arXiv:2512.20930v1 [math.OA] 24 Dec 2025

右 LCM 幺半群上的 Ando 型膨胀

Boyu Li 和 Mansi Suryawanshi

Abstract. 我们为一对交换压缩算子以及一个右最小公倍数幺半群的表示建立了 Ando 型膨胀定理，其中乘积运算可以取笛卡尔积或自由积。我们证明，若每个压缩算子分别与该幺半群表示构成的系统都具有 $*$-正则膨胀，那么它们便可膨胀为交换等距算子以及该幺半群的等距表示。这推广了 Barik 和 Das 的一项早期结果。

1. Introduction

膨胀理论的研究起源于著名的 Sz.-Nagy 膨胀定理[SN53, Sch55], ，该定理指出，每个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的压缩算子 T 都存在一个等距膨胀，即存在一个等距算子 V，定义在 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ 上，使得

$$P_{\mathcal{H}} V^k|_{\mathcal{H}} = T^k, \quad \text{for all } k \geq 0.$$

为了将 Sz.-Nagy 的膨胀推广到多变量情形，Ando [And63] 证明，一对交换压缩算子可以膨胀为交换等距算子。然而，由于存在各种反例[Par70, Var74]，Ando膨胀无法推广到三个交换压缩算子的情形。因此，寻找能够保证等距膨胀存在的附加条件，已成为多变量算子理论中一项活跃且持续发展的研究方向。

Brehmer 在 [Bre61], 中首次为可交换压缩算子族引入了 $*$-正则条件，在此条件下存在可交换等距膨胀。最近，Barik 和 Das [BD22] 证明，对于可交换压缩算子族 $\{S_1, S_2, T_1, \ldots, T_k\}$，若$\{S_i, T_1, \ldots, T_k\}$ 满足 Brehmer 的 $*$-正则条件，其中 $i = 1, 2$，则该可交换压缩算子族可以膨胀为交换等距算子。这推广了 [GS97] 关于 $k = 1$ 的早期结果，以及 [BDHS19] 关于某种纯性条件的结果。

在非交换情形下，若一族压缩算子 $\{T_1, \ldots, T_k\}$ 满足 $\sum_{i=1}^{k} T_i T_i^* \leq I$，则称其为行压缩算子。若每个 T_i 都是等距算子，则称其为行等距算子。一系列论文（[Bun84, Fra82, Pop89]）证明，行压缩算子可以膨胀为行等距算子。这如今称为 Frazho-Bunce-Popescu 膨胀定理。

行等距算子族在算子代数研究中尤为重要，因为它与 Cuntz 代数密切相关。在其开创性论文 [Nic92], 中，Nica 引入了拟格序半群的等距 Nica 协变表示这一概念。当半群是自由半群 $\mathbb{F}_k^+$ 时，等距 Nica 协变表示由一族行等距算子确定。该 C* 代数

日期：2025年12月25日。2020 数学主题分类。47A20、47D03、47A13。关键词和短语。Ando定理、*-正则膨胀、最小膨胀。Boyu Li 获得了美国国家科学基金会资助（DMS-2350543），并感谢 Kenneth Davidson 向他展示了证明 Ando膨胀的诀窍。

由等距 Nica 协变表示生成的代数如今称为半群 C* 代数，并已推广到更一般的半群 [LS22, Li12]。这引出了一个自然的问题：压缩半群表示是否存在等距膨胀。

在 [Li17], 中，第一作者发现了一个令人惊讶的联系：交换压缩算子上的 Brehmer $*$ 正则膨胀，与非交换行压缩算子上的 Frazho-Bunce-Popescu 的等距膨胀之间存在联系。事实证明，它们都是右直角 Artin 幺半群族 A_Γ^+ 上膨胀的特例；该族也称为 $\mathbb{N}$ 的图积。在这一发现的基础上，可以将 Brehmer 的 $*$正则膨胀概念推广到右 LCM 幺半群 [Li19] 的表示。若右最小公倍数幺半群的压缩表示满足广义 Brehmer 条件，则可将其膨胀为等距表示。此外，最小等距 $*$正则膨胀是一个等距 Nica 协变余扩张。

