arXiv:2512.20680v1 [math.CO] 21 Dec 2025

是否存在不具有整数分解性质的光滑格多面体?

约翰内斯·霍夫施艾尔与亚历大·M·卡斯普日克

摘要。我们介绍小田忠雄关于格多面体的著名问题。该问题最初于1997年在奥伯沃尔法赫提出，尽管表述简单，却至今仍未得到解答。本文通过讨论二维情形引出这一问题，其中包括对皮克定理的证明；该定理优雅地揭示了格多边形的面积与其内部和边界所含格点数之间的关系。

1. 引言

格多面体是数学中的基本研究对象，在离散几何、代数几何、代数、组合学、编码理论和优化理论等众多领域中发挥着关键作用。它们以各种意想不到、甚至令人惊讶的方式自然出现。例如，考虑以下枚举组合学中的经典问题。

问题 1. </style}三元变量中给定次数 m 的单项式有多少个?

单项式是若干变量（的幂）的乘积；其次数 是乘积中各指数之和。因此，我们要找出所有非负整数三元组的总数，使它们的和等于给定整数 m。

设 x, y 和 z 是问题 1中的三个变量。我们先看几个例子，可以得到三个次数为一的单项式、六个次数为二的单项式，以及十个次数为三的单项式；见图 1。在此过程中，我们发现， x、 y 和 z 中次数为 m 的单项式可以排列成三角形，其中 x 的指数从上到下递减，而 z的指数从左到右递减。剩余变量 y 的指数则完全由另外两个指数和总次数 m决定。由此可知，三元变量中给定次数的单项式个数，等于某个三角形中的点数，如图 1所示。

更准确地说， x、 y和 z 中次数为 m 的单项式数量，等于三角形中格点的数量——也就是具有整数坐标的点——该三角形的顶点为 (0、0)、(m、0) 和 (m、 m)。换言之，设 T 为顶点是 (0、0)、(1、0) 和 (1、1) 的三角形，设

$$mT = \{m\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in T\}$$

为 m次膨胀后的 T，并设 $L_T(m) = |mT \cap \mathbb{Z}^2|$ 表示 mT中的格点数量。那么，三个变量中次数为 m 的单项式数量等于 $L_T(m)$。

为了回答问题1，我们希望找到 L_T（m）的一个公式。三角形 mT 中包含的所有格点，可以通过从边长为 $m+1$ 的正方形中去除对角线，然后舍弃由此得到的两个全等三角形中的一个来构造。[1] 由此构造可以看出，所需公式为

$$L_T(m) = \frac{(m+2)^2 - (m+2)}{2} = \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 1.$$

请注意，首项系数恰好等于 T的面积。这并非巧合，而是一个更宏大故事的一部分，这个故事称为埃尔哈特理论。

我们的目标是介绍一个著名问题。1997年，小田忠雄在奥伯沃尔法赫提出了这个问题。粗略地说，小田想知道：对于某一类多面体，其中的格点是否总是满足一种优雅的计数性质；精确表述请见本篇末尾的问题2。显而易见，这个问题的某个特例与问题 1有关。

关键词与短语。格多面体；光滑多面体；埃尔哈特理论；三角剖分；整数分解性质。奥伯沃尔法赫现代数学快照，SNAP-2025-008-EN（2025年），doi：10.14760/SNAP-2025-008-EN[1]请注意，边长为 $m+1$ 的正方形包含（$m+2$）[2] 个格点。对角线上有 $m+2$ 个格点。

