arXiv:2512.20740v1 [math.MG] 23 Dec 2025

简单图作为影响球图的 ℓ_1-嵌入问题的 NP-完全性

STANISLAV JABUKA

Abstract. 在图论中，一个有趣的问题是：对于固定选择的 $p \in [0,\infty]$，是否所有简单图都能在某个欧几里得空间中，关于 ℓ_p 度量表示为影响球图。对于 $p=\infty$，答案是肯定的；对于任意 $p \in (0,\ \infty)$，答案是否定的；而对于 $p=1$，答案尚不明确。本文的结果表明，在 $p=1$的情形下，这一嵌入性问题是一个（Promise）NP 完全问题。

1. Introduction

1.1. 背景。 设 $(M,\ d)$ 为一个度量空间，且 $X=\{X_1,\dots,X_n\}\subset M$为其有限子集。$X_i$的 影响半径 r_i为 $r_i=\min_{j\neq i} d(X_i,\ X_j)$，而 X_i的 影响球 为 $S_i=\{x\in M\,|\,d(X_i,\ x)\ <r_i\}$。该子集的 影响球图，简称 SIG，并由度量 d诱导，是一个顶点为 X_1，.....，X_n的图；其中两个顶点共享一条边，当且仅当 $d(X_i,\ X_j)\ <r_i+r_j$（或等价地说，当且仅当它们的影响球相互重叠）。SIG 理论中的一个核心问题是：任意简单图 G 是否都等距同构于 $(\mathbb{R}^m,\ d_p)$ 中的某个 SIG，其中维数 $m\geq 1$ 任意，且 d_p 为 ℓ_p-度量

$$d_p(x,y)=\begin{cases}\left(|x_1-y_1|^p+\cdots+|x_n-y_n|^p\right)^{1/p} & ;\quad p\in[1,\infty),\\ \max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\} & ;\quad p=\infty.\end{cases}$$

当 $p=\infty$ [5, 14]时，答案为“是”；当 $p\in(1,\ \infty)$ [12] 时，答案为“否”；当 $p=1$ 时，答案未知。我们证明，$p=1$ 的情形会导出一个（承诺）NP 完全问题，这进一步说明了该问题的困难性。

1.2. ℓ_1-嵌入性与割锥 CUT_n。 考虑一个有限度量空间 $(V_n,\ d)$，其中 $V_n=\{1,\dots,n\}$。V_n 的一个割是一个子集 $C\subset V_n$，我们将其视为把 V_n “切分”为互不相交的部分 $V_n=C\cup(V_n-C)$。割在 V_n 上定义了一种距离：由该割划分到同一子集中的两个元素（即 C 或 V_n-C）之间的距离为 0，而位于割的两侧的两个元素之间的距离为 1。这个简单的想法在 V_n 上定义了一个半度量δ_C，其形式为

$$\delta_C(i,j)=\begin{cases}1 & ;\quad |C\cap\{i,j\}|=1,\\ 0 & ;\quad |C\cap\{i,j\}|=0 \text{ or } 2.\end{cases}\tag{1}$$

2020 数学主题分类。05C12,68R10, 68R12.

我们称 δ_C 为对应于 C 的割度量。显然， $\delta_C = \delta_{V_n - C}$。令 CUT_n 表示割锥，其定义为

$$\mathrm{CUT}_n = \left\{ \sum_{C \subset V_n} w_C \, \delta_C \,\middle|\, w_C \geq 0 \right\}.$$

根据定义，度量 d on V_n 属于割锥，当且仅当它可以表示为具有非负系数的割度量的线性组合：

$$d = \sum_{C \subset V_n} w_C \cdot \delta_C, \quad w_C \geq 0 \text{ for all } C \subset V_n.$$

以下优美的定理在 [2] 中得到证明。

定理 1.1。 度量空间 (V_n, d) 等距于 $(\mathbb{R}^m, d_1)$ 的一个子空间，当且仅当 $d \in CUT_n$。

该定理将有限度量空间 (V_n, d) 到 $(\mathbb{R}^m, d_1)$ 的嵌入性问题，转化为判定 d 是否属于割锥 CUT_n 的问题。后者已知是 NP 完全判定问题：

定理 1.2 (Avis-Deza [3])。 判定度量 d 在 V_n 上是否属于割锥 CUT_n，是一个 ***NP*** 完全判定问题。

基于此，并借助承诺判定问题和多项式归约的概念，我们证明了本文的主要结果。

主定理。 判定一个简单图 G （其顶点为 $V_n = \{1, \ldots, n\}$）是否存在嵌入 $\varphi : V_n \to \mathbb{R}^m$ 使得相对于 ℓ_1-度量 d_1， $\mathbb{R}^m$ 上的 $\{\varphi(1) \ldots, \varphi(n)\}$ 的影响球图与 G 同构，是一个承诺 ***NP***-完全问题。

