arXiv:2512.20764v1 [math.RA] 23 Dec 2025

通过 Foxby 等价诱导对偶对的 Gorenstein性

VÍCTOR BECERRIL 和 MARCO A. PÉREZ

摘要。我们在 Foxby 等价下定义并研究诱导对偶对。给定一个半对偶化 $(S,\ R)$-双模 ${}_SC_R$，如果

$$(\mathcal{A}_C(R),\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))\quad\text{and}\quad(\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}),\mathcal{B}_C(S))$$

表示由相应的 Auslander 模类和 Bass 模类构成的对偶对，并且 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 是 R 上的一个对偶对，我们研究由受限 Foxby 等价的本质像构成的对偶对

$$(C\otimes_R\sim)|_{\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}}\quad\text{and}\quad\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)|_{\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N}},$$

记为 $\mathcal{M}^C(S)$ 和 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。我们考察对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 的哪些附加性质会传递到 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$。我们还研究相对于对 $(\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M},\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的若干版本的 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模。例如，我们探讨这些模类在 Foxby 等价和 Pontryagin 对偶下的关系。

目录

引言 1
1. 预备知识 3 2. 诱导对偶对 7 3. 由诱导对偶对导出的戈伦斯坦平坦模与戈伦斯坦内射模 12 资助 27 参考文献 27

引言

对偶对由 Holm 和 Jørgensen 于 2009年在 [16]中引入。在某些条件下，这些对偶对可为构成这些对偶对的类提供左、右逼近。例如，设环 R （含幺结合环）上的一个对偶对为 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$，且 $\mathcal{M}$ 对（余）积封闭，则每个（左） R-模都有一个 $\mathcal{M}$-预包络（或 $\mathcal{M}$-覆盖）。因此，对偶对在相对同调代数中十分重要。另一方面，本文讨论的对偶对的主要例子，是由与半对偶化 (S,R)-双模相关的 Auslander 模类和 Bass 模类构成的对偶对。

2020 数学学科分类。主要分类 18G25。次要分类18G10、18G20、16E10。关键词：对偶对、Foxby 等价、半对偶化双模、Auslander 模、Bass 模、相对 Gorenstein 平坦模、相对 Gorenstein 内射模。

${}_SC_R$。这些模由 Foxby 于 1973 年引入 [12]。若 $\mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{B}_C(S)$ 分别表示 R 和 S 上的 Auslander 模类与 Bass 模类，则存在一个范畴等价，称为第一个 Foxby 等价，由函子 $C\otimes_R \sim\colon \mathcal{A}_C(R) \to \mathcal{B}_C(S)$ 给出，其拟逆为 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$。类似地，还有第二个 Foxby 等价 $-\otimes_S C\colon \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$，其拟逆为 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)$。除了这些等价之外，Auslander 模与 Bass 模之间还有另一种关系，即 Pontryagin 对偶。具体而言，Huang 最近证明 [20]，$(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 和 $(\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})\ \mathcal{B}_C(S))$ 分别是 R 和 S^{op} 上的完备对偶对。

本文的首要目标是通过 Foxby 等价，从 R 上的对偶 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 在 S 上诱导出对偶对。受 Wu 和 Gao [24] 关于相对于半对偶化双模的 FP$_n$-内射模和 FP$_n$-平坦模的研究启发，我们考虑交对 $(\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}, \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N})$——它也是一个对偶对——并定义由受限等价 $(C\otimes_R \sim)|_{\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}}$ 和 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)|_{\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N}}$ 的本质像构成的对，分别记为 $\mathcal{M}^C(S)$ 和 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。结果表明，$(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是 S 上的一个对偶对，而且对偶对 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 具有的许多其他性质也会由 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 继承。例如，我们证明，若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是对称的或完美的，那么 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也具有相应性质。

我们的第二个主要目标涉及相对于对 $(\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M},\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的戈伦斯坦同调代数。我们研究相对于这些对的戈伦斯坦内射模和戈伦斯坦平坦模，并展示这些模在 Foxby 等价和 Pontryagin 对偶下的若干关系，同时阐述有关模型结构及其同伦范畴的一些同伦方面。这些相对戈伦斯坦模的变体基于 Wang、Yang 和 Zhu [23], 以及第一、第二作者 [2, 3]近期的相关工作。

一般而言，我们的研究成果涵盖了 Wu 和 Gao 的若干结果 [24]以及 Cheng 和 Zhao 的若干结果 [9]。本文为 Foxby 等价中的诱导对偶对以及相对于这些对的戈伦斯坦同调代数提供了一套一般理论，并推广了 [24], 中发展的 C-FP$_n$-平坦模和 C-FP$_n$-内射模理论的某些方面，以及[9]中的戈伦斯坦 G_C-FP$_n$-内射模理论。

本文的组织结构。在第1 节中，我们回顾本文其余部分所需的基本术语、预备结果和例子。

第2节旨在研究对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的性质。我们首先在引理 2.2 中给出 $\mathcal{M}^C(S)$ 和 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 的刻画，这使我们得以在命题 2.3 中指出，$\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^C(S)$ 之间存在范畴等价，$\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 之间也存在范畴等价。在命题 2.4 中，我们证明，若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是一个（对称）对偶对，则 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也是如此。命题 2.6 描述了可从 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 传递到 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的其余性质。特别指出，若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是完备的且 $S\in\mathcal{M}^C(S)$，则 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也如此。在第2节余下部分，相对同调维数均相对于类 $\mathcal{M}^C(S)$ 和 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 来考察。当 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的情形下，我们将命题 2.3 中的范畴等价扩展到具有有界 $\mathcal{M}^C(S)$-分解维数和有界 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$-余分解维数的模子范畴（见命题 2.9）。

第 3 节由关于相对于 $(\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M},\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的戈伦斯坦同调代数与同伦代数结果构成。这些对偶对的核将在本节中发挥关键作用，即 $\mathcal{H}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}^{\perp}$ 和 $\mathcal{H}(\mathfrak{N})={}^{\perp}\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}$，其中 $\mathfrak{M}=\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}$ 和 $\mathfrak{N}=\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N}$。我们还考察等价 $(C\otimes_R\sim)|_{\mathcal{H}(\mathfrak{M})}$ 和 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)|_{\mathcal{H}(\mathfrak{N})}$ 的本质像，分别记作 $\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$ 和 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$。第 3 节首先研究 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$-戈伦斯坦内射 S^{op}-模和 $\mathfrak{N}$-戈伦斯坦内射 R^{op}-模。具体而言，命题 3.1 和推论 3.2 展示了这些相对戈伦斯坦内射模在 Foxby 等价下的性质。这些模的对应对象是 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$-戈伦斯坦平坦 S-模和 $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$-戈伦斯坦平坦 R-模。命题 3.3 和推论 3.4 展示了这些模在 Foxby 等价下的关系。此外，命题 3.6 给出了这些相对戈伦斯坦平坦模类与戈伦斯坦内射模类之间的 Pontryagin 对偶关系。我们对 $(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$-戈伦斯坦内射 S^{op}-模、$(\mathcal{H}(\mathfrak{N})\ \mathfrak{N})$-戈伦斯坦内射 R^{op}-模、$(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$-戈伦斯坦平坦 S-模以及 $(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))$-戈伦斯坦平坦 R-模采用类似的方法（见命题 3.10、3.11 和 3.14）。我们还将在第 3 节的最后一部分研究这些相对戈伦斯坦内射模和戈伦斯坦平坦模的“弱”版本，并将它们与先前的（“强”）对应版本联系起来。最后，关于同伦方面，我们将在推论 3.5 和命题 3.12 中讨论两个阿贝尔模型结构及其同伦范畴存在的充分条件；其中 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$（分别为 $\mathcal{M}^C(S)$）和 $\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$（分别为 $\mathfrak{M}$）是（平凡）余纤维对象的类。

1. 预备知识

模与链复形的记号。 下文主要在 $\mathsf{Mod}(R)$ 范畴中讨论（幺）左 R-模，其中 R 是一个带幺结合环。右 R-模是对环 R^{op}上的模。在某些情况下，为了指明是 $M\in\mathsf{Mod}(R)$ 还是 $M\in\mathsf{Mod}(R^{\mathrm{op}})$，我们分别记作 ${}_RM$ 或 M_R。作为 $\mathsf{Mod}(R)$ 中的特殊对象类，我们分别用 $\mathcal{P}(R)$、$\mathcal{I}(R)$ 和 $\mathcal{F}(R)$ 表示投射、内射和平坦 R-模的类。

正交性。 对于定义在模上的函子，$\mathrm{Ext}^i_R(-,\ \sim)$ 表示其第 i 个右导函子

$$\mathrm{Hom}_R(-,\sim)\colon[\mathsf{Mod}(R)]^{\mathrm{op}}\times\mathsf{Mod}(R)\longrightarrow\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}).$$

另一方面，$\mathrm{Tor}^R_i(-,\ \sim)$ 表示其左导函子

$$-\otimes_R\sim\colon\mathsf{Mod}(R^{\mathrm{op}})\times\mathsf{Mod}(R)\longrightarrow\mathsf{Mod}(\mathbb{Z}).$$

设 $\mathcal{X}\subseteq\mathsf{Mod}(R)$、$N\in\mathsf{Mod}(R)$ 且 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$。表达式 $\mathrm{Ext}^i_R(\mathcal{X},N)=0$ 表示，对每个 $X\in\mathcal{X}$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(X,N)=0$。此外，如果对每个 $Y\in\mathcal{Y}$ 都有 $\mathrm{Ext}^i_R(\mathcal{X},Y)=0$，则 $\mathrm{Ext}^i_R(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$。表达式 $\mathrm{Ext}^i_R(N,\mathcal{Y})=0$ 的含义类似。此外，$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(M,N)=0$ 表示，对每个 $i\geq 1$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(M,N)=0$。$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(\mathcal{X},N)=0$、$\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(N,\mathcal{Y})=0$ 和 $\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_R(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$ 也有类似的含义。我们也可以将 Ext 替换为 Tor，从而得到

相应的 Tor-正交性记号。 *i-thandtotal* 左 *Ext*-正交补和 *Tor*-正交补 将记作 $\mathcal{X}$

$$^{\perp_i}\mathcal{X} := \{M \in \mathsf{Mod}(R) : \operatorname{Ext}^i_R(M, \mathcal{X}) = 0\} \quad \text{and} \quad {}^{\perp}\mathcal{X} := \bigcap_{i\geq 1} {}^{\perp_i}\mathcal{X},$$

$$^{\top_i}\mathcal{X} := \{N \in \mathsf{Mod}(R^{\mathrm{op}}) : \operatorname{Tor}^R_i(N, \mathcal{X}) = 0\} \quad \text{and} \quad {}^{\top}\mathcal{X} := \bigcap_{i\geq 1} {}^{\top_i}\mathcal{X}.$$

第 i阶及全体右 *Ext*-正交补和 *Tor*-正交补的定义类似。

相对同调维数。 设 $M \in \mathsf{Mod}(R)$ 和 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathsf{Mod}(R)$。相对于 M 和 $\mathcal{Y}$ 的内射维数由 $\mathcal{X}$ 定义如下:

$$\begin{aligned} \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(M) &:= \inf\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \operatorname{Ext}^{\geq m+1}_R(\mathcal{X}, M) = 0\}, \\ \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) &:= \sup\{\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\}. \end{aligned}$$

若 $\mathcal{X} = \mathsf{Mod}(R)$，我们用 $\operatorname{id}_{\mathsf{Mod}(R)}(M) = \operatorname{id}(M)$ 和 $\operatorname{id}_{\mathsf{Mod}(R)}(\mathcal{Y}) = \operatorname{id}(\mathcal{Y})$ 表示 M 和 $\mathcal{Y}$的（绝对）内射维数。对偶地，我们可以定义相对和绝对投射维数 $\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M)$、$\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$、$\operatorname{pd}(M)$ 和 $\operatorname{pd}(\mathcal{Y})$。

所谓 $\mathcal{X}$-分解 M，是指一个正合复形

$$\cdots \to X_m \to X_{m-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0$$

其中，对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$都有 $X_k \in \mathcal{X}$。若对于 $k > m$ 有 $X_k = 0$，且对于每个 $0 \leq k \leq m$ 都有 $X_k \neq 0$，则称前述分解的长度 为 m。相对于 $\mathcal{X}$的分解维数 （或 M 的 $\mathcal{X}$-分解维数）定义为

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) := \min\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{存在一个长度为 } m\text{. 的 } \mathcal{X}\text{-分解 } M$$

如果 $\mathcal{X}$ 是 有基点的 （即 $0 \in \mathcal{X}$）并且在同构下封闭，则当 $M \simeq 0$ 时，我们令 $\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) = 0$。此外，如果 $\mathcal{Y} \subseteq \mathsf{Mod}(R)$，则

$$\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) := \sup\{\operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(Y) \,:\, Y \in \mathcal{Y}\}$$

定义了 $\mathcal{Y}$相对于 $\mathcal{X}$的分解维数 。具有有界（由某个 $n \geq 0$ 界定）且有限 $\mathcal{X}$-分解维数的对象类记为

$$\mathcal{X}^{\wedge}_n := \{M \in \mathsf{Mod}(R) : \operatorname{resdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq n\} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}^{\wedge} := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{X}^{\wedge}_n.$$

