arXiv:2512.20646v1 [math.GM] 13 Dec 2025

展开为Clifford长椭球波函数

Hamed Baghal Ghaffari[a]，Ahmed Souabni[b]

[a]纽卡斯尔大学数学与物理科学学院，澳大利亚新南威尔士州卡拉汉 *2308*[b]迦太基大学比塞大科学学院，突尼斯

摘要

本文通过相应特征值研究Clifford长椭球波函数（CPSWF）的性质。我们证明，随着阶和齐次次数的增加，CPSWF级数的展开系数会衰减。通过建立径向CPSWF与有限汉克尔变换特征函数之间的精确联系，我们推导出相应特征值的显式非渐近界，并将谱衰减估计推广到Clifford情形。因此，我们得到了带限克利福德值函数的CPSWF展开系数的超指数衰减率。数值实验展示了这些近似方法的准确性和效率。

关键词： 球面单生函数、Clifford长椭球波函数、有限汉克尔变换

*2020*年数学主题分类： 主要分类 15A67，次要分类 15A66

1. 引言

时间限函数和带限函数是信号处理中的基础工具。根据海森堡不确定性原理，信号不可能同时具备时间限和带限特性。一个自然的问题是：在带限信号中，找出在给定区间内最集中的信号。Slepian、Pollak 和 Landau 首先对这一问题进行了深入研究，

电子邮箱地址： hamed.baghalghaffari@newcastle.edu.au (Hamed Baghal Ghaffari), souabniahmed@bizerte.r-iset.tn (Ahmed Souabni)

他们在20世纪60年代的开创性著作中引入了长椭球波函数（PSWFs）作为该问题的解[1, 2, 3, 4]。

长椭球波函数凭借其极强的集中性质，以及作为最优带限基的作用，在逼近理论中占据核心地位。

我们重点关注 Slepian 在 [4], 提出的扩展，其中时频集中问题被表述为一个 m维情形的问题。尽管这一问题具有重要的理论意义，但对高维有界域上的信号集中的研究仍相对不足。不过，近期已有若干研究探讨了这一主题的相关方面。在 [5], 中，研究者提出了用于计算多维长椭球波函数的数值方法。同样， [6] 介绍了用于计算这些函数的算法，包括适用于带限函数的求积公式，以及用于计算多维有限傅里叶变换特征值的数值方案。关于多维长椭球波函数在 Clifford 代数框架下的相关进展，见 [7, 8, 9]。尽管其代数框架与经典情形有很大不同，Clifford PSWF 的构造仍遵循与 [10] 和 [4]中相似的方法。特别是， [7] 为 Clifford 勒让德多项式建立了 Bonnet型递推关系，这是 [8]所提出构造中的关键要素。其他性质和结果见[9]。这一扩展具有自然性，因为经典长椭球波函数主要面向标量和一维情形，因而无法充分体现高维数据的几何结构。Clifford分析为处理多分量和向量值函数提供了一种便捷方法。在这一背景下，研究长椭球波函数能够构造更好地体现问题几何结构的集中算子，并获得适用于多维带限信号的基函数。例如，采用 RGB模型表示的彩色图像可视为高维信号，并可用四元数表示（例如参见 [11, 12] ）；因此，在维数为 2 的空间上定义的 Clifford PSWF 能够重建彩色图像。

本工作建立在 [7, 9, 13, 14], 的研究成果之上，重点分析 Clifford 分析背景下带限函数的逼近质量。在本文中，我们为 Clifford长椭球波函数（CPSWF）建立了详尽的逼近理论，并将多维长椭球波函数的若干经典结果推广至克利福德框架。

主要贡献。 我们的首项贡献是通过明确建立 CPSWF 与有限汉克尔变换特征函数之间的联系，对 CPSWF 进行精确的谱分析。这一联系使我们能够将已知的汉克尔特征值尖锐界推广至克利福德框架，从而得到有限克利福德傅里叶变换特征值的新型非渐近估计。基于这些估计，我们证明了带限克利福德值函数的 CPSWF 展开系数呈超指数衰减。因此，我们推导出截断 CPSWF 展开的显式误差界，并证明所得逼近的收敛速度显著快于经典傅里叶–贝塞尔级数。最后，数值实验展示了理论结果的精确性，并凸显了 CPSWF 基在逼近多维带限克利福德值信号方面的高效性。

O本文结构。 在第 2 节中，我们回顾了与本文研究相关的 Clifford分析 基本概念——。在第 3 节中，我们进一步介绍 CPSWF 的性质。本文的主要结果是，我们能够将径向CPSWF及其对应的特征值与文献中的一个著名情形联系起来。在第 4 节中，我们沿用 [14] 中提出的方法，研究利用 CPSWF 展开级数逼近带限函数时的精度和收敛速度。最后一节给出数值实验，以说明本文的理论发现。这些模拟评估了所提出近似方法的精度。

2. 背景

设 $\mathbb{R}^m$ 为 m维欧几里得空间，且设 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 为 $\mathbb{R}^m$. 的一组正交归一基。我们赋予这些向量如下乘法性质

$$e_j^2 = -1, \;\; j = 1, \ldots, m,$$
$$e_j e_i = -e_i e_j, \;\; i \neq j, \;\; i, j = 1, \ldots, m.$$

对于任意子集 $A = \{j_1, j_2, \ldots, j_h\} \subseteq \{1, \ldots, m\} = Q_m$，满足 $j_1 < j_2 < \cdots < j_h$，我们考虑形式乘积 $e_A = e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_h}$. 此外，对于空集 $\emptyset$，规定 $e_\emptyset = 1$ （单位元）。于是，Clifford代数 $\mathbb{R}_m$ 是

2^m 维实结合代数

$$\mathbb{R}_m = \Big\{ \sum_{A\subset Q_m} \lambda_A e_A : \lambda_A \in \mathbb{R} \Big\}.$$

类似地，Clifford代数 $\mathbb{C}_m$ 是 2^m维复结合代数

$$\mathbb{C}_m = \Big\{ \sum_{A\subset Q_m} \lambda_A e_A : \lambda_A \in \mathbb{C} \Big\}.$$

$_m$每个元素 $\lambda = \sum_{A\subset Q_m} \lambda_A e_A \in \mathbb{C}_m$ 都可以分解为 $\lambda = \sum_{k=0} [\lambda]_k$，其中 $[\lambda]_k = \sum_{|A|=k} \lambda_A e_A$ 是 λ的所谓 k-向量部分（$k = 0, 1, \ldots, m$）。