注 1.1。 承诺 ***NP*** 完全 问题这一概念是一个技术术语，将在第 2.2 节中解释。目前只需指出，每个承诺 NP 完全问题都能在多项式时间内归约到任意 NP 完全问题，因此这两类问题具有相同的计算复杂性。

2. Background on Computational Complexity

本节的阐述遵循计算复杂性理论的标准教材。对于判定问题/语言问题，我们参考了 [1, 11, 15, 16], ；对于承诺问题，我们则遵循 [8, 9]。

2.1. Promise 和判定问题。

按照计算复杂性理论中的惯例，我们用 $\Sigma = \{0, 1\}$ 表示“通用字母表”，用 $\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup (\cup_{n \geq 1} \Sigma^{\times n})$ 表示其克莱尼星，其中 ε 为空字。

一个承诺问题 B 是由两个不相交子集组成的对 B_{Yes}， $B_{\mathrm{No}} \subset \Sigma^*$，且 $B_{\mathrm{Yes}} \cup B_{\mathrm{No}} \neq \Sigma^*$可能成立。承诺的定义域，或简称承诺，记作 $\mathrm{Dom}(B)$，是 $\mathrm{Dom}(B) = B_{\mathrm{Yes}} \cup B_{\mathrm{No}}$。承诺问题是在 [6] 中为公钥密码学应用而引入的。此后，承诺问题受到了广泛关注，并在其他领域得到应用，参见例如 [9]。

一个判定问题 A 是满足 Dom(A) $= A_{\text{Yes}} \cup A_{\text{No}} = \Sigma^*$ 的承诺问题。判定问题也称为语言识别问题，其语言为L $L = A_{\text{Yes}}$，此时需要判定的是词 $x \in \Sigma^*$ 是否属于该语言 L。

我们假设读者熟悉确定性图灵机的概念，例如参见 [15, 第 2]章。

2.2. **P与NP，以及 Promise P与Promise NP**。根据 [9, 定义 2.4 和 2.5], ，我们作出如下定义。

定义2.1。设 A是一个判定问题。

(i) 如果存在一台确定性图灵机 M，使其在 Σ^* 上于多项式时间内停机，并且当且仅当 $x \in A_{\text{Yes}}$时接受$x \in \Sigma^*$，则称 A 具有多项式复杂度，或属于*P* 类。(ii) 如果存在一个多项式p 以及一个多项式时间算法 V，使得对于每个 $x \in A_{\text{Yes}}$，都存在一个长度至多为 $p(|x|)$ 且满足 $V(x,\ y) = 1$ 的$y \in \Sigma^*$，则称 A 是非确定性多项式时间的，或属于*NP* 类（这样的 y 称为 x的 NP 见证）。此外，对于每个 $x \in A_{\text{No}}$ 及任意 $y \in \Sigma^*$，都有 $V(x,\ y) = 0$（这表示没有见证 y 能够接受 A_{No}中的元素）。

承诺问题也可以定义类似的计算复杂性概念，参见 [9, 定义 2.31.]。

定义 2.2。 设 B 是一个承诺问题。

(i) 如果存在一个确定性图灵机 M，使其在 Σ^* 上针对任意 $x \in$ Dom(B) 都能在多项式时间内停机，并且当且仅当 $x \in B_{\text{Yes}}$时接受一个 $x \in$ Dom(B)，则称 B 具有承诺多项式复杂度，或属于*Promise P* 类。对于 M 在 Σ^* –Dom(B) 上的行为没有要求。(ii) 如果存在一个多项式 p 和一个多项式时间算法 V，使得对于每个$x \in B_{\text{Yes}}$，都存在一个长度至多为 $p(|x|)$ 的 $y \in \Sigma^*$，且满足 $V(x, y) = 1$，并且对于每个 $x \in A_{\text{No}}$ 和任意 $y \in \Sigma^*$，都有 $V(x, y) = 0$，则称 B 是承诺非确定性多项式时间，或属于*Promise NP* 类。对于算法 V 在满足 $x \notin$ Dom(B) 的 (x, y) 上如何运行，不作任何要求。

备注 2.1。 判定问题是承诺问题的特例，定义 2.1 和 2.2 是相容的，具体而言，如果将一个判定问题视为承诺问题，那么它属于 Promise P 类当且仅当它属于 P 类；对于 NP 也是如此。

