arXiv:2512.20729v1 [cs.CC] 23 Dec 2025

移位偏导多项式秩与余维

Darren J. Edwards
斯旺西大学，英国
d.j.edwards@swansea.ac.uk

摘要

移位偏导（SPD）方法是一种核心代数工具，通过度量多项式的平移导数空间的维数来证明电路下界。本文提出移位偏导多项式（SPDP）框架，将经典 SPD 方法整合到一种显式的系数矩阵形式体系中。这使这些空间成为具体的线性代数对象，并引入两种对偶复杂性度量：SPDP 秩和 SPDP 余维。

我们首先在由（κ，ℓ）情形确定的固定环境系数空间中，定义 SPDP 生成族、相应张成空间和 SPDP 矩阵 $M_{\kappa,\ \ell}(p)$，从而使秩有明确的定义，并使余维成为“相对于环境空间满秩的亏缺”这一规范量。随后，我们证明若干结构性质，使这一框架可作为独立工具包使用：移位／导数参数的单调性（明确界定 $|S| = \kappa$ 与 $|S| \leq \kappa$ 约定各自的适用范围）、在允许的变量对称性和基变换下的不变性，以及对标准布尔／多线性嵌入约定的稳健性。

接下来，我们给出适用于 lo- cal 电路模型的一般性宽度到秩的上界模板，展示在确定性编译器／对角基假设下，组合剖面计数如何在对数（κ，ℓ）范围内导出多项式界。这明确区分了与模型无关的 SPDP 工具集和在其他工作（例如 Edwards 2025）中使用的额外编译细化；本文不依赖这些细化。最后，我们通过典型示例说明余维视角，着重强调余维如何

体现刚性，即移位导数张成空间未能充满其环境空间。

总而言之，SPDP 为移位偏导数提供了一种简洁、自成一体的线性代数框架，既支持基于秩的推理，也支持基于亏损（余维）的推理，并旨在成为代数复杂性应用中可重复使用的参考资料。

关键词： 移位偏导数、复杂性度量、代数方法、秩、余维

目录

1 引言 **4**

2 预备知识与记号 5
2.1 多重指标记号.5 2.2 参数范围.5

3 布尔函数的多项式嵌入 6

4 SPDP 框架 6
4.1 参数范围与适用范围.6 4.2 与经典移位偏导数（SPD）的关系，以及“SPDP”增加的内容.7

5 SPDP 矩阵、秩与余维 9
5.1 环境空间与基约定（关于余维）. . . . 9 5.2 SPDP 行生成元.9 5.3 显式SPDP矩阵.10 5.4 秩与余维.10 5.5 为什么引入分块／编译型SPDP变体？.11 5.6 分块／编译型SPDP变体（与分离论文的兼容性）.12

6 基础性质 **12**

7 多项式宽度意味着多项式 SPDP 秩 17
7.1 局部宽度计算模型（定义） 17 7.2 设置与假设.18

7.3 规范窗口、范式与剖面 . . . . . 19 7.4 单项式/坐标预算.27 7.5 计数 κ-步剖面与剖面子空间 . . . . . 28 7.6 主定理：多项式宽度⇒秩下界 31

8 **一个标准的上界模板 34**

8.1 电路上界.35**9 示例性下界 36 10 如何使用 SPDP 秩与余维 38 11 计算示例（玩具SPDP矩阵）39**

12 讨论与范围 3912.1 与按块划分的 SPDP/CEW 框架的兼容性.40

13 计算 sanity check 4213.1 与流水线对齐的 sanity check（端到端实现）. . 42

14 结论 44

1 引言

移位偏导数已成为代数复杂性和布尔复杂性中的标准工具，尤其常用于证明针对受限电路模型的下界 [Nisan 和 Wigderson，1997年，Kayal，2012年，Gupta 等人，2016年，Kayal 和 Saha，2016年，Limaye 等人，2024年，Shpilka 和 Yehudayoff， 2010]。大多数文献将移位偏导数空间的维数 作为主要复杂度统计量。本文提炼并形式化了一套密切相关的不变量体系——移位偏导数多项式（*SPDP*） 框架，其中包含两个对偶量：*SPDP* 秩 （维数）和*SPDP* 余维 （环境亏量）。有关这些思想在复杂性分离中的应用，参见 Edwards [2025]。

主要贡献。本文提炼出一套简洁且自成体系的"SPDP 工具集"，可独立于任何分离应用而引用。

• **SPDP 矩阵形式化 + 对偶不变量**。我们将移位偏导数（SPD）维数度量表示为显式系数矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$，其秩为 $\Gamma_{\kappa,\ell}(p)$；并引入对偶量 codim$_{\kappa,\ell}(p)$ 作为环境亏量。由此，不变性和单调性陈述都清晰地体现为$M_{\kappa,\ell}(p)$ 的线性代数性质。

• **稳健性与不变性**。我们证明，在预期的环境约定下，$\Gamma_{\kappa,\ell}(p)$ 和 codim$_{\kappa,\ell}(p)$ 具有基不变性和置换不变性，并阐明了在布尔／多线性嵌入下不变性的适用范围。

• **一个宽度⇒秩上界框架及紧确的剖面计数**。我们形式化了一个最简局部宽度计算模型，并证明在 $\kappa, \ell = \Theta(\log n)$ 和$R = C(\log n)^c$ 的情形下成立多项式宽度⇒秩上界。关键的技术桥梁是一条轮廓压缩引理，它表明可实现的接口匿名剖面数量为$R^{O(1)}$ 且与窗口长度无关 κ，从而避免了粗略的有序步数计数 $(\log n)^{O(\kappa)}$。

•**与分块 SPDP 框架的兼容性**。我们列出一份对照表，说明未分块 SPDP 矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 与分块/编译设定中使用的分块矩阵 $M^B_{\kappa,\ell}(p)$ 之间的对应关系，其中包括秩比较 $\Gamma^B_{\kappa,\ell}(p) \le \Gamma_{\kappa,\ell}(p)$。

本文的工作 我们提供：(i) SPDP 空间的清晰定义和规范的 SPDP 矩阵表示；(ii) 在自然变换下保持稳定的秩和余维不变量；(iii) 一般性质（单调性、不变性和基本闭包引理）；以及 (iv) 在一致的参数范围内，对广泛计算模型给出的秩上界，并辅以阐明刚性的余维表述。

本文不涉及的内容 本文不属于分离性论断，也不讨论障碍框架或任何全局复杂性类层面的推论。本文旨在通过严谨且自洽的论述，将 SPDP 秩和余维确立为一种独立度量。

对其他工作的应用（编译型/分块 SPDP）。 本文在未分块矩阵形式下发展 SPDP 秩和余维，即在固定的环境/基约定下，通过系数矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 及其秩 $\Gamma_{\kappa,\ell}(p)$（以及对偶环境亏缺 $\mathrm{codim}_{\kappa,\ell}(p)$）进行处理。其他工作 [Edwards, 2025] 采用了限制性更强的编译型变体，其中规定了固定的半径 1 分块划分 B，并取结构化限制 $M^{B}_{\kappa,\ell}(p)$ 的秩（其中 $\Gamma^{B}_{\kappa,\ell}(p) \le \Gamma_{\kappa,\ell}(p)$），以适配分块局部编译器变换。本文的任何内容都不依赖这一编译型设置；我们仅加入一份简短的对照表（12.1），用于统一记号。

2 预备知识与记号

固定一个基域 $\mathbb{F}$（例如 $\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$）。我们使用多项式 $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$表示定义在 $\{0,1\}^n$ 上的布尔函数（通过多线性化或选定的嵌入，具体说明见第 3 节）。

2.1 多重指标记号

对于 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$，令 $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ 并记 $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$。

2.2 参数范围

全文中，我们固定参数 (κ, ℓ)，这些参数可能依赖于 n。本文的所有定理都会明确说明所采用的 (κ, ℓ) 参数范围。适当时，我们会突出常见的参数范围，例如 $\kappa = O(1)$ 搭配 $\ell = \mathrm{poly}(n)$，或 $\kappa = \Theta(\log n)$

搭配 $\ell = \Theta(\log n)$。本文中的任何结论都不依赖于混用不兼容的参数选择。

3 布尔函数的多项式嵌入

我们给出一种最简嵌入约定。读者也可以采用等价的标准约定；我们的不变性结果表明，该度量对这类选择具有稳健性。

定义 3.1 (布尔函数到多项式的表示)。设 $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$。$f$的一个多项式表示 是一个多项式 $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$，它在 $\{0,1\}^n$上与 f 一致。除非另有说明，我们假设 f 是多线性的（通过模 $(x_i^2 - x_i)$ 的标准多线性化）。

备注 3.2。如果使用非多线性表示，则下文所有 SPDP 空间均可视为模掉布尔理想 $(x_i^2 - x_i)$；这不会影响秩/余维的定义，只会影响环境基的选择。

4 SPDP 框架

移位偏导数方法研究目标多项式的低阶偏导数的线性张成，并可选择将其与低次数单项式相乘（移位）。本文将这一构造整理为一个显式矩阵，并采用两个对偶不变量：SPDP 秩和 SPDP 余维。

4.1 参数范围与适用范围

固定输入长度 n 和基域 $\mathbb{F}$。设 $p \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个多项式，在选定的嵌入下表示一个布尔函数（例如模 $(x_i^2 - x_i)$ 的多线性表示）。我们研究参数 (κ, ℓ)，其中 κ 为导数阶数，ℓ 为移位单项式的次数上界。

一项关键的方法论要求是参数一致性：每当我们比较某个计算模型的上界与某个显式族的下界时，这两个界都必须适用于相同的(κ, ℓ) 参数范围。

注4.1（典型范围）。两种常见的选择是：

(i) $\kappa,\ \ell = \Theta(\log\ n)$（多对数阶偏导数／移位），通常用于预期在适当结构假设下可获得多项式界的情形。

(ii) $\kappa = \Theta(n)$ with $\ell = O(1)$（高阶导数、无移位或少量移位），用于显式多项式的经典偏导数秩论证。

本文不预设特定情形：下文的所有陈述都会说明所采用的情形。

4.2 与经典移位偏导数（SPD）的关系，以及“SPDP”带来的新意

移位偏导数（SPD）通常被表述为一种空间维数度量：先对目标多项式取低阶偏导数，再将它们与低次数单项式相乘以进行“移位”，并测量由此得到的线性张成空间的维数 [，例如 Nisan 和 Wigderson，1997年，Shpilka 和 Yehudayoff， 2010]。本文采用的 SPDP 框架并非伪装成另一种度量；它是对同一底层 SPD 张成空间的一种基于矩阵的封装，并采用规范环境基约定，使余维成为一个首要的对偶不变量。

经典 SPD 空间令 $p \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$（或其在布尔嵌入下的多线性表示）。固定参数（$\kappa$， ℓ）。定义经典移位偏导数空间（阶数为 κ 、移位次数为 ℓ）如下：

$$\mathsf{SPD}_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big\{\, m \cdot \partial^{\alpha} p \;:\; |\alpha| = \kappa,\ \deg(m) \le \ell \,\big\}. \tag{1}$$

在布尔/多线性设定中，通常（也符合我们的约定）将 m 限制为多线性单项式，并将所有多项式视为模布尔理想 $\langle x_i^2 - x_i \rangle$ (3.2)的等价类。

经典 SPD 复杂度统计量便是其维数

$$\mathrm{SPDdim}_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \dim_{\mathbb{F}}\big(\mathsf{SPD}_{\kappa,\ell}(p)\big).$$

SPDP 是同一个张成空间，只不过以秩的形式呈现在 5 中，我们定义 SPDP 生成族 $\mathcal{G}_{\kappa,\ell}(p)$ 及其张成空间 $V_{\kappa,\ell}(p)$，然后将该张成空间表示为固定环境单项式基下的显式系数矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$。具体来说，

$$V_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big(\mathcal{G}_{\kappa,\ell}(p)\big) \;=\; \mathsf{SPD}_{\kappa,\ell}(p), \tag{2}$$

