arXiv:2512.20673v1 [math.GM] 19 Dec 2025

区分排列

István Szalkai 潘诺尼亚大学，匈牙利
szalkai.istvan@mik.uni-pannon.hu

2025年12月
19日

摘要

我们要寻找整数 g_j 和 x_j ($j = 1$，……，n)，使得对于所有排列 $\pi \in S_n$ **和**，和 $T_\pi := \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot x_{\pi(j)}$ 各不相同，并且 $\max\{T_\pi : \pi \in S_n\}$ 尽可能小。

引言

我们的数学问题来源于下面这个（可能广为人知的）魔术戏法。

技巧 0。叫来三位灵媒，分别给他们**1**、**2** 和**3** 颗坚果。在桌子上放置三个小物品**a**、**b**、**c**（例如口红、折叠刀、铅笔），再放18颗坚果。离开房间前，给他们以下指示：让他们选择其中一个物品。然后，让选择了**a**的那个人从桌子上再拿走与其开始时得到的数量相同 的坚果。选择了**b**的那个人，则从桌子上再拿走其开始时得到数量的两倍 的坚果。最后，选择了**c**的那个人，则从桌子上再拿走其开始时得到数量的四倍 的坚果。让灵媒把他们选择的物品和坚果（桌子上剩下的除外）藏进口袋里。

回到房间后，通过观察桌子上剩下的坚果，我们可以猜出哪位灵媒藏起了**a**、**b**、**c**。

解释很清楚：对于每一种**a**,**b**,**c**的选择，藏起来的坚果数量（等价地说，留在桌子上的坚果数量）都不同。换句话说：对于每个置换 $\pi \in S_3$，这些和T_π：$= 1 \cdot \pi(1) + 2 \cdot \pi(2) + 4 \cdot \pi(3) = \sum_{j=1}^{3} 2^{j-1} \cdot \pi(j)$ 都各不相同。本文尝试将这一现象推广到更多人，同时使坚果数量最少。

记号与基本结果

设 n 为一个固定的自然数，$2 \leq n$,
$x_i \in \mathbb{N}$ 自然数 $=$ 开始时分给 $i'th$ 人的坚果数量,

$g_j \in \mathbb{N}$ 自然数 $=$ 选择 $j'th$ 物品时使用的乘数（i，j =1，.....，n），

$i = \pi(j)$ ($<=>$ $j = \pi^{-1}(i)$) $<=>$ 这个人 i 选择了物品 j，
$\pi \in S_n$ 任意置换。□

1. 我们的目标 是找到 x_i 和 g_j，使得这些和

$$T_\pi := \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot x_{\pi(j)} \ , \tag{1}$$

$$\text{are all different for each } \pi \in S_n \tag{*}$$

and

$$\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} \quad \text{is minimal.} \tag{**}$$

2. 为简单起见 本文假设

$$g_1 < g_2 < ... < g_n \tag{2}$$

and

$$x_i := i \quad (i = 1, ..., n) \ . \tag{3}$$

此外，对于任意置换 $\pi \in S_n$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

（即 $\pi_i = \pi(i)$）我们简记为

$$\pi = \langle \pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \rangle \quad \text{or} \quad \pi = \langle \pi_n, ..., \pi_2, \pi_1 \rangle^{\leftarrow} \ , \tag{5}$$

以免与循环置换[1] (π_1，π_2，.....，π_n)混淆。

下文中，g 将序列（g_1，.....，g_n）简写为。

1）循环置换 $\pi = (a_1, a_2, ..., a_n)$ 表示 $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3$, ... , $\pi(a_n) = a_1$。因此，例如 $\pi = (1, 3, 6, 2, 5, 4) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ($\pi(1) = 3, \pi(3) = 6, \pi(6) = 2, ...$)，而$\rho = \langle 1, 3, 6, 2, 5, 4 \rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.($\rho(1) = 1, \rho(2) = 3, \rho(3) = 6, ...$)。

陈述 3。 向每个 x_i 中加上同一个实数 y 后，性质 (*) 仍然成立：

$$T_\pi = \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot \big(x_{\pi(j)} + y\big) = \sum_{j=1}^{n} g_j \cdot x_{\pi(j)} + y \cdot \sum_{j=1}^{n} g_j$$

因为 $y \cdot \sum g_j$ 是常数。 □

定理 4. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个集合 $g = (g_1, \ldots\ldots, g_n)$，满足 (*)。