从这一关于 $*$正则膨胀的新视角出发，我们重新考察 Barik 和 Das 的结果。族 $\{S_1, S_2, T_1, \ldots, T_k\}$ 可以视为 $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^k$ 的一个压缩表示，其中 S_1, S_2 确定了 S 关于 $\mathbb{N}^2$ 的一个表示，而 $\{T_j\}$ 确定了 T 关于 $\mathbb{N}^k$ 的一个表示。[BD22] 中的主要结果可重述如下：假设 $S_i \times T$ 作为 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k$ 的表示，对每个 $i = 1$, 2 都满足 Brehmer 条件，那么就能找到 $S \times T$ 关于 $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^k$ 的一个等距表示。

在本文中，我们证明可以将 $\mathbb{N}^k$ 替换为任意右最小公倍数幺半群 P，而结论仍然成立。这为 $\mathbb{N}^2 \times P$的收缩表示建立了一种新的 Ando 型膨胀。随后，我们考察了自由积 $\mathbb{N}^2 * P$，并采用相同的技巧得到了类似的 Ando 型膨胀结果。我们的证明采用了 Davidson 和 Katsoulis [DK11，推论 7.11] 中证明 Ando 扩张定理的技巧。

2. 预备知识

右最小公倍数幺半群 P是含幺左消去半群，且对所有 p, $q \in P$,$pP \cap qP$，均有 $\emptyset$，或存在某个 $r \in P$ 使得 rP。对于右最小公倍数幺半群中的任意有限子集 $U \subset P$，右 LCM 条件蕴含 $\bigcap_{p\in U} pP$，或存在某个 $r \in P$ 使得 rP。我们用 $r = \vee U$ 表示后一种情形。本文始终假设 P 是可数且离散的。

右最小公倍数幺半群 P 的压缩表示是含幺幺半群同态T： $P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中每个 $\|T(p)\| \leq 1$。表示 T 称为等距的，如果每个$T(p)$都是等距的。此外，等距表示 T 称为 ***Nica*** 协变 的，如果对于任意 p, $q \in P$,

$$T(p)T(p)^*T(q)T(q)^* = \begin{cases} T(r)T(r)^*, & \text{if } pP \cap qP = rP, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

等距 Nica 协变表示最初由 Nica [Nic92], 提出，在半群 C*-代数的研究中发挥着核心作用 [CL02, LR96, Li12, LS22]。右 LCM 幺半群是半群 C*-代数研究中的一类重要幺半群 [ABLS19, aHNSY21, BLS17, BLS18, LL20, LL22, Sta15] ，这归功于它们的 Nica 协变表示相对易于处理。

T 的等距膨胀是一个等距表示 V: $P \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$，作用在 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ 上，并满足：对所有 $p \in P$, $T(p) = P_{\mathcal{H}}V(p)|_{\mathcal{H}}$。若 $\mathcal{H}^\perp$ 在 V 下不变，或者等价地，对所有 $p \in P$, $\mathcal{H}$ 在 $V(p)^*$ 下不变，则称膨胀 V 是 T 的余扩张。

若对任意 p， $q \in P$，则称膨胀 V 为 $*$-正则膨胀。

$$P_{\mathcal{H}} V(p)^* V(q)|_{\mathcal{H}} = \begin{cases} T(p^{-1}r)T(q^{-1}r)^*, & \text{if } pP \cap qP = rP, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

正则膨胀的概念源于 Brehmer 对交换压缩算子膨胀的研究，这些压缩算子可视为表示。在第一作者的一系列论文 Li16、Li17、Li 中，正则膨胀的概念被推广到一般的右 LCM 幺半群，并证明了存在正则膨胀等价于满足广义 Brehmer 条件（Li19，定理 3.）。

注意，当 是 的余扩张时，

$$P_{\mathcal{H}} V(a) V(b)^*|_{\mathcal{H}} = T(a)T(b)^*, \quad \text{for all } a, b \in P.$$

因此，如果 是等距 Nica 协变余扩张，

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}} V(p)^* V(q)|_{\mathcal{H}} &= \begin{cases} P_{\mathcal{H}} V(p^{-1}r) V(q^{-1}r)^*|_{\mathcal{H}}, & \text{if } pP \cap qP = rP, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} T(p^{-1}r)T(q^{-1}r)^*, & \text{if } pP \cap qP = rP, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

因此，任何等距 Nica 协变余扩张也必定是正则膨胀 n.

