arXiv:2512.20659v1 [math.GM] 18 Dec 2025

利用梯形函数对模糊值函数进行杰克逊型逼近

JUAN J. FONT 和 SERGIO MACARIO

Abstract. 本文给出了若干关于连续模糊数值函数的新的杰克逊型逼近结果，并改进了此前的一些结果。我们采用了源自区间分析的替代技术，这些技术依赖于模糊数的广义 Hukuhara 差（它可能不存在）和广义差（它可能不满足消去律）。

1. Introduction

模糊逼近理论的主要目标之一，是用一些更简单的函数（如（三角）多项式、有理函数、分段线性函数等）逼近定义在紧空间上的连续模糊值函数（见 [1]）。

最常见的方法是寻找魏尔斯特拉斯型的一致逼近定理（[9], [7], [25], [26]）。然而，为了定量估计逼近程度，误差界通常用模糊连续模表示（例如见 [10], [3]），这类估计称为杰克逊型估计（[16]）。

我们将重点关注以下方案：令 $\mathbb{E}^1$ 表示模糊数的集合（见第 2 节），并考虑函数族

$$\mathfrak{G}_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x) \cdot u_k \ : \ \phi_k(x) \text{ real-valued continuous functions}, u_k \in \mathbb{E}^1 \right\}$$

对于给定的模糊值连续函数 $f \in C([a,b],\ \mathbb{E}^1)$，记相应的逼近误差为

$$E_{n,f} := \inf\{D(f,g) \ : \ g \in \mathfrak{G}_n\},$$

其中 D 是 $C([a,b],\ \mathbb{E}^1)$ 上的上确界度量。

本文旨在以如下形式给出这种逼近的估计：

$$E_{n,f} \leq C\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

Date: 2025年12月25日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 41A30, 26E50, 46S40。*Key words and phrases.* Stone-Weierstrass 定理、模糊值连续函数、模糊逼近、Jackson 型定理。研究工作得到 PID2019-106529GB-I00 项目资助及 UJI-B2019-08 项目资助。

其中， $\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right)$ 表示这类函数的模糊连续模（定义见下文）， C 是一个与 n 和 f无关的常数。

已有若干此类方案。例如，当系数 ϕ_k 为多项式时，S. Gal 在 [11] 中证明，给定 $f \in C([0,1],\ \mathbb{E}^1)$，则

$$D(f, B_n^{\mathcal{F}}(f)) \leq \frac{3}{2}\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

其中

$$B_n^{\mathcal{F}}(f) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

称为伯恩斯坦型模糊多项式。为提高从 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 到 $\frac{1}{n}$ 的收敛速度，Bede 和 Gal（[3]）利用~~S~~zabados 型多项式给出了杰克逊型估计，但常数 C 未明确给出。他们还估计了用模糊三角多项式序列逼近 2π-周期连续模糊值函数的误差，从而补充了 Anastassiou 和 Gal（[2]）先前的工作。此外，在 [3, 引理 3.4], 中，他们沿用 Szabados（[24]）的思路，利用 Shepard 型算子得到了有理函数的杰克逊型估计。该领域近期的其他论文也给出了类似的逼近估计，所用方法包括伯恩斯坦型多项式的一种推广——所谓的后量子伯恩斯坦多项式（[18]）、模糊（p, q）-Bernstein-Chlodowsky 算子（[19]），以及伯恩斯坦型模糊有理函数（[20]）。

所有这些论文所采用的技术要求，为了计算$D(f, \sum \phi_k(x) \cdot u_k)$，系数 $\sum_{k=0}^{n} \phi_k(x) = 1$ 的和必须满足这一要求。

本文将尝试另一种方法，其思路与 [8], 中提出的方法一致。该文的作者为定义在区间 $[a,b]$ 上的连续区间值函数给出了杰克逊型逼近；他们结合 Prolla （ [21] ）用于构造性证明魏尔尔斯特拉斯 - 斯通定理的技术，以及 D. Chen（[5]）用于估计神经网络逼近误差的方法。我们打算推广这种技术，以一种与上述论文本质不同的方式，为连续模糊值函数给出类似结果，因为这种方法不要求 $\sum_{j=0}^{n} \psi_j(x) = 1$（事实上，它将大于一）。

众所周知，模糊数可以视为一族嵌套紧区间，即所谓的 α-截集。因此，我们期望将此前关于连续区间值函数的研究应用于此，以获得精确结果。也就是说，现给定 $f \in C([0,1],\ \mathbb{E}^1)$，我们的目标是找到一个类似于下式的模糊值函数

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \psi_j(x) u_j \tag{1.1}$$

其中现在 $u_j \in \mathbb{E}^1$ 满足

$$D(f,g) \leq C\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \epsilon.$$

然而，在模糊值情形下，主要缺点是 Chen 的方法需要某种消去律，因为这些方法使用u_j 方程（1.1）中的差作为两个模糊数之间的差。对于区间值函数而言，这并不是问题，因为广义 Hukuhara 差，简称广义 Hukuhara 差，具有消去律（[22]）。因此，我们预期将紧区间替换为模糊数，并使用模糊数的广义 Hukuhara 差，便可得到类似的逼近。然而，这种相减并不总能得到模糊数。因此，我们必须将注意力限制在某类模糊值函数上，使得我们的结果仍然成立（定理3.4）。

为了扩大可应用我们方法的函数类型，我们用模糊数的广义差（[4]）替换模糊数的广义 Hukuhara 差。在这种情况下，我们的适用范围比定理 3.4更广，但由于广义差会随 n 而增大，我们得到的界并不尖锐（定理3.9），这是因为模糊数的广义差缺乏消去律。因此，Chen 的方法似乎并非适用于模糊值函数的最佳方法。

最后，Prolla 的思想仍然使我们能够构造一族分段线性函数，为逼近误差提供一个良好的上界。尽管该上界略差于定理 3.4中的上界，但对任意连续模糊值函数都成立（定理3.12）。

