 Sym($X^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$)-模之间的同构

$$HHH(\mathcal{L}) \cong HHH(\bigcirc_n) \otimes \overline{HHH}(\mathcal{L}(p)).$$

证明。 通过一系列马尔可夫移动，我们可以将这对 (β, p) 化为以下形式：



这里我们为作用在 $F(\beta')$ 上的各种字母表标注了名称。我们用 $\mathbb{X}$、$\mathbb{X}'$ 和 $\mathbb{X}''$ 分别表示所有与 $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{X}'_1$ 和 $\mathbb{X}''_1$ 处于相同高度的字母表之和。我们还将使用以下记号，表示与左下交叉对应的 Rickard 复形中的网里出现的字母表：



由于 $\mathbb{X}'_1$、$\mathbb{X}'_2$、$\mathbb{X}''_1$ 和 $\mathbb{X}''_2$ 的基数都相同，均为 n，我们可以在将 $\mathcal{S}_\beta$ （因此也包括 $\mathcal{V}_\beta$）写成多项式代数时，选择消去字母表 $\mathbb{X}'_1$ ，从而得到同构

$$\mathcal{S}_\beta \cong \mathcal{S}_{\beta'} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2); \quad \mathcal{V}_\beta \cong \mathcal{V}_{\beta'} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}_p).$$

于是 $\overline{\mathcal{S}_\beta(p)} \cong \mathcal{S}_{\beta'} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_2)$。通常，$\mathcal{S}_\beta \cong \mathcal{S}_\beta(p)\,\overline{\otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1)}$，因此我们有包含映射和投影映射 $\iota\colon \mathcal{S}_\beta(p) \hookrightarrow \mathcal{S}_\beta$ 及 $\overline{\pi\colon \mathcal{S}_\beta \to \mathcal{S}_\beta(p)}$。我们将诱导出的标量扩张函子 $i_!$ 和 $\pi_!$ 记为（导出范畴的同伦范畴上的）：

$$i_! := - \otimes_{\overline{\mathcal{S}_\beta(p)}} \mathcal{S}_\beta = - \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1); \quad \pi_! := - \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{S}_\beta} \overline{\mathcal{S}_\beta(p)}.$$

用此记号， $\mathcal{L}$ 在 p 处的约化 HOMFLY 同调恰为

$$\overline{HHH}(\mathcal{L}(p)) := H(HH_{\neg p}(\pi_!(F(\beta)))).$$

令 $\overline{\mathcal{V}_\beta(p)} := \pi_!(\overline{\mathcal{S}_\beta(p)})$；则 $\mathcal{V}_\beta(p)\overline{\cong \mathcal{V}_{\beta'} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}p)}$，且 $\mathcal{V}_\beta \cong \mathcal{V}_\beta(p)\,\overline{\otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1)}$。对于 β 的 Rickard 分解中出现的每个网 $W_{\vec{k}}$ ，我们将 k_p 记为存留生成元 [4] $e_i(\mathbb{B}p)$ 的最高次数，并将相应的网记为 $W_{\vec{k}-k_p}$ ；该网出现在 β' 的 Rickard 分解中。我们指出， $W_{\vec{k}-k_p} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}p)$ 同构于 $\mathcal{V}_\beta$ 对所有未由与 β 的左下交叉相关联的理想 $\mathcal{J}_{k_p}$ 产生的 $\mathcal{J}_{\vec{k}}$ 生成元取商所得的商。

对于每一种分解选择 k， $\mathcal{J}_{\vec{k}}$ 的几乎所有生成元都属于 $\mathcal{V}_\beta(p)$。唯一的例外是这族生成元

$$\{e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2) - e_i(\mathbb{X}''_1 + \mathbb{X}''_2) \mid n < i \leq k_p\}. \tag{3.3}$$

[4]或者说，就是命题 3.4 的传统网图描述中的弦标记。

在 $\mathcal{V}_\beta$ 中，对于所有 $1 \le i \le n$，我们已经有 $e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2) = e_i(\mathbb{X}''_1 + \mathbb{X}''_2)$。由于对于所有$j \neq 1$，2，都有 $\mathbb{X}'_j = \mathbb{X}''_j$，我们也有 $e_i(\mathbb{X}') = e_i(\mathbb{X}'') \in \mathcal{V}_\beta$。经过商 $W_{\vec{k}-k_p} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}_p)$ 后，由引理 3.45 应用于 β'，得到 $e_i(\mathbb{X}) = e_i(\mathbb{X}') = e_i(\mathbb{X}'')$。再对 $\langle \mathbb{X}_j - \mathbb{X}''_j \mid j \neq 1\rangle$ 取商后，对于每个 j，都有 $e_j(\mathbb{X} - \mathbb{X}_1) = e_j(\mathbb{X}'' - \mathbb{X}''_1)$。总之，我们得到

$$\begin{aligned} e_i(\mathbb{X}) &= \sum_{j+k=i} e_j(\mathbb{X}_1) e_k(\mathbb{X} - \mathbb{X}_1) \\ &= \sum_{j+k=i} e_j(\mathbb{X}'_1) e_k(\mathbb{X}'' - \mathbb{X}''_1) \\ = e_i(\mathbb{X}'') &= \sum_{j+k=i} e_j(\mathbb{X}''_1) e_k(\mathbb{X}'' - \mathbb{X}''_1) \in \left(W_{\vec{k}-k_p} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}_p)\right) / \langle \mathbb{X}_j - \mathbb{X}''_j \mid j \neq 1\rangle. \end{aligned}$$