对偶地，我们可以定义 $\mathcal{X}$-余分解 以及 M 和 $\mathcal{Y}$相对于 $\mathcal{X}$的余分解维数 （分别记为 $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$ 和 $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$）。对于具有有界且有限 $\mathcal{X}$-余分解维数的 R- 模的类，我们也有对偶记号 $\mathcal{X}^{\vee}_n$ 和 $\mathcal{X}^{\vee}$。

逼近。 给定一个 R-模的类 $\mathcal{X}$ 以及 $M \in \mathsf{Mod}(R)$，回顾一下，如果态射 $\varphi\colon X \to M$ 满足 $X \in \mathcal{X}$，则它是 M 的一个 $\mathcal{X}$-预覆盖；这是因为对于每个满足 $X' \in \mathcal{X}$ 的态射$\varphi'\colon X' \to M$，都存在一个态射 $h\colon X' \to X$ 使得 $\varphi' = \varphi \circ h$。一个 M 的 $\mathcal{X}$-预覆盖 φ 是:

- 一个 $\mathcal{X}$覆盖，若在 $X' = X$ 和 $\varphi' = \varphi$的情形下，方程 $\varphi = \varphi \circ h$ 只能通过 X的自同构 $h\colon X \to X$ 来补全;
- 当 $\mathcal{X}$-余覆盖若 $\operatorname{余核}(\varphi) = 0$ 且 $\operatorname{核}(\varphi) \in \mathcal{X}^{\perp_1}$。

类 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ 若每个 R-模都有一个 $\mathcal{X}$-预覆盖，则称其为预覆盖的。覆盖类和特殊预覆盖类的定义类似。对偶地，可以定义相对于 $\mathcal{X}$ 的模的包络、预包络和特殊预包络，以及（特殊）预包络的类和包络的类。

余挠对。两类 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ 中的 R-模构成一个余挠对$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$，若 $\mathcal{X} = {}^{\perp_1}\mathcal{Y}$且 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp_1}$。余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是:

- 完备，若 $\mathcal{X}$ 是特殊预覆盖（或等价地，若 $\mathcal{Y}$ 是特殊预包络）；
- 遗传，若 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_R(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0$（或等价地，若 $\mathcal{X}$ 可解，或 $\mathcal{Y}$ 余解消）。

所谓可解，是指 $\mathcal{X}$ 对扩张和满射的核封闭，且 $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{X}$。余解消类可对偶地定义。注意，$(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是遗传余挠对，当且仅当 $\mathcal{X} = {}^{\perp}\mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp}$。最后，回顾一下，余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 由集合余生成 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$，若 $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^{\perp_1}$。Eklof 和 Trlifaj 的一个著名结果 [10]表明，这样的余挠对是完备的。

对偶对。对偶对的概念由 Holm 和 Jørgensen 在 [16] 中引入。两个类 $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ 和 $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ 在 R 上构成一个对偶对$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，如果:

(1) $M \in \mathcal{M}$当且仅当 $M^+ \in \mathcal{N}$，其中 $M^+ := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 表示 M 的特征或*Pontryagin* 对偶。(2) $\mathcal{N}$对直和项和有限直和封闭。

在 R^{op} 上也有类似的对偶对概念，适用于 $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Mod}(R)$ 的情形，因为 $(-)^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 也是从 $\mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ 到 $\mathrm{Mod}(R)$ 的反变函子。

称 R 上的对偶对 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 为:

- （余）积闭，如果 $\mathcal{M}$ 对（余）积封闭;
- 完美若其余积封闭，$\mathcal{M}$ 对扩张封闭，且包含${}_R R$（将环 R 视为一个 R-模）；
- [6, Appx. A] 对称若（$\mathcal{N}$，$\mathcal{M}$）是 R_{op} 上的一个对偶对;
- [6, Appx. A] 完备若其完美且对称;
- [22, Def. 3.2] 双完备若其完备，且（${}^{\perp}\mathcal{N}$，$\mathcal{N}$）是 $\mathrm{Mod}(R_{\mathrm{op}})$ 中由集合余生成的遗传余扭挠对;
- [3, Def. 3.5] *Tor*-正交 若 $\mathrm{Tor}^R_{\geq 1}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) = 0$.

前述某些类型的对偶对很重要，因为它们通过类 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$导出逼近。事实上，[16, 定理 3.1]证明了:

- $\mathcal{M}$ 在纯子模、纯商和纯扩张下封闭。
- 若 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 余积封闭，则 $\mathcal{M}$ 具有覆盖。
- 若 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 乘积封闭，则 $\mathcal{M}$ 具有预包络。
- 若 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 完美，则 $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\perp_1})$ 是一个完美余挠对（即一种余挠对，其中 $\mathcal{M}$ 具有覆盖，而 $\mathcal{M}^{\perp_1}$ 具有包络）。这类余挠对尤其是完备的。

在 [15, 命题 2.3] 中，Gillespie 证明，若 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 是一个完美对偶对，则 $\mathcal{P}(R) \subseteq \mathcal{M}$ 且 $\mathcal{I}(R^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathcal{N}$。此外，$\mathcal{M}$ 在直接极限下封闭，因此根据 Lazard 定理，$\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{M}$。

由 [16] 可知，$([\mathcal{F}(R)]^{\wedge}_{m}, [\mathcal{I}(R^{\mathrm{op}})]^{\vee}_{m})$ 对于每个 R都是 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$上的一个完美对偶对。若 R 是右相干的（分别地，右诺特的），则前述对乘积封闭（分别地，对称）。另一个完备对偶对的例子可由有限型模得到，它推广了前述例子。这些模及其对应的 Ext 和 Tor-正交补由 Bravo 和第二作者在 [7] 中进行了研究。一个 R^{op}-模F 若为 FP_n 型，则存在一个正合序列

$$P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to F \to 0$$

其中每个 P_k 都是有限生成自由模。我们将由这些模构成的类记为 $\mathsf{FP}_n(R^{\mathrm{op}})$。注意，如果 $n = 0$ （分别地， $n = 1$），则得到有限生成（分别地，有限表示） R^{op}-模的类。此外，类型为 FP_∞ 的 R^{op}-模的类定义为交集

$$\mathsf{FP}_\infty(R^{\mathrm{op}}) := \bigcap_{n\geq 0} \mathsf{FP}_n(R^{\mathrm{op}}).$$

正交补 $[\mathsf{FP}_n(R^{\mathrm{op}})]^{\perp_1}$ 和 $[\mathsf{FP}_n(R^{\mathrm{op}})]^{\top_1}$ 分别是 FP_n-内射 R^{op}-模和 FP_n-平坦 R-模的类，分别记为 $\mathcal{I}_n(R^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathcal{F}_n(R)$。若 $n > 1$，文献 [7] 证明了 $(\mathcal{F}_n(R)\ \mathcal{I}_n(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个完备对偶对。更多完备对偶对的例子见 [3, 例 3.10]。

半对偶化双模。 设 R 和 S 是带单位元的结合环。在 [1]Araya、Takahashi 和 Yoshino 引入了半对偶化双模的概念。$(S,\ R)$-双模 $C = {}_SC_R$ 称为半对偶化的，当且仅当：

(sd1) ${}_SC \in \mathsf{FP}_\infty(S)$。(sd2) $C_R \in \mathsf{FP}_\infty(R^{\mathrm{op}})$。(sd3) 自同态映射 ${}_SS_S \to \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ C)$ 是一个同构。(sd4) 自同态映射 ${}_RR_R \to \mathrm{Hom}_S(C,\ C)$ 是一个同构。(sd5) $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_S(C,\ C) = 0$。(sd6) $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ C) = 0$。

半对偶化双模的例子包括秩为一的自由 R-模、 ${}_\Lambda D(\Lambda)_\Lambda$，其中 Λ 是域 $\mathbb{K}$ 上的有限维代数，以及 $D(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda,\ \mathbb{K})$，还有 [21]中引入的广义倾斜模（又称*Wakamatsu* 倾斜）。

若半对偶化双模 ${}_SC_R$ 对每个 $M \in \mathrm{Mod}(S)$ 和 $N \in \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ 中的 $M \in$ 都满足以下条件，则称其为忠实半对偶化：

(fsd7) 若 $\mathrm{Hom}_S(C, M) = 0$，则 $M = 0$;

(fsd8) 若 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, N) = 0$，则 $N = 0$。

与半对偶化双模 ${}_SC_R$ 相关联的是 Auslander类与Bass类，它们由 Foxby 于 [12]引入。相对于${}_SC_R$ 的*Auslander* 类 $\mathcal{A}_C(R)$由所有满足以下条件的 R-模 $M \in \mathrm{Mod}(R)$组成：

(a1) $\mathrm{Tor}^R_{\geq 1}(C, M) = 0$。(a2) $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_S(C, C \otimes_R M) = 0$。(a3) 自然求值映射 μ_M: ${}_RM \to \mathrm{Hom}_S(C, C \otimes_R M)$ 是 $\mathrm{Mod}(R)$ 中的同构。

关于 ${}_SC_R$ 的 *Bass* 类 $\mathcal{B}_C(S)$ 由满足以下条件的所有模 $N \in \mathrm{Mod}(S)$ 组成：

(b1) $\mathrm{Ext}_S^{\geq 1}(C,N)=0$。(b2) $\mathrm{Tor}_{\geq 1}^R(C,\mathrm{Hom}_S(C,N))=0$。(b3) 自然求值映射 $\nu_N\colon C\otimes_R\mathrm{Hom}_S(C,N)\to N$ 是 Mod(S) 中的一个同构。

注意，C 是半对偶化（S，R）双模，当且仅当它是半对偶化（R^{op}，S^{op}）双模。因此，我们也可以考虑相应的 Auslander类与Bass类 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 和 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$。

在[17, 命题 4。1] 中证明的 Auslander类与Bass类的一个重要且有用的性质，是存在以下范畴等价：

$$\mathcal{A}_C(R)\underset{\mathrm{Hom}_S(C,\sim)}{\overset{C\otimes_R\sim}{\rightleftarrows}}\mathcal{B}_C(S)\qquad\text{[first Foxby equivalence]}$$

$$\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})\underset{\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)}{\overset{-\otimes_S C}{\rightleftarrows}}\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\qquad\text{[第二个 Foxby 等价]}$$

Huang 最近在 [20, 定理 3.3] 中证明，$(\mathcal{A}_C(R),\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是 R 上一个完美的积封闭对偶对，而 $(\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}),\ \mathcal{A}_C(R))$ 是 R^{op} 上一个（余）积封闭对偶对。特别地，$(\mathcal{A}_C(R),\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个完备对偶对。类似地，$(\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}),\ \mathcal{B}_C(S))$ 是 S^{op} 上一个完备对偶对，其中 $\mathcal{B}_C(S)$ 在（余）积下封闭。此外，由 [17, 定理 6.2] 可知，$\mathcal{B}_C(S)$ 总是余解消的，而 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 总是可解的。若进一步假设 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，由 [17, 推论 6.3] $\mathcal{B}_C$ 可知，(S) 在满态射的核下封闭，而 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 在单态射的余核下封闭，因此它们是厚子范畴（即在扩张、满态射的核、单态射的余核及直和项下封闭）。对 $\mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 也有类似结论。

阿贝尔模型结构。回顾 [19]，Mod(R)上的阿贝尔模型结构由三类 R-同态组成，称为纤维化、余纤维化和弱等价，并满足：R-同态 f 是余纤维化（分别是纤维化），当且仅当它是单态射（分别是满态射），且 CoKer(f)是余纤维化 R-模（分别是 Ker(f)纤维化）。我们推荐阅读 [18]，作为模型范畴主题的简明入门。阿贝尔模型结构与余挠对之间存在一种颇具吸引力的一一对应关系，该对应关系由 [19, 定理 2.2]证明。随后，Gillespie 在 [13, 定理 1.2], 中证明，若 Mod(R)中的（或任意弱幂等完备正合范畴中的）$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$和$(\mathcal{X}',\mathcal{Y})$是遗传完备余挠对，且满足 $\mathcal{X}'\subseteq\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}'\subseteq\mathcal{Y}$和$\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}'=\mathcal{X}'\cap\mathcal{Y}$，那么存在一个厚类 $\mathcal{W}$ 以及 Mod(R)上的唯一阿贝尔模型结构，使得 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{W}$ 分别是余纤维化、纤维化和弱 R-模的类。本文中构造的模型结构便是通过这一方法得到的。

2. 诱导对偶对

在 [24], Wu 和 Gao 找到了对偶对 $(\mathcal{F}_n(R),\ \mathcal{I}_n(R^{\mathrm{op}}))$ 与 $(\mathcal{A}_C(R),\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 之间的关系。更具体地说，给定一个半对偶化双模 ${}_SC_R$，

他们首先在 [24, 命题 3.3] 中证明了 $\mathcal{F}_n(R) \subseteq \mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{I}_n(S) \subseteq \mathcal{B}_C(S)$。这使得可以将 Foxby 等价 $C\otimes_R \sim$ 及其拟逆 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$ 分别限制到子范畴 $\mathcal{F}_n(R)$ 和 $\mathcal{I}_n(S)$。遵循 [24], 中的记号，令 $\mathcal{FF}^n_C(S)$ 和 $\mathcal{FI}^n_C(R)$ 分别表示 $\mathcal{F}_n(R)$ 和 $\mathcal{I}_n(S)$ 在 $C\otimes_R \sim$ 和 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$ 下的本质像，即，

$$\mathcal{FF}^n_C(S) := \{M \in \mathsf{Mod}(S) : M \simeq C \otimes_R F \text{ where } F \in \mathcal{F}_n(R)\},$$
$$\mathcal{FI}^n_C(R) := \{N \in \mathsf{Mod}(R) : N \simeq \mathrm{Hom}_S(C, E) \text{ where } E \in \mathcal{I}_n(S)\},$$