2. Preliminaries

令 $F(\mathbb{R})$ 表示实数 $\mathbb{R}$ 上所有模糊子集的族，即映射 $u\colon \mathbb{R} \to [0,1]$。对于 $u \in F(\mathbb{R})$ 和 $\lambda \in [0,1]$，u 的 λ 级集定义为

$$[u]_\lambda := \{\, x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda \,\}, \quad \lambda \in]0,1], \quad [u]_0 := \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\{\, x \in \mathbb{R} : u(x) > 0 \,\}.$$

模糊数空间 $\mathbb{E}^1$ 是 $F(\mathbb{R})$ 中满足以下性质的元素 u 的集合：

(1) u 是正规的，即存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $u(x_0) = 1$；(2) u 是凸的，即对于所有 x，$y \in \mathbb{R}$，$\lambda \in [0,1]$，$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$；(3) u 是上半连续的；(4) $[u]_0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集。

注意，如果 $u \in \mathbb{E}^1$，则对于每个 $\lambda \in [0,1]$，u 的 λ级集 $[u]_\lambda$ 都是 $\mathcal{K}_C$ 的一个成员。我们记 $[u]_\lambda = [u^-(\lambda), u^+(\lambda)]$。每个实数 r 都可以与由下式定义的模糊数 $\tilde{r}$ 相对应：

$$\tilde{r}(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t = r, \\ 0 & \text{if } t \neq r. \end{cases}$$

现在，我们可以陈述 Goetschel 和 Voxman（[12]）给出的模糊数刻画：

定理 2.1. 设 $u \in \mathbb{E}^1$ 和 $[u]_\lambda = [u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$。则函数对 $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 具有以下性质：

(i) $u^-(\lambda)$ 是$(0,1]$上的有界左连续非递减函数；***(ii)*** $u^+(\lambda)$ 是$(0,1]$上的有界左连续非递增函数；***(iii)*** $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处右连续；***(iv)*** $u^-(1) \leq u^+(1)$。

反之，若函数对 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 满足上述条件 ***(i)-(iv)***，则存在唯一的 $u \in \mathbb{E}^1$，使得对每个 $\lambda \in [0,1]$, $[u]_\lambda = [\alpha(\lambda)\ \beta(\lambda)]$。

给定 u, $v \in \mathbb{E}^1$ 和 $k \in \mathbb{R}$，我们可以按层定义 $u + v$ 和 ku，如下所示$[u+v]_\lambda := [u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)] + [v^-(\lambda)\ v^+(\lambda)]$ 以及 $[ku]_\lambda := k[u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)]$。众所周知，赋予这两种自然运算的 $\mathbb{E}^1$ 并不是向量空间。事实上，加法运算没有逆元。另一方面，我们可以在 $\mathbb{E}^1$ 上赋予如下度量：

定义 2.2。 [12, 6] 对于 u, $v \in \mathbb{E}^1$，我们可以定义

$$d_\infty(u,v) := \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\left\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\right\}.$$

值得指出的是

$$d_\infty(u,v) := \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\{d_H([u]_\lambda, [v]_\lambda)\right\}.$$

其中 d_H 表示全体闭区间空间上的豪斯多夫度量。

d_∞ 称为 $\mathbb{E}^1$上的上确界度量，并且众所周知，$(\mathbb{E}^1,\ d_\infty)$是一个完备度量空间。注意，根据 d_∞的定义，赋予欧几里得拓扑的 $\mathbb{R}$在拓扑上可与 $(\mathbb{E}^1,\ d_\infty)$ 的闭子空间 $\tilde{R} = \{\tilde{x} :\ x \in \mathbb{R}\}$ 相同，其中对于所有$\lambda \in [0,1]$, $\tilde{x}^+(\lambda) = \tilde{x}^-(\lambda) = x$。作为度量空间，我们始终将配备度量 d_∞的 $\mathbb{E}^1$ 视为度量空间。

以下引理是求出我们近似函数中系数的关键。

引理 2.3. [17, 引理 2] 设 $0 \leq a < b \leq 1$ 和 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$。存在一个多项式 $p(x) = (1 - x^m)^n$，使得

(1) $p(x) > 1 - \epsilon$ 对所有 $0 \leq x \leq a$均成立；

(2) $p(x) < \epsilon$ 对所有 $b \leq x \leq 1$均成立。

本文将以下述形式贯穿全文使用上述引理：

引理 2.4。 设 n 为正整数，并令 $a_j = \frac{j}{n}$ 对于 j =0、1、.....、n。给定 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$和 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$，我们可以找到 $n+1$ 连续函数 $\psi_j : [0,1] \to [0,1]$，使得

(1) $\psi_j(x) < \epsilon$, *for* $x \geq a_j + \delta$, $j = 0, \ldots, n-1$;
(2) $1 - \psi_j(x) < \epsilon$, *for* $x \leq a_j - \delta$, $j = 1, \ldots, n$.

证明。 将引理 2.3 应用于 $a_j - \delta < a_j + \delta$ $j = 1$, ..., $n-1$ （或者 $a_0 < a_0 + \delta$ 对于 $j = 0$ 以及 $a_n - \delta < a_n$ 对于 $j = n$）。因此，我们能够找到 $n+1$ 连续函数 $\psi_j \colon [0,1] \to [0,1]$ 满足所要求的条件。 □

最后，我们回顾一些关于区间值函数的相关结果。

令 $\mathcal{K}_C$ 表示实数轴 $\mathbb{R}$ 上所有紧区间的集合；即

$$\mathcal{K}_C = \{[a,b] \ : a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}.$$

其中， $[a,a]$ 表示单点集 $\{a\}$。我们用 $len(A)$ 表示区间 A 的直径或长度；即，当 $A = [a^-, a^+]$ 时， $len(A) = a^+ - a^-$。