消去左右两边的项 $e_k(\mathbb{X}'' - \mathbb{X}''_1)$，可见对于该商中的所有 $1 \le j \le n$，都有 $e_j(\mathbb{X}'_1) = e_j(\mathbb{X}''_1)$。根据关系 $e_i(\mathbb{X}'_1 + \mathbb{X}'_2) = e_j(\mathbb{X}''_1 + \mathbb{X}''_2)$（其中 $1 \le i \le n$），这也必然推出 $e_j(\mathbb{X}'_2) = e_j(\mathbb{X}''_2)$。因此，从 (3.3) 得到的每个生成元在取商$\left(W_{\vec{k}-k_p} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1|\mathbb{X}''_2|\mathbb{B}_p)\right) / \langle \mathbb{X}_j - \mathbb{X}''_j \mid j \neq 1\rangle$后都消失。

现在，该商的分母中的每个生成元都对应于复形的 Koszul 微分中不由 $\mathcal{J}_{k_p}$产生的一项

$$HH_{\neg p}(W_{\vec{k}}) \cong K_a(\mathcal{V}_\beta; \mathcal{J}_{\vec{k}} \sqcup \{\mathbb{X}_j - \mathbb{X}''_j \mid j \neq 1\}).$$

因此，我们可以在该复形中进行行变换，将微分中的项 (3.3) 替换为 0。微分中其余所有项都属于 $\mathcal{V}_\beta(p)$，因此应用合成 $i_! \circ \pi_!$ 不会改变它们。由于 $\mathcal{V}_\beta \cong \underline{\mathcal{V}_\beta(p)} \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1)$ 在 $\overline{i_! \circ \pi_!}$ 作用下也保持不变，我们得到

$$i_! \circ \pi_! \left(HH_{\neg p}(W_{\vec{k}})\right) \cong HH_{\neg p}(W_{\vec{k}}).$$

应用这 些拟同构于每个同调次数，我们得到一个同伦等价

$$i_! \circ \pi_! \left(HH_{\neg p}(F(\beta))\right) \simeq HH_{\neg p}(F(\beta)).$$

根据命题 3.47 的证明，这诱导出一个同构

$$HHH(\mathcal{L}) = H(HH(F(\beta))) \cong \prod_{i=1}^{n} (1 + aq^{-2i}) H\left(i_! \circ \pi_! \left(HH_{\neg p}(F(\beta))\right)\right)$$

现在，由于 $\mathcal{S}_\beta$ 是一个$\overline{\text{平坦}}$的 $\mathcal{S}_\beta(p)$-模， $i_!$ 是正合的，因此与取同调可交换。此外， $HH_{\neg p}$ 只是转为 Koszul 复形，因此它与 $\pi_!$可交换。于是，我们可以将上述同构改写为

$$\begin{aligned} HHH(\mathcal{L}) &\cong \prod_{i=1}^{n} (1 + aq^{-2i}) i_! \left(H\left(HH_{\neg p}\left(\pi_!(F(\beta))\right)\right)\right) \\ &\cong \prod_{i=1}^{n} (1 + aq^{-2i}) \overline{HHH}(\mathcal{L}(p)) \otimes_R \mathrm{Sym}(\mathbb{X}''_1) \\ &\cong \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1 + aq^{-2i}}{1 - q^{2i}}\right) \overline{HHH}(\mathcal{L}(p)). \end{aligned}$$

最后，由于上述所有同构都是 Sym(X$^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$)-等变的，因此这是一个三重分次的 Sym(X$^{\mathcal{L}-\mathcal{L}_p}$)-模同构。□

与无色情形一样，我们立即得到以下推论：

推论 3.51. $HHH(\overline{\mathcal{L}(p)}) \cong HHH(\overline{\mathcal{L}(p')})$作为三重分次的 R-模，适用于任意两个位于 $\mathcal{L}$ 的分支上的标记点p, p' 且这两个分支具有相同的颜色。

4. Torus Links

4.1. 约化彩色环面纽结同调。 带色 HOMFLY 同调有许多不同的形式。第 3 节所述的不变量是内在着色的同调，定义时使用奇异 Soergel 双模的 Rickard 复形。此外还有投影子着色的同调，其定义是将一条 k颜色的股替换为由 k条 1 彩色股组成的缆绕，再插入一种称为范畴化投影算子的特定复形；参见 [Hog18、AH17、Cau17、EH17、Con25]。这两种类型都允许一种称为 y化的变形；关于内在着色情形中的这种变形，参见 [GH22、HRW24]；关于投影子着色情形，参见 [Con24b、BGHW25] 。在 [GW23], 中，Gorsky–Wedrich 构造了某种可称为不变量着色的同调，其中，着色通过取缆绕的 HOMFLY 同调在对称群作用下的不变量来体现。探索不同不变量及其关系的全貌，是一个有趣的问题。对于有限秩 $\mathfrak{gl}(N)$-同调，得益于范畴表示论和斜 Howe 对偶这一工具箱，相应的问题在很大程度上已经解决；相关讨论参见例如 [MW18、BHPW23、vM25] 。

我们在 [Con25] 中建立了投影子着色与内禀彩色 HOMFLY 同调各种版本之间的同构，包括前者的有限与无限版本，以及这两类同调的变形，因此，对于给定的链环，可以利用其中任意一种来确定其他各类不变量。定理 3.50 使我们能够将约化 HOMFLY 同调也纳入这一列表。

特别地，我们在 [Con24b] 中直接计算了所有正环面纽结的 y-化无限投影子着色 HOMFLY 同调。借助定理 3.50，我们可以利用这一系列同构来计算这些纽结的约化同调。

记号 4.1。 对于每个 $m, n \geq 0$，令 $d := \gcd(m, n)$。我们将 $T(m, n)_{k_1,\dots,k_d}$ 表示为分支着色为 $k_1, \dots, k_d$ 的正环面链环 $T(m, n)$，并定义

$$\mathcal{P}(m,n)_{k_1,\dots,k_d}(A,Q,T) := \dim\left(\overline{HHH}\big(T(m,n)_{k_1,\dots,k_d}(p)\big)\right)$$