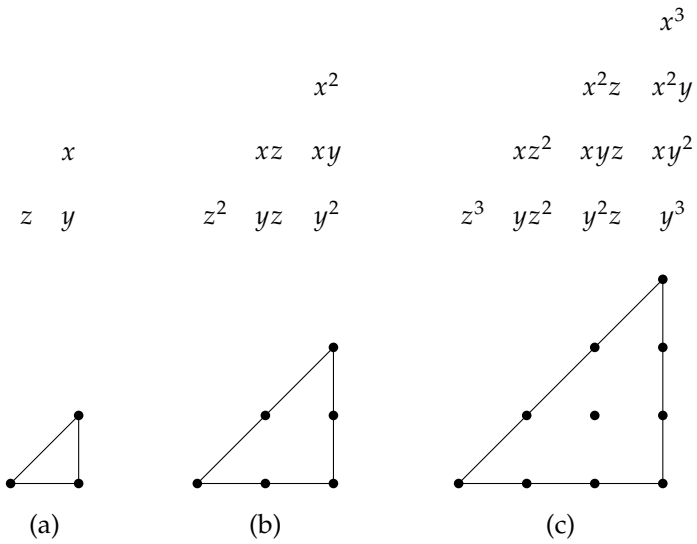

图 1. 将三个变量 x, y 和 z 中的单项式解释为三角形中的格点，其中 (a) 次数为一，(b) 次数为二，(c) 次数为三。

鉴于我们对单项式的计数方式，这相当于问每个次数为 m 的单项式能否写成 m 个变量的乘积。当然，我们一眼就能看出答案是肯定的。然而，小田的问题在一般情形下并不容易；尽管表述简单，至今仍未得到解答。

现在我们来介绍一般情形。我们在整数点格 $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ 上进行讨论，也就是说，它由 d 维空间中坐标均为整数的所有点构成。子集 $C \subset \mathbb{R}^d$ 称为凸 集，如果连接 C 中任意两点的每条线段都完全位于 C 内。点集 $B \subset \mathbb{R}^d$ 的凸包 是按包含关系最小的子集 $\mathrm{conv}(B) \subset \mathbb{R}^d$，它是凸集且包含 B。对于 $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$，还可以用以下方式描述：

$$\mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

术语格多面体 指有限个格点 $v_1, \ldots, v_n$ 的凸包 $P = \mathrm{conv}(v_1, \ldots, v_n)$。

和之前一样， m次膨胀后的 P 是多面体 $mP = \{mv \mid v \in P\}$。在 $m \in$ 处的*Ehrhart* 函数 L_P 定义为 mP中格点 $L_P(m) = |mP \cap \mathbb{Z}^d|$ 的数量。 P的维数 记作 $\dim(P)$，是包含 P的最小仿射空间的维数。[2]

定理 1 （参见 [3,4]） 。存在一个次数为 $\dim(P)$、有理系数为 f 的多项式，使得对于所有 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $L_P(m) = f(m)$。此外， f 的首项系数与 P的欧几里得体积 $\mathrm{vol}(P)$ 相同。

定理1 使我们能够将 L_P 解释为一个次数为维数（P）的多项式，我们称之为*Ehrhart* 多项式 P的。首项系数与多面体 P 的体积相同，这一点令人惊讶。然而，如果 P 是一个多边形，也就是说，如果 P 是一个二维多面体，那么 P 的面积与其所包含格点之间的关系还可以描述得更加精确。

定理 2 （皮克定理）。 对于格多边形 $P \subset \mathbb{R}^2$, ，其欧几里得体积 $\mathrm{vol}(P)$ 可由以下公式给出

$$\mathrm{vol}(P) = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1.$$

这里， $|P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$ 表示内部格点的数量，而 $|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|$ 表示 P 的边界格点数量。

让我们使用皮克定理来计算 P 图2所示多边形的面积。可以看出

[2]仿射子空间 指的是 ^{d} 中的点、直线、平面..... 。例如，非退化三角形包含在一个平面内，但不包含在任何直线内；因此，这样的三角形维数为二。

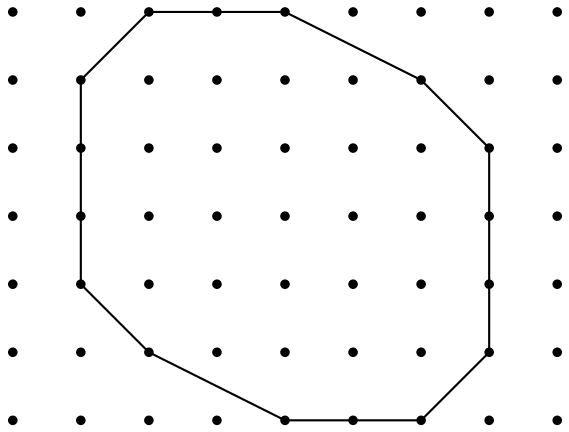

图2。利用皮克定理计算格多边形的面积。共有23个内部格点和16个边界格点。

它有 23 个内部格点和 16 个边界格点，因此其面积为

$$\mathrm{vol}(P) = 23 + \frac{16}{2} - 1 = 30.$$

2. 皮克定理的证明

皮克定理的证明包含了埃尔哈特理论中的许多精彩思想和构造。由于其中有几项对于提出小田的奥伯沃尔法赫问题起到了重要的启发作用，我们在此给出一个证明。其基本思想是按照格点的数量 $|P \cap \mathbb{Z}^2|$.[3]进行归纳。