2.3. **Karp 归约**。 就我们的目的而言，与更一般的 Cook 归约相比，采用更为专门的 Karp 归约足以满足需要，同时也更加简洁。Karp 归约由 Karp [13] 于 1972 年提出，旨在将各种各样的计算问题归约为语言识别问题。我们的定义将 [9, 2.11] 从判定问题扩展到了承诺问题。

定义2.3。考虑一对承诺问题

$$A:\ A_{\text{Yes}} \cup A_{\text{No}} \subset \Sigma^*, \qquad \text{and} \qquad B:\ B_{\text{Yes}} \cup B_{\text{No}} \subset \Sigma^*.$$

从 A 到 B 的保持承诺的 ***Karp*** 归约是一个函数 $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$，可在多项式时间内计算，满足：

(i) $f(\mathrm{Dom}(A)) \subset \mathrm{Dom}(B)$。（ii）

$x \in A_{\mathrm{Yes}}$ 当且仅当 $f(x) \in B_{\mathrm{Yes}}$。

如果存在这样的函数，我们记作

$$A \leq_p B,$$

下标“p”表示“多项式时间”。前述定义中的 (i) 和 (ii) 两点意味着，$x \in A_{\mathrm{No}}$ 当且仅当 $f(x) \in B_{\mathrm{No}}$。符号 $A \leq_p B$旨在表明，问题 B 至少与问题 A一样难（以多项式时间为限）。对于同一个确定性图灵机 M，可通过对任意 $x \in \mathrm{Dom}(A)$，将 M 应用于 $f(x)$，来接受或拒绝 $\mathrm{Dom}(B)$ 中的元素，并据此接受或拒绝 $\mathrm{Dom}(A)$ 中的元素。

由于这里将判定问题视为承诺问题的特殊情形，因此保持承诺的 Karp 归约概念同样适用于判定问题，而定义 2.3 中的条件 (i) 会自然成立。由于该条件正是保持承诺条件，我们在***Karp*** 归约用于判定问题的情形下简称其为 Karp 归约。

如果一个判定问题 B 满足***NP***-困难 的条件，即 $A \leq_p B$ 对任意 NP 问题 A都成立，那么它就称为 NP-困难；如果它同时属于 NP 且为 NP-困难，则称为***NP*** 完全。史上第一个 NP 完全问题是斯蒂芬·库克于 1971 年发现的可满足性问题 [4]（列昂尼德·列文于 1973 年在苏联独立发现了该问题）。迄今已知的 NP 完全问题已有数十种，例如参见 [7, 10]。

同样，如果一个承诺问题 B 满足承诺 ***NP***-困难 的条件，即 $A \leq_p B$ 对任意承诺 NP 问题 A都成立，那么它就称为承诺 NP-困难；如果它同时属于承诺 NP 且为承诺 NP-困难，则称为承诺 ***NP*** 完全 。

注 2.2。 仅从定义就显而易见，如果 A 和 B 是两个判定问题，其中 A 可通过 Karp 归约到 B，且 B 属于 P 类或 NP 类，那么 A也如此。同样，如果 A 和 B 是两个承诺问题，其中 A 可通过保持承诺的 Karp 归约到 B，且 B 属于承诺 P 或承诺 NP，那么A也如此。

3. Proof of the Main Theorem

固定 $n \geq 3$，令 $V_n = \{1, \ldots, n\}$，并令 CUT_n 为 V_n 上度量的割锥。考虑以下两个问题，我们都将其视为承诺问题，尽管第一个问题同时也是一个判定问题：

1. 问题 A：割锥成员资格判定问题。
选择 Σ^* 作为 V_n 上所有度量 d 的集合，并考虑满足 $A_{\mathrm{Yes}} = \{d \,|\, d \in CUT_n\}$、$A_{\mathrm{No}} = \{d \,|\, d \notin CUT_n\}$ 的判定问题 $A_{\mathrm{Yes}} \cup A_{\mathrm{No}} = \Sigma^*$。

2。问题 B：带 SIG 承诺的 Cut-Cone 成员资格问题 .
令 Σ^* 为所有形如 (G, d) 的对的集合，其中 G 是一个顶点为

V_n，并考虑承诺问题 $B_{\text{Yes}} \cup B_{\text{No}} \subset \Sigma^*$ 满足$B_{\text{Yes}} = \{d \mid d$是 V_n上的影响球图度量，其中 G，且 $d \in CUT_n\}$、$B_{\text{No}} = \{d \mid d$是 V_n上的影响球图度量，其中 G，且 $d \notin CUT_n\}$。

在这些问题中，第一个已知是 NP 完全 [3], ，根据注释 2.1，这意味着它也是承诺 NP 完全。接下来我们将证明，每个问题都可以在保持承诺的方式下，于多项式时间内 Karp 归约到另一个问题。

