arXiv:2512.20667v1 [math.GM] 19 Dec 2025

模糊数值连续函数的最佳逼近结果

JUAN J. FONT 和 SERGIO MACARIO

Abstract. 本文研究了一个固定的模糊数值连续函数到模糊数值连续函数子集的最佳逼近。我们还引入了一种方法，用于度量模糊数值连续函数与实值函数之间的距离。随后，我们利用广为人知的迈克尔选择定理，证明了模糊数值连续函数到实值连续函数空间的最佳逼近的存在性。

1. Introduction

逼近论源于这样一种需要：用更简单的函数类（如三角多项式或代数多项式）来逼近实值连续函数，并且一个多世纪以来一直吸引着众多数学家的关注。在泛函分析这一分支中，最为人熟知的结果包括斯通-魏尔斯特拉斯定理、Korovkin型结果，以及利用神经网络进行函数逼近。

近年来，上述所有结果也都在模糊函数的背景下得到了探讨（例如，参见 [1], [12], [8]）。

逼近论中的另一个基本问题，是研究连续函数空间中的最佳逼近。这一问题由来已久，切比雪夫、哈尔、杨、雷梅兹、德拉瓦莱-普桑等人取得了著名成果，他们证明了最佳逼近的存在性，并对其进行了刻画和估计。这里可以提到这样一个问题：在紧集上连续的标量值函数，能否由一组在该紧集上连续的其他函数进行一致逼近（例如，参见 [17], [16]或 [4]）。

日期：2025年12月25日。2010 年数学主题分类。
41A30，65G40。本研究未获任何经费资助。

用向量值函数逼近集值连续函数的最佳逼近存在性，是逼近论中的另一个重要课题，已有多位作者对此进行了研究（例如，参见 [18],[15], [13], [5] 或 [10]）。

本文探讨模糊数值连续函数背景下的两个最佳逼近问题。

首先，我们研究一个固定模糊数值连续函数到一组模糊数值连续函数的最佳逼近。

其次，我们引入一种新方法来度量模糊数值函数与实值函数之间的距离。随后，我们利用著名的迈克尔选择定理，证明模糊数值连续函数到实值连续函数空间的最佳逼近存在。

2. Preliminaries

令 $F(\mathbb{R})$ 表示实数集 $\mathbb{R}$ 上所有模糊子集的族（见 [7]）。对于 $\lambda \in [0,1]$ 和模糊集 u，其 λ 水平集定义为

$$[u]^{\lambda} := \{ x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \lambda \}, \quad \lambda \in]0,1],$$

且 $[u]^0$ 表示 $\{ x \in \mathbb{R}$ 的闭包： $u(x) > 0 \}$。

满足以下性质的 $F(\mathbb{R})$ 中的元素集合 u：

(1) u 是正规的，即存在一个 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $u(x_0) = 1$；(2) u 是凸的，即对于所有x、 $y \in \mathbb{R}$、 $\lambda \in [0,1]$， $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min \{u(x)\ u(y)\}$；(3) u 是上半连续的；(4) $[u]^0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧集，

称为模糊数空间 $\mathbb{E}^1$，并且包含实数。如果 $u \in \mathbb{E}^1$，则已知对于每个 $\lambda \in [0,1]$， u的 λ-水平集 $[u]^{\lambda}$ 都是紧区间。我们将记作 $[u]^{\lambda} = [u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)]$。

下文将用到模糊数的如下刻画，该刻画由Goetschel和Voxman（[9]）证明：

定理2.1。 设 $u \in \mathbb{E}^1$ 和 $[u]^{\lambda} = [u^-(\lambda)\ \ u^+(\lambda)]$, $\lambda \in [0,1]$。则函数对 $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 具有以下性质：

(1) $u^+(\lambda)$ 是在$(0,1]$上的有界左连续非增函数；(2) $u^-(\lambda)$ 是在$(0,1]$上的有界左连续非减函数；(3) $u^-(1) \leq u^+(1)$；(4) $u^-(\lambda)$ 和 $u^+(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处右连续。

反之，若两个函数 $\gamma(\lambda)$ 和 $\nu(\lambda)$ 满足上述条件 *(i)–(iv)*，则存在唯一的 $u \in \mathbb{E}^1$，使得对每个 $\lambda \in [0,1]$，都有 $[u]^\lambda = [\gamma(\lambda)\ \nu(\lambda)]$。

