arXiv:2512.20658v1 [math.GM] 18 Dec 2025

模糊数值连续函数上的神经网络算子

JUAN J. FONT、SERGIO MACARIO、MANUEL SANCHIS

卡斯特利翁大学数学与应用研究所（*IMAC*），海梅一世大学，*Riu Sec* 校区，*s/n*，*12071* 卡斯特利翁（西班牙）

Abstract. 我们将 Cardaliaguet-Euvrard 神经网络算子推广到模糊数值连续函数的情形，并研究其性质。我们重点考察水平连续、截集图连续和端图连续函数，并在所有这些情形下获得 Jackson 型结果。

1. Introduction

多层前馈人工神经网络可以用一种简单的方式描述为一个数学函数：

$$N(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \sigma(a_j \cdot x + b_j),$$

其中 $x \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$； c_j， a_j， $b_j \in \mathbb{R}$ 分别为系数、权重和阈值，而 σ 通常是一个 S形函数，称为激活函数。

在过去四十年中，这类神经网络已成功用于逼近一个或多个变量的连续函数，也就是说，它们是通用逼近器（[6, 13]）。

神经网络（NN）算子是人工神经网络的扩展，其提出旨在提供构造性逼近算法。与神经网络领域中使用的方法相比，这些算子更为直观，因为神经网络的所有基本组成部分，例如系数、权重和阈值，在这些算子中都是已知的。这些算子以一个函数作为输入，并同样输出一个函数。最简单的形式如下：

$$N_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) f\left(x_j\right)$$

其中 $f \in C([a, b])$， $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ 是 $[a, b]$ 的一个划分，系数 $\phi_j(x)$取决于激活函数。

我们感兴趣的神经网络算子由 Anastassiou（[1]）基于 Cardaliaguet 和 Euvrard 在 [2] 中提出的思想引入。他们使用具有紧支集的中心对称钟形连续函数作为激活函数（实际上是 S形函数的适当线性组合），而 Anastassiou 根据被逼近函数的连续模，获得了这些算子的收敛速度估计，即 Jackson 型逼近。

电子邮件地址：font@uji.es, macario@uji.es, sanchis@uji.es。关键词和短语。模糊值连续函数、模糊逼近、Jackson 型定理、层连续性、截集图度量、端图度量。

此后，这些神经网络算子受到了广泛关注（例如，参见 [3, 4, 5]）。最近，Qian 和 Yu [18] 对上述钟形激活函数作了系统阐述，统一了以往的大部分研究成果。

在模糊背景下也研究了类似问题，方法是将实值函数 $C([a,b])$ 替换为模糊数值函数 $C([a,b],\ \mathbb{E}^1)$。迄今为止，主要策略（参见例如 [17], [14], [15]）是利用 [6, 13] 等经典结果，通过实值神经网络逼近上述实值函数 $\phi_j(x)$。然而，这一过程会为网络增加一个新层，从而提高计算复杂度。

另一种方法是寻找不会增加计算成本，同时又能保持逼近精度的系数 $\phi_j(x)$。例如，在 [10], 中，定义了一族算子 $T_n\colon C([0,1],\ \mathbb{E}^1_\infty) \to C([0,1],\ \mathbb{E}^1_\infty)$，其定义如下

$$T_n(f,x) := \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) f\left(\frac{j}{n}\right),$$

其中 $\phi_j(x)$ 是梯形函数，$\sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) = 1$ 并且，对于每个 $x \in [0,1]$，求和中只有两个相邻项非零，满足

$$D(T_n(f), f) = \sup_{x\in[0,1]} d_\infty(T_n(f,x), f(x)) \le 3\omega^{\mathcal{F}}_{d_\infty}\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

其中，$\omega^{\mathcal{F}}_{d_\infty}(f,\ \delta)$ 表示模糊连续模（定义见下文）。

U. Kadak（[16]）最近将 Cardaliaguet-Euvrard神经网络算子扩展到了多变量 n-胞模糊数值函数的情形，这些函数关于上确界度量 d_∞ 连续。本文也将讨论这些算子，但它们定义在较弱类型的连续函数之间，即端图连续、截集图连续和层连续函数。事实上，模糊值函数领域的大多数研究都围绕 d_∞-连续性展开，但在模糊数集中，上确界度量下的收敛是常见度量中最强的，例如截集图度量、 d_p-度量、端图度量或水平收敛拓扑。因此，正如 [15], 所述，对模糊数值函数施加上确界度量连续性是一个非常强的条件。这或许正是文献中此类函数的研究成果众多，而考虑其他较弱连续性类型时成果匮乏的原因。

本文结构如下：第 2 节介绍模糊数集 $\mathbb{E}^1$ 中的主要主题，以及关于 S 形函数和模糊连续模的关键结果。第 3 节研究水平连续函数的模糊神经网络插值算子。第 4 节讨论发送图度量连续函数，第 5 节则着重讨论端图度量连续函数。值得指出的是，关于端图度量连续性的多数性质（包括一个端图度量连续但非半端图度量连续函数的例子）似乎尚未见诸文献。第 6 节通过一些数值实验说明理论结果。最后一节为结论。

2. 预备知识

本文中，空间指 Tychonoff拓扑空间。空间 X 上的模糊集是一个映射 $u\colon X \to [0,1]$。对于每个 $\lambda \in [0,1]$，模糊集 u 的 λ-截集定义为

by

$$[u]^\lambda = \{x \in X \ : \ u(x) \geq \lambda\} \quad \text{if } \lambda > 0;$$
$$[u]^0 = \mathrm{cl}_X\{x \in X \ : \ u(x) > 0\}$$

其中 $\mathrm{cl}_X(A)$ 表示集合 A在 X 中的闭包。模糊数 u 是 $\mathbb{R}$ 上的一个模糊集，满足

(FN1) 存在 $x \in \mathbb{R}$，使得 $u(x) = 1$；(FN2) u是下半连续的；(FN3) u 是凸的：对于每个 $\alpha \in [0,1]$，$u(\alpha x + (1-\alpha)y \geq \min\{u(x)\ u(y)\}$；
(FN4) u的支集 $[u]^0$是一个紧集。

我们用 $\mathbb{E}^1$ 表示 $\mathbb{R}$上所有模糊数的集合。根据上述性质可知，每个 λ-截集 $[u]^\lambda$都是 $\mathbb{R}$中的一个闭区间。我们用 $u^-(\lambda)$和 $u^+(\lambda)$表示该区间的左端点和右端点；也就是说，

$$[u]^\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)].$$

Goetschel 和 Voxman 的著名定理使我们能够通过已知其 λ-截集来构造一个模糊数。

定理 2.1。 ([12]) 设 $u \in \mathbb{E}^1$ 和 $[u]^\lambda = [u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$。则函数对 $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 具有以下性质：

(i) $u^-(\lambda)$ 在$(0,1]$上是有界的左连续非递减函数；*(ii)* $u^+(\lambda)$ 在$(0,1]$上是有界的左连续非递增函数；*(iii)* $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处右连续；*(iv)* $u^-(1) \leq u^+(1)$。