记 $\mathbb{R}_m^k$ 为 $\mathbb{R}_m$中所有-向量组成的子空间，即 $\mathbb{R}_m$在投影算子 $[\cdot]_k$下的像，则有多向量分解$\mathbb{R}_m = \mathbb{R}_m^0 \oplus \mathbb{R}_m^1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_m^m$，从而可将 $\mathbb{R}$ 与实标量 $\mathbb{R}_m^0$ 的子空间对应，并将 $\mathbb{R}^m$ 与实克利福德向量 $\mathbb{R}_m^1$.的子空间对应。后一个对应通过将点（$x_1, \ldots, x_m$）$\in_m \mathbb{R}^m$ 与克利福德数 $x = \sum e_j x_j \in \mathbb{R}_m^1$对应来实现。克利福德数$_{j=1} e_M = e_1 e_2 \cdots e_m$称为伪标量；根据维数 m，伪标量与 k-向量交换或反交换，并且平方为 ± 1。$\mathbb{C}^m$ 上的克利福德共轭是从 $\mathbb{C}_m$ 到自身的共轭线性映射 $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$，满足

$$\begin{aligned} \overline{\lambda\mu} &= \bar{\mu}\bar{\lambda}, \quad \text{for all } \lambda, \mu \in \mathbb{C}_m, \\ \overline{\lambda_A e_A} &= \overline{\lambda_A}\,\overline{e_A}, \quad \lambda_A \in \mathbb{C}, \\ \overline{e_j} &= -e_j, \ \ j, \ \ j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

克利福德共轭导出了克利福德内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 以及相应的范数 $|\cdot|$，它们在 $\mathbb{C}_m$ 上分别定义为

$$\langle \lambda, \mu \rangle = [\bar{\lambda}\mu]_0 \quad \text{and} \quad |\lambda|^2 = [\bar{\lambda}\lambda]_0 = \sum_A |\lambda_A|^2,$$

对于 $\lambda = \sum_{A\subset Q_M} \lambda_A e_A \in \mathbb{C}_m$。

两个向量 $x, y \in \mathbb{R}_m^1$ 的乘积可以分解为一个标量与一个二向量之和，二向量也称为双向量:

$$xy = -\langle x, y \rangle + x \wedge y,$$

m m m其中 $\langle x,y\rangle = -\sum x_j y_j \in \mathbb{R}_m^0$，并且 $x\wedge y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m} e_i e_j(x_j y_j - x_j y_i) \in \mathbb{R}_m^2$.
请注意，向量 x 的平方是一个标量，其值等于范数的平方再取负号:

$$x^2 = -\langle x,x\rangle = -|x|^2.$$

Clifford分析提供了一种函数理论，它是单个复变量的全纯函数理论在高维空间中的类比。所研究的函数定义在欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 中，并取值于Clifford代数 $\mathbb{R}_m$.

Clifford分析的核心概念是单生成性，它是复平面中全纯性的多维对应概念。

定义 2.1。 若函数 $f(x) = f(x_1,\ldots,x_m)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 的某个开区域内有定义且连续可微，并取值于 $\mathbb{C}_m$ ，则称其在该区域内为左单生成的，当且仅当

$$\partial_x f = 0,$$

其中， $\partial_x = \sum_{j=1}^{m} e_j\partial_{x_j}$ 为 Dirac算子， ∂_{x_j} 为偏微分算子 $\frac{\partial}{\partial x_j}$. 。我们还将欧拉微分算子定义为 $E = \sum_{j=1}^{m} x_j\partial_{x_j}$。拉普拉斯算子可由 Dirac算子因式分解如下:

$$\Delta_m = -\partial_x^2. \tag{2.1}$$

右单生成性的概念类似地定义，只需令 Dirac算子从右侧作用。一个取值于 $\mathbb{C}_m$ 的函数 $f(x) = \sum_{A\subset Q_m} f_A(x)e_A$（其中每个 f_A 都取复数值）是左单生成的，当且仅当其~~-~~Clifford共轭 $f(x) = \sum_{A\subset Q_m} f_A(a)e_A$ 是~~右~~单生成的。事实上， $\partial f = -f\partial$。

定义 2.2. 在 $\mathbb{R}^m$ 中，次数为 k （$k \geq 0$）的左（分别为右）单生成齐次多项式 P_k 称为阶为 k.的左（分别为右）实心内球单生成函数。所有阶为 k 的左（分别为右）实心内球单生成函数构成的集合记为 M_l^+ ，分别记为 M_r^+.。可以证明， M_l^+（k）的维数为 [15]

$$\dim M_l^+(k) = \frac{(m+k-2)!}{(m-2)!k!} = d_{k,m}.$$

在 $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 中，次数为–（$k+m-1$）的左（分别为右）单生成齐次函数 Q_k 称为阶为 k.的左（分别为右）实心外球面单生成函数。

引理 2.3. 我们可以看到

$$M_l^+(k) \cap M_l^-(k) = \{0\}.$$

令 $M_l(k) := M_l^+(k) \oplus M_l^-(k)$，并注意，如果 $P_k \in M_l^+(k)$ 且$Q_k(x) = \frac{x}{|x|^m} P_k(\frac{x}{|x|^2})$，则 $Q_k \in M_l^-(k)$。

引理 2.4. *[15]* 若 $P_k \in M_l^+(k)$ 且 $s \in \mathbb{N}$，则

$$\partial_x[x^s P_k(x)] = \begin{cases} -sx^{s-1}P_k(x) & if\ s\ is\ even, \\ -(s+2k+m-1)x^{s-1}P_k(x) & if\ s\ is\ odd. \end{cases}$$

证明. 证明见 [15]。 □

定义 2.5. 一个定义在 $\mathbb{R}^m$ 上、次数为 k 的实值多项式 S_k，满足

$$\Delta_m S_k(x) = 0, \quad \text{and}, \quad S_k(tx) = t^k S_k(x) \quad (t > 0),$$

称为次数为 k 的实心球谐函数。定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的次数为 k 的实心球谐函数全体记作 $\mathcal{H}(k)$（或 $\mathcal{H}(m,k)$）。

由于 $\partial_x^2 = -\Delta_m$，我们有

$$M_l^+(k) \subset \mathcal{H}(k), \quad \text{and}, \quad M_r^+(k) \subset \mathcal{H}(k).$$