通常，给定 u，$v \in \mathbb{E}^1$ 和 $k \in \mathbb{R}$，我们定义和 $u+v$:=$[u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)] + [v^-(\lambda)\ v^+(\lambda)]$ 以及积 $ku := k[u^-(\lambda)\ u^+(\lambda)]$。众所周知，$\mathbb{E}^1$ 配备这两种自然运算后不是向量空间，甚至 $(\mathbb{E}^1, +)$ 也不是群。

模糊数空间 $\mathbb{E}^1$ 可以赋予多种度量（例如参见 [7]），但或许最常用的是以下度量：

定义 2.2。 [9, 7] 对于 u，$v \in \mathbb{E}^1$,

$$d_\infty(u,v) := \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\left\{|u^-(\lambda) - v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda) - v^+(\lambda)|\right\}.$$

它称为 $\mathbb{E}^1$上的上确界度量；在此度量下，$\mathbb{E}^1$是一个完备度量空间。事实上，赋予欧几里得˜拓扑的 $\mathbb{R}$在拓扑上可与 $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ 的闭子空间 $R = \{\tilde{x} : x \in \mathbb{R}\}$ 同一，其中 $\tilde{x}^+(\lambda) = \tilde{x}^-(\lambda) = x$ 对所有 $\lambda \in [0,1]$均成立。我们始终认为 $\mathbb{E}^1$ 配备了上确界度量。

命题 2.3。 *(*[8, 命题 2。3]*)* 度量空间 $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ 满足以下性质：

(1) $d_\infty(\sum_{i=1}^m u_i, \sum_{i=1}^m v_i) \le \sum_{i=1}^m d_\infty(u_i, v_i)$，其中 $u_i, v_i \in \mathbb{E}^1$ 对于$i = 1, \ldots, m$。 *(2)* $d_\infty(ku, kv) = kd_\infty(u, v)$，其中 $u, v \in \mathbb{E}^1$ 且 $k > 0$。 *(3)* $d_\infty(ku, \mu u) = | k - \mu | d_\infty(u, 0)$，其中 $u \in \mathbb{E}^1$, $k \ge 0$ 且 $\mu \ge 0$。 *(4)* $d_\infty(ku, \mu v) \le | k - \mu | d_\infty(u, 0) + \mu d_\infty(u, v)$，其中 $u, v \in \mathbb{E}^1$,$k \ge 0$ 且 $\mu \ge 0$。

在定义于紧豪斯多夫空间 K 与度量空间 $(\mathbb{E}^1, d_\infty)$ 之间的连续函数空间中，即 $C(K, \mathbb{E}^1)$，我们将考虑以下度量：

$$D(f,g) = \sup_{t\in K} d_\infty(f(t), g(t)),$$

它在 $C(K, \mathbb{E}^1)$ 上诱导一致收敛拓扑。

接下来，我们介绍一个对本文目的而言的基本工具。

定义 2.4。 设 W 是 $C(K, \mathbb{E}^1)$ 的一个非空子集。我们定义 $Conv(W)$:= $\{\varphi \in C(K, [0,1]) : \varphi f + (1-\varphi)g \in W \ for\ all\ f, g \in W\}$.

命题 2.5。 *(*[8, 命题 3。2]*)* 设 W 是 $C(K, \mathbb{E}^1)$的一个非空子集。那么有：

(1) $\phi \in Conv(W)$ 蕴含 $1-\phi \in Conv(W)$。(2) 若 ϕ, $\varphi \in Conv(W)$，则 $\phi \cdot \varphi \in Conv(W)$。

定义 2.6。称 $M \subset C(K, [0,1])$ 分离 K 中的点：若给定 s, $t \in K$, 则存在 $\phi \in M$ 使得 $\phi(s) \neq \phi(t)$。

引理 2.7。([8, 引理 3。6]) 设 $W \subseteq C(K, \mathbb{E}^1)$。若 $Conv(W)$ 分离 K 中的点，则给定 $x_0 \in K$ 以及 N 的一个开邻域 x_0，存在 U 的一个邻域 x_0 包含于 N，使得对于所有 $0 < \delta < \frac{1}{2}$，存在 $\varphi \in Conv(W)$ 使得

(1) $\varphi(t) > 1-\delta$，对所有 $t \in U$;
(2) $\varphi(t) < \delta$，对所有 $t \notin N$。