（其中记号 $\simeq$ 表示两个对象同构）。由[24, 命题 4.1]可知，$\mathcal{F}_n(R)$ 与 $\mathcal{FF}^n_C(S)$ 之间，以及 $\mathcal{FI}^n_C(R)$ 与 $\mathcal{I}_n(S)$ 之间存在范畴等价，分别由限制函子 $(C\otimes_R \sim)|_{\mathcal{F}_n(R)}$ 和 $\mathrm{Hom}_S(C, \sim)|_{\mathcal{I}_n(S)}$ 给出。此外，在 [24, §3] 中，作者证明了

$$(\mathcal{FF}^n_C(S), \mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}})) \quad \text{and} \quad (\mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}}), \mathcal{FF}^n_C(S))$$

分别是 S 和 S^{op}上的（余）积封闭对偶对。此外，若${}_SS \in \mathcal{FF}^n_C(S)$（分别地，$S_S \in \mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}})$），则

$$(\mathcal{FF}^n_C(S), \mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}})) \text{ (resp., } (\mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}}), \mathcal{FF}^n_C(S)))$$

是完备对偶对。换言之，这些对偶对继承了对偶对 $(\mathcal{F}_n(R)\ \mathcal{I}_n(R^{\mathrm{op}}))$ 和 $(\mathcal{F}_n(S^{\mathrm{op}})\ \mathcal{I}_n(S))$ 的性质。

本节的主要目标是将前述结果推广到 R上的任意对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$。我们的思路是探究能否通过 Foxby 等价，从 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 诱导出一个对偶对，使其两部分分别包含于 Auslander类与Bass类 $\mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 中。一个问题是，并非 R上的每个对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 都满足包含关系 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$。然而，我们可以通过考虑交集 $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{N} \cap \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 来克服这一限制。若 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 是完美的（许多值得关注的对偶对都是如此），则这些交集并非平凡，因为在这种情况下，有$\mathcal{F}(R) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R)$ 和 $\mathcal{I}(R^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$。

从现在起，$C = {}_SC_R$是一个半对偶化的（$S,\ R$）-双模，而（$\mathcal{M},\ \mathcal{N}$）是 R上的一个对偶对。我们考虑以下诱导的 S-模类和S^{op}-模类:

$$\mathcal{M}^C(S) := \{M \in \mathsf{Mod}(S) : M \simeq C \otimes_R A \text{ where } A \in \mathcal{A}_C(R) \cap \mathcal{M}\},$$
$$\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}) := \{N \in \mathsf{Mod}(S^{\mathrm{op}}) : N \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B) \text{ where } B \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}\}.$$

注*2.1*。注意，当（$\mathcal{M},\ \mathcal{N}$）=（$\mathcal{F}$（$R$）$\ \mathcal{I}$（$R^{\mathrm{op}}$））时，$\mathcal{M}^C$（$S$）和 $\mathcal{N}^C$（S^{op}）恰好是 [17, 定义*5.1*]中的类 $\mathcal{F}_C$（S）和 $\mathcal{I}_C$（S^{op}）。在 [17, §5] 中，作者展示了这些类 $\mathcal{F}_C$（S）和 $\mathcal{I}_C$（S^{op}）从（$\mathcal{F}$（R）$\ \mathcal{I}$（R^{op}））继承了哪些性质。此外，令（$\mathcal{M},\ \mathcal{N}$）=（$\mathcal{F}_n$（$R$）$\ \mathcal{I}_n$（$R^{\mathrm{op}}$））后，我们也得到类 $\mathcal{FF}^n_C$（S）和 $\mathcal{FI}^n_C$（S^{op}）。

根据引理5.1], 中给出的类 $\mathcal{F}_C$（S）和 $\mathcal{I}_C$（S^{op}）的刻画，以及引理3.5], 中得到的 $\mathcal{FF}^n_C$（S）和 $\mathcal{FI}^n_C$（S^{op}）的刻画，我们有以下对诱导类 $\mathcal{M}^C$（S）和 $\mathcal{N}^C$（S^{op}）的描述（证明是直接的）。

引理 2.2（诱导类的刻画）。以下断言对每个 $M \in \mathsf{Mod}(S)$ 和 $N \in \mathsf{Mod}(S^{\mathrm{op}})$均成立:

(1) $M \in \mathcal{M}^C(S)$ *if, and only if,* $M \in \mathcal{B}_C(S)$ *and* $\mathrm{Hom}_S(C, M) \in \mathcal{M}$.

(2) $N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ *if, and only if,* $N \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ *and* $N \otimes_S C \in \mathcal{N}$.

以下结果是 [24, 命题 4。1] （$\mathcal{F}_n(R)$ 与 $\mathcal{FF}_C^n(S)$之间的等价，以及 $\mathcal{FI}_C^n(R)$ 与 $\mathcal{I}_n(S)$ 之间的等价）的相对版本。其证明与 Wu 和 Gao 给出的证明类似，并且是前一个引理的推论。

命题 2.3 (受限 Foxby 等价)。 存在范畴等价

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R) \underset{\mathrm{Hom}_S(C,\sim)}{\overset{C\otimes_R \sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}^C(S) \qquad \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}) \underset{\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\sim)}{\overset{-\otimes_S C}{\rightleftarrows}} \mathcal{N} \cap \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$$

以下结果推广了 [24, 命题 3.13 (1)]。我们提供证明，以方便读者，并且鉴于该结果对本文其余部分的重要性。

命题 2.4 (诱导对偶对)。 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是 S 上的对偶对。特别地， $\mathcal{M}^C(S)$ 在纯子模、纯商和纯扩张下封闭。此外，如果 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是对称的，那么 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$也如此。

证明。 我们首先证明，当且仅当 $M \in \mathcal{M}^C(S)$ 时， $M^+ \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。假设 $M \in \mathcal{M}^C(S)$。那么， $M \simeq C \otimes_R A$ 对某个 $A \in \mathcal{A}_C(R) \cap \mathcal{M}$ 成立。根据 [11, 定理 3.2.1], ，我们有自然同构

$$M^+ \simeq (C \otimes_R A)^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, A^+),$$

其中 $A^+ \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}$，因为 $(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 和 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是 R 上的对偶对。因此可得 $M^+ \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。现在假设 $M^+ \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，也就是说，对于某个 $B \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}$，有 $M^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)$。利用第二个 Foxby 等价，我们有 $M^+ \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，并且

$$M^+ \otimes_S C \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B) \otimes_S C \simeq B.$$

现在，由于根据 (sd1)， C 是有限表示的 S-模，由此以及 [11, 定理 3.2.11] 可得

$$[\mathrm{Hom}_S(C, M)]^+ \simeq M^+ \otimes_S C \simeq B \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}.$$

另一方面，由于 $M^+ \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，根据第二个 Foxby 等价、再次使用 [11,定理 3.2.1] ，以及前述自然同构，我们得到

$$M^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, M^+ \otimes_S C) \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, [\mathrm{Hom}_S(C, M)]^+) \simeq [C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, M)]^+.$$

由于 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是阿贝尔群范畴 Mod($\mathbb{Z}$) 中的余生成元，同构 $M^+ \simeq [C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C,\ M)]^+$给出 $M \simeq C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C,\ M)$，其中 $\mathrm{Hom}_S(C,\ M) \in \mathcal{A}_C(R) \cap \mathcal{M}$，因为 $[\mathrm{Hom}_S(C,\ M)]^+ \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}$，且 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是 R 上的对偶对。因此， $M \in \mathcal{M}^C(S)$。

采用类似的论证可以证明，若 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 是对称的，则 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也是对称的。证明时要用到这样一个事实：$(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个完备（因而也是对称的）对偶对。

还需证明 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 在直和项和有限直和下封闭，但这可由标准的同调代数论证得到。
□

注记 2.5. 请注意，前面的结果给出了一个更直接的证明 [24, 命题 3.11]。

如果我们对对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 假设了其他性质，那么在以下结果中，我们将探讨这些性质中哪些可以由对偶对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 继承。

命题 2.6(继承性质)。 以下陈述成立：

(1) 若 $\mathcal{M}$ （分别地， $\mathcal{N}$）对扩张封闭，则 $\mathcal{M}^C(S)$ （分别地， $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ ）也对扩张封闭。*(2)* 若 $\mathcal{M}$ （分别地， $\mathcal{N}$）对直积和直接极限（特别是余积）封闭，则 $\mathcal{M}^C(S)$ （分别地， $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ ）也如此。*(3)* 若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 对（余）积封闭，则 $(\mathcal{M}^C(S)\ \ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也如此，且 $\mathcal{M}^C(S)$ 是预包络的（分别地，是覆盖的）。*(4)* 若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是完美的且 $S \in \mathcal{M}^C(S)$ ，则 $(\mathcal{M}^C(S)\ \ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 也如此，并且 $(\mathcal{M}^C(S)\ \ [\mathcal{M}^C(S)]^{\perp_1})$ 是一个完美余挠对。*(5)* 考虑以下断言：*(a)* $\mathcal{M}^C(S)$ 对满态射的核封闭。*(b)* $\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)$ 对满态射的核封闭。*(c)* $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 对单态射的余核封闭。*(d)* $\mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 对单态射的余核封闭。若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则蕴含关系 *(a)* $\Leftrightarrow$ *(b)* 和 *(c)* $\Leftrightarrow$ *(d)* 成立。若进一步 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是对称的，则所有断言等价。*(6)* 若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是完备的且 $S\in\mathcal{M}^C$ （ S ），则 $(\mathcal{M}^C$ （ S ） $\mathcal{N}^C$ （ S^{op} ） $)$ 是完备的。

证明。

(1) 与 [24, 命题 3.6]中的证明相同。(2) 这些闭包性质由引理 2.2 得出；此外，$\mathcal{B}_C(S)$ 和 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 在直和项、直积和直接极限下封闭（见 [17, 命题 4.2]），函子 $\mathrm{Hom}_S(C,\sim)$ 和 $-\otimes_S C$保直极限与直积，因为 $C\in\mathrm{FP}_\infty(S)$（见 Brown 的 [8, 定理 1]之后的推论）。(3) 由 (2) 及对偶对的性质得出（见 §1）。(4) 由 (1)、(3) 及对偶对的性质得出。(5) 等价关系 (a) $\Leftrightarrow$ (b) 和 (c) $\Leftrightarrow$ (d) 的证明与 [24, 定理 3.7 和 3.8 (1) $\Leftrightarrow$ (2)]中的证明相同。现在假设 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是对称的。我们证明 (b) $\Leftrightarrow$(d)。我们知道 $(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个完备对偶对，因此交对 $(\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 根据 [16, 命题 2.8]是一个对称对偶对。因此，利用 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的性质可知， $\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)$ 在满态射的核下封闭，当且仅当 $\mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 在单态射的余核下封闭。(6) 由 (4) 和命题 2.4 得出。

□

注 2.7. 在前一个命题中，*(1)* 和 *(2)* 推广了 [24, 命题 3.6 和 3。12], *(3)* 和 *(4)* 推广了 [24, 定理 3.15 (1) 和推论 3.16 (1)], 而 *(5)* 推广了[24,定理 3.7 和 3。8]。

假设 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的另一个结果，是扩展命题2.3中出现的等价。这一点将在下文的命题 2.9 中明确说明并证明。在此之前，注意到由于 $\mathcal{B}_C(S)$ 是余解消的，且$\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$是可解的，因此包含关系

$$[\mathcal{M}^C(S)]^{\wedge}_n \subseteq \mathcal{B}_C(S) \ \text{ and } \ [\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})]^{\vee}_n \subseteq \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均成立，且这是引理 2.2的推论。另一方面，由于 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的， $\mathcal{B}_C(S)$和 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 都是厚子范畴。因此，我们还得到包含关系

$$[\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R)]_n^{\wedge} \subseteq \mathcal{A}_C(R) \text{ and } [\mathcal{N} \cap \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})]_n^{\vee} \subseteq \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。

命题 2.8（相对同调维数）。 不等式

$$\mathrm{resdim}_{M\cap\mathcal{A}_C(R)}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{M}^C(S)}(C \otimes_R M)$$

and

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})}(N) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}(\mathrm{Hom}_S(C, N))$$

对每个 $M \in$ 模（R）和 $N \in$ 模（R^{op}）均成立。若进一步地， ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则前述不等式变为等式。

证明。首先，根据引理 2.2 以及 $\mathcal{B}_C(S)$ 是余解消的这一事实，注意到 $C \otimes_R M$ 的任意有限长度的$\mathcal{M}^C(S)$-分解都是一个圈位于$\mathcal{B}_C(S)$中的正合复形。结合上述事实、(b1) 和命题 2.3，可知等价关系 $\mathrm{Hom}_S(C, \sim)$ 将 $C\otimes_R M$ 的长度为 n 的 $\mathcal{M}^C(S)$-分解映射为 M 的长度相同的（$\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)$）-分解。于是，我们有