反之，若一对函数 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 满足上述条件 *(i)–(iv)*，则存在唯一的 $u \in \mathbb{E}^1$，使得对每个 $\lambda \in [0,1]$，$[u]^\lambda = [\alpha(\lambda)\ \beta(\lambda)]$。

由于我们可以将每个实数 $x \in \mathbb{R}$ 与由特征函数$\chi_{\{x\}}$给出的模糊数对应起来，因此空间 $\mathbb{R}$ 嵌入于 $\mathbb{E}^1$ 中。

我们将度量空间 $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ 记为 $\mathbb{E}^1_\infty$，其中上确界度量 d_∞ 定义如下：

$$d_\infty(u,v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\}.$$

值得注意的是，它可以改写为

$$d_\infty(u,v) = \sup_{\lambda \in [0,1]} d_H([u]^\lambda, [v]^\lambda),$$

其中 d_H 是豪斯多夫距离。

一般而言，度量空间 (X,d) 中非空闭集之间的豪斯多夫距离定义为

$$d_H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\}$$

其中 $H^*(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b)$。

豪斯多夫距离可能为无穷大，但如果 A 和 B 是紧集，或者至少是闭且有界集，则该距离有限。

定义 2.2。 设 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为一个 S 形函数；也就是说，它是满足以下条件的函数

$$\lim_{x \to -\infty} \sigma(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \to +\infty} \sigma(x) = 1.$$

固定 $m \in \mathbb{R}^+$。根据 [18], ，我们称 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$，如果

(1) $\sigma(x)$ 是非递减的，(2) 对于 $x \leq -m$，$\sigma(x) = 0$；对于 $x \geq m$，$\sigma(x) = 1$。

令 $\varphi(x) := \sigma(x+m) - \sigma(x-m)$】【。

特别是，众所周知的斜坡函数、光滑斜坡型 S 形函数以及单变量中心 B 样条都属于类 $\mathcal{A}(m)$。$\varphi(x)$ 的性质总结如下命题所示：

命题 2.3。（[18, 引理 1]）若 $\sigma \in \mathcal{A}$（m），则

(i) φ（x）非负；*(ii)* 当 $x < 0$ 时，φ（x）单调不减；当 $x > 0$ 时，单调不增；*(iii)* $supp$（φ（x））$\subseteq [-2m, 2m]$；*(iv)* 对于 $x \in [0, 2m]$，φ（x）$+\varphi$（$x-2m$）$= 1$。

Now，受 [18]，启发，我们可以定义以下模糊神经网络算子 r.

定义 2.4。设 f：$[a,b] \to \mathbb{E}^1$，且 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$。那么，对于 $x \in [a,b]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们可以定义：

$$S_{n,\sigma}(f,x) := \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{2m}{h}(x - x_k)\right) f(x_k),$$

其中 $x_k = a + kh$, $k = 0$，1，2，.....，n 和 $h = \dfrac{b-a}{n}$.

我们回顾一下，$\mathbb{R}$ 通过 $x \mapsto \tilde{x}$ 规范地嵌入到 $\mathbb{E}^1$ 中，其中 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\widetilde{x} := \sim\chi_{\{x\}} \in \mathbb{E}^1$。因此，若 f：$[a,b] \to \mathbb{R}$，我们用 f：$[a,b] \to \mathbb{E}^1$ 表示由 $f(x) := \widetilde{f(x)}$ 定义的函数。下面的命题表明，$S_n(f)$ 在每个节点 x_k 处都与 f 的取值相符，并且 $S_n(f)$ 是归一化的。

命题 2.5。设 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$ 是一个 *S* 形函数，且 f：$[a,b] \to \mathbb{E}^1$。令 $S_{n,\sigma}(f,x)$ 如上定义。则，

(i) $S_{n,\sigma}(f, x_k) = f(x_k)$，$k = 0$，1，.....，$n$。

(ii) $S_{n,\sigma}(1, x) = 1$，对所有 $x \in [a,b]$ 均成立。

证明。(i) 固定 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$。于是，$\frac{2m}{h}(x_k - x_j) \geq 2m$ 对 $j = 0$、.....、$k-1$ 成立，且 $\frac{2m}{h}(x_k - x_j) \leq -2m$ 对 $j = k+1$、.....、n 成立。因此，由命题 2.3 的性质 (iii)，可得

$$\begin{aligned} S_{n,\sigma}(f, x_k) &= \sum_{j=0}^{n} \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_k - x_j)\right) f(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_k - x_j)\right) f(x_j) + f(x_k)\varphi(0) + \sum_{j=k+1}^{n} \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_k - x_j)\right) f(x_j) \\ &= f(x_k)\varphi(0) = f(x_k)(\sigma(m) - \sigma(-m)) = f(x_k). \end{aligned}$$

$k = 0$ 或 $k = n$ 的情形处理方法类似。

(ii) 任取 $x \in [a,b]$。若对某个 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 有 $x = x_k$，则结论由 (i) 得出。否则，存在 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使得 $x_k < x < x_{k+1}$。由于 $x_{k+1} = x_k + h$，我们有

$$\frac{2m}{h}(x - x_{k+1}) = \frac{2m}{h}(x - x_k - h) = \frac{2m}{h}(x - x_k) - 2m.$$

现在，$\frac{2m}{h}(x - x_k) \in [0, 2m]$ 并且，通过应用命题 2.3 的（iv），我们得到

$$\varphi\left(\frac{2m}{h}(x - x_k)\right) + \varphi\left(\frac{2m}{h}(x - x_{k+1})\right) = 1.$$

另一方面，$\frac{2m}{h}(x-x_j) \geq 2m$ 对于 $j=0,\ldots,k-1$，且 $\frac{2m}{h}(x-x_j) \leq -2m$对于 $j=k+2,\ldots,n$。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_j)\right) &= \sum_{j=0}^{k-1}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_j)\right)+\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_k)\right)\\ &\quad+\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_{k+1})\right)+\sum_{j=k+2}^{n}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_j)\right)\\ &= \varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_k)\right)+\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_{k+1})\right)=1,\end{aligned}$$

其给出

$$S_{n,\sigma}(\widetilde{1},x)=\left(\sum_{j=0}^{n}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x-x_j)\right)\right)\widetilde{1}=\widetilde{1}.$$

□

回顾一下函数 f 的连续模定义：$[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$\omega(f,\delta):=\sup\{|f(x)-f(y)| \ : \ x,y\in[a,b],\ |x-y|<\delta\}$$

类似地，我们可以定义模糊数值函数 f 的模糊连续模：$[a,b]\to(\mathbb{E}^1,\ d)$，其中 d 是 $\mathbb{E}^1$ 上的任意度量:

$$\omega_d^{\mathcal{F}}(f,\delta):=\sup\{d(f(x),f(y)) \ : \ x,y\in[a,b],\ |x-y|<\delta\}.$$

由于 $[a,b]$ 是紧致的，如果 f 是连续函数，则它是一致连续的（参见例如 [7]），因此 $\lim_{\delta\to 0}\omega_d^{\mathcal{F}}(f,\ \delta)=0$。

3. 3. 级连续映射

U. Kadak [16] 已证明，神经网络算子 $S_{n,\sigma}(f,x)$ 与 d_∞-连续函数 f 的距离小于d_∞: $[a,b]\to\mathbb{E}^1_\infty$。也就是说，

$$D(S_{n,\sigma}(f),f)\leq\omega_{d_\infty}^{\mathcal{F}}\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