我们将该族记为

$$\mathfrak{T}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) A_i \ : \ \psi_i \in C([0,1],[0,1]);\ A_i \in \mathcal{K}_C,\ i = 0,1,2,\ldots n \right\}.$$

作者在 [8] 中证明，集合 $\mathfrak{T} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{T}_n$ 在 $C([0,1], \mathcal{K}_C)$中稠密。定义 $\mathfrak{T}_n$ 与连续函数 $f \in C([0,1], \mathcal{K}_C)$之间的逼近误差为

$$E_{n,f} := \inf_{g \in \mathfrak{T}_n} D(f,g)$$

其中 $D(f,g) := \sup\{d_H(f(x)\ g(x)) : \ x \in [0,1]\}$ 是 $C([0,1], \mathcal{K}_C)$ 上的上确界度量。我们考虑 f 的连续模，定义如下

$$\omega^{\mathcal{K}}(f,\delta) := \sup\{d_H(f(x), f(y)) \ : \ x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta\}.$$

基于一个可追溯至 Chen（[5]）并由 Hong 和 Hahm（[14], [15]）进一步发展的思想，作者在 [8], 中利用区间的广义 Hukuhara 差，为定义在 $[0,1]$ 上的区间值连续函数给出了如下杰克逊型逼近。

定理 2.5。 [8] 设 $f \in C([0,1], \mathcal{K}_C)$ 满足

$$len(f(x)) \geq len(f(y)), \quad when\ x \leq y. \tag{2.1}$$

or

$$len(f(x)) \leq len(f(y)), \quad when\ x \leq y. \tag{2.2}$$

那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n,f} \leq 2\omega^{\mathcal{K}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

事实上，根据该定理的证明，我们可以利用引理 2.4得到以下命题。

命题 *2.6.* [8, 定理 *4.3*] 设 $f \in C([0,1], \mathcal{K}_C)$ 满足方程 *(2.1)*，并设 $M > 1$ 使得对于所有 $x, y \in [0,1]$，均有 $d_H(f(x), f(y)) \leq 2M$。设 $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$。给定 $a_j = \frac{j}{n}$，并取 $\epsilon' < \frac{\varepsilon}{2n+1}(M)$。令 $\psi_j : [0,1] \to [0,1]$ 为引理 *2.4* 针对此类 ϵ' 和 δ 给出的 $n+1$ 连续函数。

那么，函数

$$g(x) := A_n + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)\Big(A_j \ominus A_{j+1}\Big)$$

其中 $A_j = f(a_j)$、$j = 0$、1、.....、n 满足：对于所有 $x \in [0,1]$,

$$d_H(g(x), f(x)) \leq 2\omega^{\mathcal{K}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \varepsilon.$$

命题 *2.7*。 [8, 定理 *4*。4] 设 $f \in C([0,1], \mathcal{K}_C)$ 满足方程（*2.2*），并设 $M > 1$ 使得对于所有 x、$y \in [0,1]$，有 $d_H(f(x), f(y)) \leq 2M$。设 $\varepsilon > 0$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$。给定 $a_j = \frac{j}{n}$，取 $\epsilon' < \frac{\varepsilon}{2n+1}(M)$。令 $\psi_j : [0,1] \to [0,1]$ 为由引理 *2.4* 针对这样的 ϵ' 和 δ 给出的 $n+1$ 连续函数。

那么，函数

$$g(x) := A_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(x)\Big(A_{j+1} \ominus A_j\Big)$$

其中 $A_j = f(a_j)$ 且 $\phi_j = 1 - \psi_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$，满足对所有 $x \in [0,1]$,

$$d_H(g(x), f(x)) \leq 2\omega^{\mathcal{K}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \varepsilon.$$

3. Approximation of continuous fuzzy-valued functions

我们将给出与上一节中类似的结果，但针对赋予距离的函数 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$

$$D(f,g) := \sup_{x \in [0,1]} d_\infty(f(x), g(x)).$$

模糊数的广义 Hukuhara 差由 Stefanini 在 [22] 中定义如下：

定义 3.1。给定两个模糊数 u, $v \in \mathbb{E}^1$，广义 Hukuhara 差（简称广义 Hukuhara 差）是模糊数 w，如果其存在，则满足

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ u = v + w \\ \text{or} \\ (ii)\ v = u + (-1)w. \end{cases}$$

容易证明，(i) 和 (ii) 同时成立，当且仅当 w 是一个清晰数。如果 $u \ominus_{gH} v$ 存在，则其 α-截集为

$$[u \ominus_{gH} v]_\alpha = [u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha$$

遗憾的是，这种差并不总能定义一个模糊数。保证其存在的条件将在下一个命题中给出

命题 3.2 ([23])。 设 u、$v \in \mathbb{E}^1$ 是两个模糊数，其 α-截集分别为 $[u]_\alpha$ 和 $[v]_\alpha$。广义 *Hukuhara* 差 $u \ominus_{gH} v \in \mathbb{E}^1$ 存在，当且仅当以下两个条件之一得到满足

$$(1) \quad \begin{cases} len([u]_\alpha) \geq len([v]_\alpha), \ for\ all\ \alpha \in [0,1], \\ u_\alpha^- - v_\alpha^- \ is\ increasing\ with\ respect\ to\ \alpha, \\ u_\alpha^+ - v_\alpha^+ \ is\ decreasing\ with\ respect\ to\ \alpha. \end{cases} \tag{3.1}$$

or

$$(2) \quad \begin{cases} len([u]_\alpha) \leq len([v]_\alpha), \ for\ all\ \alpha \in [0,1], \\ u_\alpha^+ - v_\alpha^+ \ is\ increasing\ with\ respect\ to\ \alpha, \\ u_\alpha^- - v_\alpha^- \ is\ decreasing\ with\ respect\ to\ \alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$。现在取区间值函数 $f_\alpha : [0,1] \to \mathcal{K}_\mathcal{C}$，定义为 $f_\alpha(x) = [f(x)]_\alpha$，$\alpha \in [0,1]$。因此，对于这类函数 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$，我们得到一族区间值函数 f_α，此时可以应用前一节中的定理 2.5。然后，我们需要将结果还原为模糊值函数 f。然而，正如上文所指出的，一组闭区间，例如