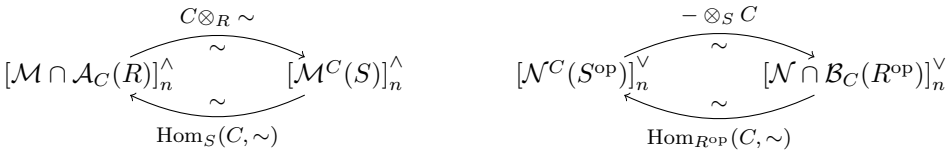
$$\mathrm{resdim}_{M\cap\mathcal{A}_C(R)}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{M}^C(S)}(C \otimes_R M).$$

现在假设 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的。那么，任何有限长度的$\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R)$-分解 M 都是一个正合复形，其圈属于 $\mathcal{A}_C(R)$，因为$\mathcal{A}_C(R)$变成了厚子范畴。由此可得，等价 $C\otimes_R \sim$ 将长度为 n 的$\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)$-分解 M 映射为长度为 n的$S(S)$-分解 $C\otimes_R M$。换言之， $C\otimes_R \sim$是从 $[\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)]_n^{\wedge}$到 $[\mathcal{M}^C(S)]_n^{\wedge}$的正合函子。于是，我们还有

$$\mathrm{resdim}_{\mathcal{M}^C(S)}(C \otimes_R M) \leq \mathrm{resdim}_{M\cap\mathcal{A}_C(R)}(M).$$

余分解维数的不等式和等式可类似地得到。 □

命题 2.9 (扩展 Foxby 等价). 若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都有范畴等价

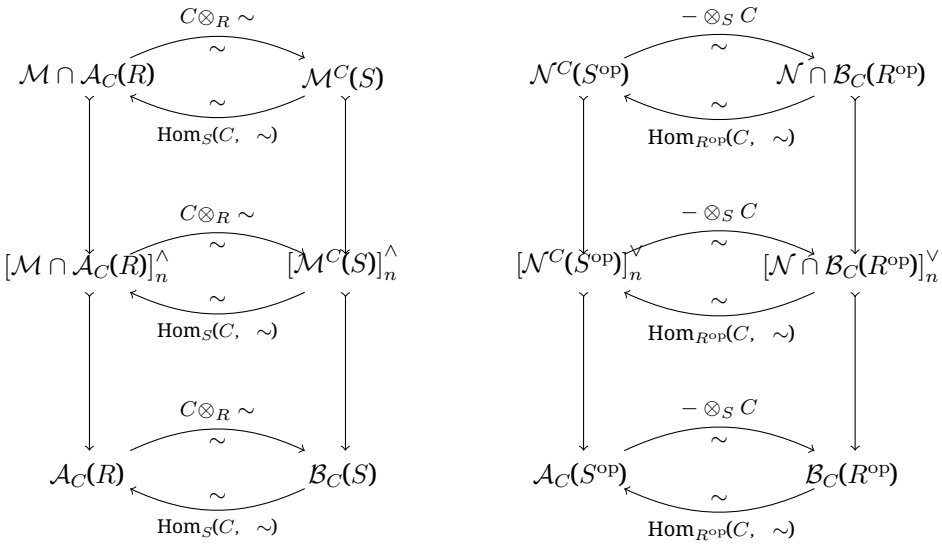


证明。由于根据命题 2.8，$\mathrm{resdim}_{M\cap\mathcal{A}_C(R)}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{M}^C(S)}(C \otimes_R M)$，我们有一个函子 $C\otimes_R \sim\colon [\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)]_n^{\wedge} \to [\mathcal{M}^C(S)]_n^{\wedge}$。现在我们来证明函子 $\mathrm{Hom}_S(C, \sim)$将 $[\mathcal{M}^C(S)]_n^{\wedge}$ 映射到 $[\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)]_n^{\wedge}$ 中。设 $M \in [\mathcal{M}^C(S)]_n^{\wedge} \subseteq \mathcal{B}_C(S)$。由于 $C\otimes_R \sim\colon \mathcal{A}_C(R) \to \mathcal{B}_C(S)$是本质满的，存在 $A \in \mathcal{A}_C(R)$使得 $M \simeq C \otimes_R A$。于是，$A \simeq \mathrm{Hom}_S(C, C \otimes_R A) \simeq \mathrm{Hom}_S(C, M)$，并由命题 2.8 得到

$$\mathrm{resdim}_{[\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)]}(\mathrm{Hom}_S(C, M)) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{M}^C(S)}(M) \leq n.$$

因此， $C\otimes_R \sim$定义了一个从 $[\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)]_n^{\wedge}$到 $[\mathcal{M}^C(S)]_n^{\wedge}$的等价，其拟逆为 $\mathrm{Hom}_S(C, \sim)$。另一幅图中的等价可通过类似的步骤建立。□

推论 2.10. 若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化，则在下图中，水平箭头是等价，垂直箭头是范畴嵌入：



本节最后研究对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 在 R 上的 Tor-正交条件能否传递到诱导对偶对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$。这类对偶对的例子和反例见 [3]。以下是 [17, 定理 64]的一个推论，它将成为 §3中的一些计算的有用工具。

引理 2.11。对于每个 $A, A'\in\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{M}$ 和 $B, B'\in\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{N}$，对每个 $i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有以下自然同构：

(1) $\mathrm{Ext}^i_S(C\otimes_R A',\ C\otimes_R A)\simeq\mathrm{Ext}^i_R(A',\ A)$。*(2)* $\mathrm{Ext}^i_{S^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B),\ \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B'))\simeq\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(B,\ B')$。*(3)* $\mathrm{Tor}^S_i(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B)\ C\otimes_R A)\simeq\mathrm{Tor}^R_i(B,\ A)$。

以下是前一个引理的直接推论。

命题 2.12 (继承的 Tor-正交性). 对偶对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$是 *Tor*-正交的，当且仅当交对 $(\mathcal{M}\cap\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是 *Tor*-正交的。特别地，若$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是 *Tor*-正交的，则$(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$也是如此。

例 2.13. 一般而言，对偶对 $(\mathcal{FF}^n_C(S)\ \mathcal{FI}^n_C(S^{\mathrm{op}}))$ 对 $n>1$并非 *Tor*-正交。这可由前一个命题、 [24, 命题 3.3] 以及以下事实推出：$(\mathcal{F}_n(R)\ \mathcal{I}_n(R^{\mathrm{op}}))$ 并非 *Tor*-正交，若 R 是左 n-相干的（根据 [7, 定理 5.5 和 5.6]以及 [3,例 3.6]）。

3. 由诱导对偶对得到的 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein 内射模

本节通过 Foxby 等价和 $(-)^+$，研究由对偶对 $(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 所诱导的若干版本的相对戈伦斯坦平坦模与相对 Gorenstein 内射模的同调和同伦方面，以及对偶关系。其中一部分工作受到 Cheng 和

Zhao [9]在他们的文章中提出了戈伦斯坦 G_C-FP$_n$-内射模的概念。这些模定义为满足以下条件的 $M \in \mathrm{Mod}(R)$： 存在一个正合复形

$$Y_\bullet = \cdots \xrightarrow{\partial_2} W_1 \xrightarrow{\partial_1} W_0 \xrightarrow{\partial_0} I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

使得对每个，$\mathrm{Hom}_R(H,\ Y_\bullet)$ 都是正合的

$$H \in \mathcal{H}_C(\mathcal{I}_n(R)) = \{\mathrm{Hom}_S(C,E) : E \in {}^{\perp_1}[\mathcal{I}_n(S)] \cap \mathcal{I}_n(S)\},$$

并且对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$W_k \in \mathcal{FI}_C^n(R)$ 和 $I^k \in \mathcal{I}_n(R)$，其中 $M \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$。我们指出，这些相对 Gorenstein 内射模是由两个类定义的，这两个类来自完备对偶对 $(\mathcal{FF}_C^n(R^{\mathrm{op}})\ \mathcal{FI}_C^n(R))$ 和 $(\mathcal{F}_n(S^{\mathrm{op}})\ \mathcal{I}_n(S))$。另一方面，最近有人提出了相对于对偶对的 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein 内射模等概念，例如 Wang、Yang 和 Zhu 在 [23] 中的工作，以及 [3]中的工作。

关于相对 Gorenstein 内射对象的一种方法见 [2, 定义 3.7]。给定 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Z}$ 两个 R^{op}-模类，若 $M \in \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$ 是 $(\mathcal{Z},\ \mathcal{Y})$- *Gorenstein* 内射，则称其为……，若 $M \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 属于一个正合复形

$$Y_\bullet = \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\partial_1} Y_0 \xrightarrow{\partial_0} Y^0 \xrightarrow{\partial^0} Y^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

在 $\mathcal{Y}$ 中的 R^{op}-模，使得对于每个 $Z \in \mathcal{Z}$，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(Z,\ Y_\bullet)$ 都是正合的。$(\mathcal{Z},\ \mathcal{Y})$-戈伦斯坦内射 R^{op}-模的类记为 $\mathcal{GI}_{(\mathcal{Z},\mathcal{Y})}$。若 $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}$，则使用记号 $\mathcal{GI}_{\mathcal{Y}}$。特别地，我们可以考虑类 $\mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$ 和$\mathcal{GI}_{\mathcal{N}\cap\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})}$，并通过 Foxby 等价证明它们之间的以下关系。

从现在起，我们令

$$\mathfrak{M} := \mathcal{A}_C(R) \cap \mathcal{M} \ \text{ and } \ \mathfrak{N} := \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{N}$$

以简化后续的一些记号。

命题 3.1 (相对于 2nd Foxby 等价的戈伦斯坦内射性)。若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则对每个 $M \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 和 $N \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，以下断言成立：

(1) $N \in \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$ 当且仅当 $N \otimes_S C \in \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$。 *(2)* $M \in \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,M) \in \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$。

证明。我们先证明 (1)。对于“仅当”部分，设 $N \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$。于是，$N \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 属于一个正合复形 $Y_\bullet$，其分量属于 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，且对所有 $Y \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，$\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(Y, Y_\bullet)$ 都是正合的。由引理 2.2 (2)，$Y_\bullet$ 是一个正合复形，其分量属于 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，并且 $\mathrm{Ker}(\partial^0) \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$。另一方面，由于 ${}_{R^{\mathrm{op}}}C_{S^{\mathrm{op}}}$ 是忠实半对偶化的，我们有 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$ 是厚子范畴，因此 $Y_\bullet$ 是一个正合复形，其圈属于 $\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$。由 (a1) 和命题 2.3 可得，$Y_\bullet \otimes_S C$ 是一个分量属于 $\mathfrak{N}$ 的正合复形。特别地，$N \otimes_S C \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0 \otimes_S C)$。还需证明，对每个 $B \in \mathfrak{N}$，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(B, Y_\bullet \otimes_S C)$ 都是正合的。由引理 2.11 (2) 和 2nd Foxby 等价，我们得到自然同构 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(B, Y_\bullet \otimes_S C) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,B)\ Y_\bullet)$；其中 $\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)\ Y_\bullet)$ 是正合的，因为 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,B) \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。

对于“若”部分，设 $N \otimes_S C \in \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$。那么，$N \otimes_S C \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 是一个正合复形 $B_\bullet$，其分量属于 $\mathfrak{N}$，并且对所有 $B \in \mathfrak{N}$，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(B, B_\bullet)$ 都是正合的。另一方面，由于 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 是厚子范畴，且 $N \otimes_S C \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$，因此 $B_\bullet$ 是一个圈属于 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 的正合复形，所以根据 (b1)，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B_\bullet)$ 是正合的。

此外，我们得到 $N \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, N \otimes_S C) \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, \partial^0))$，因为 $N \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$。还需证明，对于每个$B \in \mathfrak{N}$，$\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B), \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B_\bullet))$ 是正合的；但这可仿照“仅若”部分的证明得到。

对于第 (2) 部分，只需注意到 $M \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, M) \otimes_S C$，因此根据第 (1) 部分，我们有 $M \in \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$ 当且仅当 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, M) \in \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$。□

以下结论由前面的命题直接得到。

推论 3.2（Gorenstein 内射 Foxby 等价）。如果 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶的，那么存在范畴等价

$$\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})} \underset{\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ \sim)}{\overset{-\otimes_S C}{\rightleftarrows}} \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}} \cap \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$$

前面的命题和推论是以下结果的相对版本：[9, 引理 4.2、4.4，命题 4.3、4.5，定理 4。6]。

关于相对 Gorenstein 平坦模，若给定 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Mod}(S)$ 和$\mathcal{Y} \subseteq \mathrm{Mod}(S^{\mathrm{op}})$，回忆一下 [23, 定义 2.1]：$S$-模 M 称为*Gorenstein* $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$-平坦，如果存在一个正合复形

$$X_\bullet = \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X^0 \xrightarrow{\partial^0} X^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

由 $\mathcal{X}$ 中的模构成，使得对每个 $Y \in \mathcal{Y}$，$Y \otimes_S X_\bullet$ 都是正合的，且 $M \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$。Gorenstein $(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})$-平坦 S-模的类记作 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$。

现在我们给出前两个结果的 Gorenstein 平坦版本。

命题 3.3（Foxby 等价下的相对 Gorenstein 平坦性 1st）。若${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则对每个 $M \in \mathcal{B}_C(S)$ 和 $N \in \mathcal{A}_C(R)$，以下断言成立。