设 $H_{(r)}$ 为一个酉右克利福德模，即 $(H_{(r)}, +)$ 是一个阿贝尔群，并且定义了一个标量乘法运算 $(f, \lambda) \to f\lambda$，从 $H_{(r)} \times \mathbb{C}_m$ 到 H_r，使得对所有 $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_m$ 和 f, $g \in H_{(r)}$：

$(i)\ f(\lambda+\mu) = f\lambda + f\mu,$
$(ii)\ f(\lambda\mu) = (f\lambda)\mu,(iii)$
$(f+g)\lambda = f\lambda + g\lambda,(iv)$
$fe_\emptyset = f.$

注意，如果将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{C}e_\emptyset \subset \mathbb{C}_m$. 视为相同，则 $H_{(r)}$ 将成为一个复向量空间。于是，函数 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle\colon H_{(r)} \times H_{(r)} \to \mathbb{C}_m$ 被称为 $H_{(r)}$ 上的一个 $\mathbb{C}_m$ 值内积，如果对于所有 $f,\ g,\ h \in H_{(r)}$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}_m$：

(i) $\langle f,\ g\lambda + h\rangle = \langle f,\ g\rangle\lambda + \langle f,\ h\rangle$，$(ii)$ $\langle f,\ g\rangle = \langle g,\ f\rangle$，$(iii)$ $[\langle f, f\rangle]_0 \geq 0$ 且当且仅当 $[\langle f, f\rangle]_0 = 0$ $f = 0$.

由此可以从这个取值于 $\mathbb{C}_m$ 的内积 $(\cdot,\ \cdot)$ 中恢复复内积

$$(f, g) = [\langle f, g\rangle]_0,$$

在 H_r 上。对每个 $f \in H_{(r)}$，令

$$\|f\|^2 = (f, f), \tag{2.2}$$

$\|\cdot\|$ 成为 H_r 上的一个范数，从而将其变为一个赋范右克利福德模。

设 $H_{(r)}$ 是配备有取值于 $\mathbb{C}_m$ 的内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$. 的酉右克利福德模。如果 $H_{(r)}$视为配备复内积 $(\cdot,\ \cdot)$ 的复向量空间后是一个希尔伯特空间，那么称其为右希尔伯特克利福德模。

我们考虑函数 f, g 的 $\mathbb{C}_m$ 值内积：$\mathbb{R}^m \to \mathbb{C}_m$定义为 $\langle f, g\rangle = \int f(x) g(x)\, dx$，其中 dx 是 $\mathbb{R}^m\mathbb{R}^m$ 上的勒贝格测度。相应范数由 (2.2) 给出。在 $\mathbb{R}^m$ 上使得 $\|f\|^2 < \infty$ 的 $\mathbb{C}_m$ 值可测函数构成的右克利福德模记为 $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$。

标准的张量型多维傅里叶变换定义为

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx$$

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$。

定义 2.6。对于任意 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$，线性算子$T\colon L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m) \to L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$ 若满足以下条件，则称其为自伴算子

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle.$$

定义 2.7。若对于 $\{f_n\} \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$ 中的每个有界序列 $\{T(f_n)\}$，线性算子 T 都存在一个收敛子序列，则称其为紧算子。

定理 2.8。 傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 可延拓为 $L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$ 上的等距映射；也就是说，对所有 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$，帕塞瓦尔公式成立：

$$\langle f, g\rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle.$$

特别地，对于每个 $f \in L_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{C}_m)$，都有 $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$。

命题 2.9。 对于任意两个单生成齐次多项式 Y_k（次数为 k）和 Y_l（次数为 l），有

$$\langle Y_k, Y_l\rangle_{L^2(S^{m-1})} := \int\limits_{S^{m-1}} \overline{Y_k(\omega)} Y_l(\omega)\, d\omega = 0$$

如果 $k \neq l$。

以下结果可由 Clifford-Stokes 定理的一个简单应用得到。

引理 2.10。 设 f、g 定义在$\mathbb{R}^m$ 中单位球的一个邻域 Ω 上，并假设 f 在 Ω 上右单生成，而 g 在Ω上左单生成。那么

$$\int_{S^{m-1}} f(\omega)\omega g(\omega)\, d\omega = 0. \tag{2.3}$$

以下这个众所周知的结果见于 [16] 中的引理 9.10.2，是 Funk-Hecke 定理 [17]的推论。

引理 2.11。 令 $\hat{\ } \xi$、$\omega \in S^{m-1}$、$r > 0$ 和 $Y_k \in \mathcal{H}_k^m$。则

$$\int_{S^{m-1}} e^{-2\pi i r\langle \hat{\xi}, \omega\rangle} Y_k(\omega)\, d\sigma(\omega) = \frac{2\pi(-i)^k}{r^{\frac{m}{2}-1}} J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi r) Y_k(\hat{\xi})$$

其中 $J_{k+\frac{m}{2}-1}$ 是第一类贝塞尔函数。

由引理 2.11 可知，对所有 $Y_k \in \mathcal{H}_k^m$，

$$\int_{B(1)} e^{-2\pi i\langle x, \xi\rangle} Y_k(x)\, dx = \frac{(-i)^k}{|\xi|^{\frac{m}{2}+k}} J_{\frac{m}{2}+k}(2\pi|\xi|) Y_k(\xi). \tag{2.4}$$

对于 $r > 0$，设 $B(r)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中半径为 r、中心为 0 的闭球，即

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}.$$

定义 2.12. 克利福德-勒让德多项式$C^0_{n,\ m}(Y_k)(x)$ 可定义为

$$C^0_{n,m}(Y^\ell_k(x)) = \partial^n_x((1-|x|^2)^n Y_k(x)).$$

我们将 $C^0_{n,m}(Y^\ell_k(x))$ 记为归一化克利福德-勒让德多项式，使其 2-范数等于 1：

$$\widetilde{C^0_{n,m}}(Y^\ell_k(x))(x) = \frac{1}{h_{k,n}} C^0_{n,m}(Y^\ell_k(x))(x) \quad h_{k,n} = \frac{\sqrt{2k+2n+m}}{2^n n!},$$

w这里， n 表示阶， k 表示齐次次数， m 表示维数。克利福德-勒让德多项式可写成如下形式：

$$\begin{aligned} C^0_{2n,m}(Y^\ell_k(x)) &= (-1)^n 2^{2n}(2n)!\, P^{(0,k+m/2-1)}_n(2|x|^2-1) Y^{(\ell)}_k(x) \\ C^0_{2n+1,m}(Y^\ell_k(x)) &= (-1)^{n+1} 2^{2n}(2n+1)!\, x\, P^{(0,k+m/2)}_n(2|x|^2-1) Y^{(\ell)}_k(x), \end{aligned}$$