$$[u]_\alpha \ominus_{gH} [v]_\alpha$$

可能无法定义一个适当的模糊数。例如，如 [4], 所示，给定两个三角模糊数 $u = \langle 12,\ 15,\ 19 \rangle$ 和 $v = \langle 5,\ 9,\ 11 \rangle$，$u \ominus_{gH} v$不存在，因为 $u_\alpha^- - v_\alpha^- = -6 + \alpha$ 和 $u_\alpha^+ - v_\alpha^+ = -8 + 2\alpha$ 都关于 $\alpha \in [0,1]$单调递增，不满足命题3.2中的条件。我们将在后文研究这个问题。目前，我们将对连续模糊值函数增加一些限制，以避免这种情况发生。

首先，我们研究 $f \in C([0,1],\ \mathbb{E}^1)$的连续模与每个水平函数 f_α的连续模之间的关系。我们将 f 的连续模定义为

$$\omega^\mathcal{F}(f, \delta) := \sup\{d_\infty(f(x), f(y)) \ : \ x, y \in [0,1],\ |x - y| < \delta\}.$$

引理 3.3。 设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$。则，对于每个 $\alpha \in [0,1]$，有

$$\omega^\mathcal{K}(f_\alpha, \delta) \leq \omega^\mathcal{F}(f, \delta)$$

证明。 给定任意 $\alpha \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}\omega^{\mathcal{K}}(f_\alpha,\delta) &= \sup\{d_H(f_\alpha(x),f_\alpha(y)) \ : \ x,y\in[0,1],\ |x-y|<\delta\}\\ &\le \sup\Big\{\sup_{\alpha\in[0,1]}\{d_H(f_\alpha(x),f_\alpha(y))\} \ : \ x,y\in[0,1],\ |x-y|<\delta\Big\}\\ &= \sup\{d_\infty(f(x),f(y)) \ : \ x,y\in[0,1],\ |x-y|<\delta\}\\ &= \omega^{\mathcal{F}}(f,\delta).\end{aligned}$$

□

为了应用定理2.5，我们需要处理具有以下性质的函数 $f \in C([0,1],\ \mathbb{E}^1)$：$f(x) \ominus_{gH} f(y)$ 存在。此类函数的一些示例将在定理 3.4 之后给出。

考虑族

$$\mathfrak{F}_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) u_i \ : \ \psi_i \in C([0,1],[0,1]);\ u_i \in \mathbb{E}^1,\ i=0,1,2,\dots n \right\}.$$

定义连续函数 $f \in C([0,1],\ \mathbb{E}^1)$ 与 $\mathfrak{F}_n$ 之间的逼近误差为

$$E_{n,f} := \inf_{g\in\mathfrak{F}_n} D(f,g).$$

回顾一下，给定 $u,\ v \in \mathbb{E}^1$，模糊包含 $u \subseteq v$ 表示$[u]_\alpha \subseteq [v]_\alpha$，对所有 $\alpha \in [0,1]$ 均成立。值得注意的是，$u \subseteq v$ 意味着 $len([u]_\alpha) \le len([v]_\alpha)$，对所有 α 均成立。

下面的定理给出了此类连续函数的杰克逊型逼近。

定理 3.4。 设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$ 满足以下条件：

(1) 对所有 $0 \le x < y \le 1$，总存在 $f(x) \ominus_{gH} f(y)$。*(2)* 对所有 $x \le y$，$f(y) \subseteq f(x)$。

于是，对所有 $n \in \mathbb{N}$，

$$E_{n,f} \le 2\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

证明。 固定 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。令 $a_j = j/n$ 和 $u_j = f(a_j)$，$j = 0,\ 1,\ 2,$ ……，n。现在取 $0 \prec \delta < \frac{1}{2n}$。函数 f 的条件 (2) 意味着每个函数 f_α 都满足方程 (2.1)。于是，我们可以应用命题 2.6找到 $n+1$ 连续函数 ψ_j：$[0,1] \to [0,1]$，使得对于每个$\alpha \in [0,1]$，区间值函数

$$g_\alpha = f_\alpha(a_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)\Big(f_\alpha(a_j) \ominus f_\alpha(a_{j+1})\Big)$$

满足

$$d_H(f_\alpha(x), g_\alpha(x)) \le 2\omega^{\mathcal{K}}(f_\alpha, 1/n) + \varepsilon, \quad \text{for every } x \in [0,1]$$

并且，由引理 3.3可得，对每个 $x \in [0,1]$,

$$d_H(f_\alpha(x), g_\alpha(x)) \le 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon.$$

另一方面，函数 f 的条件 (1) 表明，对于所有 j，gH-差 $u_j \ominus_{gH} u_{j+1}$ 都有定义。因此，我们可以将模糊函数 $g \in \mathfrak{F}_n$ 定义为

$$g(x) := u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)(u_j \ominus_{gH} u_{j+1})$$

于是，对于每个 $x \in [0,1]$，由于 $[u_j]_\alpha = f_\alpha(a_j)$，我们有 $[g(x)]_\alpha = g_\alpha(x)$，并且

$$\begin{aligned} d_\infty(f(x), g(x)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} d_H(f_\alpha(x), g_\alpha(x)) \le 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

这意味着 $D(f, g) \le 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon$。最后

$$E_{n,f} := \inf_{h\in\mathfrak{F}_n} D(f,h) \le D_\infty(f,g) \le 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon$$