3. Best approximation for subspaces of $C(K, \mathbb{E}^1)$

定义 3.1. 设 A 是 $C(K, \mathbb{E}^1)$ 的一个子空间，并设 $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$。我们定义

$$d(f, A) := \inf_{g \in A}\{\sup_{x \in K} d_\infty(f(x), g(x))\} = \inf_{g \in A}\{D(f, g)\}$$

$$d_x(f, A) := \inf_{g \in A}\{d_\infty(f(x), g(x))\}$$

定理 3.2. 设 W 是 $C(K, \mathbb{E}^1)$ 的一个子空间，并假设 $Conv(W)$ 能分离点。对每个 $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$，有

$$d(f, W) = d_x(f, W)$$

对某个 $x \in K$。

证明. 我们首先证明 $d(f, W) = \sup_{x \in K} d_x(f, W)$。显然，由于对每个 $x \in K$, $d(f, W) \geq d_x(f, W)$，因此 $d(f, W) \geq \sup_{x \in K} d_x(f, W)$。我们来证明 $d(f, W) \leq \sup_{x \in K} d_x(f, W)$。

为此，固定 $\varepsilon > 0$。给定 $x' \in K$，我们可以找到 $f_{x'} \in W$，使得 $d_\infty(f(x'), f_{x'}(x')) < \sup_{x \in K} d_x(f, W) + \varepsilon$。定义 x' 的如下开邻域:

$$N(x') := \{t \in K : d_\infty(f(t), f_{x'}(t)) < \sup_{x \in K} d_x(f, W) + \varepsilon\}.$$

令 $U(x')$ 为 x' 满足引理2.7中性质的开邻域。

由于 K 是紧的，因此存在有限多个 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 属于 K，使得 $K \subset U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_m)$。取 $\delta > 0$ 使得 $\delta < min(1, \frac{\varepsilon}{km})$，其中

$$k := \max\{D(f, 0), D(f, f_{x_1}), \ldots D(f, f_{x_m})\}.$$

根据引理 2.7，我们知道存在 $\phi_1, \cdots, \phi_m \in Conv(W)$，使得对所有 $i = 1, \ldots, m$,

(i) $\phi_i(t) > 1-\delta$, for all $t \in U(x_i)$;
(ii) $0 \le \phi_i(t) < \delta, \quad if \ \ t \notin N(x_i)$.

定义函数

$\psi_1 := \phi_1,$
$\psi_2 := (1-\phi_1)\phi_2,$
$\vdots$
$\psi_m := (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_{m-1})\phi_m.$

根据命题2.5，我们知道，对所有 $\psi_i \in \ conv(W)$ 均成立 $i = 1, \ldots, m$。接下来，我们断言

$$\psi_1 + \ldots + \psi_j = 1 - (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_j),$$

$j = 1,\ldots, m.$ 事实上，很明显

$$\psi_1 + \psi_2 = \phi_1 + (1-\phi_1)\phi_2 = 1 - (1-\phi_1)\cdot(1-\phi_2).$$

我们用归纳法进行证明。假设对于某个$j \in \{4, ..., m-1\}$结论成立，接下来验证

$$\psi_1 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} = 1 - (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_j)(1-\phi_{j+1}).$$

也就是说,

$$\psi_1 + \ldots + \psi_j + \psi_{j+1} =$$
$$= 1 - (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_j) + (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_j)\phi_{j+1} =$$
$$= 1 - (1-\phi_1)(1-\phi_2)\cdots(1-\phi_j)(1-\phi_{j+1}),$$

这正是需要验证的。

固定 $x_0 \in K$。那么，存在某个 $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$，使得 $x_0 \in U(x_{i_0})$。因此 $\phi_{i_0}(x_0) > 1-\delta$，从而，

$$1 \ge \sum_{i=1}^{m} \psi_i(x_0) = 1 - (1-\phi_{i_0}(x_0)) \prod_{i \ne i_0} (1-\phi_i(x_0)) > 1-\delta.$$

此外，我们显然可以推得

$$\psi_i(t) < \delta \ \text{ for all } t \notin N(x_{i_0}),\ i = 1, \ldots, m. \tag{3.1}$$

Let

$$h := \psi_1 f_{x_1} + \psi_2 f_{x_2} + \ldots + \psi_m f_{x_m}. \tag{3.2}$$

显然

$h = \phi_1 f_{x_1} + (1-\phi_1)[\phi_2 f_{x_2} + (1-\phi_2)[\phi_3 f_{x_3} + \cdots + (1-\phi_{m-1})[\phi_m f_{x_m} \cdots]].$