其中， $P^{(\alpha,\beta)}_n$为雅可比多项式

$$P^{(\alpha,\beta)}_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right].$$

定义 2.13。 给定 $c \geq 0$，克利福德微分算子 L_c 作用于$C^2(B(1)\ \mathbb{R}_m)$ 的方式如下：

$$L_c f(x) = \partial_x((1-|x|^2)\partial_x f(x)) + 4\pi^2 c^2 |x|^2 f(x) \tag{2.5}$$

其中， $B(1)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的单位球， ∂_x 是 Dirac算子。我们将克利福德长椭球波函数（CPSWF）定义为 L_c.的特征函数

命题 2.14。 在(2.5)中定义的算子 L_c 是自伴的。

推论： 根据 $c > 0$，CPSWF 等价于有限傅里叶变换 $\mathcal{G}_c$ 的特征函数。因此我们有

$$\int_{\overline{B(1)}} \psi^{k,c}_{N,m}(y) e^{2\pi i c\langle x,y\rangle}\, dy = \mu^{k,c}_{N,m}\psi^{k,c}_{N,m}(x).$$

3. 特征值的估计

本节将致力于证明若干关键结果，这些结果对于证明函数在扁长基中的展开至关重要。首先，我们将给出微分算子 L_c对应特征值的上下界。

命题 3.1. 设 n 为偶数，且实常数 $\chi^{k,0}_{n,m}$，$\chi^{k,c}_{n,m}$，由下式给出

$$\widetilde{C^0_{n,m}}(Y^\ell_k(x)) = \chi^{k,0}_{n,m}\,\widetilde{C^0_{n,m}}(Y^\ell_k(x)),$$
$$L_c\psi^{k,c,i}_{n,m} = \chi^{k,c}_{n,m}\psi^{k,c,i}_{n,m}.$$

那么对于 $c>0$，我们有

$$n(n+2k+m) < \chi^{k,c}_{n,m} < n(n+2k+m) + 8\pi^2c^2 \tag{3.1}$$

证明. 对 (2.5) 关于 c求导，可得

$$L_c\partial_c\psi^{k,c}_{n,m}(x) + 4\pi^2 2c|x|^2\psi^{k,c}_{n,m} = \chi^{k,c}_{n,m}\partial_c\psi^{k,c}_{n,m}(x) + \partial_c\chi^{k,c}_{n,m}\psi^{k,c}_{n,m}(x),$$

因此

$$\langle (L_c - \chi^{k,c}_{n,m})\partial_c\psi^{k,c}_{n,m}(x), \psi^{k,c}_{n,m}(x)\rangle = \langle (\partial_c\chi^{k,c}_{n,m} - 8\pi^2c|x|^2)\psi^{k,c}_{n,m}(x), \psi^{k,c}_{n,m}(x)\rangle.$$

由命题 2.14 可得

$$\langle \partial_c\psi^{k,c}_{n,m}(x), (L_c - \chi^{k,c}_{n,m})\psi^{k,c}_{n,m}(x)\rangle = \langle (\partial_c\chi^{k,c}_{n,m} - 8\pi^2c|x|^2)\psi^{k,c}_{n,m}(x), \psi^{k,c}_{n,m}(x)\rangle$$

因此,

$$0 = \langle (\partial_c\chi^{k,c}_{n,m} - 8\pi^2c|x|^2)\psi^{k,c}_{n,m}(x), \psi^{k,c}_{n,m}(x)\rangle = \partial_c\chi^{k,c}_{n,m} - 8\pi^2c\int_{B(1)}|x|^2\psi^{k,c}_{n,m}(x)\psi^{k,c}_{n,m}(x)dx. \tag{3.2}$$

由 (3.2) 可得

$$0 \le \partial_c\chi^{k,c}_{n,m} - 8\pi^2c^2\int_{B(1)}|x|^2\psi^{k,c}_{n,m}(x)\psi^{k,c}_{n,m}(x)dx \le 8\pi^2c. \tag{3.3}$$

现在由 (3.3) 可得

$$\frac{\chi^{k,c}_{n,m} - \chi^{k,0}_{n,m}}{c} < 8\pi^2c$$

由此得出式(3.1)。 □

下面的结果建立了 Clifford PSWF 与 Hankel 长椭球函数之间的关系。这一结果的优势在于，与这一类特定长椭球函数（Hankel 或圆形）相关的特征值已在文献中得到广泛研究（例如，见[18, 19, 20]）。首先，我们先介绍一些概念。

定义 3.2. 对于正实数 c，我们将 $\mathcal{H}_c^{(\alpha)}$记为由下式给出的有限 Hankel 变换

$$\mathcal{H}_c^{(\alpha)}.f(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2\pi cxy}J_\alpha(2\pi cxy)f(y)dy.$$

我们将 $\mathcal{H}_c^{(\alpha)}$ 的特征函数记为 $\varphi_n^{(\alpha)}$，将其相应特征值记为 $\gamma_n^{(\alpha)}$。

命题 3.3. 设 $c>0$ 和 k、$m\in\mathbb{N}$。将偶数和奇数 ***Clifford***长椭球波函数（ ***CPSWF***）记为

$$\psi_{2N,m}^{(k,c)}(x) = P_{N,m}^{k,c}(|x|^2)\,Y_k(x), \qquad \psi_{2N+1,m}^{(k,c)}(x) = Q_{N,m}^{k,c}(|x|^2)\,x\,Y_k(x),$$

其中 Y_k 是次数为 k 的球面单生成函数。

则：

- 对于偶数 *CPSWF*,

$$\gamma_N^{\left(k+\frac{m}{2}-1\right)} = (-i)^k\, c^{\frac{m-1}{2}}\mu_{2N,m}^{(k,c)}, \qquad \varphi_N^{\left(k+\frac{m}{2}-1\right)}(r) = r^{\,k+\frac{m-1}{2}}\,P_{N,m}^{k,c}(r^2).$$