(1) $M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 当且仅当，$\mathrm{Hom}_S(C, M) \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$。

(2) $N \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$ 当且仅当，$C \otimes_R N \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。

证明。我们只证明(1)，因为(2)可由(1)立即推出。对于“仅当”部分，设 $M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。那么，$M \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 位于一个正合复形中

$$X_\bullet = \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X^0 \xrightarrow{\partial^0} X^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

其中，对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$X_k, X^k \in \mathcal{M}^C(S)$，且 $N \otimes_S X_\bullet$ 对每个 $N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 都是正合的。注意，由于对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$M, X_k, X^k \in \mathcal{B}_C(S)$，并且$\mathcal{B}_C(S)$ 是厚子范畴，$X_\bullet$ 是一个圈位于 $\mathcal{B}_C(S)$ 中的正合复形，因此根据(b1)，$\mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet)$ 是一个正合复形，其各项属于 $\mathfrak{M}$，这由命题 2.3 得出。此外，$\mathrm{Hom}_S(C, M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_S(C, \partial^0))$，因此只需证明，对每个 $B \in \mathfrak{N}$，$B \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet)$ 都是正合的。对于这样的 B，我们知道 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B) \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。于是，由引理 2.11(3)，有

$$\begin{aligned} B \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet) &\simeq [\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)] \otimes_S [C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet)] \\ &\simeq [\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)] \otimes_S X_\bullet. \end{aligned}$$

由于 $[\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B)] \otimes_S X_\bullet$ 是正合的，因此 $B \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C,\ X_\bullet)$也是正合的。

对于“如果”部分，设 $\mathrm{Hom}_S(C,\ M)\ \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$，也就是说，$\mathrm{Hom}_S(C,\ M)\ \simeq$Ker($\partial^0$) 位于一个正合复形中

$$A_\bullet = \cdots \to A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \xrightarrow{\partial_0} A^0 \xrightarrow{\partial^0} A^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

其分量属于 $\mathfrak{M}$，且对每个 $B \in \mathfrak{N}$，$B \otimes_R A_\bullet$ 都是正合复形。注意，$A_\bullet$ 是一个圈属于 $\mathcal{A}_C(R)$ 的正合复形，因此 $C \otimes_R A_\bullet$ 的分量属于 $\mathcal{M}^C(S)$，且 $M \simeq C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C,\ M) \simeq \mathrm{Ker}(C \otimes_R \partial^0)$ 是正合的。按照“仅当”部分的论证，可以证明对每个$N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，$N \otimes_S [C \otimes_R A_\bullet]$ 都是正合的。□

下面的结论是显然的。

推论3.4（Gorenstein 平坦 Foxby 等价）。若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则存在一个范畴等价

$$\mathcal{A}_C(R) \cap \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})} \underset{\mathrm{Hom}_S(C,\ \sim)}{\overset{C\otimes_R \sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))} \cap \mathcal{B}_C(S)$$

给定 $\mathcal{X} \subseteq$ 模(S)和 $\mathcal{Y} \subseteq$ 模(S^{op})，在 [23] 作者们找到了若干充分条件，使得 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 在扩张下封闭，并构成某个阿贝尔模型结构的余纤维对象类。具体而言，若 $(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ 是定义在 S 上的 Tor-正交完备对偶对，且 $\mathcal{X}$可解，则 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 可解，并且在 Mod(S) 上存在一个遗传阿贝尔模型结构，使得$\mathcal{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$（分别为 $\mathcal{X}$）构成（分别为平凡）余纤维对象类，而 $\mathcal{X}^\perp$（分别为$[\mathcal{GF}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})}]^\perp$）构成（分别为平凡）纤维对象类。我们得到关于 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 的同伦方面的如下结果。

推论 *3.5*（相对 *Gorenstein* 平坦对象的同伦方面）。若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，且 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是 R 上的完备 *Tor*-正交对偶对，其中 $\mathcal{M}$ 可解且 $S \in \mathcal{M}^C(S)$，则 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 可解，并且在 *Mod*(S) 上存在一个遗传阿贝尔模型结构，使得 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$（分别地，$\mathcal{M}^C(S)$）是（平凡）余纤维对象类，而 $[\mathcal{M}^C(S)]^\perp$（分别地，$[\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}]^\perp$）是（平凡）纤维对象类。此外，其同伦范畴与稳定范畴三角等价

$$[\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S),\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))} \cap [\mathcal{M}^C(S)]^\perp]/\sim,$$

其中 $[\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))} \cap [\mathcal{M}^C(S)]^\perp$ 是一个 *Frobenius* 范畴，其中 $\mathcal{M}^C(S) \cap [\mathcal{M}^C(S)]^\perp$ 是投射 - 内射对象类，并且对于 $f, g\colon\ M \to N$，有 $f \sim g$ 当 $f-g$ 经由 $\mathcal{M}^C(S) \cap [\mathcal{M}^C(S)]^\perp$中的一个对象分解时。

证明。首先，注意到 $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}_C(R)$ 是可解的，因为 $\mathcal{A}_C(R)$。然后由命题 2.6 (5) 和 (6)，以及完美对偶对的性质，可得$(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是 S 上的完备对偶对，且 $\mathcal{M}^C(S)$ 可解；根据命题2.12，该对偶对也是 Tor-正交的。所述模型结构的存在性由前面对 [23]的讨论可得。最后，其同伦范畴的描述是 [14,命题 2.2 和定理 4.3] 的推论。□

现在我们通过 Pontryagin 对偶探讨相对 Gorenstein 内射对象与 Gorenstein 平坦对象之间的关系。

命题 3.6 (戈伦斯坦对偶关系)。 以下断言对每个$M \in$ 模(S)和 $N \in$ 模(R)均成立。

(1) 若 $M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$，则 $M^+ \in \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$。

(2) 若 $N \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$，则 $N^+ \in \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$。

证明。 对于 (1)，令 $M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。于是， $M \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 属于一个正合复形

$$X_\bullet = \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X^0 \xrightarrow{\partial^0} X^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

其中 $X_k, X^k \in \mathcal{M}^C(S)$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，满足 $N \otimes_S X_\bullet$ 对每个$N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$均为正合。由命题 2.4,

$$X_\bullet^+ = \cdots \xrightarrow{(\partial^1)^+} (X^1)^+ \xrightarrow{(\partial^0)^+} (X^0)^+ \xrightarrow{(\partial_0)^+} (X_0)^+ \xrightarrow{(\partial_1)^+} (X_1)^+ \to \cdots$$

是一个分量属于 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 且 $M^+ \simeq \mathrm{Ker}((\partial_0)^+)$ 的正合复形。接下来只需证明，对每个 $N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，$\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(N, X_\bullet^+)$ 都是正合的。因为，

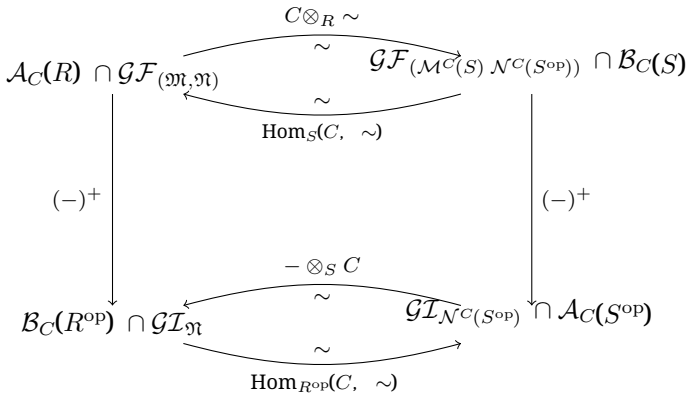
$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(N, X_\bullet^+) &\simeq \mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, N \otimes_S C), \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, X_\bullet^+ \otimes_S C)) && \text{[2nd. Foxby eq.]}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(N \otimes_S C, X_\bullet^+ \otimes_S C) && \text{[Lemma 2.11 (2)]}\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(N \otimes_S C, [\mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet)]^+) && \text{[11, Thm. 3.2.11]}\\
&\simeq [(N \otimes_S C) \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, X_\bullet)]^+ && \text{[11, Thm. 2.1.10]}\\
&\simeq [N \otimes_S X_\bullet]^+ && \text{[17, Thm. 6.4 (c)]}
\end{aligned}$$

其中 $N \otimes_S X_\bullet$ 是正合的， $[N \otimes_S X_\bullet]^+$也正合。因此 $\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(N, X_\bullet^+)$ 是正合的。

现在考虑（2）。由（1）可知$[\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}]^+ \subseteq \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}$。另一方面， R是一个（忠实）半对偶化（R, R）-双模，而 $\mathcal{A}_R(R) = \tilde{\ } \mathrm{Mod}(R)$ 且 $\mathcal{B}_R(R^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Mod}(R^{\mathrm{op}})$。因此，对于 R 上任意一个对偶对（$\mathcal{M}$,$\mathcal{N}$），我们有 $\tilde{\mathcal{M}}^R(R) = \tilde{\mathcal{M}} \cap \mathcal{A}_R(R) = \tilde{\mathcal{M}}$ 且 $\tilde{\mathcal{N}}^R(R^{\mathrm{op}}) = \tilde{\mathcal{N}} \cap \mathcal{B}_R(R^{\mathrm{op}}) = \tilde{\mathcal{N}}$。前述包含关系意味着 $[\mathcal{GF}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}]^+ \subseteq \mathcal{GI}_{\mathcal{N}}$。特别地，由于（$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$）根据 [16, 命题 2.8], 是 R 上的一个对偶对，我们得到 $[\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}]^+ \subseteq \mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}$。 □

以下结论是推论 3.2、3.4、命题3.6以及以下事实的推论：$(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 和 $(\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})\ \mathcal{B}_C(S))$ 是对称对偶对。

推论 3.7 (Gorenstein 平坦 Foxby 等价与对偶)。 若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则在下图中，水平方向的箭头均为等价：



此时自然会产生一个问题：是否可以用.....补全前述图表?

$$(-)^{+}\colon \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})\cap\mathcal{GI}_{\mathfrak{N}}\to\mathcal{A}_C(R)\cap\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$$

and

$$(-)^{+}\colon \mathcal{GI}_{\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})}\cap\mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})\to\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S),\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}\cap\mathcal{B}_C(S).$$

我们尚不清楚一般情况下是否如此，但至少可以通过稍微修改前面定义的相对 Gorenstein 内射对象类和 Gorenstein 平坦对象类，来改进命题 3.6 中的对偶关系。具体而言，我们需要考虑某些模类的核。

下面给出受 [9,§2.7] 启发的记号：

$$\mathcal{H}(\mathfrak{N}) := {}^{\perp}\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N},$$
$$\mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})) = {}^{\perp}[\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})]\cap\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}),$$
$$\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}) := \{M\in \mathsf{Mod}(S)\ :\ M\simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,N) \text{ for some } N\in\mathcal{H}(\mathfrak{N})\}.$$

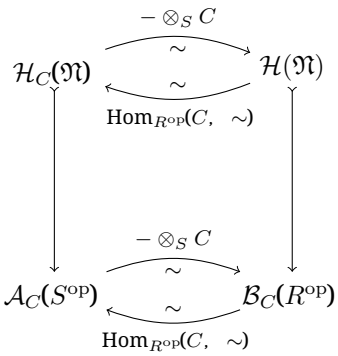
以下两个结果刻画完全正交补 ${}^{\perp}\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，并联系类 $\mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$、$\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 和 $\mathcal{H}(\mathfrak{N})$。这些是 [9, Lem. 3.3 & Prop. 3.4]，的相对版本，可以用类似的论证证明。

命题 3.8 ($\mathfrak{N}$ 和 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$的核）。以下断言成立：

(1) 对于每个 $M\in$ 模(S^{op})，以下命题等价：*(a)* $M\in{}^{\perp}[\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})]$。*(b)* $M\otimes_S C\in{}^{\perp}\mathfrak{N}$ 且对于每个 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$，$\mathrm{Tor}_i^S(M,C)=0$。*(2)* 对于每个 $N\in$ 模(S^{op})，以下命题等价：*(a)* $N\in\mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$。*(b)* $N\in\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$。*(c)* $N\otimes_S C\in\mathcal{H}(\mathfrak{N})$。

由 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$的定义及前一个命题可立即得到以下结论。

推论 3.9 (核的 Foxby 等价)。在下图中，水平箭头是等价，垂直箭头是范畴嵌入：



如前所述，$(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ 是 R上的一个对偶对。以下关系可按照命题 3.1 和 3.3中的方法证明，并利用命题 3.8。

命题 3.10 (核的 Gorenstein 内射与平坦 Foxby 等价)。 设${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的。若 $M \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 且 $N \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，则：

(1) $N \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 当且仅当 $N \otimes_S C \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})}$。

(2) $M \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})}$ 当且仅当，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, M) \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。

若 $N \in \mathcal{B}_C(S)$ 且 $M \in \mathcal{A}_C(R)$，则：

(3) $N \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 当且仅当，$\mathrm{Hom}_S(C, N) \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$。

(4) $M \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$ 当且仅当，$C \otimes_R M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$。

在某些条件下，命题 3.6 中的对偶关系可以得到改进。具体而言，若 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 是乘积封闭的双完备，则

$$(\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}, \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})})$$

是一个完美对偶对。另一方面，如果我们假设对 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 和 $(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是双完备的，且 $\mathcal{M}$ 对直积封闭，那么根据 [3,例 3.10 (5)] $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 是双完备的；并且，由于 $\mathcal{A}_C(R)$ 具有这一闭包性质（见 [20, 定理 3.3 (1)][1]），$\mathfrak{M}$ 对直积封闭。对 $(\mathcal{A}_C(R)\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是双完备的（或者等价地，$({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})], \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个由集合余生成的余挠对），例如当 C_R 是自小且 w-倾斜时（见 [5,推论 3.12]）。请注意， $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 总是余解消的，因此对 $({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})], \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 确实是遗传的。根据 [3,推论 3.14]，我们得到以下结果。

命题 3.11 （核的 Gorenstein 对偶关系）。 若（${}^{\perp}[\mathcal{B}_C$（R^{op}）], $\mathcal{B}_C$（R^{op}））是一个由集合余生成的余挠对，且（$\mathcal{M},\mathcal{N}$）是双完备的，并且 $\mathcal{M}$ 对直积封闭，那么 $\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$ 是可解的，且（$\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}, \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})}$）是一个完美对偶对。特别地，以下结论对每个 $N \in$ 模（R）均成立：

- $N \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$ *if, and only if,* $N^+ \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})}$.