因此，$h \in W$由于 $\phi_i \in Conv(W)$ 对于 $i = 1, \ldots.. m$ （见定义2.4）。

由命题2.3，我们知道，给定 $x \in K$，

$$d_\infty(f(x),h(x)) \leq d_\infty\left(f(x),\sum_{i=1}^m \psi_i(x)f(x)\right)+d_\infty\left(\sum_{i=1}^m \psi_i(x)f(x),h(x)\right) \leq$$

$$\leq \left|1-\sum_{i=1}^m \psi_i(x)\right| d_\infty\left(f(x),0)\right)+\sum_{i=1}^m \psi_i(x)d_\infty\left(f(x),f_{x_i}(x)\right).$$

一方面，$\left|1-\sum_{i=1}^m \psi_i(x)\right| d_\infty(f(x),\ 0)) \leq \delta D(f,\ 0) \leq \epsilon_\circ$

另一方面，设

$$I_x = \{1 \leq i \leq m : x \in N(x_i)\}$$

and

$$J_x = \{1 \leq i \leq m : x \notin N(x_i)\}.$$

那么，对于所有 $i \in I_x$，我们有

$$\psi_i(x)d_\infty(f(x),f_{x_i}(x)) \leq \psi_i(x)(\sup_{x\in K} d_x(f,W)+\varepsilon) \leq \sup_{x\in K} d_x(f,W)+\varepsilon$$

并且，对于所有 $i \in J$，不等式 (3.1) 可得

$$\psi_i(x)d_\infty(f(x),f_{x_i}(x)) \leq \delta d_\infty(f(x),f_{x_i}(x)) \leq \delta D(f,f_{x_i}) \leq \delta k.$$

由以上两段可推知

$$d_\infty(f(x),h(x)) \leq \epsilon+\sup_{x\in K} d_x(f,W)+\varepsilon+\delta km \leq \sup_{x\in K} d_x(f,W)+3\varepsilon$$

并且，由于 $x \in K$ 是任意的，

$$D(f,h) \leq \sup_{x\in K} d_x(f,W)+3\varepsilon.$$

由此，我们推得

$$d(f,W) = \inf_{g\in W}\{D(f,g)\} \leq \sup_{x\in K} d(f_x,W_x).$$

最后，我们可以将连续函数 $\gamma\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\gamma(x) := \inf_{g\in W}\{d_\infty(f(x),g(x))\}.$$

由于 K 是紧集，我们知道 γ 在某个 $x' \in K$ 处达到其上确界。因此，我们可以写成

$$d(f,W) = d_{x'}(f,W).$$

□

4. Best approximation with respect to real-valued continuous functions

在逼近论中，一个自然的问题是：何时可以用实值连续函数逼近集值函数？在经典情形下，Cellina 定理（[2]）是基本结果（另见 [3], [6], [11]）。本节将介绍一种衡量模糊数值函数与实值函数之间距离的方法。随后，我们将证明从模糊数值连续函数到实值连续函数空间的最佳逼近存在。

定义 4.1. 设 $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$，且 $F \in C(K)$。f 与 F 之间的距离可定义为

$$D(f,F) := \sup_{x\in K} \left\{ \sup\{|F(x)-t| : t \in [f(x)^-(1), f(x)^+(1)]\} \right\}.$$

注 4.2. 事实上，我们是在每个模糊数 $f(x)$ 的核处计算 f 与 F 之间的距离。我们可以在每个水平集 $\lambda \in [0,1]$ 处定义类似的距离，如下所示

$$D_\lambda(f,F) := \sup_{x\in K} \left\{ \sup\{|F(x)-t| : t \in I_\lambda := [f(x)^-(\lambda), f(x)^+(\lambda)]\} \right\}.$$

并取 $D(f,F) = \inf_{\lambda\in[0,1]} D_\lambda(f,F)$。但是，由于区间 I_λ 构成一个非递增族，这意味着这些距离也构成一个非递减族，即

$$D_\lambda(f,F) \geq D_\eta(f,F) \quad \text{if } 0 \leq \lambda \leq \eta \leq 1.$$

那么 $D(f,F) = D_1(f,F)$，这与定义 4.1一致。为避免核退化为一个实数的情形，我们可以定义$D(f,F) = \sup_{\lambda\in[0,1]} D_\lambda(f,F) = D_0(f,F)$，这意味着我们是在每个 $f(x)$ 的支集处计算距离。在这种情况下，以下结果也很容易推广到这一情形。