证明： 设 $x_i = i-1$ 和 $g_j = n^{j-1}$。那么这些和 T_π 恰好是以 n 为底的数制中含有 n 位的自然数。显然，这些数彼此不同。（对于任意 $m \geq n$， $g_j = m^{j-1}$ 也有类似结论。） □

注 5. 在上述构造中，$\max\limits_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = n^n - 1$；该构造冗余度很高，因为有 n^n 个（互不相同的）数，但只有 $n!$ 个排列[2]，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = \infty$。

—

例 6. 在原始的技巧中， $n = 3$ 和 $g = (1, 2, 2^2) < (1, 3, 3^2)$ “可行”（满足 (*)）。另一方面，对于 $n = 4$，集合 $g = (1, 3, 3^2, 3^3) < (1, 4, 4^2, 4^3)$ 不可行，因为例如

$$T_{\langle 3,\ 1,\ 2,\ 4\rangle^{\leftarrow}} = (3) \cdot [27] + (1) \cdot [9] + (2) \cdot [3] + (4) \cdot [1] = 3 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 100$$ 和

$$T_{\langle 2,4,3,1\rangle^{\leftarrow}} = (2) \cdot [27] + (4) \cdot [9] + (3) \cdot [3] + (1) \cdot [1] = 2 \cdot 27 + 4 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 100$$

对于 $n = 4$ 集合 $g = (1, 3, 3^2, 28)$，$(1,\ 3,\ 8,\ 27)$，甚至 $(1,\ 3,\ 8,\ 26)$ 都是合适的。

置换的反字典序

为了进一步研究，我们按反字典序排列这些置换 :

定义 7. 令 $\succ$ 表示 S_n 上的反字典序：

$\pi \succ \rho$ 如果存在一个 $j_0 \leq n$，使得 $\pi(j) = \rho(j)$ 对于 $n \geq j > j_0$ (如果 $j_0 < n$) 以及 $\pi(j_0) > \rho(j_0)$，并令

$\pi \rhd \rho$ 若 π 是 ρ 的**后继**，即 $\pi \succ \rho$，但不存在满足 $\pi \succ \sigma \succ \rho$ 的 σ。 □

[2] 斯特林公式给出 $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} < n^n$。

例子 8。 $\langle 5,\ 2,\ 4,\ 3,\ 1\rangle^{\leftarrow} \succ \langle 4,\ 5,\ 2,\ 3,\ 1\rangle^{\leftarrow} (j_0 = n = 5)$, $\langle 4,\ 2,\ 3,\ 5,\ 1\rangle^{\leftarrow} \succ \langle 4,\ 2,\ 1,\ 5,\ 3\rangle^{\leftarrow} (j_0 = 3 < n)$以及 $\langle 5,\ 2,\ 4,\ 3,\ 1\rangle^{\leftarrow} \rhd \langle 5,\ 2,\ 4,\ 1,\ 3\rangle^{\leftarrow} (j_0 = 4 < n)$。

注记 9。 显然，对于 $j_0 > j$， $\pi(j)$ 和 $\rho(j)$ 都无关紧要。特别是，在 $j_0 = n$ 的情况下，只有 $\pi(n) > \rho(n)$ 是相关的；此外， $\pi(n) > \rho(n)$ 蕴含 $\pi \succ \rho$。

情况 $j_0 = 1$ 不可能，因为 π 和 ρ 都是作用于 n 个元素的置换。

显然， $\succ$ 是有限集 S_n 上的一个完全（线性）序； $id = \langle n,\ .....2,\ 1\rangle^{\leftarrow}$ 是按 $\succ$ 排序的最大排列，而 $\delta = \langle 1,\ 2,\ ..... n\rangle^{\leftarrow}$ 是最小排列；并且对于每个 $\pi \neq id$ ，都存在唯一的 ρ 使得 $\pi \rhd \rho$ ；对于每个 $\pi \neq \delta$，都存在唯一的 σ 使得 $\sigma \rhd \pi$。