而且，由于对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们得出结论。

□

例 3.5。 设 g 是定义在 $[0,1]$ 上的正实值递减连续函数。设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$ 定义为 $f(x) := g(x) \cdot u$，其中 u 是一个固定的模糊数。那么，对于每个 $0 \le x < y \le 1$，总存在 $f(x) \ominus_{gH} f(y)$。由于 $g(x)$ 是递减的，因此对每个 $\alpha \in [0,1]$，$len([f(x)]_\alpha) \ge len([f(y)]_\alpha)$。另一方面，若 $[u]_\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$，则

$$\begin{aligned} w_\alpha^- &= g(x)u_\alpha^- - g(y)u_\alpha^- = (g(x) - g(y))u_\alpha^-, \\ w_\alpha^+ &= g(x)u_\alpha^+ - g(y)u_\alpha^+ = (g(x) - g(y))u_\alpha^+ \end{aligned}$$

且w_α^- 递增，且 w_α^+ 关于 α递减，这意味着命题3.2中的条件 (1) 得到满足，因此它总是定义一个模糊数 $f(x) \ominus_{gH} f(y) \in \mathbb{E}^1$，其 α截

$$[f(x) \ominus_{gH} f(y)]_\alpha = [w_\alpha^-, w_\alpha^+] = [f(x)]_\alpha \ominus_{gH} [f(y)]_\alpha$$

值得一提的是，如果函数 g 递增，那么函数$f(x) := g(x)\cdot u$也满足 $f(x) \ominus_{gH} f(y) \in \mathbb{E}^1$，此时满足命题 3.2中的条件 (2)。

利用命题 2.7 类似地，我们可以证明，

定理 3.6。 设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$ 满足以下条件：

(1) 对于所有 $0 \le x < y \le 1$，总是存在 $f(y) \ominus_{gH} f(x)$。

(2) 对于所有 $x \le y$，$f(y) \supseteq f(x)$。

那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n,f} \leq 2\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

如上所述，模糊数的 gH 差并非总是存在。为了解决这一问题，Stefanini 提出了一种总是存在的模糊数新差运算：

定义 3.7. ([23],[4],[13]) 给定两个模糊数 u, v， u和 v 的广义差（简称广义差）由它们的水平集定义为

$$[u \ominus_g v]_\alpha = cl\Big(conv \bigcup_{\beta \geq \alpha} [u]_\beta \ominus [v]_\beta\Big),$$

其中，gH 差 $\ominus$用于区间运算对象 $[u]_\beta$ 和 $[v]_\beta$。

α-截可以计算为

$$[u \ominus_g v]_\alpha = [\inf_{\beta \geq \alpha} \min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}]$$

虽然区间的 gH 差 $[u]_\alpha \ominus [v]_\alpha$ 可能不等于$[u \ominus_g v]_\alpha$（除非 $u \ominus_{gH} v$ 存在），但它们与豪斯多夫度量之间仍有一定联系。

引理 3.8。 设 u、 $v \in \mathbb{E}^1$ 为两个模糊数，其 α-截满足 $[v]_\alpha \subseteq [u]_\alpha$，对所有 $\alpha \in [0,1]$ 均成立。于是，

$$d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) \leq \sup_{\beta \geq \alpha} d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u]_\beta \ominus [v]_\beta\Big).$$

证明。 条件 $[v]_\alpha \subseteq [u]_\alpha$ 给出对所有 β 均有 $u_\beta^- - v_\beta^- \leq u_\beta^+ - v_\beta^+$， 这意味着

$$\begin{aligned} [u \ominus_g v]_\alpha &= [\inf_{\beta \geq \alpha}\{u_\beta^- - v_\beta^-\}, \sup_{\beta \geq \alpha}\{u_\beta^+ - v_\beta^+\}]; \\ [u]_\alpha \ominus [v]_\alpha &= [u_\alpha^- - v_\alpha^-,\ u_\alpha^+ - v_\alpha^+] \end{aligned}$$

so

$$d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) = \max\{\Big|u_\alpha^- - v_\alpha^- - \inf_{\beta \geq \alpha}\{u_\beta^- - v_\beta^-\}\Big|,\ \Big|u_\alpha^+ - v_\alpha^+ - \sup_{\beta \geq \alpha}\{u_\beta^+ - v_\beta^+\}\Big|\}.$$

假设

$$d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) = \Big|u_\alpha^- - v_\alpha^- - \inf_{\beta \geq \alpha}\{u_\beta^- - v_\beta^-\}\Big|.$$

那么，去掉绝对值后，我们有

$$\begin{aligned} d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) &= u_\alpha^- - v_\alpha^- - \inf_{\beta\geq\alpha}\{u_\beta^- - v_\beta^-\} \\ &= \sup_{\beta\geq\alpha}\{u_\alpha^- - v_\alpha^- - (u_\beta^- - v_\beta^-)\} \\ &\leq \sup_{\beta\geq\alpha} d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u]_\beta \ominus [v]_\beta\Big). \end{aligned}$$

另一方面，如果

$$d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) = \Big|u_\alpha^+ - v_\alpha^+ - \sup_{\beta\geq\alpha}\{u_\beta^+ - v_\beta^+\}\Big|$$

那么，

$$\begin{aligned} d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u \ominus_g v]_\alpha\Big) &= \sup_{\beta\geq\alpha}\{u_\beta^+ - v_\beta^+\} - (u_\alpha^+ - v_\alpha^+) \\ &= \sup_{\beta\geq\alpha}\{u_\beta^+ - v_\beta^+ - (u_\alpha^+ - v_\alpha^+)\} \\ &\leq \sup_{\beta\geq\alpha} d_H\Big([u]_\alpha \ominus [v]_\alpha,\ [u]_\beta \ominus [v]_\beta\Big) \end{aligned}$$

就得证了。

□

遗憾的是，两个模糊数的广义差不满足消去律，因此定理3.4中使用的方法不适用。利用引理3.8，我们仍能为连续模糊值函数给出杰克逊型逼近，从而避开定理3.4中的一项限制，但其界是非恒定的。