2.1. 基础情形。 我们假设 P 是一个三角形，其顶点 v_1, v_2和 v_3 是它仅有的格点；也就是说， $|P \cap \mathbb{Z}^2| = 3$。这样的三角形称为空的。我们将证明，在这种情况下， v_1, v_2和 v_3 构成Z^2的一个仿射基 ；也就是说，差向量 $v_1 - v_3$ 和 $v_2 - v_3$ 构成Z^2的一个格基 [4] 。暂且假设这一点成立，并说明它如何在基础情形下推出皮克定理。

根据假设， $v_1 - v_3$ 和 $v_2 - v_3$ 构成 $\mathbb{Z}^2$ 的格基。以这些差向量为行组成的 2×2 矩阵 A 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆。换言之，存在一个元素属于 $\mathbb{Z}$ 的 2×2 矩阵 B，使得矩阵乘积 AB 等于单位矩阵，因此 A 的行列式[5]本身在$\mathbb{Z}$上可逆；也就是说， A 的行列式为 1 或 -1。从几何上看，以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^2$ 为行组成的 2×2 矩阵 $\binom{a}{b}$ 的行列式 $\det\binom{a}{b}$ 的绝对值，等于由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 张成的平行四边形的面积。因此， P 的面积等于 $(1/2)\,|\det(A)| = 1/2 = 0 + 3/2 - 1$，证毕。

还需证明 v_1, v_2 和 v_3 一起构成 $\mathbb{Z}^2$ 的仿射基。令 $\mathcal{P}$ 表示由 $v_1 - v_3$ 和 $v_2 - v_3$ 张成的平行四边形；也就是说，

$$\mathcal{P} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) v_3 \mid 0 \le \lambda_i \le 1\}.$$

这样的平行四边形如图 3 所示。我们声称，其中包含的格点仅有其顶点 $\mathbf{0}, v_1 - v_3, v_2 - v_3$ 和 $v_1 + v_2 - 2v_3$。事实上，顶点为 $\mathbf{0}, v_1 - v_3,$ 和 $v_2 - v_3$ 的三角形是空的，因此它的对顶三角形，也就是顶点为 $v_1 - v_3, v_2 - v_3$ 和 $v_1 + v_2 - 2v_3$ 、覆盖 $\mathcal{P}$ 另一半的三角形，同样是空的。显然， $\mathcal{P}$ 的所有平移组成的集合 $\{\mathcal{P} + v \mid v \in \mathbb{Z}^2\}$ 铺满了平面，如图 3 所示。由此可见，$\mathbb{Z}^2$ 中的每个格点都是 $\mathcal{P}$ 的某个格点平移的顶点。因此，每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^2$ 都可以表示为

---

[3]这意味着，首先要证明该定理对恰好包含三个格点的多边形成立（第2.1节）。第二步，证明如果该定理的结论对所有至多包含 N 个格点的多边形都成立，那么对所有包含 $N+1$ 个格点的多边形也成立，其中 $N \ge 3$ 为任意整数（第2.2节）。因此，该定理必定对所有整数 $N \ge 3$都成立。[4]若每个向量 $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{Z}^d$ 都能唯一表示为 $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d$（其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{Z}$），则称这些向量构成一个格基；若 $d+1$ 个元素 $v_1, \ldots, v_{d+1} \in \mathbb{Z}^d$的差向量 $v_1 - v_{d+1}, \ldots, v_d - v_{d+1}$ 构成一个格基，则称它们构成一个仿射基。[5]一个 2×2矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 的行列式值由表达式 $ad - bc$给出。