其中我们始终假设 p 位于 $T(m, n)$ 的 k_1 颜色分支上。

定理 4.2. 对于每一对满足 $|v| = |w| = l$ 的 $v \in \{0,1\}^{l+m}$ 和 $w \in \{0,1\}^{l+n}$，以及每个 $\sigma \in \mathfrak{S}_l$，令$p_\sigma(v, w) \in \mathbb{N}[[A, Q, T]]$ 为满足以下递归关系的唯一幂级数：

(1) $p_e(0^m, \emptyset) = \left(\dfrac{1+A}{(1-Q)(1-T)}\right)^m$ and $p_e(\emptyset, 0^n) = \left(\dfrac{1+A}{(1-Q)(1-T)}\right)^n$;

(2) $p_e(0^m 1, 0^n 1) = \left(\dfrac{1+A}{(1-Q)(1-T)}\right) p_e(0^m, 0^n)$ for all $m, n \geq 0$;

(3) $p_\sigma(v1, w1) = \left(\dfrac{Q^l + A}{1-Q}\right) p_{Tr(\sigma)}(v, w)$ if $l \geq 1$ and $\sigma(n) = n$;

(4) $p_\sigma(v1, w1) = (Q^l + A) p_{Tr(\sigma)}(v, w)$ if $l \geq 1$ and $\sigma(n) \neq n$;

(5) $p_\sigma(v0, w1) = p_{\sigma\pi_{(10^{l-1})}}(v, 1w)$ if $l \geq 1$;

(6) $p_\sigma(v1, w0) = p_{\pi_{(10^{l-1})}\sigma}(1v, w)$ if $l \geq 1$;

(7) $p_e(0^m, 0^n) = p_e(10^{m-1}, 10^{n-1})$ for all $m, n \geq 1$;

(8) $p_\sigma(v0,\ w0) = Q^{-l}p_{e_1\sqcup\sigma}(1v,\ 1w) + Q^{-l}Tp_\sigma(0v,\ 0w)$ 如果 $l \geq 1$。

对于每个 $k \geq 0$，令

$$f(k) := [k]!\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1+AQ^{1-i}}{1-Q^i}\right).$$

进一步，对于每个 $k,\ m,\ n \geq 1$，令 $d =$最大公因数$(m,\ n)$，并且

$$v_k := 1^k 0^{md^{-1}(d-1)+k(md^{-1}-1)};\quad w_k := 1^k 0^{nd^{-1}(d-1)+k(nd^{-1}-1)}.$$

那么，对于所有 $k,\ m,\ n$，我们有

$$\mathcal{P}(m,n)_{k,1,\dots,1} = (1-T)^d f(k)^{-1} p_e(v_k, w_k).$$

注记 4.3. 对于专家，我们简要说明定理 4.2 中的乘性修正项。来自 $f(k)$ 的因子 $[k]!$ 源于从投影子着色同调转到内在着色同调，而 $\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1+AQ^{1-i}}{1-Q^{2i}}\right)$ 则源于像定理 3.50 那样除以平凡结的着色同调的维数。$1-T$的因子有两个来源。对于未着色分支，这恰好修正了 y-化复形中多项式环 $R[y]$ 的维数；这一效应总共贡献一个因子 $(1-T)^{d-1}$。剩余的因子 $1-T$来自将一条 1-着色股替换为单股上的重归一化 有限列投影子（参见 [Con25]中的注记 4.14）。

4.2. **双重分次指数增长**。本节旨在证明我们的第二个主要定理：

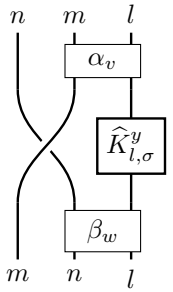
定理 4.4。对于任意 $m,\ n \geq 1$ 若 gcd$(m,\ n) = 1$，则该 k色正环面纽结的约化 HOMFLY 同调满足

$$\mathcal{P}(m,n)_k\Big|_{Q=1} = \left(\mathcal{P}(m,n)_1\Big|_{Q=1}\right)^k. \tag{4.1}$$

我们将通过在定理 4.2 的递归中直接代入 $Q=1$ 来证明定理 4.4。规则 (1)、(2) 和 (3) 的分母中的项$1-Q$ 带来了一些我们必须克服的困难。为此，我们需要讨论这个递归中出现的置换。我们将简要讨论；更多细节请见 [Con24b]。

函数 $p_\sigma(v,\ w)$ 作为某些复形 $\mathbf{C}^y(v,\ w)_\sigma$ 的 Hochschild 同调的 y-化维数出现，这些复形来自 [Con24b]。复形的构造如下：

$\mathbf{C}^y(v,\ w)_\sigma :=$



在此语境中，标签 m，n，l 表示 1 彩色股的（黑板框架）缆绕以及非彩色股[5]。 α_v 和 β_w 分别是作用于 $m+l$ 股和 $n+l$ 股的洗牌辫，它们是某些洗牌置换 π_v 和 π_w 的正辫提升，而这些置换可以从 v 和 w中读出。在这一对应下， v 和 w 中的数字分别准确对应于从顶部和底部进入 α_v 和 β_w 的股，并按从左到右的顺序读取。复形 $\widehat{K}^y_{l,\sigma}$ 是 [Con24b] 的重规范化扭曲有限 y- 化列投影算子。其正合形式对我们的目的并不重要；重要的是，它具有一个相应的置换 σ。