因此，5 中定义的 SPDP 秩与经典 SPD 维数一致：

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \operatorname{rank}_{\mathbb{F}}\big(M_{\kappa,\ell}(p)\big) \;=\; \dim_{\mathbb{F}}\big(\mathsf{SPD}_{\kappa,\ell}(p)\big) \;=\; \mathrm{SPDdim}_{\kappa,\ell}(p). \tag{3}$$

等式 $\Gamma_{\kappa,\ell}(p) = \dim(V_{\kappa,\ell}(p))$ 显然成立，因为 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 的行恰好是生成多项式在所选单项式基下的系数向量，因此 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 的行空间与 $V_{\kappa,\ell}(p)$ 存在典范同构。

那么，这里真正的新意是什么？ SPDP 框架增加了三部分结构，而这些结构在“作为维数的 SPD”表述中往往是隐含的，或根本不存在：

1.**规范的环境空间（因此余维具有明确意义）**。经典 SPD 论证通常只追踪 $\dim(\mathrm{SPD}_{\kappa,\ell}(p))$。相比之下，SPDP 固定了一个显式的环境系数空间 $W_{\kappa,\ell}(p)$ 以及一个规范单项式基 $B_{\kappa,\ell}$ (5.1)，因此我们还可以度量环境亏量

$$\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) := \dim(W_{\kappa,\ell}(p)) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p).$$

当所需的表述不只是“张成空间很大”，而是“该张成空间以一种具有刚性的量未能填满环境空间”时，这个对偶不变量就很有用；这正是余维型刚性论证所需要的形式。

2.**显式的矩阵对象（因此变换转化为线性代数问题）**。通过使用显式的系数矩阵$M_{\kappa,\ell}(p)$，不变性声明就变成了关于在具体行列变换（例如对称作用和表示变换）下秩保持的陈述，而不再停留在“维数是不变的”这一层面。因此，单调性和稳健性等性质可以得到清晰的表述与证明（见第 6–7 节中的命题）。

3.**与其他地方使用的限制型／编译型变体的兼容性**。另见文献 [Edwards, 2025] 采用一种限制性更强的（规范）编译设定，在该设定中，可在计算秩之前应用额外的结构化投影和／或划分。本文并不依赖这种编译设定；本小节仅作为兼容性／记号说明。这些强化变体是同一核心对象的细化形式：它们仍然衡量一个（可能经过投影／分块的）移位偏导系数矩阵的秩，而式（2）–（3）中的基本代数仍是保持一致性的参照点。（参见 12.1，了解本文的独立 SPDP 形式体系如何与 Edwards [2025] 中使用的编译 SPDP 秩相对应。）

要点 如果读者已经熟悉 SPD，可以将“SPDP 秩”理解为“以显式系数矩阵秩形式表示的 SPD 维数”。真正新增的内容包括：(i) 一种固定的环境约定，使余维得以定义；(ii) 一套统一的矩阵语言，使不变性和模型上界一目了然；以及 (iii) 为分离论证中使用的限制性更强的编译变体提供清晰的接口。

5 SPDP 矩阵、秩与余维

5.1 环境空间与基约定（关于余维）

全文中，余维均相对于一个固定的环境系数空间而言。在布尔情形下，我们采用多线性约定，并在商环中进行研究

$$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]/\langle x_1^2 - x_1, \ldots, x_n^2 - x_n \rangle,$$

因此，每个多项式都有唯一的多线性代表元。

固定参数 (κ, ℓ)，并令 $D := \max\{0, \deg(p) - \kappa + \ell\}$。我们定义环境空间

$$W_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \{\text{multilinear polynomials of total degree } \le D\}$$

并取$B_{\kappa,\ell}$ 所有次数为$\le D$的多线性单项式作为典范基。记作

$$N_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \dim_{\mathbb{F}}(W_{\kappa,\ell}(p)) \;=\; |B_{\kappa,\ell}|.$$

注5.1。除非另有说明，以下所有 SPDP 矩阵均使用固定基$B_{\kappa,\ \ell}$定义。这样，对于所选的 $(\kappa,\ \ell)$ 和嵌入方案，$\operatorname{codim}_{\kappa,\ \ell}(p) = N_{\kappa,\ \ell}(p) - \Gamma_{\kappa,\ \ell}(p)$ 便是规范的。

5.2 SPDP 行生成元

对于指标集 $S \subseteq [n]$，我们定义混合偏导数

$$\partial_S p \;:=\; \prod_{i \in S} \partial_{x_i} p.$$

（多重指标的情形类似，可按需定义。）令 $\mathcal{M}_{\le \ell}$ 表示 $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ 中总次数不超过 ℓ 的单项式集合（若在布尔理想模下进行运算，则表示相应的多线性单项式集合）。

定义 5.2（SPDP 生成族）。固定参数 (κ, ℓ)。p 的 SPDP 生成族为

$$\mathcal{G}_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \{\, m \cdot \partial_S p \;:\; S \subseteq [n],\ |S| = \kappa,\ m \in \mathcal{M}_{\le \ell} \,\}.$$

（也可以使用 $|S| \le \kappa$；这只会改变常数，不影响下文的秩/余维形式体系。）

定义 5.3（SPDP 空间）。定义

$$V_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big(\mathcal{G}_{\kappa,\ell}(p)\big) \;\subseteq\; W_{\kappa,\ell}(p).$$

5.3 显式 SPDP 矩阵

定义 5.4（SPDP 矩阵）。为环境空间 $W_{\kappa,\ell}(p)$ 固定典范基 $B_{\kappa,\ell}$，如 5.1 节所定义。

SPDP 矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 是定义在 $\mathbb{F}$ 上的矩阵，定义如下：

(i) 行以对 $(S,\ m)$ 为索引，其中 $S \subseteq [n]$ 满足 $|S| = \kappa$ 且$m \in \mathcal{M}_{\le \ell}$。

(ii) 列以 $B_{\kappa,\ \ell}$ 为索引。

(iii) 行 $(S,\ m)$ 与列 $b \in B_{\kappa,\ \ell}$ 交叉处的元素，是多项式 $m \cdot \partial_S p$ 在基 $B_{\kappa,\ \ell}$ 下展开时 b 的系数。

备注 5.5。$M_{\kappa,\ \ell}(p)$ 是一个元素属于 $\mathbb{F}$ 的有限矩阵。关于其秩的所有结论都是标准的线性代数陈述（例如，可通过高斯消元计算）。

5.4 秩与余维

定义 5.6（SPDP 秩）。p 在参数 $(\kappa,\ \ell)$ 处的 *SPDP* 秩 is

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \operatorname{rank}\big(M_{\kappa,\ell}(p)\big) \;=\; \dim_{\mathbb{F}} V_{\kappa,\ell}(p).$$

定义5.7（SPDP 余维）。定义*SPDP* 余维为

$$\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; N_{\kappa,\ell}(p) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \dim_{\mathbb{F}} W_{\kappa,\ell}(p) - \dim_{\mathbb{F}} V_{\kappa,\ell}(p).$$

备注 5.8（对偶视角）。 秩是 SPD 风格复杂度统计量中的主要指标。余维是其对偶视角：它衡量在选定嵌入下相对于完整环境空间的缺失量。信息不会丢失：一旦固定$N_{\kappa,\ \ell}(p)$，余维和秩便可相互确定。

5.5 为什么要引入分块/编译型 SPDP 变体?

未分块 SPDP 矩阵 $M_{\kappa,\ \ell}(p)$ 是最直接的代数对象：它记录了所有移位偏导数 $m \cdot \partial_S p$（其中 $|S| = \kappa$ 且 deg$(m) \leq \ell$）的系数向量。然而，在配套的复杂性理论应用中，多项式 p 源自结构化编码 （例如 tableau/编译模板），其中的变量并非齐次，而是分成组，各组承担不同作用（时间步、纸带单元、门索引、接口线等）。分块/编译变体将这一思想形式化：秩度量应当尊重这种固有的分组方式。

（1）编译器会诱导出一个规范的变量划分。在编译编码中，变量集 $[N]$ 自然划分为若干块 $B = (B_1, \ldots\ldots, B_r)$，这些块由模板决定（例如，属于同一个局部构件、接口窗口或时间片的所有变量）。P 侧的许多论证只使用编译器诱导的分块划分：它们不依赖块内变量的内部排序，而只依赖哪些块彼此交互，以及编译器诱导的划分 B。

(2) P 侧上界利用块级局部性和轮廓压缩。 配套手稿中的关键 P 侧坍缩结论利用了这样一个事实：编译公式在块之间的交互具有有界宽度和有界接口。这使得我们可以采用一种轮廓压缩 论证，按照块匿名类型而非有序的变量级历史来统计行为。定义分块 SPDP 矩阵 $M^{B}_{\kappa,\ell}(p)$使这一证明策略更加明确：我们只关注编译器诱导的分块结构中实际相关的行/列，由此得到的秩下界也变得更加简洁且稳健。

（3）NP 侧下界不会受到影响（单调性）。分块是一种限制操作（删除行/列，或进行等效的块

可容许子族选择），因此不会增加秩；因此$\Gamma^{B}_{\kappa,\,\ell}(p) \le \Gamma_{\kappa,\,\ell}(p)$ (5.9)，所以任何未分块下界都可通过单调性转移到分块情形。分块定义与编译分离定理中使用的对象一致。

（4）实用性。分块变体还会降低符号计算或实验工作中的有效环境维数，因为此时使用的是由编译器分块确定的结构化子矩阵，而不是完整的未分块系数矩阵。这样一来，无须改变 SPDP 秩的形式定义，就能进行合理性检查和小规模计算。

5.6 分块／编译型SPDP变体（与分离论文的兼容性）

固定变量集 $[N]$ 的一个分块划分 $B = (B_1、\ldots\ldots、B_r)$。分块SPDP 生成器族通过仅考虑其支撑按分块层级度量的导数和移位而得到。等价地，可通过仅保留相对于编译器所用分块结构B 而言可接受的行（以及在需要时仅保留可接受的列），从 $M_{\kappa,\,\ell}(p)$ 中构造一个子矩阵 $M^{B}_{\kappa,\,\ell}(p)$。分块 *SPDP* 秩 定义为

$$\Gamma^{B}_{\kappa,\ell}(p) \;:=\; \operatorname{rank}\big(M^{B}_{\kappa,\ell}(p)\big)\,.$$

命题 5.9（分块下的秩单调性）。对于任意多项式p 和任意分块划分 B,

$$\Gamma^{B}_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; \Gamma_{\kappa,\ell}(p).$$

证明。 由 6.1 可立即得出：$M^{B}_{\kappa,\,\ell}(p)$ 是 $M_{\kappa,\,\ell}(p)$ 的一个子矩阵。 □

对照表。 分块/编译后的 SPDP 对象（$M^{B}_{\kappa,\,\ell}$，$\Gamma^{B}_{\kappa,\,\ell}$）是 Edwards [2025] 的编译分离定理中所用的对象；针对 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}$ 给出的所有下界/上界，根据 5.9 均适用于 $\Gamma^{B}_{\kappa,\,\ell}$。

6 基础性质

引理 6.1（子矩阵单调性）。 设 M' 是通过删除 $M_{\kappa、\,\ell}$（p）的行和/或列得到的任意子矩阵。那么

$$\operatorname{rank}(M') \;\le\; \Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \operatorname{rank}(M_{\kappa,\ell}(p)).$$

证明。 记 $M := M_{\kappa,\,\ell}(p) \in \mathbb{F}^{m\times n}$。设 $I \subseteq [m]$ 为保留的行的集合， $J \subseteq [n]$ 为保留的列的集合，因此子矩阵 M' 正是将矩阵 $|I| \times |J|$ 限制在行 I 和列 J 上得到的矩阵。

将 M 视为线性映射

$$\phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m, \qquad \phi(x) = Mx.$$