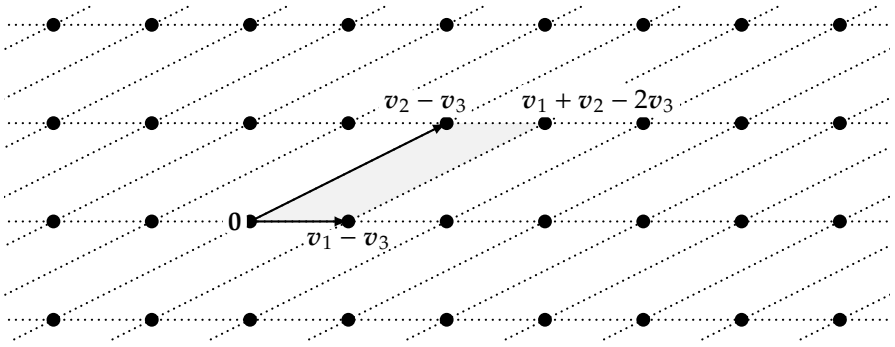

图3. 用平行四边形的平移对平面进行镶嵌，该平行四边形由顶点为 v_1， v_2， v_3 的空三角形构成。

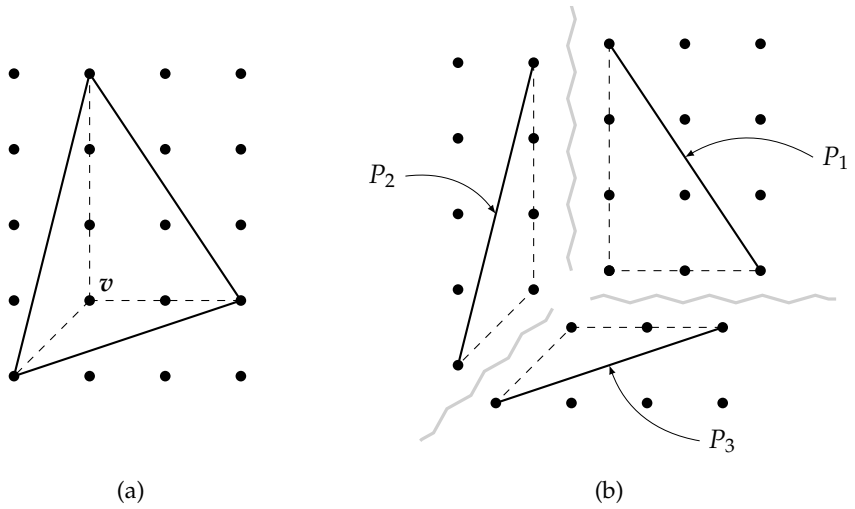

图4. 一个恰有三个边界格点的格多边形（a）被切分为三个子多边形（b） P_1， P_2 和 P_3。这里， $b_1 = 4$、 $b_2 = 3$、 $b_3 = 2$ 以及 $i_1 = 1$、 $i_2 = i_3 = 0$。

线性组合 $x = k_1(v_1 - v_3) + k_2(v_2 - v_3)$，其中 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$。此外，这种表示是唯一的，因此 $v_1, v_2,$ 和 v_3 共同构成 $\mathbb{Z}^2$ 的仿射基。

2.2. **归纳步骤**。 假设皮克定理对所有 $Q \subset \mathbb{R}^2$ 中有 $|Q \cap \mathbb{Z}^2| \leq N$ 个格点的格多边形均成立，其中 $N \geq 3$ 为某个值。我们需要证明，该定理对所有 P 中有 $|P \cap \mathbb{Z}^2| = N + 1$ 个格点的格多边形也成立。设 P 为这样的一个多边形。归纳步骤分为两种情况：要么边界 ∂P 上恰有三个格点；要么 $|\partial P \cap \mathbb{Z}^2| > 3$。

若 $|\partial P \cap \mathbb{Z}^2| = 3$ 则其内部 P° 的 P 至少包含一个格点 v。连接 v 与 P 的三个顶点的三条线段将多边形分成三个子多边形 P_1， P_2和 P_3，如图4所示。我们将分别计算这 P_k、 $k = 1$、2、3 中的格点数，并将这些计数与 P中的格点数联系起来。设 $i_k = |P_k^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$，且令 $b_k = |\partial P_k \cap P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| = |\partial P_k \cap \mathbb{Z}^2| - 2$，其中 $k = 1$、2、3。

由于 $|P_k \cap \mathbb{Z}^2| \leq N$ 对于 $k = 1$，2、3，我们可以将关于至多包含 N 个格点的格多边形满足皮克定理这一初始假设，应用于多边形 P_1、 P_2、 P_3中的每一个，从而得到

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(P_k) &= |P_k^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P_k \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1 \\ &= i_k + \frac{b_k + 2}{2} - 1.\end{aligned}$$

P 的面积等于子多边形 P_1、P_2 和 P_3 的面积之和。进一步分别计算这三个子多边形中的格点数后，我们得到以下等式链：

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(P) &= \sum_{k=1}^{3} \operatorname{vol}(P_k) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \left(i_k + \frac{b_k + 2}{2} - 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{3} i_k + \frac{\sum_{k=1}^{3} b_k}{2} \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{1}{2} \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{3}{2} - 1 \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1.\end{aligned}$$