定理 3.9。设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$ 满足

$$f(y) \subseteq f(x),\ \textit{for all } x \leq y.$$

于是，对于所有 $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n,f} \leq (2n+2)\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

证明。 仿照定理 3.4的证明进行。取 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。令 $a_j = j/n$和 $u_j = f(a_j)$, $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$并找出 $n+1$连续函数 $\psi_j\colon [0,1] \to [0,1]$使其满足命题 2.6 中关于 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$的条件。

我们已经知道，对于每个 $\alpha \in [0,1]$，区间值函数

$$g_\alpha = f_\alpha(a_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)\Big(f_\alpha(a_j) \ominus f_\alpha(a_{j+1})\Big)$$

对于每个 $x \in [0,1]$，都满足

$$d_H(f_\alpha(x), g_\alpha(x)) \leq 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon$$

其中 $f_\alpha(x) = [f(x)]_\alpha$。

考虑由下式定义的族 $\mathcal{F}_n$ 中的连续模糊值函数

$$h(x) := u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)(u_j \ominus_g u_{j+1}).$$

固定 $x \in [0,1]$ 和 $\alpha \in [0,1]$。由于

$$\begin{aligned} d_H\left([f(x)]_\alpha, [h(x)]_\alpha\right) &\leq d_H([f(x)]_\alpha, g_\alpha(x)) + d_H(g_\alpha(x), [h(x)]_\alpha) \\ &\leq 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon + d_H(g_\alpha(x), [h(x)]_\alpha), \end{aligned}$$

我们需要计算 $d_H(g_\alpha(x)\ [h(x)]_\alpha)$。由引理3.8

$$\begin{aligned} d_H\Big([u_j]_\alpha \ominus [u_{j+1}]_\alpha), [u_j \ominus_g u_{j+1}]_\alpha\Big) &\leq \sup_{\beta \geq \alpha} d_H\Big([u_j]_\alpha \ominus [u_{j+1}]_\alpha,\ [u_j]_\beta \ominus [u_{j+1}]_\beta\Big) \\ &\leq \sup_{\beta \geq \alpha} \Big[d_H\Big([u_j]_\alpha \ominus [u_{j+1}]_\alpha, \mathbf{0}\Big) + d_H\Big([u_j]_\beta \ominus [u_{j+1}]_\beta, \mathbf{0}\Big)\Big] \\ &\leq \omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n), \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} d_H\left(g_\alpha(x), [h(x)]_\alpha\right) &\leq \sum_{j=0}^{n-1} d_H\Big(\psi_j(x)([u_j]_\alpha \ominus [u_{j+1}]_\alpha), \psi_j(x)[u_j \ominus_g u_{j+1}]_\alpha\Big) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) d_H\Big([u_j]_\alpha \ominus [u_{j+1}]_\alpha, [u_j \ominus_g u_{j+1}]_\alpha\Big) \\ &\leq 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) \\ &\leq 2n\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n). \end{aligned}$$

因此，我们刚刚证明了

$$d_H\left([f(x)]_\alpha, [h(x)]_\alpha\right) \leq 2\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon + 2n\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n)$$

对每个 x 和 α，这意味着

$$D(f, g) \leq (2n+2)\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon.$$

于是，

$$\inf_{h \in \mathfrak{F}_n} D(f, h) \leq D(f, g) \leq (2n+2)\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n) + \varepsilon$$

并且，由于对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们最终得出结论

$$E_{n,f} \leq (2n+2)\omega^{\mathcal{F}}(f, 1/n).$$

□

非恒定界的问题似乎在于系数之和 $\sum \psi_k$ 没有界。因此，为了改进这一结果，我们需要找到一族函数 ϕ_k，它们具有良好的连续模性质，并满足 $\sum_{k=0}^{n} \phi_k = 1$。于是，利用 Prolla 的技巧（[21]），我们能够给出一种杰克逊型逼近，其界略差于定理 3.4中的界，但其优点是可应用于定义在 $[0,1]$上的任意连续模糊值函数。

命题 3.10. 存在 $n+1$ 连续函数 $\phi_j \colon [0,1] \to [0,1]$，使得对每个 $x \in [0,1]$，

$$\sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) = 1,$$

并且具有这样的性质：在每个 $x \in [0,1]$ 处，和中至多有两项非零。

证明. 取 $a_j = \frac{j}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$，并令 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$。定义连续函数 f_j: $[0,1] \to [0,1]$, $j = 0, 1, \ldots, n$，如下所示

$$f_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{\delta}(\delta - x), & \text{if } 0 \le x < \delta \\ 0, & \text{if } \delta \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f_j(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le x \le a_j - \delta \\ \frac{1}{2\delta}(a_j + \delta - x), & \text{if } a_j - \delta < x < a_j + \delta \\ 0, & \text{if } a_j + \delta \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le x \le a_n - \delta \\ \frac{1}{\delta}(a_n - x), & \text{if } a_n - \delta < x \le 1 \end{cases}$$

也就是说，f_j 在 $a_j - \delta$之前取值为 1，在 $a_j + \delta$ 之后取值为 0，并且在两者之间的区间内呈线性变化。现在，我们定义：

$$\begin{aligned} \phi_0 &= f_0, \\ \phi_1 &= (1 - f_0) f_1, \\ \phi_2 &= (1 - f_0)(1 - f_1) f_2, \\ &\vdots \\ \phi_{n-1} &= (1 - f_0)(1 - f_1) \cdots (1 - f_{n-2}) f_{n-1}. \end{aligned}$$

我们断言：

$$\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_{n-1} = 1 - (1 - f_0)(1 - f_1) \cdots (1 - f_{n-1}).$$

然后，取 $\phi_n = (1 - f_0)(1 - f_1) \cdots (1 - f_{n-1})$，我们便证明了

$$\sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) = 1, \quad \text{for all } x \in [0,1].$$