设 ι: $\mathbb{F}^{|J|} \to \mathbb{F}^n$ 为坐标嵌入，将 $\mathbb{F}^{|J|}$ 嵌入为支撑在 J上的坐标子空间；设 π : $\mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^{|I|}$ 为投影到 I中坐标的坐标投影。那么，子矩阵 M' 表示复合线性映射

$$\phi' := \pi \circ \phi \circ \iota : \mathbb{F}^{|J|} \to \mathbb{F}^{|I|}.$$

事实上，对于 $y \in \mathbb{F}^{|J|}$，向量 $\iota(y) \in \mathbb{F}^n$ 是在 J之外均为零的全长向量，而 $\pi(M\iota(y))$ 恰好保留 I中的坐标，这正是乘以子矩阵 M'。

现在，$\mathrm{Im}(\phi') \subseteq \pi(\mathrm{Im}(\phi))$，因此

$$\dim(\mathrm{Im}(\phi')) \;\le\; \dim(\mathrm{Im}(\phi)).$$

但 $\dim(\mathrm{Im}(\phi')) = \mathrm{rank}(M')$，且 $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \mathrm{rank}(M) = \Gamma_{\kappa,\,\ell}(p)$，所以 $\mathrm{rank}(M') \le \Gamma_{\kappa,\,\ell}(p)$，如所述。 □

命题 6.2 (参数单调性)。 固定(κ, ℓ) ，并采用一个相容的环境约定（特别是，固定一个环境系数空间，并为每种参数选择固定一个单项式基）。

(i) (中的单调性***)*** 如果 $\ell' \ge \ell$，则

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; \Gamma_{\kappa,\ell'}(p).$$

(ii) (中的单调性 $\le \kappa$ 的变体***)*** 定义累积 ***SPDP*** 生成族

$$G_{\le\kappa,\ell}(p) \;:=\; \{\, m \cdot \partial^S p \;:\; S \subseteq [n],\; |S| \le \kappa,\; m \in \mathcal{M}_{\le \ell} \,\},$$

并令 $\Gamma_{\le\kappa,\ell}(p)$ 为对应 ***SPDP*** 矩阵的秩。那么若 $\kappa' \ge \kappa$，

$$\Gamma_{\le\kappa,\ell}(p) \;\le\; \Gamma_{\le\kappa',\ell}(p).$$

证明。 我们利用这样一个事实：在固定的环境约定下，SPDP 矩阵是一个系数矩阵，其行空间等于对应生成多项式的线性张成。

(i) 固定 κ，并令 $\ell' \geq \ell$。根据定义，

$$G_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \{\, m \cdot \partial^S p \;:\; S \subseteq [n],\; |S| = \kappa,\; m \in \mathcal{M}_{\leq \ell} \,\},$$

而

$$G_{\kappa,\ell'}(p) \;=\; \{\, m \cdot \partial^S p \;:\; S \subseteq [n],\; |S| = \kappa,\; m \in \mathcal{M}_{\leq \ell'} \,\}.$$

由于 $\ell' \geq \ell$，我们有 $\mathcal{M}_{\leq \ell} \subseteq \mathcal{M}_{\leq \ell'}$，因此

$$G_{\kappa,\ell}(p) \subseteq G_{\kappa,\ell'}(p).$$

在 $\mathbb{F}$ 上取线性张成，得到

$$\operatorname{span}\big(G_{\kappa,\ell}(p)\big) \subseteq \operatorname{span}\big(G_{\kappa,\ell'}(p)\big).$$

令 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 和 $M_{\kappa,\ell'}(p)$ 分别表示由这些生成元在各自环境空间中写成系数向量后形成的 SPDP 矩阵。根据构造，$M_{\kappa,\ell}(p)$ 的行空间同构于 $\operatorname{span}(G_{\kappa,\ell}(p))$，对于 (κ, ℓ') 也同样如此。因此

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \dim \operatorname{RowSpan}\big(M_{\kappa,\ell}(p)\big) \;\leq\; \dim \operatorname{RowSpan}\big(M_{\kappa,\ell'}(p)\big) \;=\; \Gamma_{\kappa,\ell'}(p),$$

如所述。

（ii）对于累积变体，如果 $\kappa' \geq \kappa$ 则

$$\{S \subseteq [n] : |S| \leq \kappa\} \subseteq \{S \subseteq [n] : |S| \leq \kappa'\}.$$

因此，$G_{\leq \kappa,\ \ell}(p)$ 中允许的每个生成元在 $G_{\leq \kappa',\ \ell}(p)$ 中同样被允许，即

$$G_{\leq \kappa,\ell}(p) \subseteq G_{\leq \kappa',\ell}(p).$$

与第（i）部分相同的张成空间论证可得

$$\Gamma_{\leq \kappa,\ell}(p) \;=\; \dim \operatorname{span}\big(G_{\leq \kappa,\ell}(p)\big) \;\leq\; \dim \operatorname{span}\big(G_{\leq \kappa',\ell}(p)\big) \;=\; \Gamma_{\leq \kappa',\ell}(p).$$

这证明了对于 $\leq \kappa$ 约定， κ 中的单调性。 □

命题 6.3（基不变性与置换不变性）。 固定（κ、 ℓ）以及具有典范基$B_{\kappa,\ \ell}$的环境系数空间 $W_{\kappa,\ \ell}$（p）。

(i)（基变换）将 $B_{\kappa,\,\ell}$ 替换为 $W_{\kappa,\,\ell}\,(p)$ 的任意其他一组基，不会改变 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}\,(p)$（因此也不会改变余维$_{\kappa,\,\ell}\,(p)$）。

(ii)（变量置换）若 π 是变量的一个置换，并且我们在相同的多线性/布尔约定下理解 $p\circ\pi$，则

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p\circ\pi)=\Gamma_{\kappa,\ell}(p),\qquad \operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p\circ\pi)=\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p).$$

证明。 在全文中，$M_{\kappa,\ell}(p)$ 表示 SPDP 系数矩阵，其行是生成元 $G_{\kappa,\ell}(p)$ 的系数向量，并以所选环境空间 $W_{\kappa,\ell}(p)$ 的基表示。回顾一下，$\Gamma_{\kappa,\ell}(p)$ 的秩为 $\operatorname{rank}(M_{\kappa,\ell}(p))$，而 $\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) = \dim(W_{\kappa,\ell}(p)) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p)$。

(i) 设 B 和 B' 是同一环境向量空间 $W := W_{\kappa,\ell}(p)$ 的两组基。设 $T : W \to W$ 是将 B'-坐标映射到 B-坐标的（唯一）坐标变换线性同构。具体而言，若向量 $v \in W$ 在基 B' 下的坐标列为 $[v]_{B'}$，则它在基 B 下的坐标列为

$$[v]_B \;=\; T\,[v]_{B'},$$

其中 $T \in \mathbb{F}^{N\times N}$ 可逆（$N =$维数为 W）。以基 B 构造 SPDP 矩阵 M，并以基 B' 构造 SPDP 矩阵 M'，使用相同的有序生成族（因此多项式各行相同，只是坐标列发生变化）。于是，每个行向量都按相同的可逆坐标变换进行变换，因此整个矩阵满足

$$M \;=\; M'\,T^{\top}.$$

（这里约定行是系数行 向量；如果将系数存储为列，则转置会消失。）由于 $T^{\top}$可逆，右乘 $T^{\top}$ 保持秩:

$$\operatorname{rank}(M) \;=\; \operatorname{rank}(M'T^{\top}) \;=\; \operatorname{rank}(M').$$

因此，$\Gamma_{\kappa,\,\ell}(p)$ 与 W的基的选择无关。最后，$\dim(W)$ 与基无关，因此 $\operatorname{codim}_{\kappa,\,\ell}(p) = \dim(W) - \Gamma_{\kappa,\,\ell}(p)$ 也具有不变性。

（ii）设 π 是变量的一个置换。考虑其在环境系数空间上诱导的线性映射

$$\Pi : W_{\kappa,\ell}(p) \to W_{\kappa,\ell}(p\circ\pi),\qquad \Pi(q) \;:=\; q\circ\pi.$$

在固定的环境约定下（采用相同的多线性/布尔嵌入以及定义 $W_{\kappa,\,\ell}(\cdot)$ 的相同次数截断），Π 是一个定义良好的线性同构：它置换规范单项式基中的单项式，因此在坐标上由一个置换矩阵表示。

接下来，我们比较生成族。对于任意满足 $|S| = \kappa$ 的 $S \subseteq [n]$，变量重标记的链式法则给出

$$\partial^S(p \circ \pi) \;=\; (\partial^{\pi(S)} p) \circ \pi,$$

再乘以单项式 m（按相同约定理解）可得

$$m \cdot \partial^S(p \circ \pi) \;=\; \big((m \circ \pi^{-1}) \cdot \partial^{\pi(S)} p\big) \circ \pi.$$

因此，当 S 遍历所有 κ 子集且 m 遍历 $\mathcal{M}_{\le \ell}$时，$p \circ \pi$ 的 SPDP 生成元集合正是 p 的 SPDP 生成元集合在 Π 下的像（指标重标记除外）：

$$G_{\kappa,\ell}(p \circ \pi) \;=\; \Pi\big(G_{\kappa,\ell}(p)\big).$$

在坐标表示中，这意味着 $p \circ \pi$ 的 SPDP 矩阵可由 p 的 SPDP 矩阵通过对行（重新排列生成元）和列（重新标记单项式基）应用置换矩阵得到。具体而言，存在置换矩阵 R 和 C，使得

$$M_{\kappa,\ell}(p \circ \pi) \;=\; R\, M_{\kappa,\ell}(p)\, C.$$

置换矩阵是可逆的，因此保持秩不变：

$$\begin{aligned}\Gamma_{\kappa,\ell}(p \circ \pi) &= \operatorname{rank}(M_{\kappa,\ell}(p \circ \pi)) = \operatorname{rank}(R\, M_{\kappa,\ell}(p)\, C) \\ &= \operatorname{rank}(M_{\kappa,\ell}(p)) = \Gamma_{\kappa,\ell}(p).\end{aligned}$$

最后，$\dim(W_{\kappa,\,\ell}(p\circ\pi)) = \dim(W_{\kappa,\,\ell}(p))$，因为 Π 是同构，因此余维保持不变：

$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p \circ \pi) &= \dim(W_{\kappa,\ell}(p \circ \pi)) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p \circ \pi) \\ &= \dim(W_{\kappa,\ell}(p)) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p) = \operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p).\end{aligned}$$

□

注记 6.4（关于一般仿射映射）。在多线性/布尔约定下，一般的仿射代换 $x \mapsto Ax + b$ 未必能保持多线性或布尔理想。因此，除非明确采用一个对该代换封闭的不同环境空间，否则我们只声称在变量置换（以及其他保持布尔结构的重命名，如有需要）下具有不变性。

7 多项式宽度蕴含多项式 SPDP 秩

本节给出本文的主要结构性上界：如果一个多项式具有局部（半径为 1）的描述，且其活跃接口宽度有界，那么它在对数参数下的 SPDP 秩具有多项式上界。基于宽度的方法借鉴了代数分支程序复杂度方面的思想 [Nisan，1991；Forbes 和 Shpilka，2013；Shpilka 和 Yehudayoff，2010]。

7.1 局部宽度计算模型（定义）

我们将宽度⇒秩上界所需的最小计算结构形式化。

与标准模型的关系（代数分支程序/有限状态局部宽度）。第 7 节中的局部宽度计算模型，可以看作在块局部表示上运行的有界宽度有限状态代数分支程序（ABP）：计算过程维护一组接口（类似寄存器的端口），并将其划分为大小为常数的块；每个接口都带有一个来自有限字母表的类型，每个基本步骤只更新一个常半径邻域。宽度 R是同时处于活动状态的接口的最大数量，与 ABP 宽度直接对应。

“确定性编译器”假设通过局部更新词存在合流终止重写系统来形式化（长度为 $q = O(1)$ 的范式）。特别地，在任何长度为κ 的窗口中，每个活动接口只贡献一个长度为 $O(1)$ 的范式，因此，该窗口可以用一个取值于常数字母表的直方图/轮廓概括（忽略接口重命名）；这正是轮廓压缩引理背后的机制，也由此得到与 κ无关的 $R^{O(1)}$ 轮廓计数。