- 对于奇数阶 *CPSWF*,

$$\gamma_N^{\left(k+\frac{m}{2}\right)} = (-i)^{k+1}\, c^{\frac{m-1}{2}}\mu_{2N+1,m}^{(k,c)}, \qquad \varphi_N^{\left(k+\frac{m}{2}\right)}(r) = r^{\,k+\frac{m+1}{2}}\,Q_{N,m}^{k,c}(r^2).$$

证明。 我们知道，CPSWF 是有限 Fourier 变换的特征函数。因此有

$$\mathcal{G}_c\psi_{2N,m}^{k,c}(x) = \mu_{2N,m}^{k,c}\psi_{2N,m}^{k,c}(x),$$

这意味着

$$\int_{\overline{B(1)}} \psi_{2N,m}^{k,c}(y)e^{2\pi ic\langle x,y\rangle}\,dy = \mu_{2N,m}^{k,c}\psi_{2N,m}^{k,c}(x),$$

因此，我们有

$$\int_{S^{m-1}}\int_0^1 P_N^k(r^2)r^{k+m-1}Y_k(\omega)e^{2\pi icsr\langle\omega,\xi\rangle}\,drd\omega=\mu_{2N}^{k,c}P_{N,m}^k(s^2)s^kY_k(\omega),\quad(3.4)$$

但我们可以改变积分的顺序

$$\int_{S^{m-1}}\int_0^1 P_N^k(|x|^2)r^{k+m-1}Y_k(\omega)e^{2\pi icsr\langle\omega,\xi\rangle}\,drd\omega=\int_0^1(\int_{S^{m-1}}Y_k(\omega)e^{2\pi icsr\langle\omega,\xi\rangle}d\omega)P_N^k(r^2)r^{k+m-1}dr.\quad(3.5)$$

现在，我们需要计算内积分。根据 [16]中的引理 9.10.2，我们知道

$$\int_{S^{m-1}}Y_k(\omega)e^{-2\pi ir\langle\omega,\hat{\xi}\rangle}d\omega=\frac{2\pi(-i)^k}{r^{\frac{m}{2}-1}}J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi r)Y_k(\hat{\xi}).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{S^{m-1}}Y_k(\omega)e^{2\pi icsr\langle\omega,\xi\rangle}d\omega=&\int_{S^{m-1}}Y_k(-\omega)e^{-2\pi i(csr)\langle\omega,\xi\rangle}d\omega\\=&(-1)^k\int_{S^{m-1}}Y_k(\omega)e^{-2\pi i(csr)\langle\omega,\xi\rangle}d\omega\\=&\frac{(-1)^k2\pi(-i)^k}{(csr)^{\frac{m}{2}-1}}J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr)Y_k(\xi)\\=&\frac{2\pi i^k}{(csr)^{\frac{m}{2}-1}}J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr)Y_k(\xi).\end{aligned}\quad(3.6)$$

因此，利用 (3.5)、(3.4) 和 (3.6)，可以得到径向部分的积分算子：

$$\mu_{2N,m}^{k,c}P_{N,m}^{k,c}(s^2)s^kY_k(\xi)=\int_0^1\frac{2\pi i^k}{(csr)^{\frac{m}{2}-1}}J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr)P_{N,m}^{k,c}(r^2)r^{k+m-1}dr\;Y_k(\xi),$$

其中，通过约去 $Y_k(\xi)$，我们得到

$$\mu_{2N,m}^{k,c}P_{N,m}^{k,c}(s^2)s^{k+\frac{m}{2}-1}=\frac{2\pi i^k}{c^{\frac{m}{2}-1}}\int_0^1 J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr)P_{N,m}^{k,c}(r^2)r^{k+\frac{m}{2}}dr,$$

现在，如果我们设定 $S^{k,c}_{N,m,even}(r)=P^{k,c}_{N,m}(r^2)r^{k+\frac{m-1}{2}}$，那么我们有

$$\mu_{2N,m}^{k,c}S_{N,m,even}^{k,c}(s)=\frac{\sqrt{2\pi}i^k}{c^{\frac{m-1}{2}}}\int_0^1\sqrt{2\pi csr}J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr)S_{N,m,even}^{k,c}(r)dr.\quad(3.7)$$

现在，我们尝试为奇数情形推导一个类似的公式。过程几乎相同。我们需要计算 $\int_{S^{m-1}} \omega Y_k(\omega) e^{2\pi i c r s\langle \omega, \xi\rangle} d\omega$. 设 $x = s\xi$，那么我们有

$$F(x) := \int_{S^{m-1}} Y_k(\omega) e^{2\pi i c r\langle \omega, x\rangle} d\omega.$$

我们在等式左侧作用 Dirac算子。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&2\pi i c r \int_{S^{m-1}} \omega Y_k(\omega) e^{2\pi i c r\langle \omega, x\rangle} d\omega \\
&\quad = \partial_x [\frac{2\pi i^k}{(csr)^{\frac{m}{2}-1}} J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi csr) Y_k(\xi)] \\
&\quad = \frac{2\pi i^k}{(cr)^{\frac{m}{2}-1}} \sum_j e_j \frac{\partial}{\partial x_j} [J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi cr|x|)|x|^{-(k+\frac{m}{2}-1)} Y_k(x)] \\
&\quad = \frac{2\pi i^k}{(cr)^{\frac{m}{2}-1}} \sum_j e_j \frac{\partial}{\partial x_j} [J_{k+\frac{m}{2}-1}(2\pi cr|x|)|x|^{-(k+\frac{m}{2}-1)}] Y_k(x) \\
&\quad = \frac{2\pi i^k}{(cr)^{\frac{m}{2}-1}} (-2\pi cr) x [J_{k+\frac{m}{2}}(2\pi cr|x|)|x|^{-(k+\frac{m}{2})}] Y_k(x).
\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{S^{m-1}} \omega Y_k(\omega) e^{2\pi i c r\langle \omega, x\rangle} d\omega = \frac{-(2\pi) i^{k-1}}{(cr)^{\frac{m}{2}-1}} J_{k+\frac{m}{2}}(2\pi csr) s^{-(\frac{m}{2}-1)} \xi Y_k(\xi).$$

假设 $S^{k,c}_{N,m,,odd}(r) = Q^{k,c}_{N,m,}(r^2) r^{k+\frac{m+1}{2}}$ ，，我们得到奇数版本的类似积分算子

$$\mu^{k,c}_{2N+1,m} S^{k,c}_{N,m,odd}(s) = \frac{\sqrt{2\pi} i^{k+1}}{c^{\frac{m-1}{2}}} \int_0^1 \sqrt{2\pi csr} J_{k+\frac{m}{2}}(2\pi csr) S^{k,c}_{N,m,odd}(r) dr. \quad (3.8)$$