我们将 $[0,1]$ 划分为两个互不相交的集合，即

$$V := [0,\delta) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} (a_j - \delta, a_j + \delta) \Big) \cup (a_n - \delta, 1];$$
$$W := [0,1] \setminus V.$$

我们将研究每个 $\phi_j(x)$ 随着 x 所处位置的不同而发生的变化。

假设 $x \in V$。那么，对于某个 $k \in \{1,\dots,n-1\}$，有 $x \in (a_k - \delta, a_k + \delta)$；或者 $x \in [0,\delta)$；或者 $x \in (a_n - \delta, 1]$。

如果 $x \in [0,\delta)$，那么对所有 $j > 1$，$f_1(x) = 1$ 且 $\phi_j(x) = 0$。我们只有两个非零项：$\phi_0(x)$ 和 $\phi_1(x)$。如果 $x \in (a_n - \delta, 1]$，那么 $f_j(x) = 0$，因此对所有 $0 \le j \le n-1$，$\phi_j(x) = 0$。所以我们只有一个非零项 $\phi_n(x) = 1$。

如果 $x \in (a_k - \delta, a_k + \delta)$，$1 \le k \le n-1$，那么

$$x > a_{k-1} - \delta > a_{k-2} - \delta > \ldots > \delta,$$

这意味着，对于 $0 \le j \le k-1$，$f_j(x) = 0$，且 $\phi_j(x) = 0$。另一方面，

$$x < a_{k+1} - \delta < a_{k+2} - \delta < \ldots < a_n - \delta,$$

由此得到，对于 $j \ge k+1$，$f_j(x) = 1$，进而，对于 $j > k+1$，$\phi_j(x) = 0$。同样，这只给出了两个非零项：$\phi_k(x)$ 和 $\phi_{k+1}(x)$。

现在我们研究 $x \in W$ 这种情形。这意味着，对于某个 $1 \le k \le n$，有 $x \in [a_{k-1} + \delta, a_k - \delta]$。于是

$$x \le a_k - \delta < a_{k+1} - \delta < \ldots < a_n - \delta,$$

这意味着，对于 $j \ge k$，$f_j(x) = 1$，进而，对于 $j \ge k+1$，$\phi_j(x) = 0$。另一方面，

$$x \ge a_{k-1} + \delta > a_{k-2} + \delta > \ldots > \delta,$$

这意味着，对于 $0 \le j \le k-1$，$f_j(x) = 0$，且 $\phi_j(x) = 0$。同样，我们只有一个非零项：$\phi_k(x) = 1$。□

连续模具有以下性质（[11]）。

命题 3.11。设 f 属于 $C([0,1], \mathbb{E}^1)$。则，

(1) $\omega^{\mathcal{F}}(f, \delta_1 + \delta_2) \le \omega^{\mathcal{F}}(f, \delta_1) + \omega^{\mathcal{F}}(f, \delta_2)$，$\delta_1, \delta_2 > 0$。

(2) $\omega^{\mathcal{F}}(f, n\delta) \le n\, \omega^{\mathcal{F}}(f, \delta)$，$\delta > 0$，$n \in \mathbb{N}$。*(3)* $\omega^{\mathcal{F}}(f, \lambda\delta) \le (\lambda + 1)\, \omega^{\mathcal{F}}(f, \delta)$，$\delta > 0$，$\lambda > 0$。

命题 $\phi_k(x)$ 中的函数3.10 是分段线性的，事实上，它们具有梯形图形。对于每个 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$，我们定义：

$$T^f_{n,\delta}(x) := \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x) \cdot f\left(\frac{j}{n}\right).$$

令 $\mathfrak{T}_{n,\,\delta}$ 为所有此类函数的集合。现在我们可以证明以下定理。

定理 3.12。 设 $f \in C([0,1], \mathbb{E}^1)$。那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$, —

$$D\left(f, T_{n,\delta}^{f}\right) \leq 3\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

证明。 设 $a_j = \frac{j}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n$。 设 $u_j = f(a_j)$, 并取 $0 < \delta < \frac{1}{2n}$。令我们取 $g(x) := T_n^{f}{}_{,\delta}(x)$。

于是，对于每个 $x \in [0,1]$ 和 $\alpha \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) &= d_H\Big(\sum_{j=0}^{n} \phi_j(x)[f(x)]_\alpha, \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x)[u_j]_\alpha\Big) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \phi_j(x) d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_j]_\alpha\Big). \end{aligned}$$

考虑

$$\begin{aligned} V &:= [0,\delta) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} (a_j - \delta, a_j + \delta)\Big) \cup (a_n - \delta, 1], \\ W &:= [0,1] \setminus V. \end{aligned}$$

现在，若 $x \in V$，则有两项非零项， $\phi_k(x)$ 和 $\phi_{k+1}(x)$，对于$k = 0, 1, \ldots, n-1$，当 $x \in (a_k - \delta, a_k + \delta)$ 或 $x \in [0, \delta)$ 时；而当 $x \in (a_n - \delta, 1]$ 时，则只有一项 $\phi_n(x) = 1$。因此，在最坏情况下，并考虑到 x 的位置意味着 $|x - a_k| < \frac{1}{n}$ 和 $|x - a_{k+1}| < \frac{2}{n}$，我们有

$$\begin{aligned} d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_k]_\alpha\Big) &\leq \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) \quad \text{and} \\ d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_{k+1}]_\alpha\Big) &\leq \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{2}{n}\right). \end{aligned}$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) &\leq \phi_k(x) d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_k]_\alpha\Big) + \phi_{k+1}(x) d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_{k+1}]_\alpha\Big) \\ &\leq \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{2}{n}\right) \leq \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) + 2\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) \\ &= 3\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