最后，“对角基”假设是指，环境系数空间存在一个块可因子分解基，使得 (i) 每个常数大小的块都贡献一个常数维的局部因子空间，并且 (ii) 固定剖面的窗口张成一个多对数维子空间 V_h。这就是在计算具有局部性且基与分块结构对齐时，基于宽度的 ABP 分析中出现的熟悉的块/张量因子现象。

定义 7.1（接口、块和活动集合）。 计算维护一个由集合 $\mathcal{I}$ 索引的有限接口（端口）集合。接口被划分为块 $\mathcal{I} = \bigsqcup_{t=1}^{T} \mathcal{I}_t$。

在计算的每一步，接口的一个子集处于活动状态。宽度 为

$$R \;:=\; \max_{t} |\mathcal{L}_t|.$$

定义 7.2（半径-1 局部性）。 原语操作至多作用于$b = O(1)$个接口，且仅限于单个块内，或块的常数大小邻域内（具体由表示指定）。等价地，每个原语操作只会修改 $O(1)$个活动接口的局部状态。

定义 7.3（有限字母表与局部更新词）。 每个活动接口都携带一个取自有限字母表的局部类型/状态，字母表大小为 Σ $|\Sigma| = O(1)$。 κ 个导数步骤构成的窗口会在每个活动接口处诱导出一个词，该词由 Σ 组成，用于描述该接口所经历的局部类型更新序列。

定义 7.4（规范窗口与范式）。 若两个窗口仅在独立（支撑互不相交）步骤的交换上有所不同，则称它们等价。我们假设局部更新词具有合流终止重写系统，因此每个局部词都有唯一的范式，长度至多为$q = O(1)$。

定义 7.5（轮廓直方图）。 设 $\Sigma^{\le q} = \bigcup_{j=0}^{q} \Sigma^{j}$。规范窗口的<style id='6'>轮廓 是直方图 $h : \Sigma^{\le q} \to \mathbb{N}$，给出了局部范式等于每个 $\sigma \in \Sigma^{\le q}$ 的活动接口数量，因此 $\sum_{\sigma} h(\sigma) \le R$。

7.2 设置与假设

我们假设多项式 p 由一个局部基表示，在该基中，原始操作作用于常数大小邻域（半径为 1），且每个接口都携带一个来自有限字母表的局部类型。固定一个接口的分块划分（由编译／局部性结构诱导）。定量假设如下：

(A1) 半径-1 局部性。每个原语操作至多涉及 $b \in \mathbb{N}$ 个块接口，其中 $b = O(1)$ 仅取决于表示/编译方案。

(A2) 有限局部字母表。原语操作对单个接口的影响由局部类型 $\tau \in \Sigma$ 决定，其中 $|\Sigma| = S = O(1)$ 是一个绝对常数。

(A3) 宽度界。在每一步中，至多有 R 个接口处于活动状态，其中通常 $R = C(\log n)^c$，这里的常数 $C, c > 0$ 为绝对常数。

(A4) SPDP 参数。我们采用导数阶数 κ 和次数约束 ℓ，其中$\kappa, \ell = \Theta(\log n)$。

所有隐含常数仅取决于局部表示／编译方案，而不取决于 n, κ, ℓ。

7.3 规范窗口、范式与剖面

长度为 κ 的窗口是对 p 应用 κ 个连续方向导数步骤所形成的序列。我们通过以下方式转为规范代表元:

(C1) 不相交支撑上的交换性。若两个导数步骤作用于不相交的接口集合，则其顺序无关紧要；仅通过交换此类步骤而不同的窗口视为相同。

（C2）局部正规形。在固定接口处进行的局部类型更新生成一个有限幺半群（等价地说：存在一个有限的、长度递减的重写系统，且该系统具有合流性和终止性）。因此，每个局部更新词都有唯一的范式，其长度至多为 $q = O(1)$，且仅取决于该方案。

将长度至多为 q 的局部类型词集合定义为

$$\Sigma^{\le q} := \bigcup_{j=0}^{q} \Sigma^j, \qquad \text{and set} \qquad S' := |\Sigma^{\le q}| = O(1).$$

定义 7.6（接口匿名轮廓）。 规范窗口的剖面是直方图

$$h : \Sigma^{\le q} \to \mathbb{N}$$

对于每个局部类型词 $\sigma \in \Sigma^{\le q}$，统计其局部范式等于 σ 的活动接口数量。特别地，

$$\sum_{\sigma \in \Sigma^{\le q}} h(\sigma) \le R.$$

引理 7.7 (块内置换不变性**)**。 固定一个接口坐标的分块划分 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_m\}$。设 w和 w'是两个规范窗口，它们仅在接口标识的置换上有所不同，且置换发生在每个块内 （即存在作用于 B_j的置换 π_j，使得 $w' = (\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_m) \cdot w$） 。那么，由 w和 w'生成的 ***SPDP*** 行集合可通过可逆的分块结构基变换相互关联：存在可逆矩阵 $L(w \to w')$ 和$R($ $w \to w')$ （仅取决于块内置换），使得相应的窗口级 ***SPDP*** 矩阵满足

$$M(w') \;=\; L(w \to w')\, M(w)\, R(w \to w').$$

特别地，秩**(**$M(w')$**)** $=$ 秩**(**$M(w)$**)**，因此 w和 w'贡献相同的秩。因此，***SPDP*** 上界仅取决于轮廓直方图h ***(7.6)***。

证明。 我们明确说明这一标准事实：块内置换在以下两方面均充当（逐块的）坐标重标记：**(i)** 导数指标；**(ii)** 用于构造系数/求值向量的单项式/基指标。由于这些只是重标记，它们由置换矩阵表示，因此是可逆的，并且保持秩。

步骤 1：局部（单块）置换通过置换矩阵作用。 固定一个块 B_j。根据规范窗口表示的构造，块 B_j 对窗口级 SPDP 行向量的贡献由一个局部 张量/矩阵 T_j**(**w**)**计算得到；其行由局部导数选择（和/或局部特征行）索引，其列由局部环境基元素（局部单项式、局部求值坐标等）索引，并遵循 5.1 中确定的环境约定。

令 π_j 为 B_j 内接口标识的一个置换，并令 $w'_j = \pi_j \cdot w_j$ 为第 j 个局部字词/窗口所诱导的重新标记。由于 π_j 仅对 B_j 内的坐标重新标记，因此它会导出：

- 局部行指标（导数/求值指标）的一个置换，以及
- 局部列指标（局部基/单项式指标）的一个置换。

因此，存在置换矩阵 P_j 和 Q_j （仅取决于π_j），使得

$$T_j(w') \;=\; P_j\, T_j(w)\, Q_j. \tag{4}$$

置换矩阵可逆，因此 rank($T_j(w')$) =rank($T_j(w)$）。

步骤 2：全局窗口矩阵如何由局部部分组装而成。窗口级 SPDP 矩阵 $M(w)$ 由各块的局部部分 $\{T_j(w)\}_{j=1}^{m}$ 组合而成，采用与模型定义 (7.1) 相同的固定多线性组装规则：具体而言，这是一种分块张量积／按列克罗内克积（Khatri–Rao），之后还可能进行固定的行列选择，以满足全局（κ, ℓ）机制。

为使记号具体明确，将原始 组装矩阵写作

$$\widetilde{M}(w) \;:=\; T_1(w) \;\odot\; T_2(w) \;\odot\; \cdots \;\odot\; T_m(w),$$

其中 $\odot$ 是卡特里–劳积（按列克罗内克积），这是将块局部特征／求值张量组装成全局特征／求值张量，同时保留共享列索引（全局单项式／基索引是各局部索引的乘积）的标准方式。用于计算秩的实际$M(w)$可写作

$$M(w) \;=\; S_{\mathrm{row}}\, \widetilde{M}(w)\, S_{\mathrm{col}}, \tag{5}$$

对于固定的行／列选择（或限制）矩阵 S_{row}, S_{col}，它们仅取决于 (κ, ℓ) 和环境约定（而不取决于 w）。

步骤 3：置换作为可逆映射，可沿组装规则传递。在每个块中使用 (4) 以及基本的卡特里–劳恒等式：

$$(PA) \odot (RB) = (P \otimes R)\,(A \odot B), \tag{6}$$
$$(AQ) \odot (BQ) = (A \odot B)\,Q, \tag{7}$$

（当矩阵具有相同列数时均成立；在规范窗口构造中满足此条件），我们得到

$$\widetilde{M}(w') \;=\; \big(P_1 T_1(w) Q_1\big) \odot \cdots \odot \big(P_m T_m(w) Q_m\big) \;=\; \Big(\bigotimes_{j=1}^{m} P_j\Big)\, \widetilde{M}(w)\, Q,$$

其中 Q 是一个置换矩阵，用于实现共享列索引所诱导的重新标记（在最简单的常见情形下， $Q_1 = \cdots = Q_m =: Q$，此时 Q 恰好就是该公共置换；更一般地，可以得到

由局部重新标记确定的全局基索引的置换）。在所有情况下， Q 都是可逆的。

现在应用固定的选定操作（5）。由于选定操作与行列置换可交换，只需将置换限制到选定索引上，因此存在$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$（受限的）置换矩阵 P 和 Q ，使得

$$M(w') \;=\; \widehat{P}\, M(w)\, \widehat{Q}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$令 $L(w \to w'){:=} P$ ，并令 $R(w \to w'){:=} Q$ ，即可得到所声称的左/右可逆关系。因此

$$\operatorname{rank}(M(w')) = \operatorname{rank}(\widehat{P} M(w) \widehat{Q}) = \operatorname{rank}(M(w)).$$

步骤 4：仅依赖于轮廓直方图。根据 7.6，轮廓直方图 h 记录了每种局部轮廓类型由多少个块/窗口实现，而忽略块内接口标识的排列顺序。上述论证表明，任何具有相同块局部词多重集（等价地，具有相同直方图）的两个规范窗口，都会产生通过可逆的块结构行列变换相互关联的 SPDP 矩阵，因此具有相同的秩贡献。 consequently，对窗口进行聚合所得的任何秩上界都仅依赖于 h。

□

引理7.8 （常数局部变化预算）。 假设*(A1)*和*(C2)*成立。则存在一个常数 $q = O$（1），与 n、 κ、 ℓ无关，使得在任意规范窗口中，每个活动接口至多经历 q 次局部类型变化。

证明。 固定一个规范窗口 w 以及该窗口内的一个活跃接口坐标 i 。根据 (A1)（常半径局部性），接口 i 处局部类型的演化只受一个常数规模邻域 $N(i)$的影响（例如，固定交互半径内的所有接口坐标），其中

$$|N(i)| \le b = O(1).$$

令 Σ 表示局部类型/状态的有限集合（有限字母表），则 i 周围的局部配置空间为 $\Sigma^{N(i)}$，其大小为 $|\Sigma|^{|N(i)|} = O$（1）。

窗口内的每个基本局部更新步骤仅作用于该邻域，因此可以建模为一个函数

$$u : \Sigma^{N(i)} \to \Sigma^{N(i)}.$$

令 $\mathcal{U}$ 为所有此类可接受的局部更新生成元组成的（有限）集合。$\mathcal{U}$ 之所以有限，是因为邻域大小和字母表均为常数（因此只存在有限多个不同的局部映射）。令 $\mathcal{U}^*$ 为由 $\mathcal{U}$ 上的词构成的自由幺半群，令 $\langle\mathcal{U}\rangle$ 为它们在复合运算下生成的变换幺半群。

现在考虑扫描窗口 w 时应用于邻域 $N(i)$ 的局部更新序列。这会得到一个词

$$\mathbf{u}(w,i) = u_1 u_2 \cdots u_T \in \mathcal{U}^*,$$

其对局部配置的作用是复合映射

$$U(w,i) := u_T \circ \cdots \circ u_2 \circ u_1 \in \langle\mathcal{U}\rangle.$$

假设（C2）指出，局部更新幺半群具有规范范式 归约：存在一个固定的重写/归约过程 $\mathrm{nf}(\cdot)$ 作用于 $\mathcal{U}^*$，使得：