关于同伦方面，我们由 [3,定理 5.3] 得到以下模型结构。

命题 3.12 （相对于核的相对 Gorenstein 平坦对象的同伦方面）。若（${}^{\perp}[\mathcal{B}_C$（R^{op}）], $\mathcal{B}_C$（R^{op}））是一个由集合余生成的余挠对，且（$\mathcal{M},\mathcal{N}$）是双完备的，并且 $\mathcal{M}$对直积封闭，那么在模（R）上存在唯一的遗传阿贝尔模型结构，使得 $\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$（分别为 $\mathfrak{M}$）是（平凡）余纤维对象类，而 $\mathfrak{M}^{\perp}$（分别为 $[\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}]^{\perp}$）是（平凡）纤维对象类。此外，其同伦范畴与稳定范畴三角等价

$$[\mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))} \cap \mathfrak{M}^{\perp}]/\sim,$$

其中，对于 $f, g\colon\ M \to N$，有 $f \sim g$ 当且仅当 $f - g$ 经由 $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^{\perp}$ 中的某个对象分解。

关于对应的 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 和 $\mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$，我们寻找这些类之间存在对偶关系的条件。首先，我们注意到以下几点。

引理 3.13. 等式 $\mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})) = \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 成立。

[1]在所引用的文献中，作者假设 ${}_RC_S$ 是半对偶化的，并证明 $\mathcal{A}_C(R^{\mathrm{op}})$ 对乘积封闭。在我们的情形中，请记住， ${}_SC_R$ 是半对偶化的，当且仅当 ${}_{R^{\mathrm{op}}}C_{S^{\mathrm{op}}}$ 是半对偶化的。

证明。首先，设 $N \in \mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$。于是， $N \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B)$ 其中 $B \in \mathfrak{N}$ 和 $N \in {}^{\perp}[\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})]$。注意到 $B \in \mathcal{H}(\mathfrak{N})$。事实上，设 $B' \in \mathfrak{N}$。由引理 2.11(2)，可得

$$\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(B, B') \simeq \mathrm{Ext}^i_{S^{\mathrm{op}}}(N, \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B')) = 0$$

因为 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ B') \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。因此， $B \in \mathcal{H}(\mathfrak{N})$，于是 $N \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$。

另一个包含关系可以类似地证明。 □

根据前面的引理，注意到 $\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))} = \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})))}$，且 $\mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))} = \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。因此，$\mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 和 $\mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 是 [3], 中由对偶对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 诱导出的相对 Gorenstein 平坦模和相对 Gorenstein 内射模。不过，我们并不清楚前述对偶对在什么条件下是双完备的，因此无法通过 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 的双完备性得到命题 3.11 中所述的对偶关系。若将对偶限制在 Auslander类与Bass类上，则可通过 Foxby 等价克服这一局限。

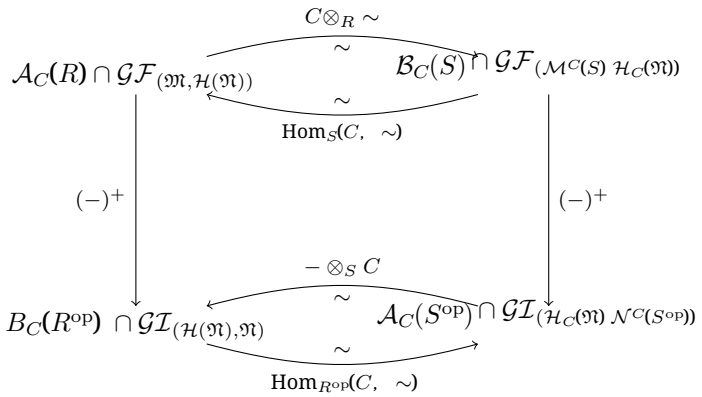
命题 3.14. 若 $M \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$，则 $M^+ \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。此外，若 $M \in \mathcal{B}_C(S)$，则逆命题也成立；若还满足 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，$({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})], \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个由集合余生成的余挠对，并且$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是双完备的，且 $\mathcal{M}$ 对直积封闭。

证明. 第一个断言由命题 3.6 (1) 得出。为证明逆命题，设 $M \in \mathcal{B}_C(S)$ 满足 $M^+ \in \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。那么，根据命题 3.10 (1)，对于某个 $B \in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})}$，我们有 $M^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)$。另一方面，利用第一个 Foxby 等价，我们可以写成 $M \simeq C \otimes_R A$，其中 $A \in \mathcal{A}_C(R)$。于是， $M^+ \simeq (C \otimes_R A)^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, A^+)$。由于

$$A^+ \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, A^+) \otimes_S C \simeq \mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B) \otimes_S C \simeq B \in B_C(R^{\mathrm{op}}) \cap \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{N}),\mathfrak{N})},$$

由命题 3.11 可知 $A \in \mathcal{GF}_{(\mathfrak{M},\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$，因此 $M \simeq C \otimes_R A \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 由命题3.10 (4). □

推论 3.15（Gorenstein 平坦 Foxby 等价与核的对偶）。 若 ${}_SC_R$是忠实半对偶化的， （${}^{\perp}[\mathcal{B}_C$（R^{op}）], $\mathcal{B}_C$（R^{op}）是一个由集合余生成的余挠对，且（$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$）是双完备的，并且 $\mathcal{M}$ 对直积封闭，那么我们有如下图表，其中水平箭头均为等价:



我们最后给出的相对 Gorenstein 内射和相对 Gorenstein 平坦，正是源自本节开头提到的 Gorenstein G_C-FP$_n$-内射的定义。我们对这些版本的处理方式涉及对偶 Cohen-Macaulay 对象；这些对象由 Beligiannis 和 Reiten 在 [4, 第 V 章，第 §4]中定义。给定阿贝尔范畴 M 中的一个对象 和一个自正交类 ω 对象 $\mathcal{C}$，即$\mathrm{Ext}^{\geq 1}_{\mathcal{C}}$ $(\omega,\ \omega)$ $= 0$，称 M 为相对于 ω 的对偶 Cohen-Macaulay 对象， $M \in \omega^{\perp}$如果 ω存在一个

$$\cdots \to W_1 \xrightarrow{\partial_1} W_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

使得对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{Ker}(\partial_k)$ $\in \omega^{\perp}$ 。

引理 3.16. 以下断言成立：

(1) $\mathrm{Ext}^{\geq 1}_{S^{\mathrm{op}}}(\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})) = 0$。特别地， $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 是自正交的。*(2)* 存在一个范畴等价

$$[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp} \cap \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}}) \underset{\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ \sim)}{\overset{-\otimes_S C}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}) \cap [\mathcal{H}(\mathfrak{N})]^{\perp}$$

(3) 如果此外 $\mathcal{N}$ 对扩张封闭，那么 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 也如此。

证明。 （1）和（3）由命题 2.6 （1）及引理 3.13 得出。另一方面， （2）由引理 2.11 得出。 □

若记 $\omega = \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$，那么按照 [4], 中的记号，令 $\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$表示相对于 S^{op} 的对偶 Cohen-Macaulay $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$-模类。下面给出命题3.1的 Cohen-Macaulay 类比。

命题3.17 （对偶 Cohen-Macaulay 模的 Foxby 等价）。 若 ${}_SC_R$ 是忠实半对偶化的，则对于每个 N $\in \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 和 $M \in \mathcal{A}_C(S^{\mathrm{op}})$，以下断言成立：

(1) $M \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$ 当且仅当 $M \otimes_S C \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}(\mathfrak{N}))$。*(2)* $N \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}(\mathfrak{N}))$ 当且仅当$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, N)$ $\in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$。

证明。 由命题 3.1 的证明中给出的论证以及前一个引理的第 (2) 部分可得。 □

以下结果是 [9,命题 3.7 和定理 3.9] 的推广。

命题 3.18 ($\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$ 的刻画)。 考虑关于 $M \in$ 模(S^{op}) 的以下断言：

(a) $M \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$。*(b)* $M \simeq$ 核(∂^0)属于某个正合复形

$$\Gamma\colon \cdots \to N_1 \to N_0 \xrightarrow{\partial_0} I^0 \xrightarrow{\partial^0} I^1 \to \cdots$$

其中 $N_k \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 且 $I^k \in \mathcal{I}(S^{\mathrm{op}})$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立，并且对于每个 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$，$\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(H, \Gamma)$ 都是正合的。

(c) 存在一个短正合列

$$0 \to L \to N \to M \to 0$$

与 $N \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 及 $L \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$。

那么，蕴含关系 *(a)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(b)* 总是成立的。若此外$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是双完备的，且$({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})],\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个由集合余生成的余挠对，则 *(b)* $\Rightarrow$ *(a)* 成立，并且这三个断言等价。特别地，$M\in\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$ 当且仅当$M\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，且存在一个 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$-分解

$$\cdots\to N_1\xrightarrow{\partial_1}N_0\xrightarrow{\partial_0}M\to 0$$

使得核$(\partial_k)\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$ 对每个 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$都成立。也就是说，

$$\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))=\mathcal{WGI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}),\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$$

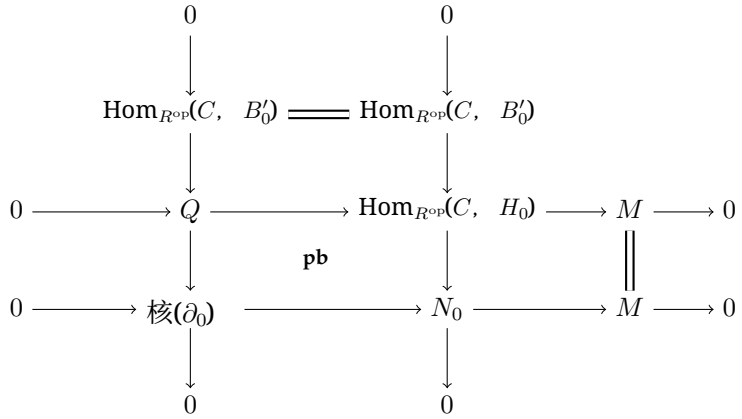
按照 [2]的记号。

证明。(a) $\Rightarrow$(c)显然成立。对于(c) $\Rightarrow$(b)，考虑一个 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$-分解 $\cdots\to W_1\xrightarrow{\partial_1}W_0\xrightarrow{\partial_0}L\to 0$，其中核 $\mathrm{Ker}(\partial_k)\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$ 对每个$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 都成立。又由于 $L\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，该分解在对每个 $H\in\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$应用函子 $\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(H,\sim)$后仍然正合。此外，短正合列 $0\to L\to N\to M\to 0$ 在应用 $\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(H,\sim)$ 后也仍然正合（同样因为 $L\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$）。另一方面，由引理 3.16 (1)，可得 $N\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$；又由于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$ 是余解消的，因此有 $M\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$。现在考虑 M的一个内射余分解 $0\to M\to I^0\to I^1\to\cdots$。由于$M\in[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，$\mathcal{I}(S^{\mathrm{op}})\subseteq[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，且 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$ 是余解消的，因此前述余分解的圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，所以对每个 $H\in\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$应用 $\mathrm{Hom}_{S^{\mathrm{op}}}(H,\sim)$后仍然正合。将 L的 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$-分解与 M的内射余分解拼接起来，即得到所需的复形。

最后，对于 (b) $\Rightarrow$ (a)，设给定一个复形，如 Γ。运用标准的同调代数论证及引理 3.16 (1)，我们可注意到 Γ 在 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$ 中有圈。从此处开始，我们沿用 [9, 定理 3.9 (1) 的证明 $\Rightarrow$ (3)]中的论证。考虑短正合列 $0\to\mathrm{Ker}(\partial_0)\to N_0\to M\to 0$，其中 $N_0\simeq\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,B_0)$，且 $B_0\in\mathfrak{N}$。根据命题 3.11 之前的说明，$(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ 是一个双完备对偶对。特别地，$({}^{\perp}\mathfrak{N},\mathfrak{N})$ 是一个完备余挠对，因此我们可以考虑一个短正合列 $0\to B_0'\to H_0\to B_0\to 0$，其中$B_0'\in\mathfrak{N}$ 且 $H_0\in\mathcal{H}(\mathfrak{N})$。由于 $B_0'\in\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$，该序列

$$0\to\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,B_0')\to\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,H_0)\to N_0\to 0$$