一个 y-化复形的定义的一部分，是在 n 股上附带一个置换 $\omega \in \mathfrak{S}_n$；我们通常可以将其视为一个明确的置换，它把底部的股映射到顶部的股。我们可以为每组三元输入数据指定相应的置换 $\omega(v, w, \sigma) \in \mathfrak{S}_{m+l+n}$，它是$\mathbf{C}^y(v, w)_\sigma$的底层置换。这样，我们就可以按照这些股所在的轨道 $\omega(v, w, \sigma)$，对$\mathbf{C}^y(v, w)_\sigma$中的股，以及 v和 w的数字进行分组。

定理 4.2 中的规则 (1)-(8) 各自对应于对复形$\mathbf{C}^y(v, w)_\sigma$的某种明确操作；执行这些操作时，我们可以追踪 $\omega(v, w, \sigma)$ 的变化。下列性质对于这种变化至关重要；它们可以直接从 [Con24b] 的描述中读出。

引理 4.5。 置换 $\omega(v, w, \sigma)$ 满足：

(1) $\omega(v_k, w_k, e)$ 对所有 k，m，n 恰好有 dk 个轨道，其中 $d = \gcd(m, n)$。 (2) 定理 4.2 的递归中的规则（1）、（2）和（3）仅在 $\omega(v, w, \sigma)$ 的轨道数减少 1 时恰好应用。 (3) v 和 w 的末位数字始终对应于位于同一轨道中的 $\omega(v, w, \sigma)$ 的股。 (4) 不涉及给定递归规则的所有数字，在应用该规则前后都保持在同一轨道中。 (5) 当 v 或 w 的一个数字（使用规则（5）、（6）、（7）和（8））从其字符串末尾移到开头时，与该数字对应的股所在的轨道不发生变化。

现在我们已经准备好陈述递归的一个简化形式，该形式可直接计算 $\mathcal{P}(m, n)_k\Big|_{Q=1}$。

命题 4.6。 对于如定理 4.2 中的每个 v，w，令 $\widetilde{p}(v, w) \in \mathbf{N}[A, T]$ 为满足以下递归关系的唯一多项式：

(1) $\widetilde{p}(0^m, \emptyset) = (1+A)^m$ 且 $\widetilde{p}(\emptyset, 0^n) = (1+A)^n$；
(2) $\widetilde{p}(v1, w1) = (1+A)\widetilde{p}(v, w)$；(3) $\widetilde{p}(v0, w1) = \widetilde{p}(v, 1w)$；(4) $\widetilde{p}(v1, w0) = \widetilde{p}(1v, w)$；(5) 对于 $m, n \geq 1$，$\widetilde{p}(0^m, 0^n) = \widetilde{p}(10^{m-1}, 10^{n-1})$；(6) 如果 $l \geq 1$，则 $\widetilde{p}(v0, w0) = \widetilde{p}(1v, 1w) + T\widetilde{p}(0v, 0w)$。

那么，对于每个 $k, m, n \geq 1$，若 $\gcd(m, n) = 1$，则有

$$\mathcal{P}(m, n)_k\Big|_{Q=1} = (1+A)^{-k}\widetilde{p}(v_k, w_k).$$

证明。 我们先处理定理 4.2 中的因子 $f(k)^{-1}$。通过对分母进行因式分解，我们可以化简 $f(k)$，得到

$$f(k) = [k]!\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1+AQ^{1-i}}{1-Q^i}\right)$$

[5]可以这样理解：所得的复形不会是平衡的，因为一般而言 $(n, m, l) \neq (m, n, l)$。

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{[i]}{1+Q+\cdots+Q^{i-1}}\right)\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1+AQ^{1-i}}{1-Q}\right)$$
$$= Q^{\bullet}(1-Q)^{k}\left(\prod_{i=1}^{k} 1+AQ^{1-i}\right)$$

至多相差一个形如 $Q^{\bullet}$ 的整体平移。引理 4.5 的前两个性质保证， $p_e(v_k,\ w_k)$ 的每个求和项的分母中出现的 $1-Q$ 的幂恰为 k，因此我们可以将这些因子与 $f(k)$ 中的因子 $(1-Q)^k$ 约去。

完成这一步抵消后，我们可以在定理 4.2 中直接设定 $Q=1$ 。这会将定理 4.2 的修正项 $(1-T)f(k)^{-1}$ 转化为 $(1-T)(1+A)^{-k}$。这也合并了定理 4.2 的规则（ 3 ）和（ 4 ），使它们现在都写作 $p_\sigma(v1,\ w1) = (1+A)^{p_{Tr(\sigma)}(v,\ w)}$。由于这两条规则是递归中仅有的依赖置换 σ 的情形，我们现在可以完全去掉 σ 。定理 4.2 的规则（5）、（6）、（7）和（8）现在分别成为新的规则（4）、（5）、（6）和（7）。

最后，我们希望将新修正项中的因子 $1-T$ 与定理 4.2 中规则（1）和（2）的分母所剩下的因子 $1-T$ 抵消。事实上，乘以 $f(k)^{-1}$ 并设定 $Q=1$ 后，我们可以按照 $p_e(v_k,\ w_k)$ 各项分母中出现的 $1-T$ 的幂对这些加项分组：

$$\left(f(k)^{-1}p_e(v_k,w_k)\right)\Big|_{Q=1} = \sum_{r\geq 0}\frac{p_e(v_k,w_k)_r}{(1-T)^r}.$$

定理 4.2 的递归只能通过应用规则（1）或（2）结束，因此必有 $p_e(v_k,w_k)_0=0$。同时，乘以修正项 $1-T$ 后，我们得到

$$\mathcal{P}(m,n)_k\Big|_{Q=1} = \sum_{r\geq 1}\frac{p_e(v,w)_r}{(1-T)^{r-1}}.$$