定义 4.3。 设 $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$。我们可以将f 与 $C(K)$之间的距离定义为

$$D(f, C(K)) := \inf_{F\in C(K)} D(f,F).$$

定义 4.4。 设 $f \in C(K, \mathbb{E}^1)$ 和 $x \in K$。我们可以定义

$$rad(x,f) := \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \left\{ \sup\{|\alpha-\beta| \ : \ \beta \in [f(x)^-(1), f(x)^+(1)]\} \right\}$$

显然，$rad(x, f)$就是区间$[f(x)^-(1)\ f(x)^+(1)]$的半径。

定义 4.5。 令 $f \in C(K,\ \mathbb{E}^1)$。我们将 f 的半径 定义为

$$rad(f) := \sup_{x\in K} rad(x,f)$$

注记 4.6。 由这些定义，我们很容易推知

$$D(f,F) \geq rad(f)$$

对所有 $F \in C(K)$。因此

$$D(f,C(K)) \geq rad(f).$$

定理 4.7。 设 $f \in C(K,\mathbb{E}^1)$。则存在一个函数 $F_0 \in C(K)$，使得

$$D(f,C(K)) = D(f,F_0).$$

证明。 定义一个映射 $G:\ K \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$，使得对每个 $x \in K$,

$$G(x) := \{\alpha \in \mathbb{R} : [f(x)^-(1), f(x)^+(1)] \subseteq [\alpha - rad(f), \alpha + rad(f)]\}$$

我们先验证，对每个 $x \in K$， $G(x) \neq \emptyset$ 。我们知道

$$rad(x,f) := \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \sup_{\beta\in[f(x)^-(1),f(x)^+(1)]} |\alpha - \beta| \leq rad(f).$$

由于 $rad(x,\ f)$ 结果是区间 $[f(x)^-(1)\ f(x)^+(1)]$, 的半径，因此显然该区间的中心属于 $G(x)$。

显然，对每个 $x \in K$， $G(x)$ 都是闭集，因为其定义中出现的区间都是闭区间。

现在，取 α_1，α_2，使其属于 $G(x)$，并取 k_1，$k_2 \geq 0$，使其满足 $k_1 + k_2 = 1$。于是，给定 $\alpha \in [f(x)^-(1)\ f(x)^+(1)]$,

$$|\alpha - (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)| = |\alpha(k_1+k_2) - (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)| \leq$$

$$\leq k_1|\alpha - \alpha_1| + k_2|\alpha - \alpha_2| \leq rad(f),$$

这表明，对每个 $x \in K$， $G(x)$ 都是凸的。

接下来，我们将证明映射 G 是下半连续的，也就是说，我们需要检验该集合

$$\mathcal{O} := \{x \in K : G(x) \cap O \neq \emptyset\}$$

对于每个开集 $O \subset \mathbb{R}$，都是 K 中的开集。为此，固定 $x_0 \in \mathcal{O}$，并对某个开集 O 取 $\alpha_0 \in G(x_0) \cap O$。令 $\delta_0 > 0$ 满足 $(\alpha_0 - \delta_0,\ \alpha_0 + \delta_0) \subset O$。根据 f 的连续性以及以下事实:

$$[f(x_0)^-(1), f(x_0)^+(1)] \subset [\alpha_0 - rad(f), \alpha_0 + rad(f)],$$

我们推断，给定 $\epsilon > 0$，由此可得

$$[\alpha_0 - rad(f), \alpha_0 + rad(f)] \subset (\alpha_0 - rad(f) - \epsilon, \alpha_0 + rad(f) + \epsilon),$$

存在一个开邻域 $Q(\epsilon)$，使得 x_0 满足

$$[f(x)^-(1), f(x)^+(1)] \subset (\alpha_0 - (rad(f) + \epsilon), \alpha_0 + rad(f) + \epsilon)$$

对所有 $x \in Q(\epsilon)$。我们的目标是证明，对于某个 $\epsilon > 0$， $Q(\epsilon) \subseteq \mathcal{O}$，从而得到 $\mathcal{O}$ 的开性。

固定 $x_1 \in Q(\epsilon)$。由于 $G(x_1) \neq \emptyset$，存在 $\alpha_1 \in G(x_1)$。也就是说，

$$[f(x_1)^-(1), f(x_1)^+(1)] \subset [\alpha_1 - rad(f), \alpha_1 + rad(f)].$$

此外，我们知道

$$[f(x_1)^-(1), f(x_1)^+(1)] \subset (\alpha_0 - (rad(f) + \epsilon), \alpha_0 + rad(f) + \epsilon).$$