□

注 3.4. 事实上，在当前证明中，奇数版本与偶数版本相同，只是带有 $k+1$。原因是，对于任意球面单生成函数，$Y_k(x)$， $xY_k(x)$ 是次数为 $k+1$ 的球谐函数。

推论： 结合这一最后命题的结果以及定理3.1和3.2，在 [18], 中可得到与 $B(0, c)$上 Clifford有限傅里叶变换相关的特征值的以下估计，

- If $N < \frac{c}{2}$, then $|\mu_{N,m}^{k,c}|^2 \geq \frac{1}{c^m}\left(1 - \frac{10\, c^{k+\frac{m}{2}+2N-1}}{N!\, e^c}\right)$.
- If $N > \frac{ec}{4}$, then $|\mu_{N,m}^{k,c}|^2 \leq \frac{1}{c^m}\left(\frac{ec}{4N+2k+m+3}\right)^{2N+k+\frac{m}{2}}$

备注 3.5。 下图展示了最后一个结果，其中表明特征值的行为由三个部分组成。第一部分表明 μ_N 接近于1。第二部分是骤降区（本文未研究该区域）。随后，特征值在超过 $\frac{ec}{4}$ 后呈现超指数衰减。显然，这个值并非最优值。 _

在下图中，我们展示了不同 c 和 n 取值下特征值的图像。

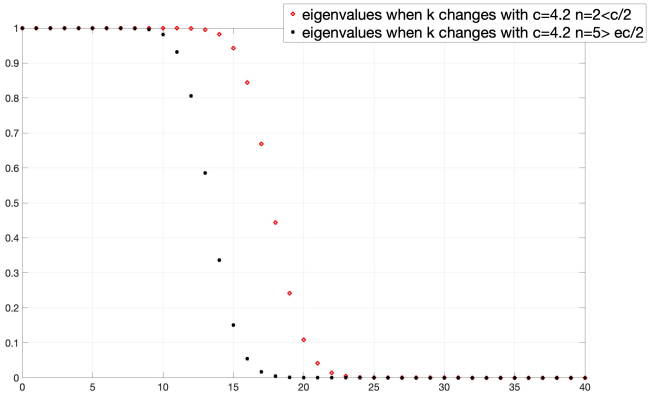

图 1：对于不同的 $c = 4.2$ 和 $n = 2$ 值，二维 CPSWF 的特征值随 k 变化的图像（$k = 0, \cdots, 40$），5

4. 展开为 Clifford PSWF

本节旨在研究 d 维 Clifford 长椭球波函数级数展开框架下的近似质量。我们用 f 表示 f 的傅里叶变换，

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i <x,y>} f(y) dy.$$

使用这个 i，可得 $\left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_m)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_m)}$。反演公式于是写作 [15]

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\pi i <x,y>} \hat{f}(y) dy.$$

引理 4.1。 *Clifford PSWF* 的傅里叶变换为

$$\widehat{\psi_{N,m}^{(k,c)}}(x) = \frac{(-1)^k}{c^d \mu_{N,m}^{k,c}} \psi_{N,m}^{(k,c)}\big(\frac{x}{c}\big)\chi_{(\overline{B(1)})}\big(\frac{x}{c}\big).$$

证明。根据傅里叶逆变换，对于连续的 $f \in L^2(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R}_m)$，有:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\pi i<x,z>} \mathcal{F}f(z) d\mathbf{z} = \int_{\mathbb{R}^m} e^{2\pi i<x,z>} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i<z,y>} f(y) dy d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i<\mathbf{z},(y-x)>} f(y) dy d\mathbf{z}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

由于

$$\psi_{N,m}^{(k,c)}(x) = \frac{1}{\mu_N^{(m)}(c)} \int_{\overline{B(1)}} e^{-2\pi i c<x,y>} \psi_{N,m}^{(k,c)}(y) dy,$$

可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\psi_{N,m}^{(k,c)}(x) &= \frac{1}{\mu_N^{(m)}(c)} \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\overline{B(1)}} e^{-2\pi i c<\mathbf{z},y>} \psi_{N,m}^{(k,c)}(y) dy e^{-i<\mathbf{z},x>} dx \\ &= \frac{1}{\mu_N^{(m)}(c)} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i c<\mathbf{z},y-x>} \psi_{N,m}^{(k,c)}(\text{-}\mathbf{y}/c)\chi_{(\overline{B(1)})}(y/c) dy \right) dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

To 要完成证明，只需将最后一个等式与 **(4.1)** 结合使用。

□

引理 4.2. 设 $c > 0$，且 m、k 为两个正整数，使得 $c^2 > \big(k + \frac{m}{2} - 1\big)^2 - \frac{1}{4}$。那么,—存在一个整数 N_0，使得对于所有 $n \geq N_0$，都有

$$\left\| \psi_{N,m}^{(k,c)} \right\|_\infty \lesssim \left[\left(2N + k + \frac{m-1}{2} \right) \left(2N + k + \frac{m+1}{2} \right) \right]^{1/2}. \tag{4.3}$$

前一个引理只是对 [19] 中的定理 2 以及 3.3 的简单复现。

定理 4.3。 设 $c > 0$。设 f 为定义在 $L^2(B(1)\ \mathbb{C}_m)$中的 c-带限 *Clifford* 值函数。对于整数 N、$M \geq 0$，定义部分 *CPSWF* 展开

$$S_N^{(M)} f := \sum_{k=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \sum_{\ell=1}^{d_{k,m}} \langle f, \psi_{n,m,\ell}^{(k,c)} \rangle \, \psi_{n,m,\ell}^{(k,c)},$$

其中 $\{\psi_{n,m,\ell}^{(k,c)}\}$ 表示一组正交归一的 *CPSWF* 基，且 $d_{k,\ m}$ = 维数 $\mathcal{M}_l^+(k)$。存在常数 $C_{m,\ c} > 0$，其仅依赖于 m 和 c，使得对于所有满足 N、$M > \frac{ec}{2}$ 的 N、M 以及每个 $k \leq M$,

$$\|f - S_N^{(M)} f\|_{L^2(B(1))} \leq C_{m,c}\,(2N+k)\left(\frac{ec}{4N+2k+m+3}\right)^{\frac{2N+k+m}{2}} \|f\|_{L^2(B(1))}. \tag{4.4}$$