是正合的。现在对 $\mathrm{Ker}(\partial_0)\to N_0\leftarrow\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C,\ H_0)$ 取拉回，得到如下具有正合行和列的交换图



其中 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, H_0) \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$。注意，$\mathrm{Ker}(\partial_0) \in \mathcal{WGI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{n})\,\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。此外，$\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B_0') \in \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，$\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 以及 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 根据命题 2.6 (1) 在扩张下封闭。于是由 [2, 引理 3.23] 的对偶我们有$Q \in \mathcal{WGI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{n})\,\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。因此，我们可以从 Q 开始重复此前的过程，从而得到一个 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$-分解 M，其圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\perp}$，进而证明 $M \in \mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$。□

我们知道，$\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$ 与 $(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$-Gorenstein 内射模有关。首先，我们从 [2, 定义 3.6] 回顾，$\mathcal{Z}, \mathcal{Y}$ 是 S^{op}-模的类对，若满足以下条件，则称其为*GI*-可容许：

- 每个 S_{op}-模都可以嵌入某个 S_{op}-模 $\mathcal{Y}$ 中；
- 对于每个 $Z \in \mathcal{Z}$、$Y \in \mathcal{Y}$ 和 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，都有 $\mathrm{Ext}^i_{S^{\mathrm{op}}}(Z, Y) = 0$；
- $\mathcal{Z}$ 且 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}$ 对有限余积封闭，而 $\mathcal{Y}$ 对扩张封闭；并且
- 对于每个 $Y \in \mathcal{Y}$，都存在一个短正合列 $0 \to Y' \to V \to Y \to 0$，其中 $Y' \in \mathcal{Y}$ 且 $V \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z}$。

例 *3.19.* 若 $({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})], \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是由集合余生成的余挠对，且 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 是满足 $S \in \mathcal{M}^C(S)$ 的双完备对偶对，则对 $(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是 *GI*-可容许的。事实上，首先注意到，根据命题 *2.6 (6)*，$(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是完备（特别是完美）对偶对，因此 $\mathcal{I}(S^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。由此可得，每个 S^{op}-模都能嵌入 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 中的一个（内射）模。根据引理 *3.13*，既然 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}) = \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}) \cap {}^{\perp}\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$，*GI*-可容许对定义中的第二个条件显然成立。此外，由于 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})$ 对有限直和封闭，且 $\mathrm{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, \sim)$ 与有限直和可交换，因此 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 具有相同的封闭性；显然，$\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 也具有此性质。此外，由于 $\mathcal{M}^C(S)$ 对扩张封闭，且对偶对 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是对称的，因此 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 对扩张封闭。最后，运用前一个命题证明 *(b)* $\Rightarrow$ *(a)* 中相同的论证可知，$\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$ 中的每个模都是 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 中某个模的满同态像，其核属于 $\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}})$。

命题 3.20. 若 $({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})], \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$ 是一个由集合余生成的余挠对，且 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 是一个具有 $S \in \mathcal{M}^C(S)$ 的双完备对偶对，那么

$$\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})) = \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}), \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}.$$

证明. 一方面，由命题 3.18 可得 $\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})) = \mathcal{WGI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{n})\,\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$。另一方面，$\mathcal{WGI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{n})\,\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))} = \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{n})\,\mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$ 可由[2, 定理 3.32], 推出，因为根据前一个例子，该对 $(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))$ 是 GI-可容许的。□

我们现在提出并研究 $\mathrm{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$ 的 Gorenstein 平坦对应概念。接下来，我们将考虑以下记号：

$$\mathcal{H}(\mathfrak{M}) := \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^{\perp},$$
$$\mathcal{H}^C(\mathfrak{M}) := \{M \in \mathsf{Mod}(S) \ :\ M \simeq C \otimes_R A \text{ for some } A \in \mathcal{H}(\mathfrak{M})\}.$$

定义 3.21。我们称一个 S-模 G 是弱$(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M}), \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$-戈伦斯坦平坦的，如果存在一个 $\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$-余分解 G，记作

$$0 \to G \to H^0 \xrightarrow{\partial^0} H^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

使得对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有$\mathrm{Ker}(\partial^k) \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$ 。弱$(\boldsymbol{\mathcal{M}^C(S)},\boldsymbol{\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})})$- 戈伦斯坦平坦 S-模的定义类似，只需考虑 $\mathcal{M}^C(S)$-余分解 G，其圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$。

令$\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 和$\mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 分别表示弱 $(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$-戈伦斯坦平坦模和弱 $(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))$-戈伦斯坦平坦 S-模的类。在证明这些类的刻画和性质之前，我们先在以下结果中总结 $\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$ 的性质，并给出 $\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$ 的一条附加性质。

引理 3.22。 以下断言成立：

(1) 对每个 $M \in$ 模(S)，以下命题等价：*(a)* $M \in \mathcal{M}^C(S) \cap [\mathcal{M}^C(S)]^\perp$。*(b)* $M \in \mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$。*(c)* $\mathrm{Hom}_S(C, M) \in \mathcal{H}(\mathfrak{M})$。

(2) 存在一个范畴等价

$$\mathcal{H}(\mathfrak{M}) \underset{\mathrm{Hom}_S(C,\sim)}{\overset{C\otimes_R \sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$$

(3) 存在一个范畴等价

$$[\mathcal{H}(\mathfrak{M})]^\perp \cap \mathcal{A}_C(R) \underset{\mathrm{Hom}_S(C,\sim)}{\overset{C\otimes_R \sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})]^\perp$$

(4) 存在一个范畴等价

$$[\mathcal{H}(\mathfrak{M})]^\top \cap \mathcal{A}_C(R) \underset{\mathrm{Hom}_S(C,\ \sim)}{\overset{C\otimes_R \sim}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$$

证明。

（1）对于（a）⇒（b），令 $M \in \mathcal{M}^C$（S）$\cap[\mathcal{M}^C$（S）$]^\perp$。于是，特别地，$M \simeq C\otimes_R A$对于某个 $A \in \mathfrak{M}$。我们证明 $A \in \mathfrak{M}^\perp$。因此令 $A' \in \mathfrak{M}$，则由引理2.11（1）可得

$$\mathrm{Ext}^i_R(A', A) \simeq \mathrm{Ext}^i_S(C \otimes_R A', C \otimes_R A) \simeq \mathrm{Ext}^i_S(C \otimes_R A', M) = 0.$$

因此，$A \in \mathfrak{M}^\perp$ 所以 $M \simeq C \otimes_R A$ 与 $A \in \mathcal{H}$（$\mathfrak{M}$）。

蕴含关系（b）⇒（c）是第一个 Foxby 等价的直接推论。

最后，对于 (c) ⇒(a)，假设 $\mathrm{Hom}_S(C, M) \in \mathcal{H}(\mathfrak{M})$。那么，$M \simeq C \otimes_R \mathrm{Hom}_S(C, M) \in \mathcal{M}^C(S)$由命题 2.3可得。现在令 $C \otimes_R A' \in \mathcal{M}^C(S)$(也就是说，$A' \in \mathfrak{M}$)。再次由引理 2.11 (1) 得到

$$\mathrm{Ext}^i_S(C \otimes_R A', M) \simeq \mathrm{Ext}^i_R(A', \mathrm{Hom}_S(C, M)) = 0.$$

那么， $M \in [\mathcal{M}^C(S)]^{\perp}$ 也成立。

（2）这是（1）的直接推论。

（3）令 $A \in [\mathcal{H}(\mathfrak{M})]^{\perp} \cap \mathcal{A}_C(R)$，并考虑 $H \in \mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$，即 $H \simeq C \otimes_R A'$，其中 $A' \in \mathfrak{M}$。根据 [17, 定理 6.4(a)]，有

$$\operatorname{Ext}^i_S(H, C \otimes_R A) \simeq \operatorname{Ext}^i_S(C \otimes_R A', C \otimes_R A) \simeq \operatorname{Ext}^i_R(A', A) = 0.$$

因此， $C \otimes_R A \in \mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})]^{\perp}$。$\operatorname{Hom}_S(C, \sim)$ 将 S-模从 $\mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$ 映射到 R-模中的 $[\mathcal{H}(\mathfrak{M})]^{\perp} \cap \mathcal{A}_C(R)$ 这一事实，可以用类似的方法证明。

（4）令 $A \in [\mathcal{H}(\mathfrak{N})]^{\top} \cap \mathcal{A}_C(R)$，并考虑 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$，即 $H \simeq \operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)$，其中 $B \in \mathcal{H}(\mathfrak{N})$。根据引理 2.11 （3），我们有

$$\operatorname{Tor}^i_S(H, C \otimes_R A) \simeq \operatorname{Tor}^i_S(\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B), C \otimes_R A) \simeq \operatorname{Tor}^i_R(B, A) = 0.$$

因此， $C \otimes_R A \in \mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\top}$。$\operatorname{Hom}_S(C, \sim)$ 将 S-模从 $\mathcal{B}_C(S) \cap [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\top}$ 映到 R-模中的事实，可以用类似的方法证明。

□

以下结果说明，在第一种 Foxby 等价下， S-模在$\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 中的行为。

命题 3.23。 以下断言对每个 $N \in \mathcal{B}_C(S)$ 和 $M \in \mathcal{A}_C(R)$均成立：

(1) $N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 当且仅当 $\operatorname{Hom}_S(C, N) \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{M}),\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$。

(2) $M \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{M}),\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$ 当且仅当$C \otimes_R M \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$。

证明。 对于第 (1) 部分，若 $N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 存在一个 $\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$-核余解

$$\varepsilon\colon 0 \to N \to H^0 \xrightarrow{\partial^0} H^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

使得对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$， N 的核 $\operatorname{Ker}(\partial^k) \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\top}$。由于 $N \in \mathcal{B}_C(S)$，$\mathcal{H}^C(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{B}_C(S)$，且 $\mathcal{B}_C(S)$是余解消的， ε 在 $\mathcal{B}_C(S)$中有圈，因此

$$\operatorname{Hom}_S(C, \varepsilon)\colon 0 \to \operatorname{Hom}_S(C, N) \to \operatorname{Hom}_S(C, H^0) \xrightarrow{\partial^0} \operatorname{Hom}_S(C, H^1) \xrightarrow{\partial^1} \cdots$$

是正合的。由引理 3.22 (2)，$\operatorname{Hom}_S(C, \varepsilon)$ 是 $\operatorname{Hom}_S(C, N)$ 的一个 $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$-余解。此外，由引理 3.22 (4)，$\operatorname{Hom}_S(C, \varepsilon)$ 在 $[\mathcal{H}(\mathfrak{N})]^{\top}$ 中有圈。于是，$\operatorname{Hom}_S(C, N) \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}(\mathfrak{M}),\mathcal{H}(\mathfrak{N}))}$。

“若”部分可用类似方法证明，而 (2) 是 (1) 的推论。 □

在 $\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 中的模在某些条件下可刻画为其他类型的相对 Gorenstein 平坦模，正如我们将在命题3.25中所示。我们需要以下性质。

引理 3.24。 以下断言成立。

(1) $\operatorname{Tor}^S_{\geq 1}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}), \mathcal{M}^C(S)) = 0$.

(2) If $0 \to K \to Q \to M \to 0$ *is a short exact sequence with* $K \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S),\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ *and* $M \in \mathcal{M}^C(S)$*, then* $Q \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S),\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ *provided that* $\mathcal{M}$ *is closed under extensions.*

证明。 对于 (1)，令 $M \in \mathcal{M}^C(S)$ 且 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$，即 $M \simeq C \otimes_R A$ 满足$A \in \mathfrak{M}$ 且 $H \simeq \operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B)$ 满足 $B \in \mathcal{H}(\mathfrak{N})$。由引理 2.11 (3)，可得

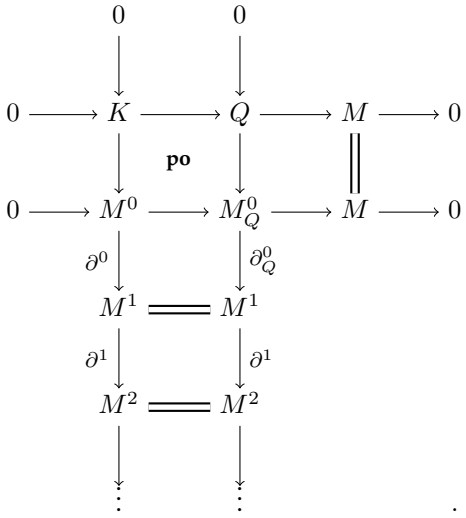
$$\operatorname{Tor}^i_S(H, M) \simeq \operatorname{Tor}^i_S(\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(C, B), C \otimes_R A) \simeq \operatorname{Tor}^i_{R^{\mathrm{op}}}(A, B).$$

现在由 [11, 定理 3.2。5], 可得 $[\mathrm{Tor}^{i}_{R^{\mathrm{op}}}(A,B)]^{+} \simeq \mathrm{Ext}^{i}_{R^{\mathrm{op}}}(B,A^{+}) = 0$, 其中最后一个等式由 $B \in {}^{\perp}\mathfrak{N}$以及 $A \in \mathfrak{M}$(从而 $A^{+} \in \mathfrak{N}$) 得出。因此 $\mathrm{Tor}^{i}_{S}(H,M) = 0$。