请注意，位于剖分线内部部分上的每个格点都会被项 $\sum_{k=1}^{3} b_k$ 计数两次，但 $\boldsymbol{v}$ 除外，它被计数三次。第四行加上 1/2 正是对此的修正。

若 $|\partial P \cap \mathbb{Z}^2| > 3$，我们可以找到 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w} \in \partial P \cap \mathbb{Z}^2$，使得连接 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 的线段将 P 分成两个子多边形 P_1 和 P_2，其中 $|P_k \cap \mathbb{Z}^2| \leq N$ 对于 $k = 1, 2$。图5对此作了说明。我们再次

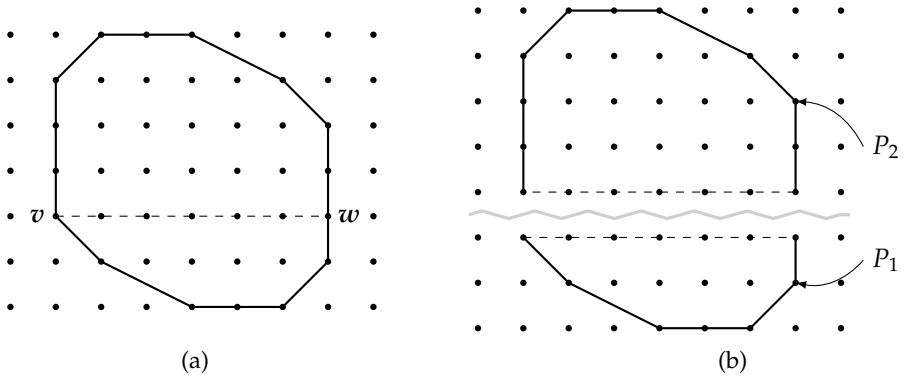

图5. 一个格多边形（a），其边界上有四个或更多格点，可以被分割（b）为两个子多边形 P_1 和 P_2。这里，$i_1 = 4$、$i_2 = 14$、$b_1 = 7$、$b_2 = 11$ 和 $i = 5$。

计算子多边形 P_1 和 P_2 中的格点数，并将这些数量与 P 中的格点数联系起来。令 $i_k = |P_k^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$，并令 $b_k = |(\partial P_k \setminus P^\circ) \cap \mathbb{Z}^2|$ 表示 P_k 的边界格点中不位于 P 内部的格点数。我们用 i 表示从 $\boldsymbol{v}$ 到 $\boldsymbol{w}$ 的线段上的内部格点数。由于 $|P_k \cap \mathbb{Z}^2| \leq N$，我们可以应用归纳假设，得到

$$\operatorname{vol}(P_k) = i_k + \frac{b_k + i}{2} - 1.$$

P 的面积等于 P_1 和 P_2 的面积之和；因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(P) &= \operatorname{vol}(P_1) + \operatorname{vol}(P_2) \\ &= \left(i_1 + \frac{b_1 + i}{2} - 1 \right) + \left(i_2 + \frac{b_2 + i}{2} - 1 \right) \\ &= (i_1 + i_2 + i) + \frac{b_1 + b_2}{2} - 2 \\ &= |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2| + \frac{|\partial P \cap \mathbb{Z}^2|}{2} - 1.\end{aligned}$$

关于最后一个等式，请注意， $i_1 + i_2 + i = |P^\circ \cap \mathbb{Z}^2|$，而 $b_1 + b_2$ 统计的是 P边界上的格点数，不过会将 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 各计数两次。

3. 小田的奥伯沃尔法赫问题

回顾我们对问题 1的重新诠释：将其视为一个关于空三角形 T 的膨胀中格点数量的问题，该三角形的顶点为 (0，0)，(1，0) 和 (1，1)；集合 $T \cap \mathbb{Z}^2$中包含的格点各自对应一个次数为一的单项式。现在，我们构造一个单一的组合对象，同时编码所有膨胀 $mT, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$中的格点（以及由此得到的格点数量）。