若正则膨胀 : () 满足 span() : ，则称其为极小的。，极小正则膨胀 : () 在酉等价意义下唯一。Li19，定理 3. 中的一个关键观察是，极小正则膨胀 : () 必定是等距 Nica 协变余扩张。

Th这为等距 Nica 协变余扩张给出了完整刻画 s.

引理 2.1. 设 $V\colon P \to \mathcal{B}(\mathcal{L})$ 是 T的一个等距 *Nica* 协变余扩张。则 $\mathcal{L}$可分解为 $\mathcal{L} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$，使得 $\mathcal{K}_i$, $i = 0,1$ 约化 V。此外，$V|_{\mathcal{K}_0}$ 与 T 的最小等距 *Nica* 协变膨胀（因而是 $*$-正则膨胀） V_0 酉等价，并且 $V|_{\mathcal{K}_1}$ 是一个等距 *Nica* 协变表示。

证明。 给定 T的等距 Nica 协变余扩张 $V\colon P \to \mathcal{B}(\mathcal{L})$，定义

$$\mathcal{K}_0 = \overline{\operatorname{span}}\{V(p)h : \ p \in P, \ h \in \mathcal{H}\}.$$

显然， $\mathcal{K}_0$ 对 V不变。由 Nica 协变条件可知，对所有 $p, q \in P$和 $h \in \mathcal{H}$， $V(p)^* V(q)h \in \mathcal{K}_0$, 因此 $\mathcal{K}_0$ 对 V^*也不变。于是， $\mathcal{K}_0$ 约化 V，且 $\mathcal{L} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$，其中 $\mathcal{K}_1$是某个希尔伯特空间。

限制 $V|_{\mathcal{K}_0}$ 是 T 的等距 Nica 协变余扩张，满足 $\mathcal{K}_0$ =span$\{V(p)h : p \in P, \ \ h \in \mathcal{H}\}$，因此是极小的。因此， $V|_{\mathcal{K}_0}$ 是一个极小
$*$-正则膨胀，且由极小 $*$-正则膨胀的唯一性可知，它与 V_0酉等价。因此，

$$V \cong V_0 \oplus X,$$

其中 V_0 是 T 的极小 $*$-正则膨胀，而 $X := V|_{\mathcal{K}_1}$ 是一个等距 Nica 协变表示，因为 V 是等距且 Nica 协变的。□

设 P, Q 是两个右 LCM 幺半群。我们用 $Q \times P$ 表示它们的笛卡尔积，用 $Q * P$ 表示它们的自由积。 $Q \times P$ 和 $Q * P$ 也都是右 LCM 幺半群 [FK09]。给定表示 $S\colon Q \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $T\colon P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，定义

$S \times T$ 为 $Q \times P$ 的表示，它将 (q, p) 映射到 $S(q)T(p)$。由于 (q, e) 和 (e, p) 在笛卡尔积中可交换，因此，若对所有 $q \in Q$ 和 $p \in P$，$S(q)$ 与 $T(p)$ 可交换，则 $S \times T$ 定义了 $Q \times P$ 的一个表示。类似地，定义 $S * T$ 为 $Q * P$ 的表示，它将 $q \in Q$ 映射到 $S(q)$，并将 $p \in P$ 映射到 $T(p)$。由于 Q 和 P 的元素在 $Q * P$ 中不必可交换，因此 $S * T$ 始终是 $Q * P$ 的一个表示。