1. $\mathrm{nf}(\mathbf{u})$ 表示与$\mathbf{u}$相同的变换（即它们在生成的幺半群中相等），并且

2. 范式是唯一的，且其长度由某个常数界定：

$$|\mathrm{nf}(\mathbf{u})| \le q \qquad \text{for some } q = O(1) \text{ depending only on the local model.}$$

由于 w 是一个规范窗口，根据规范化步骤的定义/意图，其在每个活动接口处的局部更新描述已经归约为该范式。等价地，我们可以将 $\mathbf{u}(w,i)$ 替换为 $\mathrm{nf}(\mathbf{u}(w,i))$，而不改变所诱导的局部变换 $U(w,i)$。

因此，在规范窗口内对接口 i 实际起作用的局部更新生成元数量至多为

$$T_{\mathrm{eff}}(w,i) := |\mathrm{nf}(\mathbf{u}(w,i))| \le q.$$

每次应用这样的生成元，至多会在应用时改变接口 i 的局部类型一次（也可能保持不变），因此接口 i 在整个窗口内经历的局部类型变化次数有一个上界，即有效生成元应用的次数：

$$\#\{\text{type changes at } i \text{ within } w\} \;\le\; T_{\mathrm{eff}}(w,i) \;\le\; q.$$

最后，q 仅取决于常半径邻域以及 (C2) 中的有限局部重写/规范形式系统，因此与 n，κ，ℓ 无关。

□

引理 7.9 (轮廓压缩消除 κ-依赖)。 假设 *(A1)* 和 *(C2)* 成立。任取一个长度为 κ、具有 R 个活动接口的规范窗口。则存在一个常数 $q = O(1)$，与 n、κ、ℓ 无关，使得每个活动接口 i 都有一个规范的（规范形式）局部词 $\sigma_i \in \Sigma_{\le q}$，其长度至多为 q，其中

$$\Sigma_{\le q} := \bigcup_{t=0}^{q} \Sigma^t \qquad and \qquad S' := |\Sigma_{\le q}| = O(1).$$

因此，窗口的接口匿名剖面完全由直方图决定

$$h(\sigma) \;=\; \big|\{\, i \ live\ in\ the\ window : \sigma_i = \sigma \,\}\big| \qquad (\sigma \in \Sigma_{\le q}),$$

并且可实现的接口匿名剖面的数量满足

$$\#\text{Profiles} \;\le\; \binom{R + S' - 1}{S' - 1} \;=\; R^{O(1)},$$

这尤其表明该数量与 κ无关。

证明。 固定一个规范窗口 w 和一个活跃接口坐标 i。根据(A1)，只有一个常数规模邻域 $N(i)$（例如半径为1的邻域）能够影响 i处的演化。因此，窗口内 i处局部类型的演化可由一个有限集合上的局部更新生成元构成的词来描述，这些生成元作用于$N(i)$。

根据(C2)，局部更新幺半群存在唯一范式：每个这样的词都可化简为唯一的范式词，长度至多为 $q = O(1)$，其中 q 仅取决于局部模型（字母表和邻域大小），因此与 n, κ, ℓ无关。定义 σ_i 为该范式。这就证明了第一个结论。

现在定义轮廓直方图 h，方法是统计每个范式 $\sigma \in \Sigma_{\le q}$对应的活动接口数量。由于每个活动接口恰好贡献一个 σ_i，因此我们有 $\sum_\sigma h(\sigma) = R$。

根据 7.7（块内置换不变性），在块内置换接口标识会对相应的 SPDP 矩阵进行可逆的（块对角）行/列变换，因此不会改变秩贡献。因此，就 SPDP 上界而言，只有不区分接口的直方图 h 才重要。

最后，可能的直方图数量 h ：总量为 R 的 $\Sigma_{\le q} \to \mathbb{Z}_{\ge 0}$ ，等于将 R 分配到 S' 个箱中的弱组合数量，即$\binom{R+S'-1}{S'-1} = R^{O(1)}$。此上界不依赖于 κ。 □

推论 7.10 (多项式数量的剖面)。 在 *7.9* 的假设下，可实现的接口匿名轮廓集合 H 的基数为 $|H| \le R^{O(1)}$，且与 κ 无关。

证明。 由 7.9 立即得出。 □

引理 7.11 (常数类型剖面界)。 假设 *(A1)–(A3)* 和 *(C1)– (C2)* 成立。设 R 为一个规范窗口中的活动接口数量。那么，任意规范窗口可实现的不同接口匿名轮廓数量至多为

$$\#\text{Profiles} \;\le\; \binom{qR + S'}{S'} \;=\; R^{O(1)}, \qquad S' := |\Sigma_{\le q}| = O(1),$$

其中， $\Sigma_{\le q}$ 是长度至多为 q 的局部范式词集合，而$q = O(1)$ 是 *7.8* 中的常数。特别地，该界与 κ 无关。

证明。 固定一个恰有 R 个活动接口的规范窗口 w 。根据 (C1)，局部字母表/类型集 Σ是有限的。由 7.8 可知，在 (A1) 和 (C2) 的条件下，存在常数 $q = O(1)$，使得每个活动接口都存在长度至多为 q 的规范（范式）局部描述。等价地，对于窗口中的每个活动接口 i ，我们可以关联一个词

$$\sigma_i(w) \in \Sigma_{\le q}, \qquad \Sigma_{\le q} := \bigcup_{t=0}^{q} \Sigma^t,$$

其中， Σ^t 表示由 Σ中的元素组成的长度为 t 的单词。由于 $|\Sigma| = O(1)$和 $q = O(1)$，我们有

$$S' := |\Sigma_{\le q}| = \sum_{t=0}^{q} |\Sigma|^t = O(1),$$

与 n, κ, ℓ 无关。

作为直方图的轮廓。 将 w 的接口匿名轮廓（直方图）定义为计数向量

$$h_w : \Sigma_{\le q} \to \mathbb{Z}_{\ge 0}, \qquad h_w(\sigma) := \big|\{\, i \text{ live in } w : \sigma_i(w) = \sigma \,\}\big|.$$

根据构造,

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_{\le q}} h_w(\sigma) = R.$$

因此，不同的剖面恰好对应不同的非负整数向量 $(h(\sigma))_{\sigma \in \Sigma_{\le q}}$，其各坐标之和为 R。

计算可能直方图的数量。 S' 个变量的方程 $\sum_{\sigma \in \Sigma_{\le q}} h(\sigma) = R$ 的非负整数解的数量，等于将 R 分成 S' 部分的弱组合数；根据隔板法，该数量为

$$\#\text{Profiles} \le \binom{R + S' - 1}{S' - 1}.$$

由于 $S' = O(1)$ 是常数，因此这是关于 R 的多项式，即 $R^{O(1)}$。

与所示界相符。对于 $q \ge 1$ 和 $S' \ge 1$，我们有如下粗略不等式

$$\binom{R + S' - 1}{S' - 1} \le \binom{qR + S'}{S'},$$

因此，引理中给出的界便如所述成立。

对 SPDP 上界的意义。最后，7.7 表明，在块内置换（重命名）接口不会改变秩贡献：仅在此类重命名上存在差异的窗口会产生由可逆左乘/右乘相联系的 SPDP 矩阵，因此秩相同。因此，在 SPDP 上界论证中，可以忽略接口名称，只保留直方图 h_w，所以以上计数正是所需的计数。

与 κ 无关。 轮廓字母表 $\Sigma_{\le q}$ 和直方图计数仅取决于局部窗口／规范化假设 (A1)–(A3)、(C1)–(C2) 以及 R；它们不涉及导数阶数 κ。因此，轮廓计数界与 κ 无关。

□

7.4 单项式/坐标预算

引理 7.12 (单项式／坐标预算**)。** 假设 ***(A1)*** 和次数约束 $\ell = O(\log n)$成立。任取一个可容许的接口匿名剖面 ***(7.6)***。与该固定剖面相容、并对 ***SPDP*** 行有贡献的可容许单项式／坐标选择数量至多为 $n^{O(\log n)}$。

证明。 固定一个轮廓直方图 h，并考虑与 h兼容的 SPDP 行（生成元）族。每个 SPDP 行都对应于选择一个形如

$$g \;=\; m \cdot \partial^S p, \qquad |S| = \kappa, \quad \deg(m) \le \ell,$$

的生成元，并按照先前固定的环境约定进行解释。（轮廓约束可能会限制允许的选择；我们只需要一个上界，因此统计所有符合 (A1) 和次数约束的可能性。）

步骤 1：统计移位单项式的选择。 令 $\mathcal{M}_{\le \ell}$ 表示次数至多为 ℓ 的可行移位单项式集合（例如，布尔/多线性约定下的多线性单项式）。对于每个 $j \in \{0, 1, \dots, \ell\}$，次数恰为 j 的多线性单项式数量为 $\binom{n}{j}$，因此

$$|\mathcal{M}_{\le \ell}| \;=\; \sum_{j=0}^{\ell} \binom{n}{j} \;\le\; \sum_{j=0}^{\ell} n^j \;\le\; (\ell+1)\, n^{\ell}.$$

（在非多线性情形下，有 $|\mathcal{M}_{\le \ell}| = \binom{n+\ell}{\ell} \le (n+\ell)^{\ell}$，这会得到相同的 $n^{O(\ell)}$ 界。）

步骤 2：统计导数坐标选择。接下来，我们对 ∂^S 的可容许导数坐标选择数量进行上界估计。

一个带有 $|S| = \kappa$ 的 $S \subseteq [n]$ 选择，确定了对哪些变量求导。这类支撑的数量为

$$\binom{n}{\kappa} \;\le\; n^{\kappa}.$$

现在我们考虑这样一个事实：对于界面/窗口的 SPDP 构造，选定的导数支撑并不能唯一确定

相应的行：对于同一个全局变量选择，可能存在多个符合条件的局部导数坐标（例如，由于某个变量参与了一个常数规模邻域，且可能有有限个局部坐标标签）。

根据 (A1)（半径–1／常数半径局部性），每个导数坐标的支撑都包含在一个常数规模邻域内。在有限字母表／局部模型假设 (A1)（以及定义可容许性的固定方案）下，每个全局变量可用的不同局部导数坐标类型只有有限种，且其数量有一个常数上界

$$B \;=\; O(1),$$

该上界仅取决于局部邻域大小和局部坐标字母表（因此与 n, κ, ℓ 以及剖面无关）。

因此，对于固定支撑 S 及其 $|S| = \kappa$，实现相应导数行坐标的可容许方式数至多为 B^{κ}。于是，可容许的导数坐标选择总数至多为

$$\binom{n}{\kappa} B^{\kappa} \;\le\; (Bn)^{\kappa}.$$

步骤 3：合并各项界。 对于每个 SPDP 行，我们选择 (a) 一个移位单项式 $m \in \mathcal{M}_{\le \ell}$，以及 (b) 一个如上所述的可容许导数坐标选择。因此，对于固定剖面，可容许的单项式／坐标选择数至多为

$$|\mathcal{M}_{\le \ell}| \cdot \binom{n}{\kappa} B^{\kappa} \;\le\; (\ell+1)\, n^{\ell} \cdot (Bn)^{\kappa} \;=\; (\ell+1)\, B^{\kappa}\, n^{\kappa+\ell}.$$

在次数约束 $\ell = O(\log n)$ 和对数级 SPDP 区域（本节应用中为 $\kappa = O(\log n)$）下，这是

$$(\ell+1)\, B^{\kappa}\, n^{\kappa+\ell} \;=\; n^{O(\log n)}.$$

最后，施加一个固定轮廓 h 只会减少 可接受选择的数量，因此对每个固定轮廓，该界都一致成立。 □

7.5 计数 κ-步剖面和剖面子空间

以下两个引理对剖面分析进行了细化，从而得到更紧的渐近界。关键观察是，一个 a κ 步窗口剖面可以

分解为一系列 κ 单步转移，每个转移都取自一个大小受多对数函数界定的集合。

引理 7.13（计数 κ步剖面）。假设 *(A1)–(A3)* 和 *(C1)–(C2)* 成立，并附加以下明确的子假设：

（*A1′*）每步的接口交互有界： 每个单步计算至多影响 $b = O(1)$ 个活动接口，其中 b是一个与 n 和 R无关的常数。（当交互图中每个接口有 $O(1)$ 个邻居时，这由半径*-1* 局部性（*A1*）推出。）