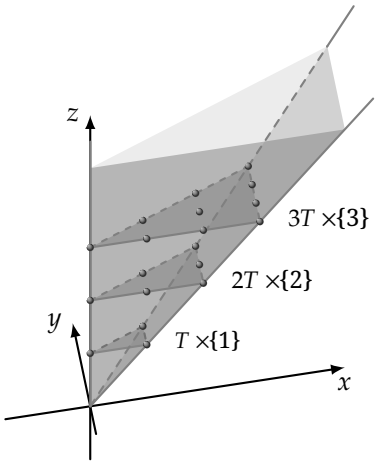

图 6. 空三角形上的锥 C_T 经仿射嵌入到$\mathbb{R}^3$中。

我们首先将 $\mathbb{R}^2$ 视为 $\mathbb{R}^2 \times\{1\}$ 的子集，其中 $\mathbb{R}^3$；换句话说，我们认为平面位于三维空间中高度为一处。在这个 $\mathbb{R}^2$, 副本中，我们考虑三角形 T。 T 上的锥定义为 $C_T = \{\lambda(\boldsymbol{x}, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \boldsymbol{x} \in T\}$；它见图 6。我们可以将 C_T 看作所有从原点出发并经过 $T \times\{1\}$中一点的半直线的并集。 C_T 在高度 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$处的截面，更准确地说， $C_T \cap \{(x, y, z) \mid z = m\} = (mT, m)$，可以视为 T的 mT 膨胀。因此，锥 C_T 编码了 T的所有膨胀中的格点。

这一构造可以推广到任意格多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$。事实上， P上的锥可以定义为

$$\begin{aligned} C_P &= \mathbb{R}_{\geq 0}(P \times \{1\}) \\ &= \{\lambda(\boldsymbol{x}, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \boldsymbol{x} \in P\}. \end{aligned}$$

与之前一样， C_P 在高度 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 处的截面可以视为膨胀 mP。

3.1. 整数分解性质。 如果格多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 满足整数分解性质，那么其中高度为 m 的每个格点 C_P 都可以写成 m 个（不必互不相同的）高度为一的格点之和。

例 1。 如果所考虑的多面体是一个空三角形 T，这意味着对于所有 $(\boldsymbol{x}, m) \in C_T \cap \mathbb{Z}^3$，都存在（不必互不相同的）点 $(\boldsymbol{x}_1, 1), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, 1) \in C_T \cap \mathbb{Z}^3$，使得

$$(\boldsymbol{x}, m) = (\boldsymbol{x}_1, 1) + \cdots + (\boldsymbol{x}_m, 1).$$

事实上，每个空三角形 T 都具有整数分解性质；欢迎有兴趣的读者思考这是为什么。

自然会有人问：其他哪些格多胞体具有整数分解性质。让我们研究一些重要的格多胞体类别，对于这些类别，这一问题已经得到解决。

例 2。我们将空格三角形推广到任意维数。若 $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的仿射基，则它们的凸包 $S = \operatorname{conv}(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_d)$ 称为 d 维幺模单形。我们断言，这样的单形 S 具有整数分解性质。事实上，由于 $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的仿射基，因此 $(\boldsymbol{v}_0, 1), \ldots, (\boldsymbol{v}_d, 1)$ 是 $\mathbb{Z}^{d+1}$ 的格基。于是，锥 C_S 中的每个格点 $(\boldsymbol{x}, m)$ 都可表示为线性组合 $(\boldsymbol{x}, m) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i(\boldsymbol{v}_i, 1)$，其中 $\lambda_i \in \mathbb{Z}$。由于 $(\boldsymbol{x}, m)$ 位于 C_S 中，可知 $\lambda_i \geq 0$，因此 S 具有整数分解性质。