证明。 根据帕塞瓦尔等式,

$$\left\|f - S_N^{(M)}.f\right\|_2^2 = \sum_{m>M}\sum_{k>N}\sum_{\ell=1}^{N(m,k)} |< f, \psi_{N,m}^{(k,c)} >|^2. \tag{4.5}$$

那么，接下来只需估计 $|< f,\ \psi_{N}^{(k,c)}{}_{,\ m} >|$。
根据傅里叶反演公式,

$$f(\mathbf{x}) = c^m \int_{\overline{B(1)}} e^{2\pi i c<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \hat{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

因此，对于任意正整数 k，有

$$\begin{aligned}
< f, \psi_{N,m}^{(k,c)} > &= \int_{\overline{B(1)}} f(\mathbf{x}) \psi_{N,m}^{(k,c)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= c^m \int_{\overline{B(1)}} \psi_{N,m}^{(k,c)}(\mathbf{x}) \int_{\overline{B(1)}} e^{2\pi i c<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \hat{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&= c^m \int_{\overline{B(1)}} \hat{f}(\mathbf{y}) \int_{\overline{B(1)}} e^{2\pi i c<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \psi_{N,m}^{(k,c)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= c^m \left|\mu_N^{(m)}(c)\right| \int_{\overline{B(1)}} \hat{f}(\mathbf{y}) \psi_{N,m}^{(k,c)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&\leq c^m \frac{\pi^{m/4}}{\sqrt{\Gamma(m/2+1)}} \left|\mu_N^{(m)}(c)\right| \left\|\psi_{N,m}^{(k,c)}(\mathbf{y})\right\|_\infty \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}_m)}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

□

5. 数值模拟

本节将展示 Clifford长椭球波函数 (CPSWF) 的逼近性质。所有计算均在维数为 $m = 2$ 的单位圆盘 $B(1)$ 上进行。我们将 CPSWF

逼近与经典的傅里叶–贝塞尔展开进行比较；对于涉及径向带限函数的问题，后者是一种标准的参考方法。

5.1. 例*1*

在本例中，我们考虑函数

$$f(r,\theta) = e^{-r^2}\cos(4\pi\theta).$$

我们首先利用 f 在 Clifford 长椭球波函数（CPSWF）基下的展开系数进行重建。然后，我们将该重建结果与根据 [21]中所述方法，利用 f 在傅里叶–贝塞尔基下的展开得到的结果进行比较。图2展示了精确函数及其使用前五个基函数得到的 CPSWF 重建结果。CPSWF 近似能够高度保真地捕捉振荡的角向结构。

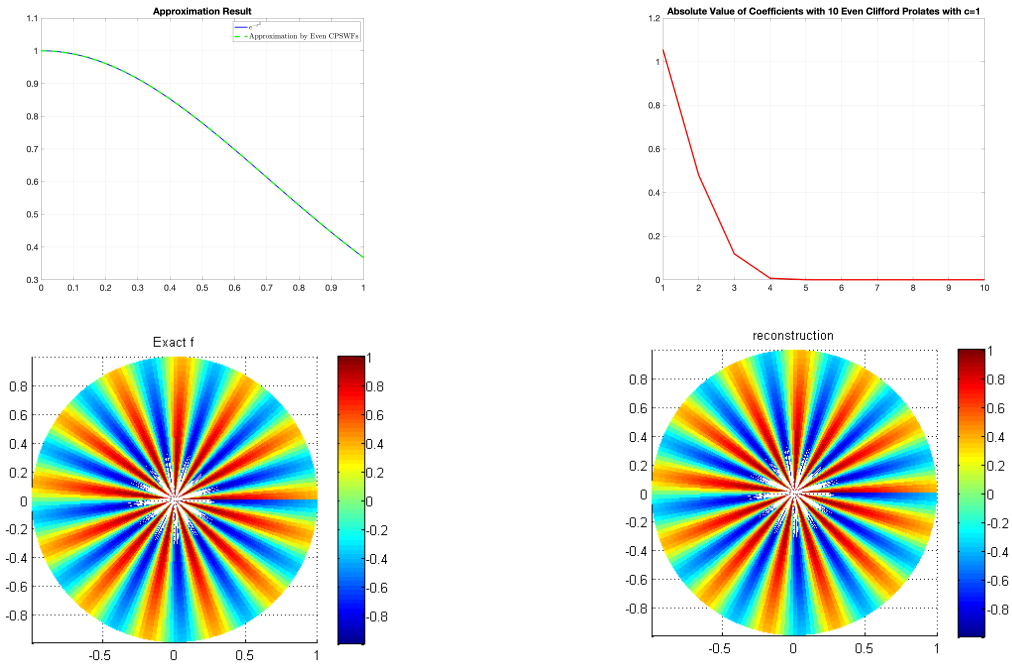

图2：精确函数与使用前5个 CPSWF 表示的函数图像，其中 $c = 1$ 和 $n = 0$ 采用笛卡尔坐标。

表1报告了 L^2 逼近误差随基函数数量变化的情况。CPSWF 逼近的收敛速度远快于

傅里叶–贝塞尔展开：仅用 5 个 CPSWF，精度就已达到 10^{-6} 阶，而傅里叶–贝塞尔级数则需要更多项才能达到相当的精度。

基函数数量 n	L_2 **误差（CPSWF）**	L_2 **误差（傅里叶–贝塞尔）**
5	1.5×10^{-6}	0.13
7	8.24×10^{-12}	0.06
10	6.6×10^{-12}	0.05

表1：两种不同基下 L_2 逼近误差随基函数数量 n的变化。

备注 5.1。 使用150个傅里叶–贝塞尔模态时，逼近误差仍保持在 10^{-3} 阶，凸显了 CPSWF 基对带限信号的高效性。

5.2 示例*2*

我们考虑函数

$$F(r,\theta) = \frac{J_0(cr)}{1+r^2} + \frac{J_1(cr)}{1+r^2}\theta e_1 = g(r) + h(r)\theta e_1,$$

它结合了径向贝塞尔行为与角向单生成分。目标是评估 CPSWF 重建对该非标量克利福德值函数的重建质量。

对于二维径向函数，众所周知，傅里叶变换可视为零阶汉克尔变换：

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty f(r) J_0(|\xi| r) r dr = 2\pi \mathcal{H}_0(f)(|\xi|).$$