根据命题 3.49， $HHH(T(m,n)_k(p))$ 总是有限维的，因此 $\mathcal{P}(m,n)_k\Big|_{Q=1}$ 是关于 A 和 T 的多项式，而不是形式幂级数。因此，上述求和中指标为 $r\geq 2$ 的各项必定相互抵消。由于每个分子 $p_e(v_k,w_k)_r$ 都只有正系数，这种抵消唯一可能的方式是对所有 $r\geq 2$，都有 $p_e(v_k,w_k)_r=0$ 。那么， $\left(f(k)^{-1}p_e(v,w)\right)|_{Q=1}$ 的每一项的分母都必定恰为 $1-T$，因此我们可以在递归和修正项中都忽略这一因子。□

回顾一下，对于每一对序列 $v,\ w$ 以及置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_l$的选择，我们可以根据 $\omega(v,\ w,\ \sigma)$的轨道，对 v和 w 的数字进行划分。我们将 v 和 w 中属于该轨道 i^{th} 的子序列分别记为 v^i_σ和 w^i_σ。这种划分取决于置换 σ的选择。

引理 4.7。 对于每个 $\sigma\in\mathfrak{S}_l$，如果计算 $\widetilde{p}(v,\ w)$ 以及每个 $\widetilde{p}(v^i_\sigma,\ w^i_\sigma)$ 的递归过程从未使用命题 4.6 的规则 (5)，那么 $\widetilde{p}(v,\ w)=\prod_i\widetilde{p}(v^i_\sigma,\ w^i_\sigma)$。

证明。 我们考察命题 4.6 中每条规则对乘积 $\prod_i\widetilde{p}(v^i_\sigma,\ w^i_\sigma)$ 的影响，首先从规则（1）开始。

规则（1）： 如果 w 为空（因此 $v=0^m$），那么对于每个 i，子序列 w^i 也为空，而 v的每个子序列都具有 $v^i=0^{n_i}$的形式。因此， $\widetilde{p}(v,\emptyset)=(1+A)^m$，而 $\widetilde{p}(v^i,\emptyset)=(1+A)^{n_i}$。现在注意到 $\sum_i n_i=m$，所以在这种情况下，所需的乘法性成立。

规则（2）、（3）、（4）和（6）： 这些规则中的每一条都会将一对 $(v,\ w)$ 替换为新对的线性组合 $(v',\ w')$，且这种修改仅取决于 v 和 w的末位数字。为了定义新的子序列 $(v')^i_{\sigma'}$，$(w')^i_{\sigma'}$，我们需要选取一个新的置换 σ'。我们按照以下方式进行

定理 4.2 中的规定；这确保引理 4.5 的性质适用。采用这一惯例后，在证明的其余部分，我们省略置换，只写作 v^i 和 w^i。

在每一步中，根据引理 4.5 的性质 (3)，v 和 w 的末位数字都属于相同的轨道 v^i、w^i。如果将这些数字循环移到序列开头，形成 v' 和 w'（如规则 (3)、(4) 和 (6) 所示），那么根据引理 4.5 的性质 (5)，循环移入的数字随后必须属于 $(v')^i$ 和 $(w')^i$。根据引理 4.5 的性质 (4)，其他子序列保持不变；也就是说，对于所有 $j \neq i$，$(v^j, w^j) = ((v')^j, (w')^j)$。

总而言之，这些规则中的每一条只变换一对子序列 (v^i, w^i)，并且其变换方式恰好重现了对子序列 (v, w) 的变换。因此，我们可以将这些规则视为独立地作用于乘积中的相关因子 $p(v^i, w^i)$，同时保持其他因子不变。□

定理 *4.4* 的证明。：由命题 4.6，只需证明

$$\widetilde{p}(v_k, w_k) = \widetilde{p}(v_1, w_1)^k.$$

对复形 $\mathbf{C}^y(v_k,\ w_k)_e$ 作简单分析可知 $(v_k)_e^i = (10^{m-1}) = v_1$ 且 $(w_k)_e^i = (10^{n-1}) = w_1$ 对每个 i 都成立。因此，如果计算 $\widetilde{p}(v_k,\ w_k)$ 的递归从未使用规则 (5)，那么应用引理 4.7 即可得出结论。

剩下要证明的是，计算 $\widetilde{p}(v_k,\ w_k)$ 的递归从未使用规则 (5)。等价地，我们要证明，这个递归过程中出现的非空序列对 $(\widetilde{v},\ \widetilde{w})$ 中，没有一对完全由 0 构成。如引理 4.7 的证明所示，其余规则都局部作用于子序列v^i 和 w^i，因此只需证明不存在完全由 0 构成的非空子序列对 $(\widetilde{v}^i,\ \widetilde{w}^i)$。由于 $(v_k^i,\ w_k^i) = (v_1,\ w_1)$，这就归结为检查在计算 $\widetilde{p}(v_1,\ w_1)$ 时是否从未使用规则 (5)。

如果我们确实在计算 $\widetilde{p}(v_1,\ w_1)$ 时使用了规则 (5)，那么在应用该规则之前的步骤中，我们就会使用规则 (2) 来计算形如 $\widetilde{p}(0^r 1,\ 0^s 1)$ 的项。这里置换 σ 只有一种选择，即平凡置换。作此选择后，应用规则 (2) 会减少轨道数。由于 $\omega(v_1,\ w_1,\ e)$ 起初只有一个轨道，且没有任何规则会增加轨道数，因此最终必然得到一个空序列。由此可知，规则 (5) 从未被使用。□

4.2.1. $T(2,\ 2n+1)$。对于环面纽结 $T(2,\ 2n+1)$，我们可以应用命题 4.6 的递归，得到 HHH 的双重分次维数的闭式表达式，其中令 $Q = 1$。