本节中，我们考虑赋予水平收敛拓扑的 $\mathbb{E}^1$。正如引言中所述，层连续函数类严格大于 d_∞-连续函数类（见 [9, 例 5.1]），因此我们需要新的技术来处理这类函数。

回顾一下，若模糊数网 $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 水平收敛到 $u\in\mathbb{E}^1$，则称其

$$\lim_\alpha u_\alpha^-(\lambda)=u^-(\lambda)\quad\text{and}\quad\lim_\alpha u_\alpha^+(\lambda)=u^+(\lambda)$$

对所有 $\lambda\in[0,1]$ 均成立。这种收敛在 $\mathbb{E}^1$ 上定义了一个拓扑，其邻域局部基如下:

$$V(u,\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\},\varepsilon)=\{v\in\mathbb{E}^1 \ : \ \max_{1\leq j\leq n}\{|u^-(\lambda_j)-v^-(\lambda_j)|,|u^+(\lambda_j)-v^+(\lambda_j)|\}<\varepsilon\},$$

其中 $u\in\mathbb{E}^1$、$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}\subset[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$。

令 $\mathbb{E}^1_\ell$ 表示赋予水平收敛拓扑的模糊数集合。

f 的层连续性：$[a,b]\to\mathbb{E}_\ell^1$ 意味着，对于每个 $\lambda\in[0,1]$，实值函数

$$f(\cdot)^-(\lambda):[a,b]\to\mathbb{R}\quad\text{and}\quad f(\cdot)^+(\lambda):[a,b]\to\mathbb{R},$$

分别由 $x\mapsto f(x)^-(\lambda)$ 和 $x\mapsto f(x)^+(\lambda)$ 定义的函数是连续的。若对每个 $\lambda\in[0,1]$，这两个函数都一致连续，则称 f 为层一致连续。也就是说，对于任意 $\lambda_0\in[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得

(3.1) $|f(x)^-(\lambda_0)-f(y)^-(\lambda_0)|<\varepsilon$，若 $|x-y|<\delta$,

(3.2) $|f(x)^+(\lambda_0)-f(y)^+(\lambda_0)|<\varepsilon$，若 $|x-y|<\delta$。

与度量情形一样，显然，函数 $f:[a,b]\to\mathbb{E}_\ell^1$ 的连续性也等价于其一致连续性。

命题 3.1。设 $f:[a,b]\to\mathbb{E}_\ell^1$ 是层连续函数。那么，f 是层一致连续的。

因此，我们可以为函数 $f:[a,b]\to\mathbb{E}_\ell^1$定义逐层模糊连续模如下：对于每个 $\lambda\in[0,1]$, 定义

$$\omega^{\mathcal{F}}(f,\delta,\lambda):=\sup\{d_H\left([f(x)]^\lambda,[f(y)]^\lambda\right)\ :\ x,y\in[a,b];\ |x-y|<\delta\}$$

由此可得以下结果。

命题 3.2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{E}_\ell^1$ 是一个函数。那么，f 层一致连续，当且仅当对每个 $\lambda\in[0,1]$, 有 $\lim_{\delta\to0}\omega^{\mathcal{F}}(f,\delta,\lambda)=0$。

证明。假设 f 层一致连续。固定 $\lambda_0\in[0,1]$。取 $\varepsilon>0$，并找到满足方程（3.1）和（3.2）的 $\delta_0>0$。任取 $0<\eta<\delta_0$。那么，对于所有满足 $|x-y|<\eta<\delta_0$的 $x,y\in[a,b]$，我们有 $d_H\left([f(x)]^{\lambda_0},[f(y)]^{\lambda_0}\right)<\varepsilon$，由此得到

$$\omega^{\mathcal{F}}(f,\eta,\lambda_0)=\sup\{d_H\left([f(x)]^{\lambda_0},[f(y)]^{\lambda_0}\right)\ :\ x,y\in[a,b];\ |x-y|<\eta\}\le\varepsilon,$$

从而有 $\lim_{\delta\to0}\omega^{\mathcal{F}}(f,\delta,\lambda_0)=0$。

现在假设对每个 $\lambda\in[0,1]$，均有 $\lim_{\delta\to0}\omega^{\mathcal{F}}(f,\delta,\lambda)=0$。固定 $\lambda_0\in[0,1]$ 并取 $\varepsilon>0$。存在 $\delta>0$，使得对每个 $0<\eta<\delta$，都有 $\omega^{\mathcal{F}}(f,\eta,\lambda_0)<\epsilon$。若 $x,y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta/2$，则

$$d_H\left([f(x)]^{\lambda_0},[f(y)]^{\lambda_0}\right)\le\omega^{\mathcal{F}}(f,\delta/2,\lambda_0)<\varepsilon,$$

因此，方程（3.1）和（3.2）均成立，结论得证。 □

令 $C([a,b],\mathbb{E}_\ell^1)$ 表示层连续模糊数值函数空间，并假设该空间赋有一致收敛拓扑。在 $f_0\in C([a,b],\mathbb{E}_\ell^1)$ 处的局部基由以下集合构成

$$V(f_0,\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\},\varepsilon):=\{f\in C([a,b],\mathbb{E}_\ell^1)\ :\ \max_{1\le j\le m}d_H\left([f_0(x)]^{\lambda_j},[f(x)]^{\lambda_j}\right)<\varepsilon,\ x\in[a,b]\}$$

其中 $\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}\subseteq[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$。

定理 3.3。设 $\sigma\in\mathcal{A}(m)$。固定 $f_0\in C([a,b],\mathbb{E}_\ell^1)$。那么，对于任意 $\lambda\in[0,1]$，有

$$d_H\left([f_0(x)]^\lambda,[S_{n,\sigma}(f_0,x)]^\lambda\right)\le\omega^{\mathcal{F}}(f_0,h,\lambda),$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 和每个 $x\in[a,b]$，其中 $h=\frac{b-a}{n}$。

证明。取 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in [0,1]$。固定 $x_0 \in [a,b]$。取 $h = \frac{b-a}{n}$ 和 $x_k = a + kh$，$k = 0, 1, \ldots\ldots, n$。若对某个 k 有 $x_0 = x_k$，则无需证明。否则，取 $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ 使得 $x_k < x_0 < x_{k+1}$。于是，

$$\begin{aligned} d_H\left([f_0(x_0)]^\lambda, [S_{n,\sigma}(f_0,x_0)]^\lambda\right) &= d_H\left(\left[\sum_{j=0}^{n}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_j)\right)f_0(x_0)\right]^\lambda, \left[\sum_{j=0}^{n}\varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_j)f_0(x_j)\right)\right]^\lambda\right) \\ &\le \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_k)\right) d_H\left([f_0(x_0)]^\lambda, [f_0(x_k)]^\lambda\right) \\ &+ \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_{k+1})\right) d_H\left([f_0(x_0)]^\lambda, [f_0(x_{k+1})]^\lambda\right) \\ &\le \left(\varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_k)\right) + \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0-x_{k+1})\right)\right)\cdot \omega^{\mathcal{F}}(f_0,h,\lambda) \\ &= \omega^{\mathcal{F}}(f_0,h,\lambda). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