在本文余下部分，我们关注 Q 为 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}^2$的情形。设 P 是一个右最小公倍数幺半群，且 $T : P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个表示。假设 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 与所有 $T(p)$ $p \in P$ 都交换。将每个 $k \geq 0$ 映射到 S^k，即可将 S 视为 $\mathbb{N}$ 的一个表示。由于 S 与 T 交换，可以定义表示 $S \times T : \mathbb{N} \times P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，其定义如下：

$$S \times T(n, p) = S^n T(p).$$

现在假设 S_1，S_2 是两个彼此交换且都与 T交换的压缩算子。由于S_1，S_2 彼此交换，它们定义了 $\mathbb{N}^2$ 的一个表示 $S_1 \times S_2$，其定义如下：

$$(S_1 \times S_2)(n, m) = S_1^n S_2^m.$$

由此，我们可以类似地定义 $\mathbb{N}^2 \times P$ 的表示 $(S_1 \times S_2) \times T$，其定义如下：

$$(S_1 \times S_2) \times T(n, m, p) = S_1^n S_2^m T(p).$$

回顾一下，若两个算子 A，B 满足 $AB = BA$ 和 $A^*B = BA^*$，则称它们双重交换。设 B是 P的一个表示。若对每个 $p \in P$，A 和 $B(p)$ 都双重交换，则称 A 和 B 双重交换。以下引理是关于 $\mathbb{N} \times P$的等距 Nica 协变表示的一个众所周知的事实。

引理 2.2。设 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是一个等距算子，且 $W : P \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是 P 的等距 *Nica* 协变表示。那么，$V \times W$ 是 $\mathbb{N} \times P$ 的等距 *Nica* 协变表示，当且仅当 V 与 W 双重交换。

最后，对于任意压缩算子 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和表示 $T : P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$，总可以定义 $S * T$ 为一个表示，它将 P 中的元素映射到 $T(p)$，并将 $\mathbb{N}$ 的生成元映射到 S。下面的引理刻画了 $\mathbb{N} * P$ 的等距 Nica 协变表示。

引理 2.3。设 $V \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是一个等距算子，且 $W : P \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是 P 的等距 *Nica* 协变表示。令 P_0 表示 P 中所有可逆元构成的集合。那么，$V * W$ 是 $\mathbb{N} * P$ 的等距 *Nica* 协变表示，当且仅当对于所有 $p \notin P_0$，V 与 $W(p)$ 的值域正交；或者等价地，$VV^* + W(p)W(p)^* \leq I$。

3. Main Results

本文的主要目标是以下定理。

定理 3.1。设 P 是一个右最小公倍数幺半群，且 $(S_1 \times S_2) \times T$ 是 $\mathbb{N}^2 \times P$ 在 $\mathcal{H}$ 上的一个压缩表示。假设每个 $S_i \times T$ 都有一个关于 $i = 1$、2 的 $*$-正则膨胀。则存在 $(V_1 \times V_2) \times W$，它是 $(S_1 \times S_2) \times T$ 的一个等距膨胀。此外，对于 $i = 1$、2，可以选择表示 $V_i \times W$，使其成为 $S_i \times T$ 的等距 *Nica* 协变余扩张。

证明。令 $A_i \times B_i$ 为 $S_i \times T$ 的最小 $*$-正则膨胀，它们作用在 $\mathcal{M}_i$ 上，对于 $i = 1$，2。根据 [Li19]，$A_i \times B_i$ 是等距 Nica 协变余扩张。

通过限制到 P，表示 $B_i : P \to \mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ 是 T 的等距 Nica 协变余扩张。令 $W_0 : P \to \mathcal{B}(\mathcal{M}_0)$ 为 T 的最小等距 Nica 协变膨胀。由引理 2.1，对于每个 $i = 1$，2，都存在一个约化子空间 $\mathcal{M}_i^{(0)} \subseteq \mathcal{M}_i$ 使得

使得 $B_i|_{\mathcal{M}_i^{(0)}} \cong W_0$。将 B_i 替换为一个酉等价的表示后，我们可以假设 $\mathcal{M}_i^{(0)} = \mathcal{M}_0$，从而

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_i, \qquad B_i = W_0 \oplus Z_i,$$

对某个等距表示 Z_i： $P \to \mathcal{B}(\mathcal{N}_i)$。由于 B_i 是 Nica 协变的，因此 Z_i也是。

现在定义 $\mathcal{K} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$。由于 $\mathcal{M}_i := \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_i$，我们可以将 $\mathcal{K} \cong \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \cong \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_1$. 识别为 Define