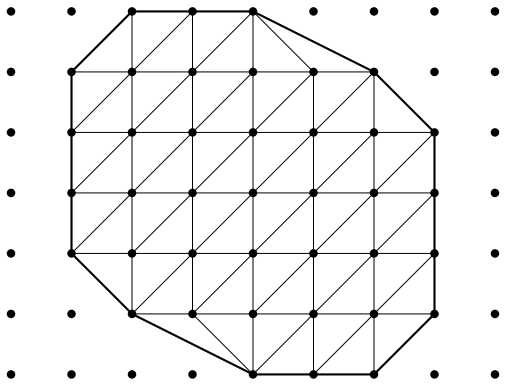

图 7. 每个二维多边形都可以由空三角形覆盖。

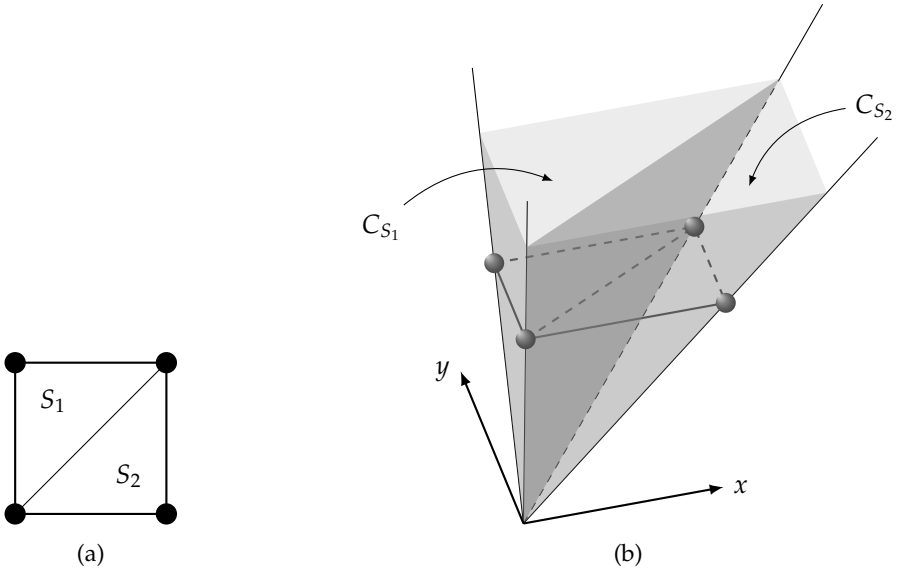

图 8. 如果 (a) 三角形 S_i 覆盖多边形 P，那么 (b) 锥 C_{S_i} 覆盖 C_P。

例 3。每个二维格多边形都可以由空格三角形覆盖；图 7 展示了实现这一点的一个例子。更一般地，设 P 是 R^d 中一个由幺模单形 $S_1, \ldots, S_n$ 覆盖的格多面体；也就是说，$P = S_1 \cup \cdots \cup S_n$。这样的覆盖称为 P 的幺模覆盖。P 上方的锥 C_P 由位于单形 S_i 上方的锥 $C_{S_1}, \ldots, C_{S_n}$ 覆盖；图 8 展示了 $d = 2$ 情形下的例子。因此，C_P 中高度为 m 的每个格点，都可以写成 m 个高度为一的格点之和；这些格点正是位于相应锥 C_{S_i} 中高度为一处的格点。特别地，所有二维格多边形都具有整数分解性质，因为它们都存在幺模覆盖。在高维情形下，甚至难以确定幺模覆盖是否存在。[6]

例 4. Reeve [10] 描述了一个四面体的无限族，其中的成员如今被称为 *Reeve* 四面体；见图9。设

$$R_r = \mathrm{conv}((0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,r))$$

对于某个 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$。Reeve 四面体 R_r 恰好包含四个格点，没有内部格点，并且 $\mathrm{vol}(R_r) = r/6$。此外，它的 m 次膨胀中的格点数由下式给出

$$L_{R_r}(m) = \frac{r}{6}m^3 + m^2 + \left(2 - \frac{r}{6}\right)m + 1.$$

[6]图 7 和 8 中的幺模覆盖具有这样的性质：单形沿公共面相交。这类覆盖称为 三角剖分。在二维情况下，幺模三角剖分总是存在。然而，存在一些高维格多胞体，它们允许幺模覆盖，却不允许幺模三角剖分 [5, 例 10]。

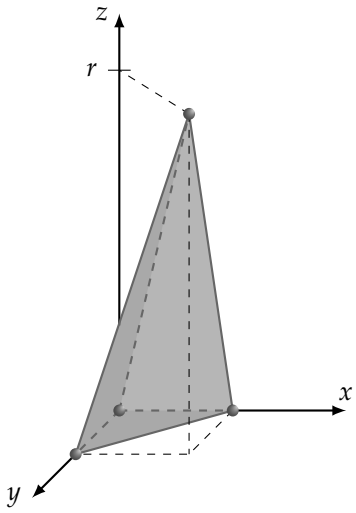

图9. Reeve 四面体 R_r。

显然，当 $r > 1$ 时， R_r 不存在幺模覆盖，因为此时它的四个顶点不构成仿射格基。这与二维情形形成对比：每个空三角形都是幺模的。存在顶点不构成仿射基的空单形，这使得对高维格多面体的研究比对多边形的研究丰富得多，也困难得多。尤其是，我们不应期待在三维或更高维中存在皮克定理的直接类比。