现在，当 $x \in W$ 时，仅存在一个非零项 $\phi_k(x)$。因此,

$$\begin{aligned} d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) &\leq \phi_k(x) d_H\Big([f(x)]_\alpha, [u_k]_\alpha\Big) \\ &\leq \omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right) \leq 3\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

因此，我们刚刚证明了,

$$d_H([f(x)]_\alpha, [g(x)]_\alpha) \leq 3\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

对于每个 $x \in [0,1]$ 以及每个 α-截集，这意味着

$$D(f, T_{n,\delta}^{f}) \leq 3\omega^{\mathcal{F}}\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

□

References

[1] G. A. Anastassiou, *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory*, 《模糊性与软计算研究丛书》, Springer, 柏林（ 2010 1）。G. A. [2] Anastassiou, S. G. Gal, *On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type.* **9** 2001 3, 701 708 J. Fuzzy Math.（）–; [3] *Best approximation and Jackson-type estimates by gen-*B. Bede, S. G. Gal, *eralized fuzzy polynomials*, 《Journal of Concrete and Applicable Mathematics》, **2** 2004 3, 213 232 1 （）–。B. Bede, L. Stefanini, [4] *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic* **230** 2013 119 141 , 《Fuzzy Sets Syst.》, （）, –。1, 3, 3。[5] D. Chen, *Degree of approximation by superpositions of a sigmoidal function*, 《逼近论及其应用》, **9** 1993 3, 17 28 1, 2 （）, 第–期。[6] P. Diamond, P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications* 1994 2 , World Scientific, 新加坡, （）。.[7] J. J. Font, D. Sanchis, M. Sanchis, *A version of the Stone-Weierstrass theorem in fuzzy analysis* 10 2017 4275 4283 《J. Nonlinear Sci. Appl.》, （）, –。[8] *Constructive approximation of continuous inter-*J. J. Font, S. Macario, *val valued functions*, 《数值泛函分析与优化》, 43（ 2022 2, 127 144 1, 2, 2 5, 2 6, 2 7 ）–。... S. G. Gal, [9] *A fuzzy variant of the Weierstrass? approximation theorem*, J. Fuzzy Math., **1** 4 1993 865 872 1 （） （）, –。S. G. Gal, [10] *Degree of approximation of fuzzy mappings by fuzzy polynomials*, J. Fuzzy Math. **2** 1994 4 847 853 1 （） （）, –。S. G. Gal, , 载于《应用数学中的解析与计算方法手册》, G. Anastassiou 编。Chapman& Hall/CRC, 博卡拉顿, [11] *Approximation theory in fuzzy setting* 2000 1, 3 。R. Goetschel, W. Voxman, [12] *Elementary fuzzy calculus*, 《Fuzzy Sets and Systems》, **18** 1986 31 42 2, 2 2 （）, –。L. T. Gomes, L. C. Barros, [13] *A note on the generalized difference and the generalized differentiability* **280** 2015 142 145 , 《Fuzzy Sets and Systems》, （）, –。3.7[14] B. I. Hong; N. Hahm, *Approximation Order to a Function in* $C(\mathbb{R})$ *by Su-perposition of a Sigmoidal Function*, 《应用数学快报》, **15**（ 2002 591 597 2）, –。B. I. Hong; N. Hahm, [15] *A note on neural network approximation with a sigmoidal function* **10** 2016 42, 2075 2085 , 《Applied Math. Sciences.》, （）, 第–期。2[16] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung (On the precision of the approximation of continuous functions by polynomials of given degree and by trigonometric sums of given order)* 14, 1911 , Preisschrift und Dissertation, 哥廷根大学, 六月。1[17] R. I. Jewett, *A variation on the Stone-Weierstrass theorem*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》, **14**（1963）, 690–693。2.3

[18] E. Y. ¨Ozkan, *Inequalities for Approximation of New Defined Fuzzy Post-Quantum Bernstein Polynomials via Interval-Valued Fuzzy Numbers*, 《Symmetry》 2022, **14**, 696 1 。E. Y. Ozkan, *Approximation by Fuzzy* （*p*, *q*）
[19] ¨
-Bernstein-Chlodowsky Opera-tors, Sahand数学分析通讯, 19（2）, （2022）, 113–132。
1[20] E. Y. ¨Ozkan, B. Hazarika, B. *Approximation results by fuzzy Bernstein type rational functions via interval-valued fuzzy number* **27** 。Soft Comput.

（ 2023 6893 6901 1 ）, –。J. B. Prolla, *On the Weierstrass-Stone Theorem*, J.
[21] Approx. Theory, 78（ 1994 299 313 1, 3 ）, –。L. Stefanini,
[22] *A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic* , D. Dubois,

M.A. Lubiano, H. Prade, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz（编）, 《处理变异性与不精确性的软方法》, 软计算进展丛书, 第48卷, Springer（2008）。扩展版可在线查阅RePEc 服务：http://econpapers.repec.org/RAS/pst

233 1, 3 .htm L. Stefanini,
[23] *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic* **161** 2010 1564 1584 3 , 《Fuzzy Sets

Syst.》, （）, –。.2, 3 7。[24] J. Szabados, *On a problem of R. DeVore*, 《Acta Math. Hungar.》, 27（1976） 1 2, 219 223 1 - –。Y.-R. Syau, E. S. Lee,
[25] *Fuzzy Weirstrass theorem and convex fuzzy mappings*, Computers & Mathematics with Applications,

51 2006 1741 1750 1 （）, –。S.
[26] *Interval type-2 fuzzy neural networks* Panahian Fard 和 Z. Zainuddin *version of the Stone-Weierstrass theorem*, Neurocomputing, 74（14）, （2011）, 2336–2343。1

Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I 12071 ,
Avda. Sos Baynat s/n, , Castelló (Spain).*Email address*: font@uji.es

Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I 12071 ,
Avda. Sos Baynat s/n, , Castelló (Spain).*Email address*: macario@uji.es