因此，我们可以证明，这些模糊神经网络算子能够以任意精度逼近任意层连续函数。

定理 3.4. 设 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$。固定 $f_0 \in C([a,b], \mathbb{E}^1_\ell)$。那么，对于任意 $V(f_0, \{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}, \varepsilon)$，我们可以找到 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$S_{n,\sigma}(f_0,x) \in V(f_0, \{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}, \varepsilon).$$

证明。由于 f_0 是层连续函数，我们知道它是（层）一致连续的，因此对于每个 $j = 1,\ldots,m$，$\lim_{\delta\to 0}\omega^{\mathcal{F}}(f_0,\delta,\lambda_j) = 0$。因此，我们可以找到$\delta_0 > 0$，使得对于每个 $0 < \delta < \delta_0$，都有 $\max\{\omega^{\mathcal{F}}(f_0,\delta,\lambda_j) : j = 1,\ldots,m\} < \epsilon$。

选取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $h = \frac{b-a}{n} < \delta_0$，并令 $x_k = a + k\cdot h$，$k = 0, 1, \ldots\ldots, n$。

固定 $x_0 \in [a,b]$。若对某个 $k = 0, 1, \ldots\ldots, n$，有 $x_0 = x_k$，则无需证明。若情况并非如此，则取 $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ 使得 $x_k < x_0 < x_{k+1}$。于是，对每个$j = 1, 2, \ldots\ldots, m$，有

$$d_H\left([f_0(x_0)]^{\lambda_j}, [S_{n,\sigma}(f_0,x_0)]^{\lambda_j}\right) \le \omega^{\mathcal{F}}(f_0,h,\lambda_j) < \varepsilon,$$

由此得出结论。 □

4. The sendograph metric case

给定 $u \in \mathbb{E}^1$，u 的截集图定义为

$$\mathrm{send}(u) := \{(x,\alpha) \in [u]^0 \times [0,1] \ : \ u(x) \ge \alpha\}.$$

截集图是一个紧集，因此可以定义截集图度量为

$$D_S(u,v) = d_H(\mathrm{send}(u), \mathrm{send}(v)), \quad u,v \in \mathbb{E}^1.$$

众所周知，发送图度量下的收敛弱于水平收敛拓扑下的收敛，因此，D_S-连续模糊数值函数类严格大于层连续函数类。事实上，[15, 例 81] 中给出了这一事实的一个例子。

命题 4.1. $\mathbb{E}^1$ 上的发送图度量具有以下性质：

(i) $D_S(\alpha u, \beta u) \leq |\alpha - \beta|$最大值$\{|y| : \quad y \in [u]^0\}$；对所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \in \mathbb{E}^1$ 均成立。*(ii)* $D_S(\sum_{j=1}^n u_j, \sum_{j=1}^n v_j) \leq \sum_{j=1}^n D_S(u_j, v_j)$； $u_j, v_j \in \mathbb{E}^1, j = 1,2,\ldots,n$。*(iii)* 若 $0 \leq \alpha \leq 1$，则对所有 $u, v, w \in \mathbb{E}^1$,

$$D_S(\alpha u + (1-\alpha)v, w) \leq \sqrt{2}\ \max\{D_S(u,w), D_S(v,w)\}.$$

证明。 证明可见 [15]。 □

现在我们可以陈述以下结果。

定理 4.2。 设 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$。取定 $f_0 \in C([a,b], (\mathbb{E}^1, D_S))$。那么，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sup_{x\in[a,b]} D_S(S_{n,\sigma}(f_0,x), f_0(x)) \leq \sqrt{2} \cdot \omega_{D_S}^{\mathcal{F}}\left(f_0, \frac{b-a}{n}\right).$$

证明。取 $n \in \mathbb{N}$，并固定 $x_0 \in [a,b]$。取$h = \frac{b-a}{n}$，并令 $x_k = a + k \cdot h$, $k =$0，1，...，n。若对于某个 $k = 0$，1，...，n， $x_0 = x_k$，则无需证明。因此，找出$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$使得 $x_k < x_0 < x_{k+1}$。根据命题 4.1(iii)，并注意到 $\varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0 - x_{k+1})\right) + \varphi\left(\frac{2m}{h}(x_0 - x_{k+1})\right) = 1$，我们有

$$\begin{aligned}
D_S(S_{n,\sigma}(f_0,x_0), f_0(x_0)) &= D_S\left(\sum_{j=0}^{n} \varphi\left(\tfrac{2m}{h}(x_0 - x_j)\right) f_0(x_j), f_0(x_0)\right) \\
&= D_S\left(\varphi\left(\tfrac{2m}{h}(x_0 - x_k)\right) f_0(x_k) + \varphi\left(\tfrac{2m}{h}(x_0 - x_{k+1})\right) f_0(x_{k+1}), f_0(x_0)\right) \\
&\leq \sqrt{2} \cdot \max\left\{D_S\left(f_0(x_k), f_0(x_0)\right), D_S\left(f_0(x_{k+1}), f_0(x_0)\right)\right\} \\
&\leq \sqrt{2} \cdot \omega_{D_S}^{\mathcal{F}}(f_0, h).
\end{aligned}$$

□

与水平连续函数的情形一样，现在我们可以推出模糊数值 D_S-连续函数的一个稠密性结果。

定理 4.3. 设 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$。固定 $f_0 \in C([a,b], (\mathbb{E}^1, D_S))$。那么，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，我们都能找到 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\sup_{x\in[a,b]} D_S(S_{n,\sigma}(f_0,x), f_0(x)) < \varepsilon.$$

证明。 由 f_0 是一致 D_S-连续的，可得

$$\lim_{h\to 0} \omega_{D_S}^{\mathcal{F}}(f_0, h) = 0$$

因此我们可以找到 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\omega_{D_S}^{\mathcal{F}}(f_0, \frac{b-a}{n}) < \varepsilon$$

并且，通过应用定理 4.2，我们得出结论。 □

5. The endograph metric case

我们还可以在 $\mathbb{E}^1$ 上考虑另一种度量，即端图度量。回顾一下，模糊数 $u \in \mathbb{E}^1$ 的端图定义为

$$end(u) = \{(x, \beta) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \ : \ u(x) \geq \beta\}$$

这是 $\mathbb{R} \times [0, 1]$ 中的一个闭集，端图度量定义为

$$D_E(u, v) = d_H(end(u), end(v)), \quad u, v \in \mathbb{E}^1,$$

其中 d_H 表示 $(\mathbb{R}\times[0, 1], \ d)$ 中的豪斯多夫距离， d 是欧几里得距离。

端图度量满足 $D_E \leq D_S$，因此，此度量下的收敛弱于截集图度量下的收敛（事实上，正如我们将在本节末尾所示，它严格更弱）（关于这两种度量下收敛之间的关系，参见 [8, 定理 5] ）。

由于对每个 $u \in \mathbb{E}^1$ 都有 $end(u) = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup send(u)$，因此预期截集图度量和端图度量具有某些共同性质。接下来，我们将给出一些与端图度量相关的性质，这些性质类似于命题 4.1 中关于截集图度量所述的性质；据我们所知，这些性质此前尚未见于文献。首先，我们证明三个技术引理。