现在我们证明， R_r 不满足整数分解性质。设 C_r 为 R_r上的锥。格点集合 $C_r \cap \mathbb{Z}^4$ 构成一个半群，其 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-基为

$$\begin{cases} (0,0,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,1,1,1) & \text{if } r = 1, \text{ or} \\ (0,0,0,1),(1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,1,r,1), & \\ \qquad (1,1,1,2),\ldots,(1,1,r-1,2) & \text{if } r > 1. \end{cases}$$

特别地，对于 $r > 1$，高度为二的点 $(1,\ 1,\ 1,\ 2) \in C_r$ 无法写成两个高度为一的点之和。

3.2. **光滑情形**。令 $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^d$ 表示第 i 个标准基向量，并记

$$\operatorname{cone}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \boldsymbol{x}_i \in X \right\}$$

表示由子集 $X \subset \mathbb{R}^d$生成的凸锥（该子集不一定是有限集）。若锥 $C \subset \mathbb{R}^d$ 经过 $\mathbb{Z}^d$ 的基变换后可与 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d)$ 等同，则称其为光滑锥。换言之，若存在 $\mathbb{Z}^d$ 的格基 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d$，使得映射 $\mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}^d$ 将 $(x_1, \ldots, x_d)$ 映至 $\mathbb{Z}^d$，且该映射可逆并将 $\operatorname{cone}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d)$ 映至 C，则称其为光滑锥。

如果对于格多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ 的每个顶点 $\boldsymbol{v}$，锥$(P - \boldsymbol{v})$ 都是光滑的，那么称该多面体为光滑的。小田的奥伯沃尔法赫问题现在问的是：光滑性是否足以保证一个格多面体具有整数分解性质?

问题 2 （小田的奥伯沃尔法赫问题 [9]）。 每个光滑格多面体都具有整数分解性质吗?

有迹象表明答案确实可能是肯定的：多面体 P 的光滑性保证其每个角都被某个幺模单形的膨胀所覆盖；此外，人们推测这些角覆盖应当能够充分向内延伸，从而得到对整个多面体 P的幺模覆盖。

尽管人们为回答问题2付出了诸多努力，但该问题至今仍悬而未决。此外，目前对于可能的答案也尚未形成普遍共识。人们为寻找反例付出了大量努力；例如，Bruns [2]便进行了这方面的研究。与此同时，对小田的奥伯沃尔法赫问题的研究促成了大量关于格多胞体的精彩成果，这些成果由众多作者以各种方式获得 [1,6–8]。

参考文献

[1] M. Beck、C. Haase、A. Higashitani、J. Hofscheier、K. Jochemko、L. Katthän 和 M. Michałek。3维光滑中心对称多胞体具有整数分解性质。《组合学年刊》，23(2)：255–262，2019。[2] W. Bruns。托里克几何中对反例的探寻。载于交换代数与代数几何（*CAAG-2010*），第17卷《拉马努金数学学会讲义丛书》，第45–61页。拉马努金数学学会，迈索尔，2013。[3] E. Ehrhart。关于以 n 维为界的相似多面体。《巴黎科学院报告》，254：988–990，1962。[4] E. Ehrhart。关于一个线性丢番图几何问题。II. 线性丢番图系统。《纯粹与应用数学杂志》，227：25–49，1967。[5] R. T. Firla 和 G. M. Ziegler。希尔伯特基、幺模三角剖分和有理多面锥的二元覆盖。《离散计算几何》，21(2)：205–216，1999。[6] J. Gubeladze。具有长边的有理多胞体的凸正规性。《高等数学》，230(1)：372–389，2012。[7] C. Haase 和 J. Hofmann。凸正规多胞体（对）。《加拿大数学公报》，60(3)：510–521，2017。[8] C. Haase、A. Paffenholz、L. C. Piechnik 和 F. Santos。幺模三角剖分的存在性——积极成果。《美国数学会回忆录》，270(1321)：v+83，2021。[9] T. Oda。关于凸格点多胞体的闵可夫斯基和的问题。2008年12月。[10] J. E. Reeve。关于格点多面体的体积。《伦敦数学会会刊》（*3*），7：378–395，1957。

诺丁汉大学数学科学学院，诺丁汉，NG7 2RD，英国电子邮箱地址：
johannes.hofscheier@nottingham.ac.uk

华威大学数学研究所，考文垂，CV4 7AL，英国电子邮箱地址：
alexander.kasprzyk@warwick.ac.uk