令 κ 为导数阶数，并令 H 为可由规范窗口实现的接口匿名κ步剖面集合。则

$$|H| \;\le\; (\log n)^{O(\kappa)}.$$

证明。 一个规范的 κ步窗口可以视为由 κ 个单步转移组成的序列。在每一步 $t \in \{1, \dots, \kappa\}$ 中，计算作用于当前的活动接口配置，并产生一个新的配置。

步骤 1：单步轮廓转移。 根据 (A1)（半径-1 局部性）和 (A1′)，每一步至多影响 $b = O$个（1）活动接口。根据 (A2)（有限字母表），每个接口处的局部状态取自一个有限集合 Σ，其大小为$|\Sigma| = O(1)$。根据 (A3)（宽度界），任意时刻至多有 $R = C(\log n)^{c}$ 个接口处于活动状态。

对于单个步骤，接口匿名轮廓转移由以下因素确定：

- 哪些活动接口子集受到影响（根据 (A1′)，每个步骤至多有 $b = O(1)$ 个）；
- 这些接口上的局部类型变化（根据 (A2)，可能性有限）。

由于从 R 个活动接口中选择 $\le b$ 个接口并分配局部转移的方式不超过 $\binom{R}{b} \cdot |\Sigma|^{O(1)} \le R^{O(1)}$，因此不同的单步轮廓转移数量至多为

$$T_{\text{step}} \;\le\; R^{O(1)} \;=\; (\log n)^{O(1)}.$$

步骤 2：计数 κ步轮廓序列。一个 κ 步轮廓由一系列 κ 个单步轮廓转移决定。此类序列的总数至多为

$$(T_{\mathrm{step}})^{\kappa} \;\le\; \big((\log n)^{O(1)}\big)^{\kappa} \;=\; (\log n)^{O(\kappa)}.$$

步骤 3： $\kappa = \Theta$（对数 n）下的渐近转换。当 $\kappa = \Theta$（对数 n）时，我们有

$$\begin{aligned}(\log n)^{O(\kappa)} \;&=\; (\log n)^{O(\log n)} \;=\; e^{O((\log n)(\log\log n))} \\ &=\; n^{O(\log\log n)} \;=\; 2^{O((\log n)(\log\log n))}.\end{aligned}$$

该上界是 **超多项式**（因此不是 $n^{O(1)}$），但在 n中仍是**准多项式/次指数**的。 □

注 7.14。 7.13 提供的上界比 7.9 更粗略：它统计的是有序的 步序列，而不是直方图轮廓，因此得到 $(\log\ n)^{O(\kappa)} = n^{O(\log\log n)}$，而不是 $R^{O(1)} = (\log n)^{O(1)} = n^{o(1)}$。对于主要的 Width⇒Rank 定理，使用更精确的轮廓压缩界；该界对于获得多项式上界至关重要。

引理 7.15 （轮廓子空间维数）。 假设满足 *(A1)–(A3)* 和 *(C1)–(C2)*，并具有局部宽度模型的确定性编译器/对角基结构。固定一个接口匿名轮廓 $h \in H$。令 V_h 为环境系数空间中由具有轮廓 h 的窗口所生成的所有 *SPDP* 行张成的子空间。那么

$$\dim V_h \;\le\; (\log n)^{O(1)}.$$

证明。 固定一个剖面 h。根据 7.7，所有实现剖面 h 的窗口之间仅相差接口标识在块内的置换，而这些置换在 SPDP 子矩阵上作用为可逆的行列变换。因此，行空间 V_h 由一个实现 h 的代表窗口确定（在同构意义下）。

步骤 1：块局部基结构。 在确定性编译器/对角基假设下，固定剖面 h的 SPDP 行向量由块局部系数向量组装而成。每个块 B_j 贡献的局部因子空间维数至多为 $|B_j|^{O(1)} = O$(1)（因为根据 (A1)，块的大小为常数）。

步骤 2：统计活跃块。 任意时刻，最多有 $R = C(\log n)^c$个接口处于活动状态（根据 (A3)），因此至多有 R 个块能对 SPDP 行结构作出非平凡贡献。其余块贡献恒等因子/平凡因子。

步骤 3：轮廓子空间的张量结构。子空间 V_h包含于至多 R 个非平凡块局部因子空间的张量积中，且每个因子空间的维数都是常数。然而，轮廓约束 h 要求块局部因子与直方图 h保持一致，而该直方图按照局部轮廓类型对块进行分组。

对于每种局部轮廓类型 $\sigma \in \Sigma_{\le q}$，令 $n_\sigma := h(\sigma)$ 表示类型为 σ 的块数。所有类型为 σ 的块所作出的贡献张成一个对称／直方图不变子空间，其维数至多为 $\binom{n_\sigma + d_\sigma - 1}{d_\sigma - 1}$，其中 $d_\sigma = O(1)$ 是局部因子维数。由于 $\sum_\sigma n_\sigma \le R$，且共有 $|\Sigma_{\le q}| = O(1)$ 种类型，总维数可由至多 $O(1)$ 个项的乘积界定，每一项都是关于 R 的多项式：

$$\dim V_h \;\le\; \prod_{\sigma} \binom{n_\sigma + O(1)}{O(1)} \;\le\; R^{O(1)} \;=\; (\log n)^{O(1)}.$$

□

7.6 主定理：多项式宽度⇒秩下界

定理 7.16 (宽度⇒秩：多项式界)。 假设 *(A1)–(A4)* 和 *(C1)–(C2)* 成立，并且满足确定性编译器/对角基结构。设 p是一个由局部宽度模型计算的多项式，其宽度为$R = C(\log\, n)^c$。那么对于 $\kappa, \ell = \Theta(\log\, n)$，

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; n^{O(1)}.$$

证明。 固定 $\kappa, \ell = \Theta(\log\, n)$ 和宽度参数 $R = C(\log\, n)^c$。令 W为在此情形下对 SPDP 矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 贡献行的规范窗口集合（在 (C1)–(C2) 条件下）。每个窗口 $w \in W$ 都会导出一个轮廓直方图 $h(w)$ (7.6)。令

$$H \;:=\; \{\, h(w) : w \in W \,\}$$

为所有可实现的接口匿名剖面所构成的集合。

步骤 1：界定剖面的数量。根据 7.9（等价地，根据 7.10），

$$|H| \;\le\; R^{O(1)}.$$

由于 $R = C(\log\, n)^c$，因此可得 $|H| \le (\log n)^{O(1)} \le n^{O(1)}$。

步骤 2：按剖面类别分解 SPDP 矩阵。对全局SPDP矩阵 $M_{\kappa,\ell}(p)$ 的行重新排序，将来自剖面相同的窗口的行归在一起。这就得到一个纵向拼接

$$M_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \begin{bmatrix} M^{(h_1)} \\ \hline M^{(h_2)} \\ \hline \vdots \\ \hline M^{(h_{|H|})} \end{bmatrix},$$

其中，每个块 $M^{(h)}$ 恰好由剖面为 h的窗口所生成的 SPDP 行组成。

对于列数相同的任意矩阵 A, B，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \;\le\; \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B),$$

因为 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的行空间包含于 RowSpan(A) + RowSpan(B)，因此其维数至多为各维数之和。对分块分解反复应用此不等式，可得

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;=\; \operatorname{rank}(M_{\kappa,\ell}(p)) \;\le\; \sum_{h\in H} \operatorname{rank}(M^{(h)}). \tag{8}$$

步骤 3：通过子空间维数界定固定剖面的秩贡献。固定 $h \in H$。令 V_h 为环境系数空间中由剖面为 h的窗口所生成的所有 SPDP 行张成的子空间。那么 rank($M^{(h)}$) = dim V_h。

根据 7.15，在确定性编译器/对角基假设下，每个剖面子空间的维数为

$$\dim V_h \;\le\; (\log n)^{O(1)}.$$

步骤 4：合并界。将 (8) 与轮廓计数和子空间维数的界相结合，可得

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; \sum_{h\in H} \dim V_h \;\le\; |H| \cdot (\log n)^{O(1)} \;\le\; R^{O(1)} \cdot (\log n)^{O(1)}.$$

由于 $R = C(\log n)^c$，这就得到了

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; (\log n)^{O(1)} \cdot (\log n)^{O(1)} \;=\; (\log n)^{O(1)} \;=\; n^{O(1)},$$

如所声称的。 □

注7.17。关键要点如下：

(i) 7.9 和 7.10 表明，接口匿名剖面的数量为 $R^{O(1)}$，且与 κ无关；这是通过利用规范窗口的范式压缩得到的；

(ii) 7.15 表明，在编译器/对角基结构下，每个轮廓子空间的维数都是多对数级的 $(\log n)^{O(1)}$；

(iii) 7.7 确保轮廓内置换不会增大秩。

这种组合得出 $n^{O(1)}$ 界，严格强于仅凭粗略的单项式计数所能得到的朴素 $n^{O(\log n)}$ 界。

推论 7.18 (固定 ℓ：多项式秩)。 假设 *(A1)–(A3)*、*(C1)–(C2)*，以及确定性编译器/对角基结构。令 $\kappa = \Theta(\log n)$、$R = C(\log\, n)^c$ 和 $\ell = O(1)$ 为固定值（例如 $\ell \in \{2, 3\}$）。那么

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; n^{O(1)}.$$

证明。 由 7.10 可知，接口匿名剖面的数量满足 $|H| \le R^{O(1)}$，且与 κ 无关。由 7.15 可知，每个轮廓子空间的维数为 $V_h \le (\log\, n)^{O(1)}$。因此

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; |H| \cdot \dim V_h \;\le\; R^{O(1)} \cdot (\log n)^{O(1)}.$$

由于 $R = C(\log n)^c$，可得

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; (\log n)^{O(1)} \;=\; n^{O(1)}.$$

注意，固定 $\ell = O(1)$ 并不会改善轮廓计数 $|H|$，而它是主导因素；固定 ℓ 带来的改进只影响单项式选择的贡献，而这已被轮廓子空间维数下界所涵盖。 □

备注 7.19。 7.18 是分离论证中使用的情形：固定 $\ell \in \{2,3\}$，同时取 $\kappa = \Theta(\log n)$，即可得到宽度有界计算的多项式 SPDP 秩。这严格强于不使用轮廓压缩（7.9）时得到的朴素 $n^{O(\log n)}$下界，并且可以与永久式等显式困难多项式的指数下界进行比较。

8 一个标准的上界模板

本节记录一种实践中使用的通用 SPDP 秩上界形式。要证明相对于电路类 $\mathcal{C}$ 的下界，通常需要证明：(i) 对于在 $\mathcal{C}$ 中计算的所有 p，$\Gamma_{\kappa,\ell}(p)$ 的上界；以及 (ii) 对于一个显式的困难族 $p^\star$，$\Gamma_{\kappa,\ell}(p^\star)$ 的下界；二者都取相同的 (κ, ℓ)。

注 8.1（模板：结构化计算具有有界的 SPDP 秩）。设 $\mathcal{C}$ 是一个多项式计算类（例如公式、有界深度电路或语法受限算术模型）。如果在 $\mathcal{C}$ 中计算的每个 p 都满足如下形式的上界

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; U_{\mathcal{C}}(n, d, s; \kappa, \ell),$$

其中 n 是变量数，d 是语法次数，s 是电路/公式规模参数，那么在 $\mathcal{C}$ 上，SPDP 秩统一受同一个函数 $U_{\mathcal{C}}$ 上界所限。

在具体情形中，当 $\kappa = \Theta(\log n)$ 时，$U_{\mathcal{C}}$ 通常是多项式级的；对于限制更严格的模型，它会小得多。可以针对选定的模型给出具体实例化或证明，也可以将此作为形式化模板，并把特定模型的上界放到附录中。