引理5.1。 设 u、 v是两个模糊数。令 $w = \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v$，其中 $\alpha \in [0, 1]$。那么，对于每个 $\lambda \in [0, 1]$，有 $z \in [w]^\lambda$ 当且仅当存在 $x \in [u]^\lambda$ 和 $y \in [v]^\lambda$，使得 $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$。

证明。 首先，假设 $x \in [u]^\lambda$、 $y \in [v]^\lambda$ 和 $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$。那么，根据模糊数的凸性，我们有

$$\begin{aligned} w(z) &= (\alpha \cdot u + (1 - \alpha) \cdot v)(z) = \alpha u(z) + (1 - \alpha)v(z) \\ &\geq \alpha \min\{u(x), u(y)\} + (1 - \alpha) \min\{v(x), v(y)\} \\ &\geq \alpha\lambda + (1 - \alpha)\lambda = \lambda. \end{aligned}$$

因此， $z \in [w]^\lambda$。

反过来，固定 $z \in [w]^\lambda = [w^-(\lambda) \ w^+(\lambda)]$。存在 $0 \leq k \leq 1$，使得 $z = kw^-(\lambda) + (1 - k)w^+(\lambda)$。取 $x = ku^-(\lambda) + (1 - k)u^+(\lambda) \in [u]^\lambda$ 和 $y = kv^-(\lambda) + (1 - k)v^+(\lambda) \in [v]^\lambda$。那么，

$$\begin{aligned} z &= kw^-(\lambda) + (1 - k)w^+(\lambda) \\ &= k(\alpha u^-(\lambda) + (1 - \alpha)v^-(\lambda)) + (1 - k)(\alpha u^+(\lambda) + (1 - \alpha)v^+(\lambda)) \\ &= \alpha(ku^-(\lambda) + (1 - k)u^+(\lambda)) + (1 - \alpha)(kv^-(\lambda) + (1 - k)v^+(\lambda)) \\ &= \alpha x + (1 - \alpha)y. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 5.2. 设 K 是 $(\mathbb{R} \times [0, 1], d)$ 中的一个紧集，并令 $M = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup K$。那么，对于每个 $(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$，我们有

$$d((x, \lambda), M) = \min\{d((x, \lambda), (x, 0)), d((x, \lambda), K)\}.$$

此外，对每个 $(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$，都有 $(y, \beta) \in M$ 使得

$$d((x, \lambda), (y, \beta)) = d((x, \lambda), M).$$

证明。 由于 $d((x,\lambda),M) = \inf_{(y,\beta)\in M} d((x,\lambda),(y,\beta))$，因此有

$$d((x,\lambda),M) \le \min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\}.$$

现在，给定 $\varepsilon > 0$，存在 $(y, \beta) \in M$，满足

$$d((x,\lambda),(y,\beta)) < d((x,\lambda),M) + \varepsilon.$$

若 $\beta = 0$，则有

$$\min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\} \le d((x,\lambda),(x,0)) \le d((x,\lambda),(y,0)) < d((x,\lambda),M) + \varepsilon.$$

If $\beta \neq 0$, then $(y,\beta) \in K$ and again

$$\min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\} \le d((x,\lambda),K) \le d((x,\lambda),(y,\beta)) < d((x,\lambda),M) + \varepsilon.$$

S于是我们得t

$$\min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\} < d((x,\lambda),M) + \varepsilon,$$

对所有 $\varepsilon > 0$，由此得到

$$\min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\} \le d((x,\lambda),M)$$

至此，证明完毕。

最后，由于

$$d((x,\lambda),M) = \min\{d((x,\lambda),(x,0)), d((x,\lambda),K)\},$$

我们有：如果 $d((x,\lambda),M) = d((x,\lambda),(x,0))$，那么 $(y,\beta) = (x,0)$ 即可得出结论。如果 $d((x,\lambda),M) = d((x,\lambda),K)$，则 K 的紧致性使我们得到一点 $(y,\beta) \in K$ 使得 $d((x,\lambda),K) = d((x,\lambda),(y,\beta))$，于是证毕。□

值得注意的是，采用上述引理中的记号，距离 $d((x,\lambda),M)$ 总能在 M 中的某一点处取得，尽管 M 不是紧集。

注 5.3。 应用引理 5.2，我们可以陈述以下有用结果：对于 $u, v \in \mathbb{E}^1$，$H^*(end(u), end(v)) = \text{上确界}_{(x,\lambda)\in end(u)} \text{下确界}_{(y,\beta)\in end(v)} d((x,\lambda),(y,\beta)) \le K$ 对于某个 $K > 0$ 当且仅当，对于每个 $(x, \lambda) \in end(u)$，都存在 $(y, \beta) \in end(v)$，使得 $d((x, \lambda), (y, \beta)) \le K$。因此，为了证明 $d_H(end(u), end(v)) \le K$，我们需要检查以下两个条件：

$$(5.1) \quad \forall (x,\lambda) \in end(u) \quad \exists (y,\beta) \in end(v): \quad d((x,\lambda),(y,\beta)) \le K$$

and

$$(5.2) \quad \forall (y,\beta) \in end(v) \quad \exists (x,\lambda) \in end(u) \ : \ d((x,\lambda),(y,\beta)) \le K.$$

引理 5.4。设 u, v 是两个模糊数。

(i) 如果 $(x_1,\beta_1),(x_2,\beta_2) \in end(u)$，那么

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \min\{\beta_1,\beta_2\}) \in end(u),$$

对每个 $\alpha \in [0,1]$。

(ii) 令 $w = \alpha \cdot u + (1-\alpha)\cdot v$，其中 $\alpha \in [0,1]$。若 $(y_1,\lambda_1) \in end(u)$ 且 $(y_2,\lambda_2) \in end(v)$，则

$$(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\}) \in end(w).$$

证明。 对于（ii），假设 $(y_1,\lambda_1) \in end(u)$ 且 $(y_2,\lambda_2) \in end(v)$。我们有三种可能性：

- $y_1 \in [u]^{\lambda_1}$ 和 $y_2 \in [v]^{\lambda_2}$。由命题 5.1，$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in [w]^{\text{最小值}\{\lambda_1,\lambda_2\}}$，从而

$$(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\}) \in end(w).$$

• $(y_1,\ \lambda_1),\ (y_2,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}\times\{0\}$。于是最小值$\{\lambda_1,\lambda_2\}=0$，因此

$$(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\}) \in \mathbb{R}\times\{0\} \subset end(w).$$

• $(y_1,\lambda_1) \in \mathbb{R}\times\{0\}$和 $y_2\in[v]^{\lambda_2}$(或 $(y_2,\lambda_2)\in\mathbb{R}\times\{0\}$和 $y_1\in[u]^{\lambda_1}$)。在此情形下取 $\min\{\lambda_1,\lambda_2\}=0$，于是 $(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\}) \in \mathbb{R}\times\{0\}\subset end(w)$。

