arXiv:2512.20684v1 [math.GM] 22 Dec 2025

关于一个涉及素数的行列式的评述

HUAN XIAO

Abstract. Pausinger 最近研究了一个涉及素数的特殊行列式。在这篇短文中，我们指出，这类行列式在线性代数中早已为人所知，其计算与素数无关。

设 p_n 为第 n 个素数。最近，Pausinger [2] 研究了一个涉及素数的特殊行列式。它是一个 $n \times n$ 矩阵的行列式，该矩阵的对角线包含前 n 个素数，其余元素均为 1，因此

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & p_n \end{vmatrix}.$$

它是在线整数数列百科全书中的数列 A067549 [1]， D_n 的前几项为 2，5，22，140，1448，17856。Pausinger [2] 将该数列与一个计数问题联系起来，并得到了关于 D_n的递推关系，见 [2, 引理 2]。

在这篇短文中，我们指出，像 D_n 这样的行列式在线性代数中早已为人所知。虽然目前我无法给出具体的参考文献，但 D_n 的计算是标准的，其值也广为人知。事实上，我们有

命题 0.1。设 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$，则

$$d_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) a_1 a_2 \cdots a_n.$$

证明。这个结果在线性代数中早已为人所知，为了完整起见，我们在此给出证明。设 r_i 和 c_i 分别表示所讨论矩阵的第 i 行和第 i 列。第一步是对 $i = 2$、$\cdots$、n进行初等变换 $r_i - r_1$，于是得到

$$d_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix}. \tag{0.1}$$

关键词和短语。行列式；素数。

该行列式 第二步是对 $i=2$、$\cdots$、n进行以下初等变换

$$c_1+\frac{a_1}{a_i}c_i.$$

所得行列式为

$$d_n=\begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} \tag{0.2}$$

其中

$$b=1+a_1+a_1\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}=a_1\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right). \tag{0.3}$$

由 **(0.2)** 可得

$$d_n=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)a_1a_2\cdots a_n. \tag{0.4}$$

□

现在取 $a_k=p_k-1$ ，可得

推论 0.2。

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & p_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k-1}\right)\prod_{k=1}^{n}(p_k-1). \tag{0.5}$$

References

[1] 在线整数序列百科全书，https://oeis.org/A067549[2]Florian Pausinger，等差数列集合中整数出现次数的计数，arXiv:2512.16358

School of Artificial Intelligence, Zhuhai City Polytechnic, Zhuhai, China电子邮件地址：xiaogo66@outlook.com