定理 10。 $\pi \rhd \rho$ 成立当且仅当 i) 至 vi) 均成立：

i) 存在一个 $j_0, 2 \leq j_0 \leq n$， 使得对于 $n \geq j > j_0$， $\pi(j) = \rho(j)$ （若 $j_0 = n$ 没有 j，则.....），且 $\pi_{j_0} > \rho_{j_0}$，

ii) $\{\pi_n, ..., \pi_{j_0+1}\} = \{\sigma_n, ..., \sigma_{j_0+1}\}$ (set equality), $(\Diamond)$

iii) $H_{j_0} := \{\pi_{j_0}, ..., \pi_1\} = \{\sigma_{j_0}, ..., \sigma_1\}$ (集合相等)

iv) $\pi_{j_0} \in H_{j_0} \setminus \{1\}$ 是任意的,

v) $\rho_{j_0} =$ 最大值$\{\sigma_j \in H_{j_0} : \sigma_j < \pi_{j_0}\}$ (∇)

vi) $\pi_{j_0-1} < \pi_{j_0-2} < ... < \pi_1$ and $\sigma_{j_0-1} > \sigma_{j_0-2} > ... > \sigma_1$. □ $(\triangle)$

陈述 11. 使用 $g = (1, g, \overline{g}^2, ..., g^{n-1})\ (n \leq g)$ 我们有

$$\pi \succ \rho \iff T_\pi > T_\rho \ . \tag{6}$$

（使用定理 4。） □

想法 12。 我们接下来要寻找满足（6）的序列 $g = (g_1,\ .....,\ g_n)$。由于 S_n 是一个有限集，（6）可由以下要求推出：

$$\pi \rhd \rho \implies T_\pi > T_\rho \ . \tag{7}$$

对于 情形 $j_0 = 2$，这是显然的： $j_0 = 2 => \pi(2) > \rho(2) => \pi(1) = \rho(2)$, 并且$\rho(1) = \pi(2)$, 因为对于 $n \geq j > j_0 = 2$， $\pi(j) = \rho(j)$。因此（7）只要求

$g_2 \cdot \pi(2) + g_1 \cdot \pi(1) > g_2 \cdot \rho(2) + g_1 \cdot \rho(1)$, 即

$g_2 \cdot (\pi(2) - \rho(2)) > g_1 \cdot (\rho(1) - \pi(1)) = g_1 \cdot (\pi(2) - \rho(2))$,

这意味着， g_2 和 g_1 可以是任意的 $g_2 > g_1$。

g_{j_0}的性质

定理 13. $\pi \rhd \rho$ 以及 (7) 与 (◊) 蕴含了定理 10 中的 j_0

$$g_{j_0} \cdot \pi_{j_0} + ... + g_1 \cdot \pi_1 > g_{j_0} \cdot \sigma_{j_0} + ... + g_1 \cdot \sigma_1$$

i.e.

$$g_{j_0} \cdot (\pi_{j_0} - \sigma_{j_0}) > g_{j_0-1} \cdot (\sigma_{j_0-1} - \pi_{j_0-1}) + ... + g_1 \cdot (\sigma_1 - \pi_1)\ .\quad \square \qquad (\heartsuit)$$

上述结果提供了一种归纳算法，用于计算 $j_0 = 1$对应的最小 g_{j_0}，2，$...n$：

算法 14.

i) 令 g_1 和 g_2 为任意值，$g_2 > g_1$，ii) 任取一个含 j_0 个元素的集合 $H_{j_0} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$（共有 $\binom{n}{j_0}$ 种选择），iii) 任取 $\pi_{j_0} \in H_{j_0} \setminus \{1\}$（共有 j_0 或 $j_0 - 1$ 种选择）[3]，iv) 使用 (▽) 和 (△) 构造 (π_{j_0-1}，π_{j_0-2}，...，π_1) 和 (ρ_{j_0}，ρ_{j_0-1}，ρ_{j_0-2}，...，ρ_1)，v) (♡) 给出了 g_{j_0} 的下界。□

数值结果

算法 14 给出以下关于 $n = 4$ 和 $n = 5$ 的结果：对于 $n = 4$：($g1$，.....，$g4$) =(1 、 2 、 5 、 15)，最大值为 $\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = 80 << 4^4 - 1 = 255$ ；对于 $n = 5$：($g1$，.....，$g5$) =(1、2、6、23、99)，最大值为 $\max_{\pi \in S_n} \{T_\pi\} = 610 << 5^5 - 1 = 3124$.

参考文献

[Sz] **Szalkai István：**一个想法（匈牙利语），Polygon VII.（1997），85-88。

[3] Total $\binom{n-1}{j_0} \cdot j_0 + \binom{n-1}{j_0-1} \cdot (j_0 - 1)$ possibilities.