类似的论证可得 (i)。 □

下面的命题总结了 [15] 中的引理 4.1 和 4.2，也是得到所需结果的关键。

命题 5.5。设 d 为 $\mathbb{R}^2$ 中的欧几里得距离。设 $b, k_1, k_2\in\mathbb{R}$ 和 $\alpha\in[0,1]$。*(1)* 对每个 $x, y_1, y_2\in\mathbb{R}$，有

$$d((x,b),(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2, \min\{k_1,k_2\})) \le \sqrt{d((x,b),(y_1,k_1))^2+d((x,b),(y_2,k_2))^2}$$

(2) 设 $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$，并设 $k_1,k_2\in\mathbb{R}$。那么

$$d((x_1,b),(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2, \min\{k_1,k_2\})) \le \sqrt{d((x_1,b),(y_1,k_1))^2+d((x_2,b),(y_2,k_2))^2}.$$

以下结果给出了端图度量的一些性质，这些性质与命题 4.1 中所述的截集图度量的性质类似。

命题 5.6。$\mathbb{E}^1$ 上的端图度量具有以下性质。

(i) 设 u 属于 $\mathbb{E}^1$，并设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$。那么

$$D_E(\alpha u,\beta u)\le|\alpha-\beta|\max\{|z|\ :\ z\in[u]^0\}.$$

(ii) 设 $u_j, v_j\in\mathbb{E}^1$, $j=1,2,\ldots,n$，并令 $u=\sum_{j=0}^n u_j$ 和 $v=\sum_{j=0}^n v_j$。那么

$$D_E(u,v)\le\sum_{j=0}^n D_E(u_j,v_j).$$

(iii) 设 u、v、w 属于 $\mathbb{E}^1$ 和 $\alpha\in[0,1]$。则，

$$D_E(\alpha\cdot u+(1-\alpha)\cdot v, w)\le\sqrt{D_E(u,w)^2+D_E(v,w)^2}.$$

(iv) 设 u、v、$w\in\mathbb{E}^1$ 和 $\alpha\in[0,1]$。则，

$$D_E(\alpha\cdot u+(1-\alpha)\cdot v, w)\le\sqrt{2}\max\{D_E(u,w),D_E(v,w)\}.$$

证明。(i) 设 $(x,\lambda)\in end(\alpha u)$。如果 $(x,\lambda)\in\mathbb{R}\times|0|$，则 $(x,\lambda)\in end(\beta u)$，并且

$$d((x,\lambda),(x,\lambda))=0\le|\alpha-\beta|\max\{|z|\ :\ z\in[u]^0\}.$$

如果 $(x,\lambda)\in send(\alpha u)$，则 $x\in[\alpha u]^\lambda=\alpha[u]^\lambda$，因此存在 $y\in[u]^\lambda$ 使得 $x=\alpha y$。现在，$(\beta y,\lambda)$ 属于 $end(\beta u)$，且我们有

$$\begin{aligned} d((x,\lambda),d(\beta y,\lambda)) &= d((\alpha y,\lambda),(\beta y,\lambda))=|\alpha-\beta||y| \\ &\le|\alpha-\beta|\max\{|z|\ :\ z\in[u]^0\}. \end{aligned}$$

因此，无论何种情况，给定 $(x,\lambda)\in end(\alpha u)$，都存在 $(y,\gamma)\in end(\beta u)$，使得

$$d((x,\lambda),d(y,\gamma))\le|\alpha-\beta|\max\{|z|\ :\ z\in[u]^0\}$$

且等式 (5.1) 得以满足。交换 α 和 β 的作用，我们得到等式 (5.2) 也成立，从而得到所需结果。

（ii）我们需要证明相应的方程（5.1）和（5.2）得到满足。也就是说，

- 给定（x， λ） $\in end$（u），存在（y， β） $\in end$（v）使得

$$d((x,\lambda),(y,\beta)) \le \sum_{j=0}^{n} D_E(u_j, v_j).$$

- 给定（y,β） $\in end$（v），存在（x,λ） $\in end$（u），使得

$$d((x,\lambda),(y,\beta)) \le \sum_{j=0}^{n} D_E(u_j, v_j).$$

设（x,λ） $\in end$（u）。如果（x,λ） $\in \mathbb{R}\times\{0\}$，那么，（$x,\lambda$） $\in end$（v）并且

$$d((x,\lambda),(x,\lambda)) = 0 \le \sum_{j=0}^{n} D_E(u_j, v_j).$$

如果（x,λ） $\in send$（u），那么 $x \in [u]^{\lambda} = \sum_{j=0}^{n}[u_j]^{\lambda}$，因此存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，使得（$x_j$, λ） $\in end$（u_j），$j = 1, 2, \ldots, n$ 以及 $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$。现在，根据引理 5.2，我们可以找到（y_j, β_j） $\in end$（v_j），使得 d（（x_j,λ），（y_j,β_j））$= d$（（x_j,λ） end（v_j））， $j = 1, \ldots, n$。考虑 $\beta = \min\{\beta_j : \ 1 \le j \le n\}$ 以及 $y = \sum_{j=0}^{n} y_j$。显然，（y,β） $\in end$（v）。然后，

$$\begin{aligned} d((x,\lambda),(y,\beta)) &= d\left(\left(\sum_{j=0}^{n} x_j, \lambda\right), \left(\sum_{j=0}^{n} y_j, \beta\right)\right) \\ &\le \sum_{j=0}^{n} d((x_j,\lambda),(y_j,\beta_j)) = \sum_{j=0}^{n} d((x_j,\lambda), end(v_j)) \\ &\le \sum_{j=0}^{n} H^*(end(u_j), end(v_j)) \le \sum_{j=0}^{n} d_H(end(u_j), end(v_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{n} D_E(u_j, v_j). \end{aligned}$$

交换 u 和 v 的角色，我们也能得到第二个条件。证明至此完成。

(iii) 首先，我们需要验证条件 (5.1)。令 $c = \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v$，并取 $(x,\beta) \in end(w) = \mathbb{R}\times\{0\} \cup send(w)$。

如果 $(x,\beta) \in \mathbb{R}\times\{0\}$，那么 $(x,\beta) \in end(c)$，且

$$d((x,\beta),(x,\beta)) = 0 \le \sqrt{D_E(u,w)^2 + D_E(v,w)^2}.$$

因此，假设 $(x,\beta) \in send(w)$。根据引理 5.2，存在 $(y_1,\lambda_1) \in end(u)$ 和 $(y_2,\lambda_2) \in end(v)$，使得

$$\begin{aligned} d((x,\beta),(y_1,\lambda_1)) &= d((x,\beta), end(u)) \le D_E(u,w), \\ d((x,\beta),(y_2,\lambda_2)) &= d((x,\beta), end(v)) \le D_E(v,w). \end{aligned}$$

By 引理 5.4、$(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\}) \in end(c)$ 以及命题 5.5 可得

$$\begin{aligned} d((x,\beta),(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \min\{\lambda_1,\lambda_2\})) &\le \sqrt{d((x,\beta),(y_1,\lambda_1))^2 + d((x,\beta),(y_2,\lambda_2))^2} \\ &\le \sqrt{D_E(u,w)^2 + D_E(v,w)^2}. \end{aligned}$$