我们回顾以下两个关键恒等式：

- $$\mathcal{F}[J_0(ar)](\xi) = 2\pi \frac{\delta(|\xi| - a)}{|\xi|}. \tag{5.1}$$
- $$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+r^2}\right](\xi) = 2\pi K_0(|\xi|). \tag{5.2}$$

其中， K_0 是修正贝塞尔函数，定义为 $K_0(z) = \int_0^\infty \cos(zt)\sqrt{1+t^2}^{dt}$，它具有关键性质

$$K_0(z) \sim_{z\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}. \tag{5.3}$$

然后，利用（5.1）和（5.2），可得

$$\mathcal{F}[g](\xi) = 2\pi\left(\frac{\delta(|\xi|-a)}{|\xi|}\right) * (2\pi K_0(|\xi|)) \approx \int_{|\omega|=c} K_0\left(|\xi-\omega|\right) d\sigma(\omega).$$

因此，利用（5.3）并在圆上积分

$$\mathcal{F}[g](\xi) \lesssim e^{-(|\xi|-c)}.$$

然后，在圆盘 $|\xi| \le c$ 外，$\hat{}g$ 会随着 $|\xi|$ 的增大而呈指数衰减。注意，这些计算对于 $h(r)$ 同样有效。我们由此得出， F 几乎是带限的。图3展示了使用前五个 CPSWF 对 F 进行重构的结果。该近似准确地捕捉了径向和角向分量。

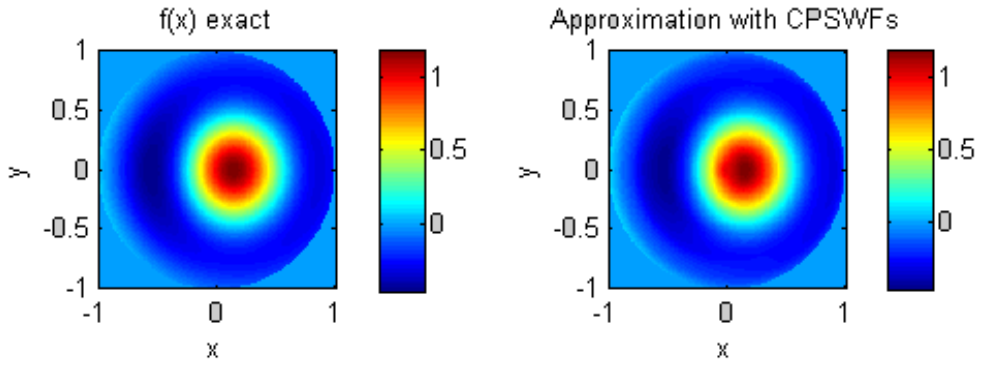

图3：精确的 F 与使用前5个 CPSWF 进行重构的结果图 s.

致谢

HBG 获得了澳大利亚数学学会提供的 Lift-off 奖学金，并感谢 Jeffrey Hogan 博士富有帮助的讨论和建议。

AS 获得了 DGRST 科研基金 LR21ES10 的资助。

参考文献

[1] D. Slepian, H. O. Pollak, 《长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——I》, 《贝尔系统技术期刊》40 (1) (1961) 43–63。[2] H. J. Landau, H. O. Pollak, 《长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——II》, 《贝尔系统技术期刊》40 (1) (1961) 65–84。[3] H. J. Landau, H. O. Pollak, 《长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——III：本质时限带限信号空间的维数》, 《贝尔系统技术期刊》41 (4) (1962) 1295–1336。[4] D. Slepian, 《长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性——IV：推广到多维；广义长椭球函数》, 《贝尔系统技术期刊》43 (6) (1964) 3009–3057。[5] R. Lederman, 《广义长椭球函数的数值算法》, arXiv:1710.02874 (2017)。[6] P. Greengard, 《广义长椭球函数：算法与分析》, 《纯粹与应用分析》(2024)。[7] H. Baghal Ghaffari, J. A. Hogan, J. D. Lakey, 《多维长椭球波函数的 Clifford 构造》, 载于：2019年第13届国际采样理论与应用会议（SampTA），IEEE，2019，第1–4页。[8] H. Baghal Ghaffari, J. A. Hogan, J. D. Lakey, 《Clifford-Legendre 多项式的性质》, 《应用 Clifford 代数进展》32 (1) (2022) 1–25。[9] H. Baghal Ghaffari, 《高维长椭球波函数》, 博士论文，纽卡斯尔大学 (2022)。[10] J. Zhang, H. Li, L.-L. Wang, Z. Zhang, 《任意维数下的球形长椭球波函数》, 《应用与计算调和分析》48 (2) (2020)。

[11] C. Huang, J. Li, G. Gao，基于四元数的彩色图像处理方法综述, Mathematics 11 (9) (2023) 2056。[12] N. D. Dizon, J. A. Hogan，利用平面上的新型四元数值小波对彩色图像进行整体处理：一种前景广阔的变革性工具，IEEE Signal Processing Magazine 41 (2) (2024) 51–63。[13] H. Baghal Ghaffari, J. A. Hogan, J. D. Lakey，Clifford长椭球波函数, arXiv电子预印本 (2021) arXiv–2112。[14] A. Souabni，球形长椭球函数的更多性质及相关近似带限函数的逼近，Results in Mathematics 80 (153) (2025) https://doi.org/10.1007/s00025–025–02463–w。[15]R. Delangue, F. Sommen, V. Soucek，Clifford代数与旋量值函数：Dirac算子函数论，Kluwer Academic Publishers，1992。[16] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy，特殊函数，第71卷，剑桥大学出版社，1999。[17] H. Groemer，傅里叶级数与球谐函数的几何应用，第61卷，剑桥大学出版社，1996。[18] M. Boulsane，有限汉克尔变换算子的非渐近行为与谱分布，Integral Transforms and Special Functions 32 (12) (2021) 948–968。[19] M. Boulsane, A. Karoui，有限汉克尔变换算子：特征函数与特征值衰减率的一些显式局部估计，Journal of Fourier Analysis and Applications 24 (1) (2018) 1554–1578。[20] A. Karoui, T. Moumni，有限汉克尔变换与圆形长椭球波函数的谱分析，Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2) (2009) 315–333。[21] N. F. Marshal, O. Mickelin, A. Singer，圆盘上谐波的快速展开：一种具有快速径向卷积的可转向基，SIAM Journal on Scientific Computing 45(5) (2023) A2431–A2457。