推论 8.2（上界的余维形式）。 在相同假设和固定环境基下，

$$\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) \;\ge\; N_{\kappa,\ell}(p) - U_{\mathcal{C}}(n, d, s; \kappa, \ell).$$

证明。 根据定义，$\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) = N_{\kappa,\ell}(p) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p)$，其中 $N_{\kappa,\ell}(p)$ 是环境维数。如果 $\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \le U_{\mathcal{C}}(n,\ d,\ s;\ \kappa,\ \ell)$，那么

$$\operatorname{codim}_{\kappa,\ell}(p) = N_{\kappa,\ell}(p) - \Gamma_{\kappa,\ell}(p) \ge N_{\kappa,\ell}(p) - U_{\mathcal{C}}(n, d, s; \kappa, \ell).$$

□

8.1 电路上界

作为 8.1 的一个具体实例，我们给出一般算术电路的 SPDP 秩上界。

引理 8.3（电路上界）。如果 f 由大小为 s的算术电路计算，则

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(\tilde{f}) \;\le\; s^{O(\kappa)} \cdot \binom{n+\ell}{\ell}.$$

证明。证明通过对电路结构进行归纳来完成。电路中的每个门g 都计算一个多项式 p_g。我们追踪组合各个门时 SPDP 空间如何增长。

对于计算 x_i的输入门，我们有 $\partial^\alpha x_i = 0$ （其中 $|\alpha| > 1$），因此对 SPDP 空间的贡献为 $O(\binom{n+\ell}{\ell})$。

对于计算 $p+q$的加法门，我们有 $\mathcal{V}_{\kappa,\,\ell}(p+q) \subseteq \mathcal{V}_{\kappa,\,\ell}(p) + \mathcal{V}_{\kappa,\,\ell}(q)$，因此秩至多翻倍。

对于计算 $p \cdot q$的乘法门，乘积法则给出 $\partial^\alpha(pq) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta p \cdot \partial^{\alpha-\beta} q$。每一项 $m \cdot \partial^\alpha(pq)$ 至多展开为 2^κ 个由 p 和 q的平移导数组成的乘积。具体而言，对于 $|\alpha| = \kappa$，有 $\binom{\kappa}{|\beta|}$ 种拆分导数阶数的方式；每个平移导数都属于相应的 SPDP 空间，而两个空间中的多项式相乘后，维数至多为两者维数的乘积。对所有 $\le 2^\kappa$ 种拆分求和后，每个门带来的秩贡献增长因子为 $O(1)^\kappa$。（这种归纳式记账方法是 SPD 分析中的标准做法；参见 Nisan 和 Wigderson [1997], 、Shpilka 和 Yehudayoff [2010]。）

对至多 s 个门求和，总秩至多为 $s^{O(\kappa)} \cdot \binom{n+\ell}{\ell}$。

□

推论 8.4（对数参数）。对于 κ, $\ell = O(\log n)$ 且 $s = \mathrm{poly}(n)$:

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(\tilde{f}) \;\le\; n^{O(\log n)}.$$

证明。由 $s = n^{O(1)}$ 和 $\kappa = O(\log n)$，可得 $s^{O(\kappa)} = (n^{O(1)})^{O(\log n)} = n^{O(\log n)}$。类似地，当 $\ell = O(\log n)$ 时，$\binom{n+\ell}{\ell} \le (n+\ell)^\ell = n^{O(\log n)}$。因此$\Gamma_{\kappa,\,\ell}(\tilde{f}) \le n^{O(\log n)} \cdot n^{O(\log n)} = n^{O(\log n)}$。

□

推论 8.5（常数参数）。对于 $\kappa = O(1)$、$\ell = O(1)$以及 $s = \mathrm{poly}(n)$:

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(\tilde{f}) \;\le\; n^{O(1)}.$$

证明。设 κ，$\ell = O(1)$，则有 $s^{O(\kappa)} = s^{O(1)} = n^{O(1)}$ 和 $\binom{n+\ell}{\ell} \le n^{O(1)}$。因此 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}(\tilde{f}) \le n^{O(1)} \cdot n^{O(1)} = n^{O(1)}$。 □

9 说明性下界

以下是显式多项式中经典的大秩现象的一个例子。单独来看，这只是一个秩下界结论；若要将其转化为电路下界，就必须在相同参数下将其与该电路类的适当上界结合起来。

引理 9.1（永久式的高阶导数秩）。设 Perm_n表示变量 $\{x_{i,j}\}_{i,\,j\in[n]}$上的 $n \times n$ 永久式多项式：

$$\mathrm{Perm}_n(X) \;=\; \sum_{\pi\in S_n} \prod_{i=1}^{n} x_{i,\pi(i)}.$$

令 $\kappa = \lfloor n/2 \rfloor$，并设 $\ell = 0$。那么

$$\Gamma_{\kappa,0}(\mathrm{Perm}_n) \;\ge\; \binom{n}{\kappa}.$$

证明。对于 $\ell = 0$，SPDP 生成族就是 $\{\partial^S \mathrm{Perm}_n$ 的 κ 阶偏导数集合：$|S| = \kappa\}$，而 $\Gamma_{\kappa,\,0}(\mathrm{Perm}_n)$ 是系数矩阵的秩，该矩阵的各行是这些偏导数在次数为 $n - \kappa$ 的标准单项式基下的表示（按照固定的环境约定）。等价地，

$$\Gamma_{\kappa,0}(\mathrm{Perm}_n) \;=\; \dim \mathrm{span}\{\partial^S \mathrm{Perm}_n : |S| = \kappa\}.$$

因此，只需找出 κ 阶的 $\binom{n}{\kappa}$ 个线性无关偏导数。

步骤 1：选择一个结构化导数族。对于每个满足 $|R| = \kappa$ 的子集 $R \subseteq [n]$，定义阶数为 κ 的微分算子

$$\partial_R \;:=\; \prod_{i\in R} \frac{\partial}{\partial x_{i,i}}.$$

Let

$$p_R \;:=\; \partial_R \,\mathrm{Perm}_n\,.$$

W我们将证明族 $\{p_R :\;\; R \subseteq [n],\;\; |R| = \kappa\}$ 线性无关。

步骤 2：将 p_R 明确地计算为子永久式。展开 Perm_n 并逐项求导，

$$p_R \;=\; \partial_R\left(\sum_{\pi\in S_n}\prod_{i=1}^{n} x_{i,\pi(i)}\right) \;=\; \sum_{\pi\in S_n}\partial_R\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i,\pi(i)}\right).$$

固定一个置换 π。单项式 $\prod_{i=1}^{n} x_{i,\,\pi(i)}$ 含有变量 $x_{i,\,i}$，当且仅当 $\pi(i) = i$。因此：

- 如果存在 $i \in R$ 满足 $\pi(i) \neq i$，那么 ∂_R 会消去该单项式；
- 如果对所有 $i \in R$ 都有 $\pi(i) = i$，那么求导会恰好移除因子 $x_{i,\,i}$（对于 $i \in R$），并留下 $\prod_{i\notin R} x_{i,\,\pi(i)}$。

因此

$$p_R \;=\; \sum_{\pi\in S_n:\ \pi(i)=i\ \forall i\in R}\ \prod_{i\notin R} x_{i,\pi(i)}.$$

但是，固定每个 $i \in R$ 的置换 $\pi \in S_n$ 与补集 $[n]\setminus R$ 上的置换一一对应：将 π 限制到 $[n]\setminus R$ 后，得到 $S_{[n]\setminus R}$ 的一个元素；反过来，$[n]\setminus R$ 上的任意置换都能唯一地扩展为逐点固定 R 的置换。因此，

$$p_R \;=\; \sum_{\sigma\in S_{[n]\setminus R}}\ \prod_{i\notin R} x_{i,\sigma(i)},$$

这恰好是将行和列限制为由 $[n]\setminus R$ 索引后得到的 $(n-\kappa)\times(n-\kappa)$ 子矩阵的永久式：

$$p_R \;=\; \mathrm{Perm}\Big(X\big|_{([n]\setminus R)\times([n]\setminus R)}\Big).$$

步骤 3：在每个 p_R 中展示一个唯一的单项式。在补集上定义对角单项式：

$$m_R \;:=\; \prod_{i\notin R} x_{i,i}.$$

该单项式在 p_R 中的系数为 1（它对应于上述求和中的 $[n]\setminus R$ 上的恒等置换）。

现在令 $R' \neq R$ 为另一个 κ-子集。于是存在某个索引$i \in ([n] \setminus R) \cap R'$（因为补集不同）。在 $p_{R'}$中，每个单项式只使用来自 $[n] \setminus R'$ 中各行（以及 $[n] \setminus R'$中各列）的变量。由于$i \in R'$，变量 $x_{i,\,i}$ 不可能出现在 $p_{R'}$的任何单项式中。但 m_R包含因子 $x_{i,\,i}$，因此

$$m_R \text{ appears in } p_R, \quad \text{but } m_R \text{ does not appear in } p_{R'}.$$

因此，每个 p_R 都包含一个单项式 m_R，且该单项式在整个族中仅属于它。

步骤 4：得出线性无关性和秩下界。 假设我们有一个线性关系

$$\sum_{|R|=\kappa} \alpha_R \, p_R \;=\; 0.$$

对于固定的 R_0，考察单项式 m_{R_0} 的系数。根据步骤 3，m_{R_0} 只出现在 p_{R_0} 中，不出现在任何其他满足 $R \neq R_0$的 p_R 中。因此，左侧 m_{R_0} 的系数恰好是 α_{R_0}，所以 $\alpha_{R_0} = 0$。由于 R_0是任意的，所有 $\alpha_R = 0$都成立，这就证明了 $\binom{n}{\kappa}$ 多项式 $\{p_R\}$ 线性无关。

因此

$$\dim \operatorname{span}\{\partial^S \operatorname{Perm}_n : |S| = \kappa\} \;\geq\; \dim \operatorname{span}\{p_R : |R| = \kappa\} \;=\; \binom{n}{\kappa}.$$

因此 $\Gamma_{\kappa,\,0}(\mathrm{Perm}_n) \geq \binom{n}{\kappa}$，如所要求证。 □

备注 9.2。 这种类型的下界在偏导数文献中很常见：永久式的导数会显露出许多不同的子永久式。在应用中，人们会将这样的下界与同一（κ，ℓ）下受限 计算模型所对应的 SPDP 上界结合起来。

10 如何使用 SPD 秩和余维

对于目标电路类 $\mathcal{C}$ 和显式族 $p^\star$，SPDP 方法遵循一个三步模式：

（i）固定参数范围（κ，ℓ）以及嵌入/环境基约定。

（ii）证明对于所有 $p \in \mathcal{C}$，上界 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}(p) \le U_{\mathcal{C}}(\cdot)$。

(iii) 为显式族证明一个下界 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}(p^\star) \ge L(\cdot)$。

如果在相同情形下 $L(\cdot) > U_{\mathcal{C}}(\cdot)$，那么 $p^\star \notin \mathcal{C}$。余维给出了一个等价的对偶陈述，通常能更清晰地阐释刚性。

11 计算示例（toySPDPmatrix）

示例 11.1。设 $n = 3$ 和 $p(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 是 $\mathbb{F}$上的 $= x_1x_2 + x_2x_3$。取 $(\kappa,\ \ell) = (1,\ 1)$，并取次数为 $\le D = \deg(p) - \kappa + \ell = 2$ 的多线性环境基 $B_{1,\,1}$：

$$B_{1,1} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\}.$$

一阶导数为

$$\partial_{x_1}p = x_2, \quad \partial_{x_2}p = x_1 + x_3, \quad \partial_{x_3}p = x_2.$$

取移位单项式 $\mathcal{M}_{\le 1} = \{1, x_1, x_2, x_3\}$，生成元族 $\mathcal{G}_{1,\,1}(p)$ 包含（例如）$1 \cdot \partial_{x_1}p = x_2$ 和 $x_1 \cdot \partial_{x_1}p = x_1x_2$，类似地，$\partial_{x_2}p$，$\partial_{x_3}p$ 也包含相应项。在基 $B_{1,\,1}$下，将所有 $m \cdot \partial_{x_i}p$ 的系数行组成 SPDP 矩阵 $M_{1,\,1}(p)$，其秩等于 $\Gamma_{1,\,1}(p)$。