因此，条件 (5.1) 成立。

现在，我们来验证条件 (5.2)。取 $(y,\lambda) \in end(c)$。若 $(y,\lambda) \in \mathbb{R}\times\{0\}$，则 $(y,\lambda) \in end(w)$ 也成立，并且 $d((y,\lambda),(y,\lambda)) = 0$。

若 $(y,\lambda) \in send(c)$，则根据命题 5.1，存在 $(y_1,\lambda) \in send(u)$ 和 $(y_2,\lambda) \in send(v)$，使得 $y = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$。根据引理 5.2，我们可以找到 $(x_1,\beta_1) \in end(w)$ 和 $(x_2,\beta_2) \in end(w)$，使得

$$d((y_1,\lambda),(x_1,\beta_1)) \le D_E(u,w),$$
$$d((y_2,\lambda),(x_2,\beta_2)) \le D_E(v,w).$$

根据引理 5.4(i)，我们有 $(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2, \min\{\beta_1,\beta_2\}) \in end(w)$，并且应用命题 5.5(ii) 可得

$$\begin{aligned} d((y,\lambda),(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\min\{\beta_1,\beta_2\}) &\le \sqrt{d((y_1,\lambda_1),(x_1,\beta_1))^2 + d((y_2,\lambda_2),(x_2,\beta_2))^2} \\ &< \sqrt{D_E(u,w)^2 + D_E(v,w)^2} \end{aligned}$$

且由于 (y,λ) 是 $end(c)$ 中的任意一点，我们得到条件 (5.2) 成立。因此，

$$D_E(\alpha u + (1-\alpha)v, w) = d_H(end(c), end(w)) \le \sqrt{D_E(u,w)^2 + D_E(v,w)^2}$$

至此，证明完成。

(iv) 这是 (iii) 的一个直接推论。

□

命题 5.6(iv) 中的界使我们能够将本节的主定理表述如下。

定理 5.7. 设 $\sigma \in \mathcal{A}(m)$。固定 $f_0 \in C([a,b],(\mathbb{E}^1, D_E))$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sup_{x\in[a,b]} D_E(S_{n,\sigma}(f_0,x), f_0(x)) \le \sqrt{2}\cdot\omega^{\mathcal{F}}_{D_E}\left(f_0, \frac{b-a}{n}\right).$$

证明。借助上述命题，证明可仿照定理 4.2 的证明。

□

我们以一个端图度量连续函数的例子结束本节，该函数不是发送图度量连续函数。此例表明，端图度量连续函数类严格包含发送图度量连续函数类。

例 5.8. 设 $f\colon [0,1] \to \mathbb{E}^1$ 定义为 $f(t) = u_t$, $t \in [0,1]$ 其中

$$u_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [t,1], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

当 $t \in (0,1]$ 且

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们有 $[u_t]^\lambda = [t,1]$ 对所有 $\lambda \in [0,1]$ 以及每个 $t \in (0,1]$，且对所有$\lambda \in [0,1]$都有 $[u_0]^\lambda = \{0\}$。

Claim: 对所有 $s,\ t \in [0,1],\ D_E(u_t,\ u_s) = |t-s|$。

我们可以不失一般性地假设 $0 \le t < s \le 1$。首先，我们需要检查条件 (5.1) 和 (5.2) 是否满足。

• 首先，我们将检查条件 (5.1)。取 $(x,\lambda) \in end(u_t)$。我们需要找到 $(y,\beta) \in end(u_s)$，使得

$$d((x,\lambda),(y,\beta)) \le |t-s| = s-t.$$

如果 $\lambda = 0$，则没有需要证明的内容，因为 $(x,0) \in \mathbb{R}\times\{0\} \subset end(u_s)$。如果 $\lambda > 0$，则 $(x,\lambda) \in send(u_t)$，这意味着 $x \in [u_t]^\lambda$。在这种情况下，我们区分两种可能性:

(i) 如果 $t = 0$，则 $x \in [u_0]^\lambda = \{0\}$，并且由于 $s \in [u_s]^\lambda = [s,1]$，我们可以取满足下式的 $(s,\lambda) \in end(u_s)$:

$$d((0,\lambda),(s,\lambda)) = s = s-t.$$

(ii) 如果 $t \neq 0$，则 $x \in [u_t]^\lambda = [t,1]$，而 x 可能位于 $[s,1] = [u_s]^\lambda$ 或 $x \in [t,s)$ 中。第一种情况下，$(x,\lambda) \in end(u_s)$；第二种情况下，我们可以再次取 $(s,\lambda) \in end(u_s)$，从而得到

$$d((x,\lambda),(s,\lambda)) = s-x \le s-t.$$

因此，我们得到 $H^*(end(u_t)\ end(u_s)) \le s-t$。

• 现在我们来检验条件 (5.2)。现在取 $(x,\lambda) \in end(u_s)$。与往常一样，我们只需考虑情形 $\lambda > 0$。由于 $[u_s]^\lambda = [s,1] \subset [t,1] = [u_t]^\lambda$，我们得到 $H^*(end(u_s)\ end(u_t)) = 0$。

由此，我们证明了 $D_E(u_t,u_s) \le |s-t|$。

另一方面，假设 $0 \le t < s \le 1$，我们有 $t \in [u_t]^{s-t} = [t,1]$，因此 $(t,s-t) \in end(u_t)$，并且

$$\begin{aligned} D_E(u_t,u_s) = d_H(end(u_t),end(u_s)) &\ge \sup_{(x,\lambda)\in end(u_t)} d((x,\lambda),end(u_s)) \\ &\ge d((t,s-t),end(u_s)) = \min\{s-t, d((t,s-t),send(u_s))\} = s-t, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} d((t,s-t),send(u_s)) &= \inf_{(y,\beta)\in send(u_s)} d((t,s-t),(y,\beta)) \\ &= \inf_{y\in[s,1],\,\beta\in[0,1]} d((t,s-t),(y,\beta)) \\ &= \inf_{y\in[s,1]\,\beta\in[0,1]} \sqrt{|t-y|^2+|s-t-\beta|^2} \\ &\ge \inf_{y\in[s,1]} |t-y| = s-t. \end{aligned}$$

因此，$D_E(u_t,u_s) \ge |t-s|$，断言得证。

该断言表明，f 是 D_E-连续的。我们将证明 f 不是 D_S-连续的。

考虑序列 $t_n = \frac{1}{n} \in [0,1]$，以及序列 $u_n = f(t_n) = u_{t_n} \in \mathbb{E}^1, n = 1, 2, \ldots\ldots$。由于 f 是 D_E-连续的，我们知道 $\lim_n D_E(u_n, u_0) = 0$。但是，

$$d_H([u_n]^0,[u_0]^0) = d_H([1/n,1],\{0\}) = 1.$$

因此，序列 $u_n = f(t_n)$ 在度量 D_S([8,定理 5]) 下不收敛到 $u_0 = f(0)$，并且 f 不可能是一个 D_S-连续函数。

6. Examples

本节中，我们给出一些数值实验来说明理论结果。具体而言，我们研究在考虑一个（取自 [9] 的）层连续函数时，Cardaliaguet-Euvrard 神经网络算子的行为；该函数不是 d_∞- 连续的。