定理 4.8. 对于每个 $n, k \geq 1$，我们有

$$\mathcal{P}(2, 2n+1)_k\Big|_{Q=1} = \left(T^n + (1+A)\sum_{j=0}^{n-1} T^j\right)^k.$$

证明. 根据定理 4.4，只需证明 $\mathcal{P}(2, 2n+1)_1\Big|_{Q=1} = T^n + (1+A)\sum_{j=0}^{n-1} T^j$。根据命题 4.6，我们有

$$\mathcal{P}(2, 2n+1)_1\Big|_{Q=1} = (1+A)^{-1}\widetilde{p}(10, 10^{2n}).$$

我们利用命题 4.6 的递归来显式计算 $\widetilde{p}(10, 10^{2n})$。通过先应用规则（6），再应用规则（4），可以简化任何形如 $\widetilde{p}(10, w00)$ 的表达式，得到

$$\widetilde{p}(10, w00) = \widetilde{p}(11, 1w0) + T\widetilde{p}(01, 0w0) = \widetilde{p}(11, 1w) + T\widetilde{p}(10, 0w). \tag{4.2}$$

特别地，当 $w = 10^{2(n-1)}$ 时，我们可以应用（4.2），得到

$$\widetilde{p}(10, 10^{2n}) = \widetilde{p}(11, 110^{2(n-1)}) + T\widetilde{p}(10, 010^{2(n-1)}).$$

现在，如果 $n>1$，我们可以取 $w=10^{2(n-2)}$，再次对第二个加数应用（4.2）。这一过程持续进行，直到 10^{2n} 的所有末尾 0 都被耗尽，从而得到

$$\widetilde{p}(10,10^{2n})=\left(\sum_{j=0}^{n-1}T^j\widetilde{p}(11,10^j10^{2(n-1-j)})\right)+T^n\widetilde{p}(10,0^n1).$$

通过反复应用规则 (2) 和规则 (4)，我们最终看到，对于任意 w，都有 $\widetilde{p}(11,w)=(1+A)^2$。与此同时，根据规则（3），我们有 $\widetilde{p}(10,0^n1)=\widetilde{p}(1,10^n)$，经过应用规则 (4) n 次和应用规则 (2) 1 次后，该式化为 $1+A$。总而言之，我们看到

$$\widetilde{p}(10,10^{2n})=\left(\sum_{j=0}^{n-1}T^j(1+A)^2\right)+T^n(1+A)=(1+A)\left(T^n+(1+A)\sum_{j=0}^{n-1}T^j\right).$$

乘以 $(1+A)^{-1}$ 后，恰好得到所需结果。

□

注记 4.9。 </style}在 GGS 的第 7.2 节中，GGS 给出了 (2, $2n+1)_k\Big|_{A=0}$ 的一个猜想性闭式，将其表示为关于 Q 和 T 的多项式，其中包含 Q-二项式系数。尝试直接从定理 4.2 的递归中提取出他们的表达式，将会很有意思。

4.3. 颜色平移。 给定一个 d 分支环面链环 $T(dm,dn)$，其最大公因数 gcd(m,n) 为 $=1$。回顾一下，$T(dm,dn)$ 的每个分支都与 $T(m,n)$ 同痕。特别地，若 $m=1$ 或 $n=1$，则每个分支都与平凡结同痕，猜想 1.3 应当成立。当此类链环只有一个分支带有非平凡颜色时，我们可以根据定理 4.2 的结果检验这一猜想。回顾一下，我们用 $\mathcal{P}(dm,dn)_{k_1,\dots,k_d}$ 表示正环面链环 $T(dm,dn)$ 的约化 HOMFLY 同调的分次维数，其链环分支的颜色为 $k_1,\dots,k_d$，其中所选基点 p 总是位于带有 k_1 颜色的分支上。

4.3.1. $T(2,2n)$**。** 我们先检验形如 $T(2,2n)$ 的二分支环面链环。当 $n=1$ 时，直接计算得出如下结果：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(2,2)_{1,1}&=\frac{Q(1-T)+A+T}{1-Q};\\ \mathcal{P}(2,2)_{2,1}&=\frac{Q^2(1-T)+A+T}{1-Q};\\ \mathcal{P}(2,2)_{3,1}&=\frac{Q^3(1-T)+A+T}{1-Q};\\ \mathcal{P}(2,2)_{4,1}&=\frac{Q^4(1-T)+A+T}{1-Q}.\end{aligned}$$

这一模式表明，$T(2,2)$ 满足

$$\mathcal{P}(2,2)_{k,1}=\frac{Q^k(1-T)+A+T}{1-Q}. \tag{4.3}$$

注意，当 $k=1$ 时，我们得到 $\mathcal{P}(2,2)_{0,1}=\dfrac{1+A}{1-Q}$，这正是 1-颜色平凡结的未约化 HOMFLY 同调。我们已对所有 $k\le 100$ 验证了 (4.3)。

当 $n=2$ 时，我们得到

$$\mathcal{P}(2,4)_{1,1} = \frac{Q^2(1-T)+Q(A+T)(1-T)+T(A+T)}{1-Q};$$
$$\mathcal{P}(2,4)_{2,1} = \frac{Q^4(1-T)+Q^2(A+T)(1-T)+T(A+T)}{1-Q};$$
$$\mathcal{P}(2,4)_{3,1} = \frac{Q^6(1-T)+Q^3(A+T)(1-T)+T(A+T)}{1-Q};$$

这一模式表明， $T(2,4)$ 满足

$$\mathcal{P}(2,4)_{k,1} = \frac{Q^{2k}(1-T)+Q^k(A+T)(1-T)+T(A+T)}{1-Q}. \tag{4.4}$$