A$\leq_p$**B** 给定 $d \in A_{\text{Yes}}$，也就是说，给定一个度量 d，定义在 V_n 上且满足 $d \in CUT_n$，令 G_d 为与 d 相关联的影响球图。该图可以在关于 n 的多项式时间内计算出来，因为这需要求出 n 个影响半径 $r_i = \min_{j \neq i} d(i,\ j)$、$i = 1,\ \ldots\ldots,\ n$，然后计算 $\binom{n}{2}$ 个量 $r_i + r_j - d(i,\ j)$、$1 \leq i < j \leq n$（若其为正，则在 i 和 j之间连一条边，否则不连）。显然，d 是 G_d 的 SIG 度量，因此 $(G_d,\ d) \in B_{\text{Yes}}$。

同样，如果 $d \in A_{\text{No}}$，那么用与上文相同的 G_d，d 是 V_n 上针对 G_d 的 SIG 度量，但 $d \notin CUT_n$，因此 $(G_d,\ d) \in B_{\text{No}}$。

总之，函数 $d \mapsto (G_d,\ d)$ 是一个多项式时间、保持承诺的 Karp 归约，将问题 A 归约到问题 B。

B$\leq_p$**A** 如果 $(G,\ d) \in B_{\text{Yes}}$，那么 $d \in CUT_n$，因此 $d \in A_{\text{Yes}}$；而如果 $(G,\ d) \in B_{\text{No}}$，那么 $d \notin CUT_n$，因此 $d \in A_{\text{No}}$。遗忘函数 $(G,\ d) \to d$ 是一个多项式时间、保持承诺的 Karp 归约，将问题 B 归约到问题 A。至此，主定理得证。

References

[1] Sanjeev Arora 和 Boaz Barak。《计算复杂性》。剑桥大学出版社，剑桥，2009 年。现代方法。[2] Patrice Assouad。《ℓ 等距嵌入：分析方面》。载于《分析入门研讨会：G. Choquet-M. Rogalski-J. Saint-Raymond，第 19 年：1979/1980》，第 41 卷《巴黎第六大学皮埃尔与玛丽·居里数学出版物》，第 14 号报告，23 页。巴黎第六大学，巴黎，1980 年。[3] David Avis 和 Michel Deza。割锥、嵌入性、复杂性与多商品流。《Networks》，21(6):595–617，1991 年。[4] Stephen A. Cook。定理证明过程的复杂性（1971）。载于《创造未来的思想——计算机科学经典论文》，第 333–338 页。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2021 年。转载自《计算理论研讨会（STOC）》（1971），ACM，纽约州纽约，151–158 页。[5] Michel Marie Deza 和 Monique Laurent。《割与度量的几何》，《算法与组合》第 15 卷。施普林格，海德堡，2010 年。1997 年原版的首个平装本印次[MR1460488]。[6] Shimon Even、Alan L. Selman 和 Yacov Yacobi。承诺问题的复杂性及其在公钥密码学中的应用。《Inform. and Control》，61(2):159–173，1984 年。[7] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与不可处理性》。数学科学丛书。W. H. Freeman and Co.，加利福尼亚州旧金山，1979 年。NP 完全性理论指南。[8] Oded Goldreich。论承诺问题：综述。载于《理论计算机科学》，第 3895 卷《计算机科学讲义》，第 254–290 页。施普林格，柏林，2006 年。[9] Oded Goldreich。《计算复杂性》。剑桥大学出版社，剑桥，2008 年。概念性视角。

[10] Oded Goldreich。《P、NP 与 NP 完全性》。剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。计算复杂性的基础。[11] Lane A.Hemasandra 和 Mitsunori Ogihara。《复杂性理论伴侣》。理论计算机科学丛书：EATCS 系列。施普林格出版社，柏林，2002 年。[12] Stanislav Jabuka 和 Ehsan Mirbagheri。有限度量空间的 ℓ 嵌入及影响球图。《arXiv.2512.18975》，2025 年。[13]Richard Karp。组合问题之间的可约性（1972）。载于《创造未来的思想——计算机科学经典论文》，第 349–356 页。麻省理工学院出版社，马萨诸塞州剑桥，2021 年。转载自 [0378476]。[14] T. S. Michael 和 Thomas Quint。影响球图与 ℓ 度量。《Discrete Appl. Math.》，127(3):447–460，2003 年。[15]Christos H. Papadimitriou。《计算复杂性》。艾迪生-韦斯利出版公司，马萨诸塞州雷丁，1994 年。[16] Michael Sipser。《计算理论导论》。圣智学习，2012 年。电子邮箱：jabuka@unr.edu

Department of Mathematics and Statistics, University of Nevada, Reno NV 89557,USA.