例 6.1。 设 $f\colon\ [0,1]\to\mathbb{E}^1$ 是一个按层定义的函数

$$f(t)^-(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\le\lambda\le\frac{1}{2}\\ \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^t & \text{if } \frac{1}{2}<\lambda\le 1,\end{cases}\qquad t\in(0,1];$$

$$f(0)^-(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{if } 0\le\lambda\le\frac{1}{2}\\ 1 & \text{if } \frac{1}{2}<\lambda\le 1;\end{cases}$$

$$f(t)^+(\lambda)=1,\quad t\in[0,1].$$

下面列出函数 $S_n(f)$ 与 f 之间的最大误差随数值 n 增大时的变化情况，并比较两种 S 形函数的结果： $\sigma_1(x)$（在 -1 与 1 之间的斜坡函数）以及 $\sigma_2(x)$（Heaviside函数），即

$$\sigma_1(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x\le-1\\ \frac{x+1}{2} & \text{if } -1<x<1\\ 1 & \text{if } x\ge 1\end{cases}\qquad \sigma_2(x)=\begin{cases}0 & \text{if } x\le 0\\ 1 & \text{if } x>0\end{cases}$$

值得注意的是，我们可以逐层计算 f 的连续模，因为对于 $0<\varepsilon\le\frac{1}{2}$ 和 $\lambda=\frac{1}{2}+\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}\omega^{\mathcal{F}}(f,1/n,\lambda)&=\sup_{|x-y|<1/n} d_H\left([f(x)]^\lambda,[f(y)]^\lambda\right)\\ &=\max\Big\{\sup_{|x-y|<1/n}|\varepsilon^x-\varepsilon^y|,\ \sup_{0<y<1/n}(1-\varepsilon^y)\Big\}\\ &=\sup_{0<y<1/n}(1-\varepsilon^y)=1-\varepsilon^{1/n}\end{aligned}$$

因此，如果 ε 较小，逼近的精度会较低；也就是说，当 λ 足够接近 $1\ 2$ 时。

我们将展示误差在若干水平下的表现： $\lambda=0.50005$、 $\lambda=0.6$ 和 $\lambda=0.8$（显然，当 $\lambda\le\frac{1}{2}$ 时，不存在误差）。

由于 $\sup_{x\in[0,1]} d_H([S_n(f,\ x)]^\lambda,\ [f(x)]^\lambda)\ =\sup_{x\in[0,1]}|S_n(f(x)^-(\lambda))\ -\ f(x)^-(\lambda)|$，我们将使用 10000 个离散点计算最大误差，并在一台搭载 3.6 GHz 英特尔酷睿 i7 四核处理器的设备上通过 Matlab 程序运行。结果汇总于下表。

n	最大误差 $\lambda = 0.50005$	最大误差 $\lambda = 0.6$	最大误差 $\lambda = 0.8$
2	0.477274464149295	0.096642906363681	0.033863181751644
6	0.160771268447668	0.015257412531789	0.004557778630386
10	0.076773442016527	0.005915352176593	0.001706767168147
50	0.004446355529542	$2.590718534548619e-04$	$7.161098352004291e-05$
100	0.001166995550397	$6.551579516633765e-05$	$1.801068345708146e-05$
1000	$1.219934826079960e-05$	$6.619747394687181e-07$	$1.810847709560193e-07$

TABLE 1. $\sigma_1(x)$, $m = 1$

n	最大误差 $\lambda = 0.50005$	最大误差 $\lambda = 0.6$	最大误差 $\lambda = 0.8$
10	0.389961648339656	0.108554063832944	0.058314808017082
50	0.093400355140482	0.022539964353849	0.011849754859139
100	0.047373090181003	0.011314735474151	0.005965161136717
1000	0.004914612625552	0.001149191105674	$6.013829067220700e-04$

TABLE 2. $\sigma_2(x)$, $m = 1$

7. 结论

我们研究了 Cardaliaguet-Euvrard 型神经网络算子，该算子作用于从紧区间到模糊数集的连续函数；模糊数集配备了层收敛拓扑，以及由截集图度量和端图度量诱导的拓扑。关于后者，我们证明了端图度量的一些性质；据我们所知，这些性质此前尚未见于文献。类似地，我们给出了一个连续端图函数的例子，该函数并非连续发送图函数，因为我们也未能在文献中找到这样的例子。对于上述所有情况，我们都借助连续模得到了收敛速度。最后，我们补充了一些数值实验的结果，以说明近似的表现。

REFERENCES

[1] *Anastassiou, G.A.*，神经网络算子在单变量情形下的收敛速度。《数学分析与应用杂志》*212*，*237-262*（*1997*）。[2] *Cardaliaguet, P.; Euvrard, G.*，利用神经网络逼近函数及其导数。《神经网络》*5(2)*，*207–220*（*1992*）。[3] *Costarelli, D.; Spigler, R.*，由*S*形函数激活的神经网络算子的逼近结果。《神经网络》*44*（*2013*），*101–106*。[4] *Costarelli, D.; Spigler, R.*，由*S*形激活函数激活的多元神经网络算子。《神经网络》*48*（*2013*），*72–77*。[5] *Costarelli, D.*，由斜坡函数激活的神经网络算子插值。《数学分析与应用杂志》*419*（*2014*），*574–582*。[6] *Cybenko, G.*，通过*S*形函数的叠加进行逼近。《控制、信号与系统数学》（*1989*）。[7] *Daners, D.*，紧致度量空间上连续函数的一致连续性。《美国数学月刊》*122*，*6*（*2017*），第*592*页。[8] *Fang, T.; Wang, G.*，模糊数上确界与下确界的端图方法。《信息科学》*159*（*2004*），*221–231*。[9] *Fang, J.-X.; Huang, H.*，关于模糊数序列的水平收敛。《模糊集与系统》*147*，*4*（*2004*），*417–435*。[10] *Font, J. J.; Macario, S.*，利用梯形函数逼近模糊值函数的*Jackson*型逼近。《伊朗模糊系统杂志》*206*（*2023*），*49–62*。

[11] Gal, S.，模糊环境中的逼近理论，载于《应用数学解析计算方法手册》。Chapman& Hall/CRC（2000），617–666。[12] Goetschel, R.; Voxman, W.，初等模糊微积分，《模糊集与系统》，**18**（1986），31-42。[13] Hornik, K.; Stinchcombe, M.; White, H.，多层前馈网络是通用逼近器，《神经网络》，**2**（1989）。[14] Huang, H.; Wu, C.，多层正则模糊神经网络对水平模糊值函数的逼近，《数学与计算机建模》，**49**（2009），1311–1318。[15] Huang, H.; Wu, C.，正则模糊神经网络对模糊值函数的逼近及其精度分析，《软计算》**18**12（2014），2525–2540。[16] Kadac, U.，多元模糊神经网络插值算子及其在图像处理中的应用，《专家系统与应用》**206**（2022），117771。[17] Liu, P.Y.，多层正则模糊神经网络对连续模糊值函数的通用逼近，《模糊集与系统》，**119**（2001），313–320。[18] Qian, Y.;Yu, D. 神经网络插值算子的逼近率，《应用数学与计算》**418**（2022），126781。