同样，当 $k=0$ 时，我们恰好得到 $\mathcal{P}(2,4)_{0,1} = \frac{1+A}{1-Q}$。我们已验证 (4.4) 对所有 $k \leq 90$ 均成立。再次，当 $n=3$ 时，我们得到

$$\mathcal{P}(2,6)_{1,1} = \frac{Q^3(1-T)+Q^2(1-T)(A+T)+QT(1-T)(A+T)+T^2(A+T)}{1-Q};$$
$$\mathcal{P}(2,6)_{2,1} = \frac{Q^6(1-T)+Q^4(1-T)(A+T)+Q^2T(1-T)(A+T)+T^2(A+T)}{1-Q};$$
$$\mathcal{P}(2,6)_{3,1} = \frac{Q^9(1-T)+Q^6(1-T)(A+T)+Q^3T(1-T)(A+T)+T^2(A+T)}{1-Q}.$$

一般而言，这表明 $T(2,6)$ 满足

$$\mathcal{P}(2,6)_{k,1} = \frac{Q^{3k}(1-T)+Q^{2k}(1-T)(A+T)+Q^kT(1-T)(A+T)+T^2(A+T)}{1-Q}. \tag{4.5}$$

我们已验证 (4.5) 对所有 $k \leq 90$ 均成立。

上述结果还显示出 n 的某种规律性，这表明 k-着色的 $T(2,2n)$ 满足

$$\mathcal{P}(2,2n)_{k,1} = \frac{Q^{nk}(1-T)+\sum_{j=1}^{n-1}Q^{jk}T^{n-j-1}(1-T)(A+T)+T^{n-1}(A+T)}{1-Q}. \tag{4.6}$$

将 $k=0$ 代入 (4.6) 确实可得 $\mathcal{P}(2,2n)_{0,1} = \frac{1+A}{1-Q}$。我们已验证 (4.6) 对所有 $n \leq 15$ 和 $k \leq 20$ 均成立。

4.3.2. $T(3,3)$. 再次通过直接计算，我们得到

$$\mathcal{P}(3,3)_{1,1,1} = \frac{Q^3(1-T)^2+Q^2(A+T)(1-T)^2+Q((A+T)(1-T^2)+T(A+T)(1-T))+(A+T^2)(A+T)}{(1-Q)^2};$$
$$\mathcal{P}(3,3)_{2,1,1} = \frac{Q^5(1-T)^2+Q^3(A+T)(1-T)^2+Q^2(A+T)(1-T^2)+QT(A+T)(1-T)+(A+T^2)(A+T)}{(1-Q)^2}.$$

这表明 $T(3,3)$ 满足

$$(4.7)\quad (1-Q)^2\mathcal{P}(3,3)_{k,1,1} = Q^{2k}(Q(1-T)^2) + Q^k(Q(T+A)(1-T)^2 + (A+T)(1-T^2)) + QT(A+T)(1-T) + (A+T^2)(A+T)$$

我们已对所有 $k \le 90$ 验证了 (4.7)。

注 4.10。(4.6) 与 (4.7) 之间存在明显的相似之处，二者似乎都由几个简单的部分构成。这暗示着可能存在某种简洁的闭式表达式，用于$\mathcal{P}(n,\ dn)_{k,\ 1,\ \ldots,\ 1}$。从某种意义上说，这并不那么令人意外；这类链环的辫子表示由全扭转辫的幂给出，而这些辫子尤其适合采用通常的方法计算无色 HOMFLY 同调。参见例如 [Hog17、EH19、GNR21]。我们在此不再进一步探讨这一思路。

References

[AH17] M. Abel 和 M. Hogancamp. 范畴化杨对称化子与环面链环稳定同调 II. *Math. (N.S.)* 23 3 1739 1801, 2017 1510 05330 *Sel.* , ( ): – .

arXiv: . .[BGHW25] W. Ballinger, E. Gorsky, M. Hogancamp 和 J. Wang. 环面纽结的稳定变形同调. arXiv:2507.00175, 2025.[BHPW23] A. Beliakova, M. Hogancamp, K. Putyra 和 S. Wehrli. 关于彩色环状 sl(2) 结同调的统一. arXiv:2305.02977, 2023.[BPRW25] A. Beliakova, K. Putyra, L. Robert 和 E. Wagner. Dunfield–Gukov–Rasmussen 猜想的证明. *JEMS*, 2025. [Cau17] S. Cautis. 关于彩色三重分次链环不变量的评述. *Algebr. Geom. Topol*, 17:3811–3836, 2017. arXiv:1611.09924.[CKM14] S. Cautis, J. Kamnitzer 和 S. Morrison. 网与量子斜 Howe 对偶. *Math. Ann.*, 360(1-2):351–390, 2014. arXiv:1210.6437.[Con24a] L. Conners. 彩色环面结同调软件, 2024. https://github.com/lukegconners/Colored-Torus-Knot-Homology. [Con24b] L. Conners. 彩色环面结同调的行列镜像对称. *Sel. Math. (N.S.)*, 30(97), 2024. [Con25] L. Conners. Fray 函子与彩色 HOMFLYPT 同调的等价. *Quantum Topol.*, 2025. 即将出版.[DGR06] N. Dunfield, S. Gukov 和 J. Rasmussen. 结同调的超多项式. *Exp. Math.*, 15(2):129– 159, 2006. arXiv:math/0505662. [EH17] B. Elias 和 M. Hogancamp. 全扭转的范畴化对角化. arXiv:1801.00191, 2017. [EH19] B. Elias 和 M. Hogancamp. 关于环面链环同调的计算 . *Compos. Math.*, 2019. arXiv:1603.00407.[GGS18] E. Gorsky, S. Gukov 和 M. Stošić. *Fund. Math.* 243 209 299, c. 结的四重分次彩色同调. 2018 1304 3481 , : – . arXiv: . .[GH22] E. Gorsky 和 M. Hogancamp. 希尔伯特概形与 Khovanov-Rozansky 同调的 y 化. *Geom. Topol.* 26 587 678, 2022 1712 03938 , : – . ar