对于 (2), 由于根据 $\mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^{C}(S)\ \mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N}))}$ 的定义, $K \in [\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$; 根据 (1), $M \in [\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$; 并且 $[\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$ 对扩张封闭, 因此有 $Q \in [\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$。现在考虑一个 $\mathcal{M}^{C}(S)$-余解

$$0 \to K \to M^{0} \xrightarrow{\partial^{0}} M^{1} \xrightarrow{\partial^{1}} \cdots$$

of K, 使得对于每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathrm{Ker}(\partial^{k}) \in [\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$。对$M^{0} \leftarrow K \to Q$ 作推出, 得到如下具有正合行和列的交换图:



注意, $0 \to Q \to M^{0}_{Q} \xrightarrow{\partial^{0}_{Q}} M^{1} \xrightarrow{\partial^{1}} M^{2} \to \cdots$在 核($\partial^{k}$) $\in [\mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})]^{\top}$中有圈。此外, 根据命题 2.6 (1), $\mathcal{M}^{C}(S)$ 对扩张封闭, 因此 $M^{0}_{Q} \in \mathcal{M}^{C}(S)$。于是结论得证。□

命题 3.25。 考虑对每个 S-模 N 的以下断言:
(a) $N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^{C}(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N}))}$。*(b)*
$N \simeq \mathrm{Ker}(\partial^{0})$属于某个正合复形

$$\Gamma\colon \cdots \to F_{1} \to F_{0} \to M^{0} \xrightarrow{\partial^{0}} M^{1} \to \cdots$$

其中 $F_{k} \in \mathcal{F}(S)$ 和 $M^{k} \in \mathcal{M}^{C}(S)$ 对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 均成立, 且对每个 $H \in \mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N})$, $H \otimes_{S} \Gamma$ 都是正合的。*(c)* 存在一个短正合列 $0 \to N \to M \to L \to 0$, 其中 $M \in \mathcal{M}^{C}(S)$ 和 $L \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^{C}(S)\ \mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N}))}$。

于是蕴含关系 *(a)* $\Rightarrow$*(c)* $\Rightarrow$*(b)* 成立。此外, 若 $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 是完美的且 $\mathcal{M}$ 是可解的, 则 *(b)* $\Rightarrow$*(a)* 成立。

证明。 蕴含关系 (a) $\Rightarrow$(c) 直接由 $\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^{C}(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_{C}(\mathfrak{N}))}$的定义以及包含关系 $\mathcal{H}^{C}(\mathfrak{M}) \subseteq \mathcal{M}^{C}(S)$ (见引理 3.22 (1))。

对于 (c) ⇒(b)，考虑一个 $\mathcal{M}^C(S)$-余解 $0 \to L \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$，其圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$ （特别地，属于 $L \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$）。将该余解在 L 处与给定的短正合列粘合，得到 $\mathcal{M}^C(S)$-余解 N，即 $0 \to N \to M \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \xrightarrow{\partial^1} M^2 \to \cdots$。我们来证明 $N \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$。注意，根据引理 3.24 (1)， $M \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$。因此，我们有一个短正合列 $0 \to N \to M \to L \to 0$，其中 $M \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$ 且 $L \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$；由于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$ 是可解的，故有 $N \in [\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$，从而前述$\mathcal{M}^C(S)$-余解 N 的圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$。另一方面，考虑 N的一个平坦分解，记为 $\cdots \to F_1 \to F_0 \to N \to 0$。应用相同的论证，该平坦分解的圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$，因此我们得到一个复形

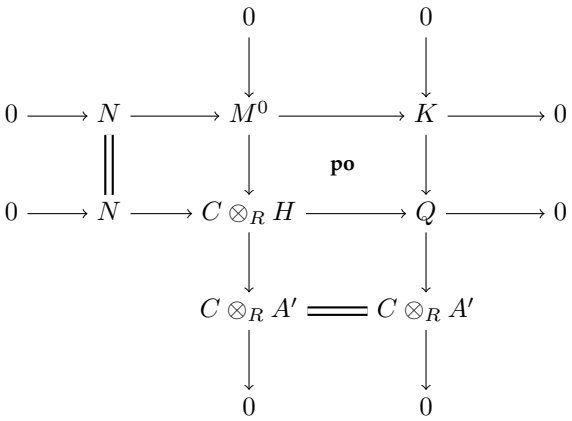
$$\Gamma\colon \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \xrightarrow{\partial^1} M^2 \to \cdots$$

其圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$，并且 $N = \mathrm{Ker}(M \to M^0)$，这反过来意味着对每个 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$， $H \otimes_S \Gamma$ 都是正合的。

最后，对于 (b) ⇒(a)，假设在某个正合复形中 $N \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$

$$\Gamma\colon \cdots \to F_1 \to F_0 \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \to \cdots$$

其中 $F_k \in \mathcal{F}(S)$ 且对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $M^k \in \mathcal{M}^C(S)$，使得对每个 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$， $H \otimes_S \Gamma$ 都是正合的。由于 Γ 的分量属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$，后一无环条件意味着 Γ 的圈属于 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$ （同样由引理 3.24 (1) 得出）。因此，
$0 \to N \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \xrightarrow{\partial^1} \cdots$ 是 N 的一个 $\mathcal{M}^C(S)$-余解，其圈属于$[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^\top$。考虑短正合列 $0 \to N \to M^0 \to K \to 0$，其中$K = \mathrm{Ker}(\partial^1)$。令
$M^0 \simeq C \otimes_R A = A \in \mathfrak{M}$。由 [16, 命题 2.8]，，$(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 是一个完美对偶对，因此 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^\perp)$ 是一个完美余挠对（特别是完备的）。另一方面， $\mathfrak{M}$ 是可解的。因此存在短正合列$0 \to A \to H \to A' \to 0$，其中 $H \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp = \mathcal{H}(\mathfrak{M})$ 且 $A' \in \mathfrak{M}$。由于 $A' \in \mathcal{A}_C(R)$，序列 $0 \to M^0 \to C \otimes_R H \to C \otimes_R A' \to 0$ 是正合的。现在对 $K \leftarrow M^0 \to C \otimes_R H$ 作推出，得到如下具有正合行和列的交换图：



由于 $K \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$ 且 $C \otimes_R A' \in \mathcal{M}^C(S)$，因此$Q \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$，从而得到短正合列

$$0 \to N \to C \otimes_R H \to Q \to 0$$

其中 $C \otimes_R H \in \mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$ 且 $Q \in [\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})]^{\perp}$。迭代前述过程可得到一个 N 的 $\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})$-余解，其圈属于 $[\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})]^{\perp}$，因此 (a) 成立。□

命题 3.26. 若$(\mathcal{M},\mathcal{N})$是一个完美对偶对，其中 $\mathcal{M}$ 可解且 $S \in \mathcal{M}^C(S)$,

$$\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M}),\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))} = \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S),\mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}.$$

证明. 由命题3.25 (a) ⇒(b)，对每个$N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$，都有 $N \simeq \mathrm{Ker}(\partial^0)$ 位于某个正合复形中

$$\Gamma\colon \cdots \to F_1 \to F_0 \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \to \cdots$$

对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $F_k \in \mathcal{F}(S)$ 和 $M^k \in \mathcal{M}^C(S)$，且对每个 $H \in \mathcal{H}_C(\mathfrak{N})$，$H \otimes_S \Gamma$ 都是正合的。由命题 2.6 (4)，注意到 $F_k \in \mathcal{F}(S) \subseteq \mathcal{M}^C(S)$。于是可得 $N \in \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$。由引理 3.24 (1)，后者意味着 Γ 在 $[\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})]^{\top}$ 中有圈，因此 $N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$。因此，由命题 3.25，$N \in \mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$。□

注记 3.27。若 ${}_SC_R$是忠实半对偶化的，$(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$是一个双完备对偶对，其中 $\mathcal{M}$ 可解且对直积封闭，$S \in \mathcal{M}^C(S)$ 以及 $({}^{\perp}[\mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}})],\ \mathcal{B}_C(R^{\mathrm{op}}))$是一个由集合余生成的余挠对，则根据命题*3.20* 和 *3.26*，我们有

$\mathcal{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})) = \mathcal{GI}_{(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})\ \mathcal{N}^C(S^{\mathrm{op}}))}$以及 $\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))} = \mathcal{GF}_{(\mathcal{M}^C(S)\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}$.

因此，对偶对 $(\mathcal{WGF}_{(\mathcal{H}^C(\mathfrak{M})\ \mathcal{H}_C(\mathfrak{N}))}、\mathcal{coCM}(\mathcal{H}_C(\mathfrak{N})))$ 具有推论 *3.15* 中所述的同调性质。

资助

第一作者获得了 SECIHTI 在数学科学中心 - 墨西哥国立自治大学提供的全额博士后奖学金资助，并获得了 PAPIIT- 墨西哥国立自治大学项目 # IN100124 的部分资助。第二作者获得了 ANII - 国家研究与创新局以及 PEDECIBA - 基础科学发展计划的资助。

这项研究的部分工作是在第一作者于 2024 年 8 月和 2025 年 7 月访问共和国大学“Rafael Laguardia 教授、工程师数学与统计研究所”期间完成的，并获得了 PEDECIBA 的 2023 科学起飞计划和 PAPIIT-UNAM IN100124 的资助。他感谢 IMERL-UdelaR 的教职员工给予的热情接待与善意帮助。

参考文献

[1] T. Araya、R. Takahashi 和 Y. Yoshino。与半对偶化双模相关的同调不变量。京都大学数学杂志，45(2):287–306，2005年。[2] V. Becerril、O. Mendoza 和 V. Santiago。阿贝尔范畴中的相对戈伦斯坦对象。代数通讯，49(1):352–402，2021年。[3] V. Becerril 和 M. A. Pérez。相对于对偶对的戈伦斯坦平坦模与复形的同调和同伦方面。巴勒莫数学会学报 *(2)*，74(1):30，2025年。编号 5。[4] A. Beligiannis 和 I. Reiten。挠理论的同调和同伦方面，美国数学会回忆录第883卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会 (AMS)，2007年。[5] D. Bennis、E. Duarte、J. R. García Rozas 和 L. Oyonarte。w-倾斜模在相对Gorenstein（上）同调中的作用。开放数学，19:1251–1278，2021年。[6] D. Bravo、J. Gillespie 和 M. Hovey。一般环的稳定模范畴。预印本，arXiv:1405.5768 [math.RA] (2014)，2014年。

[7] D. Bravo 和 M. A. Pérez。有限性条件与余挠对。J. Pure Appl. Algebra，221(6):1249–1267，2017年。[8] K. S. Brown。有限性的同调判据。Comment. Math. Helv.，50:129–135，1975年。[9] Z. Q. Cheng 和 G. Q. Zhao。相对于半对偶化双模的戈伦斯坦 FP_n-内射模。J. Korean Math. Soc.，61(1):29–40，2024年。[10] P. C. Eklof 和 J. Trlifaj。如何使 Ext 消失。Bull. Lond. Math. Soc.，33(1):41–51，2001年。[11] E. E. Enochs 和 O. M. G. Jenda。《相对同调代数》，De Gruyter Expo. Math. 第30卷。柏林：Walter de Gruyter，2000年。[12] H.-B. Foxby。戈伦斯坦模及相关模。Math. Scand.，31:267–284，1973年。[13] J. Gillespie。如何从两个余挠对构造Hovey三元组。Fundam. Math.，230(3):281–289，2015年。[14] J. Gillespie。遗传阿贝尔模型范畴。Bull. Lond. Math. Soc.，48(6):895–922，2016年。[15] J. Gillespie。对偶对与稳定模范畴。J. Pure Appl. Algebra，223 3435，2019 8 3425( ): – 。[16] H. Holm 和 P. Jørgensen。由对偶对诱导的余挠对。J. Commut. Algebra，1(4):621–633，2009年。[17] H. Holm 和 D. White。结合环上的Foxby 等价。京都大学数学杂志，47(4):781–808，2007年。[18] M. Hovey。模型范畴，Math. Surv. Monogr. 第63卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1999年。[19] M. Hovey。余挠对、模型范畴结构与表示论。Math. Z.，241(3):553–592，2002年。[20] Z. Y. Huang。由Auslander类与Bass类诱导的对偶对。Georgian Math. J.，28 882，2021 6 867( ): – 。[21] T. Wakamatsu。关于具有平凡自扩张的模。J. Algebra，114(1):106–114，1988年。[22] J. P. Wang 和 Z. X. Di。相对Gorenstein环与对偶对。J. Algebra Appl.，19(8):22，2020年。编号 2050147。[23] Z. P. Wang、G. Yang 和 R. M. Zhu。相对于对偶对的Gorenstein平坦模。代数通讯，47(12):4989–5006，2019年。[24] W. Wu 和 Z. H. Gao。相对于半对偶化双模的FP$_n$-内射模与FP$_n$-平坦模。Commun. Algebra，50(2):583–599，2022年。（V. Becerril）数学科学中心。墨西哥国立自治大学。邮编 58089。墨西哥莫雷利亚。电子邮件地址：victorbecerril@matmor.unam.mx（M. A. Pérez）“PROF. ING. RAFAEL LAGUARDIA”数学与统计研究所。

工程学院。共和国大学。CP11300 蒙得维的亚 ，乌拉圭
电子邮件地址：mperez@fing.edu.uy