12 讨论与范围

SPDP 秩对应经典的 SPD 维数度量；SPDP 余维是对偶不变量，用于量化相对于环境空间的缺失量，通常能更清晰地体现刚性解释。对于未来的应用，人们通常会寻找满足 $\Gamma_{\kappa,\,\ell}$ 较大（或 $\mathrm{codim}_{\kappa,\,\ell}$较小或较大，具体取决于环境约定）的显式族，同时在相同 参数范围内为受限电路类建立上界。

局限性 本文不声称取得了任何重大分离结果，而是给出了一个独立度量定义、一种矩阵形式体系，以及一些基本性质和模板界，旨在为后续工作提供构建模块。

12.1 与分块SPDP/CEW框架的兼容性

本小节纯粹是为了提供一个对照表，将本文使用的非分块定义与其他地方使用的分块细化版本对应起来 [Edwards, 2025]。本文中的任何定理或证明都不依赖分块框架。

本文以“未分块”（全局）矩阵形式体系介绍 SPDP 秩和余维。相关工作（Edwards 2025）进一步固定了一个分块划分 B （半径为 1 的编译器分块），并将导数支撑集和基变换限制为仅在块内作用。我们记录其中的对照表，并说明基于宽度的上界之间的关系。

分块与未分块的 SPDP 矩阵 固定一个多项式 $p \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$，并将 $[n]$ 划分为大小为 $\leq b = O(1)$ 的块，记为 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$。对于一个多重指标 $\tau \in \mathbb{N}^n$，记其分块支撑集

$$\mathrm{supp}_{\mathcal{B}}(\tau) := \{\, j \in [m] : \exists i \in \beta_j \text{ with } \tau_i > 0 \,\}.$$

SPDP/CEW 手稿中使用的分块SPDP 矩阵 $M^{\mathcal{B}}_{\kappa,\,\ell}(p)$[（Edwards, 2025] ）由相同的生成元族 $\{u \cdot \partial^\tau p\}$ （其中$|\tau| = \kappa$，次数为 $u \leq \ell$）得到，但其行按照分块支撑条件进行索引和筛选，列则按照一个分块兼容的环境单项式集进行索引（例如，在所选嵌入约定下，次数为 $\leq \deg(p) - \kappa + \ell$ 的单项式）。等价地，$M^{\mathcal{B}}_{\kappa,\,\ell}(p)$ 是通过将行指标集限制为分块容许的导数支撑集，并采用分块兼容的列基选择得到的。

备注 12.1（秩比较）。对于任何固定的环境约定，$M^{\mathcal{B}}_{\kappa,\,\ell}(p)$ 是未分块 $M_{\kappa,\,\ell}(p)$ 的（行/列）子矩阵或结构化限制。因此

$$\Gamma^{\mathcal{B}}_{\kappa,\ell}(p) \;\leq\; \Gamma_{\kappa,\ell}(p).$$

反过来，将集合划分为单元素集合的平凡划分（$|\beta_j| = 1$），即可将未分块定义作为特例恢复出来。因此，这两种形式体系是兼容的；分块版本是一种结构化细化。

不变性：全局仿射映射与分块局部编译器映射这两种表述都采用相同的线性代数原理：在可逆左乘/右乘（基变换）下，秩保持不变。在 SPDP/CEW

框架中，允许的变换是分块局部的（例如 Π_+ 和逐块基变换），因此通过对行/列施加块对角可逆算子，不变性恰好成立。

注 12.2（关于布尔嵌入下“仿射不变性”的范围说明）。如果研究的是模去布尔理想 $\langle x_i^2 - x_i \rangle$后的多线性扩张，那么并非每个全局仿射映射 $x \mapsto Ax + b$ 都会保持嵌入约定。在这种情况下，不变性陈述应理解为适用于预期的变换类：分块局部编译器映射（包括 Π_+）、分块坐标置换，以及单项式基的分块变换。

在完整的多项式环 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 上（不取商），秩不变性始终适用于环境系数空间中单项式基的可逆线性变换（即用于表示多项式的坐标变换，而非多项式环中的变量代换）。如果进一步固定一个对该代换 $x \mapsto Ax + b$ 封闭的环境空间（例如取包含所有次数不超过足够大截断次数的单项式），则相应的 SPDP 矩阵通过可逆变换彼此关联，因而秩保持不变。

双宽度⇒秩的情形（一般情形与编译器对角化情形）这份独立说明证明了一个基于宽度的一般上界：在半径–1 局部性、有限字母表、宽度为 $R = C(\log n)^c$ 且参数为 $\kappa, \ell = \Theta(\log n)$ 的条件下，可通过（i）剖面计数和（ii）剖面子空间维数界，得到多项式上界 $\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \leq n^{O(1)}$ 。

SPDP/CEW 手稿 [Edwards, 2025]在确定性编译器、对角基情形中使用了相同的上界，依据以下结构引理：对于每个接口匿名轮廓 h，类型为 h 的所有 SPDP 行都属于行空间的一个多对数维子空间 V_h 。对 $(\log n)^{O(1)}$ 个可能的轮廓求和后，即使$\kappa, \ell = \Theta(\log n)$，也能得到多项式上界。

命题 12.3（逐剖面子空间压缩下的升级）。假设 (A1)–(A4) 成立，此外还假设存在可导出剖面子空间的确定性编译器/对角基结构：对于每个接口匿名轮廓h，都存在一个子空间 V_h，使得由剖面为 h 的窗口生成的所有 *SPDP* 行都属于 V_h，且维数$V_h \leq (\log n)^{O(1)}$。那么，对于 κ、$\ell = \Theta(\log n)$ 以及

$R = C(\log n)^c$,

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) \;\le\; \sum_h \dim V_h \;\le\; |H| \cdot (\log n)^{O(1)} \;=\; (\log n)^{O(1)} \;\le\; n^{O(1)}.$$

证明。 SPDP 行空间分解为 $\mathrm{RowSpan}(M_{\kappa,\ell}(p)) \subseteq \sum_{h\in H} V_h$，其中求和遍历所有可实现的接口匿名剖面 h。因此

$$\Gamma_{\kappa,\ell}(p) = \dim \mathrm{RowSpan}(M_{\kappa,\ell}(p)) \le \dim \sum_{h\in H} V_h \le \sum_{h\in H} \dim V_h.$$

根据假设，对每个 h，$\dim V_h \le (\log n)^{O(1)}$。在所述假设下，剖面的数量满足 $|H| \le (\log n)^{O(1)}$（这是确定性编译器模型中的多项式剖面情形，与一般 κ 步设定中的 $(\log n)^{O(\kappa)}$ 计数相对）。因此

$$\sum_{h\in H} \dim V_h \le |H| \cdot (\log n)^{O(1)} = (\log n)^{O(1)} \cdot (\log n)^{O(1)} = (\log n)^{O(1)} \le n^{O(1)}.$$

□

备注（单独的应用）。 在另一项工作（Edwards 2025）中，这个界被应用于编译设定，以在 P 侧获得 $\kappa, \ell = \Theta(\log n)$ 处的多项式 SPDP 秩。本文中的结果均不依赖该应用。

13 计算 sanity check

本节的结果不属于主要理论推导；它们提供了经验证据，支持关于 P 侧与 NP 侧 SPDP 秩表现之间预期的超多项式分离。

参考实现和经验验证代码可在 `https://github.com/darrenjedwards/spdp`获取。

13.1 与流水线对齐的完整性检查（端到端实现）

为验证我们的实证流程忠实地实现了全文使用的 SPDP 对象和坍缩测试，我们运行了一项端到端

与预期构造相对应的健全性测试套件：

电路 $\to$Tseitin合取范式 $\to$ 限制/剪枝 $\to$局部规范窗口$\to$ 剖面规范化 $\to p(x) \to$ 秩$M_{\kappa,\ \ell}(p)$。

SPDP 对象已实现。 SPDP 秩采用第 5 节的系数空间表述进行计算。在布尔/多线性设定中，我们使用无平方单项式和集合导数，具体做法与第 3.1 节完全相同。对于以标准环模式（多重指标导数）作为自然表示的控制族，我们也提供了该模式（如第 3.2 节所允许）。

规范窗口与轮廓压缩。 经过限制/剪枝后，我们提取一个围绕活动接口、大小为 $\kappa_{\mathrm{win}} = \Theta(\log n)$ 的局部规范窗口 （而不是对整个 CNF 排序）。接着，我们通过依据变量在窗口内的局部关联剖面 （一种有限签名，记录其在不同子句大小中的正/负出现情况）对变量进行等同，从而进行接口无关的规范化，得到 P 种不同剖面。这实现了宽度-秩衔接中使用的轮廓压缩机制，并避免因有序步骤序列计数而偏离到 $(\log n)^{O(\kappa)}$ 。

合理性检查准则。 对于每个族，我们报告：环境输入规模 n、所选窗口中的活跃变量数、规范化后的剖面数 P、计算得到的 SPDP 秩，以及该秩是否低于全文使用的坍缩阈值 $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 。 $-$

表1：管线完整性检查快照：经过限制/剪枝、局部加窗和剖面规范化后端到端的 SPD 秩，并与坍缩阈值 $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 进行比较。

电路/族	n	Live vars	剖面	SPDP rank	$\lceil\sqrt{n}\rceil$	通过?
RandDeg3（剖面压缩）	256	23	4	11	16	✓
RandDeg3（剖面压缩）	1024	29	5	16	32	✓
RandDeg3（剖面压缩）	2048	31	4	11	45	✓
Goldreich 类（剖面压缩）	1024	29	5	16	32	✓
对角（$\sum_i x_i^4$）	2048	49	49	49	45	×
置换$_{3\times3}$	9	9	9	55	3	×

观察到的定性模式。 1 展示了预期的坍缩与非坍缩行为：代表性的伪随机 CNF 族和结构化 CNF 族的 SPDP 秩都很小，远低于 $\lceil\sqrt{n}\rceil$；而代数刚性对照组（对角高次数和式以及 3×3 永久式）则不会坍缩。这表明代码路径实现了第 5 节定义的相同 SPDP 对象，并且端到端流程在受控设置下产生了预期模式。

14 结论

我们定义了 SPDP 空间和 SPDP 矩阵，并将 SPDP 秩和余维发展为对偶的复杂度不变量。我们证明了其基础性质（单调性、对称不变性和表示稳健性），并陈述了通用的电路上界模板及其余维重述。这确立了 SPDP 秩/余维作为一套协调统一、独立完整的复杂度度量工具包。

参考文献

Edwards, D. J.（2025）。迈向 $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$：通过 SPDP 秩与 N-Frame 内与 ZFC 等价的基础实现观察者理论上的分离

模型 . arXiv:2512 11820

. . Forbes, M. A. 和 Shpilka, A.（2013）。通过多项式恒等式测试实现同时共轭的显式诺特正规化。载于*APPROX-RANDOM*论文集，第527–542页。Gupta, A.、Kamath, P.、Kayal, N. 和 Saptharishi, R.（2016）。算术电路：深度三处的鸿沟。*SIAM*计算杂志，45：1064–1079。Kayal, N.（2012）。有界次数多项式幂和的指数级下界。电子计算复杂性讨论会，19：报告81。Kayal, N. 和 Saha, C.（2016）。底层小扇入深度三算术电路的下界。计算复杂性，25：419–454。Limaye, N.、Srinivasan, S. 和 Tavenas, S.（2024）。针对低深度代数电路的超多项式下界。*ACM*通讯，67：101–109。Nisan, N.（1991）。非交换计算的下界。载于*STOC*论文集，第410–418页。Nisan, N. 和 Wigderson, A.（1997）。通过偏导数得到算术电路的下界。计算复杂性，6：217–234。Shpilka, A. 和 Yehudayoff, A.（2010）。算术电路：近期成果综述与开放问题。理论计算机科学基础与趋势，5：207–388。