Xiv: . .[GHM21] E. Gorsky, M. Hogancamp 和 A. Mellit. Khovanov-Rozansky 同调中的典范类与对称性. arXiv:2103.01212, 2021. [GNR21] E. Gorsky, A. Negut 和 J. Rasmussen. 旗希尔伯特概形、彩色投影子与 Khovanov-Rozansky 同调. *Advances in Mathematics*, 378, 2021. arXiv:1608.07308. [GNS+16] S. Gukov, S. Nawata, I. Saberi, M. Stošić 和 P. Sulkowski. BPS 谱的序列化. *J. High Energ. Phys.*, 4 2016, .[GS12] S. Gukov 和 M. Stošić. 结的同调代数与 BPS 态. *Geometry & Topology Monographs*, 18 309 1112 0030 : –367, 2012. arXiv: . .[GSV05] S. Gukov, A. Schwarz 和 C. Vafa. Khovanov-Rozansky 同调与拓扑弦. *Lett. Math Phys*, 74 53 74, 2005: – .[GW23] E. Gorsky 和 P. Wedrich. 环状 Khovanov-Rozansky 同调的求值. *Math. Z.*, 303(25), 2023. [HM19] M. Hogancamp 和 A. Mellit. 环面链环同调. arXiv:1909.00418, 2019. [Hog17] M. Hogancamp. Khovanov-Rozansky 同调与高阶卡塔兰数列. arXiv:1704.01562, 2017.

[Hog18] M. Hogancamp. 范畴化杨对称化子与环面链环稳定同调. *Geom. Topol.*, 22:2943– 3002, 2018. arXiv:1505.08148.[HRW21] M. Hogancamp, D. E. V. Rose 和 P. Wedrich. 奇异 Soergel 双模的 skein 关系. *Sel. Math.* , . arXiv: . . [*(N.S.)* 2021 2107 08117
HRW24] M. Hogancamp, D. E. V. Rose 和 P. Wedrich. 着色 Khovanov–Rozansky 同调的链环分裂变形. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 129(e12620), 2024. arXiv:2107.09590. [Kho07] M. Khovanov. 三重分次链环同调与 Soergel 双模的 Hochschild 同调. *Int. J. Math.*, 18 8 869 0510265 ( ): –885, 2007. arXiv:math/ . [KR08a] M. Khovanov 和 L. Rozansky. 矩阵分解与链环同调. *Fund. Math.*, 199:1–91, 2008. [KR08b] M. Khovanov 和 L. Rozansky. 矩阵分解与链环同调 II. *Geom. Topol.*, 12 1425, 2008 3 1387 0401268 ( ): – . arXiv:math/ . [LP09] K. Liu 和 P. Peng. Labastida-Marino-Ooguri-Vafa 猜想的证明. arXiv:0704.1526, 2009. ˜LP[K. Liu 和 P. Peng. 结不变量的新结构. *Commun. Number Theory*, 5(3):601–615, 2011. [Mat80] H. Matsumura. *Commutative Algebra*, *Mathematics Lecture Note Series*第 56 卷. Benjamin/Cummings 出版公司, 马萨诸塞州雷丁, 第 2 版, 1980. [MSV11] M. Mackaay, M. Sto˘si´c 和 P. Vaz. 1,2-着色 HOMFLY-PT 链环同调. *Trans. Am. Math. Soc.*, 363 4 2091 2124, 2011 0809 0193 ( ): – . arXiv: . . [MW18] M. Mackaay 和 B. Webster. 斜 Howe 对偶的范畴化与结同调的比较. *Adv.* , : – .[OR18] *Math.* 330 876 945, 2018
A. Oblomkov 和 L. Rozansky. 结同调与平面点的希尔伯特概形上的层. *Sel. Math.*, 24:2351–2454, 2018. arXiv:1608.03227. [OR19] A. Oblomkov 和 L. Rozansky. 可对偶链环同调. arXiv:1905.06511, 2019. [OR20] A. Oblomkov 和 L. Rozansky. Soergel 双模与矩阵分解. arXiv:2010.14546, 2020. [QRS18] H. Queffelec, D. Rose 和 A. Sartori. 环带求值与链环同调. arXiv:1802.04131, 2018. [Ras15] J. Rasmussen. Khovanov-Rozansky 同调上的一些微分. *Geom. Topol.*, 19(6):3031–3104, 2015. arXiv:0607544.[RW20] L. Robert 和 E. Wagner. 对称 Khovanov–Rozansky 链环同调. *J. Éc. polytech., Math.*, 7:573– 651, 2020. [RW22] L. Robert 和 E. Wagner. 亚历山大多项式的量子范畴化. *Geom. Topol.*, 26, 2022. [vM25] K. von Merkl. 着色 Khovanov 同调的计算. arXiv:2505.03916, 2025. [Wed16] P. Wedrich. 着色有理缠结的范畴化 sl(N) 不变量. *Algebr. Geom. Topol.*, 16:427–482, 2016. [Wed19] P. Wedrich. 着色 HOMFLY-PT 同调的指数增长. *Adv. Math.*, 2019. arXiv:1602.02769. [WW17] B. Webster 和 G. Williamson. 着色 HOMFLYPT 同调的几何构造. *Geom. Topol.*, 21 2557 2600, 2017 0905 0486 : – . arXiv: . .

Institute of Mathematics, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-0857 Zürich
Email address: luke.conners@math.uzh.ch