将 $\epsilon > 0$ 取到足够小，我们可以找到 $\delta' < \delta_0$，使得

$$[\alpha_0 - (rad(f) + \epsilon), \alpha_0 + rad(f) + \epsilon] \cap [\alpha_1 - rad(f), \alpha_1 + rad(f)]$$

$$\subset [(\alpha_0 + \delta') - rad(f), (\alpha_0 + \delta') + rad(f)]$$

因此

$$[f(x_1)^-(1), f(x_1)^+(1)] \subset [(\alpha_0 + \delta') - rad(f), (\alpha_0 + \delta') + rad(f)],$$

这意味着 $\alpha_0 + \delta' \in G(x_1) \cap O$。因此， $x_1 \in \mathcal{O}$，得证。

综合目前得到的信息，我们知道 G是定义在 K 与 $\mathbb{R}$的闭凸子集之间的下半连续映射。因此，根据迈克尔选择定理（[14]），我们推知存在 $F_0 \in C$（K），使得 F_0（x） $\in G$（x），对所有$x \in K$均成立。

由上文可知

$$D(f, F_0) \leq rad(f),$$

将此与定理前的说明结合起来，可得

$$D(f, F_0) = rad(f) = D(f, C(K)).$$

□

结论。 本文针对模糊数值连续函数，讨论了两个最佳逼近类问题：（1）在紧集上连续的模糊数值函数，能否由一组在该紧集上连续的其他函数一致逼近；（2）模糊数值连续函数到实值连续函数空间的最佳逼近是否存在。我们对这两种情形均得到了肯定结果。

References

[1] G. A. Anastassiou, 《模糊数学：逼近论》，模糊与软计算研究丛书，第251卷。Springer-Verlag，柏林，2010。1[2] A. Cellina，关于集值映射逼近的另一项结果，Rendi Acc. Naz. Lincei，48（1970），412–416。4[3] G. Beer，关于 Cellina 集值函数定理，Rocky Mountain J. Math. 18（1988），37–47。4[4] D. Chen，关于加权空间中的 Machado-Bishop 定理及其应用的札记，J. Approx. Theory，247（2019），1–19。1[5] H. H. Cuenya，F. E. Levis，集值函数的非线性切比雪夫逼近。Optimization 65（2016），1519–1529。1[6] F. S. De Blasi；J. Myjak，关于多值函数的连续逼近，Pacific Journal of Math.，123（1986），1，9–31。4[7] P. Diamond，P. Kloeden，《模糊集度量空间：理论与应用》，World Scientific，新加坡，（1994）。2，2，2.2[8] J. J. Font，D. Sanchis，M. Sanchis，模糊分析中的一个斯通-魏尔斯特拉斯定理版本。J. Nonlinear Sci. Appl. 10（2017），4275–4283。1，2.3，2.5，2.7[9] R. Goetschel，W. Voxman，初等模糊微积分，Fuzzy Sets and Systems，18（1986），31–42。2，2.2[10] M. S. Kashimoto，关于集值映射的 Stone-Weierstrass 型定理的札记，J. Approx. Theory，182（2014），59–67。1[11] L'. Hol´a，R. A. McCoy，J. Pelant，连续函数对关系的逼近，Topology and its Applications，154（2007），11，2241–2247。4[12] H. Huang，C. Wu，正则模糊神经网络对模糊值函数的逼近及精度分析，Soft Computing，18（2014），2525—2540。1[13] K. S. Lau，连续向量值函数的逼近，Studia Math.，68（1980），291–298。1[14] E. Michael，连续选择 I，Ann. Math.，63（1956），361–381。4[15] J. B. Prolla，S. Machado，集值映射的 Weierstrass-Stone 定理，J. Approx. Theory，36（1982），1–15。1[16] J. B. Prolla，关于 Weierstrass-Stone 定理，J. Approx. Theory，78（1994），299–313。1[17] J. B. Prolla，广义伯恩斯坦逼近定理，Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.，104（1988），317–330。1[18] C. Olech，连续函数对集值函数的逼近，Colloq. Math.，19（1968），285–293。1

Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I, Avda. Sos Baynat s/n, 12071, Castelló (Spain).

电子邮件地址: font@uji.es

Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I, Avda. Sos Baynat s/n, 12071, Castelló (Spain).

电子邮件地址: macario@uji.es