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 \oplus I_{\mathcal{N}_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{N}_2) \cong \mathcal{B}(\mathcal{K}), \\ V_2 &= A_2 \oplus I_{\mathcal{N}_1} \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{N}_1) \cong \mathcal{B}(\mathcal{K}), \\ W &= W_0 \oplus Z_1 \oplus Z_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) = \mathcal{B}(\mathcal{K}). \end{aligned}$$

等价地， V_1 在 $\mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_1$ 上作用为 A_1，并在 $\mathcal{N}_2$上作用为恒等映射；而 V_2 在$\mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}_2$ 上作用为 A_2，并在 $\mathcal{N}_1$ 上作用为恒等映射。由于 W： $P \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 是一个等距表示，且满足 $P_{\mathcal{H}} W(p)|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}} W_0(p)|_{\mathcal{H}} = T$({v17)，对所有 $p \in P$ 均成立，因此它是T的等距膨胀。由于 $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_0$，$V_i$是 S_i 的等距膨胀，对 $i = 1$，2。对于 $i \neq i'$，在识别 $\mathcal{K} \cong \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{N}_{i'}$ 下，我们有

$$V_i \times W = (A_i \times B_i) \oplus (I_{\mathcal{N}_{i'}} \times Z_{i'}).$$

由于恒等表示 $I_{\mathcal{N}_{i'}}$ 与 $Z_{i'}$ 显然双重交换，因此乘积表示 $I_{\mathcal{N}_{i'}} \times Z_{i'}$ 满足 Nica 协变关系。由于 $A_i \times B_i$ 是 $S_i \times T$ 的等距 Nica 协变余扩张，且直和项 $I_{\mathcal{N}_{i'}} \times Z_{i'}$ 是等距 Nica 协变表示。因此，对于 $i = 1$，2， $V_i \times W$ 是 $S_i \times T$ 的等距 Nica 协变余扩张。

由于 $V_i \times W$ 是 Nica 协变的，根据引理 2.2， V_i 与 W 双重交换。因此， V_1V_2 和 V_2V_1 均与 W 双重交换。根据引理 2.2，$(V_1V_2) \times W$ 和 $(V_2V_1) \times W$ 均为 $\mathbb{N} \times P$ 的等距 Nica 协变表示。由于 $V_i \times W$ 是 $S_i \times T$ 的余扩张， $\mathcal{H}^{\perp}$ 在 V_i 和 W 下保持不变，因此 $(V_1V_2) \times W$ 和 $(V_2V_1) \times W$ 均为 $(S_2S_1) \times T = (S_1S_2) \times T$ 的等距 Nica 协变余扩张。

再次根据引理 2.1，我们可以将 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ 分解为约化子空间，使得 $(V_1V_2) \times W$ 和 $(V_2V_1) \times W$ 在 $\mathcal{K}_1$ 上的限制分别与 $(S_1S_2) \times T$ 的最小等距 Nica 协变膨胀 $M \times W_1$ 酉等价，且与 $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_1$ 酉等价。$(V_1V_2) \times W$ 和 $(V_2V_1) \times W$ 在 $\mathcal{K}_2$ 上的限制是某个等距 Nica 协变表示，因此我们可以写成

$$\begin{aligned} (V_1V_2) \times W &= (M \times W_1) \oplus (X \times W_2), \\ (V_2V_1) \times W &= (M \times W_1) \oplus (Y \times W_2), \end{aligned}$$

这里， X 和 Y 是作用于 $\mathcal{K}_2$ 上的等距算子，而 $W_2 := W|_{\mathcal{K}_2}$。此外， $X \times W_2$ 和 $Y \times W_2$ 分别是 $(V_1V_2) \times W$ 和 $(V_2V_1) \times W$ 在 $\mathcal{K}_2$ 上的限制。

令 $\mathcal{K}_2^{\infty} \cong \mathcal{K}_2 \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ 表示 $\mathcal{K}_2$ 的无限直和，并令 $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}_2^{\infty} \oplus \mathcal{K}_2^{\infty}$。在 $\mathcal{L}$ 上定义算子如下

$$\begin{aligned} V_1' &= V_1 \oplus X^{\infty} \oplus Y^{\infty}, \\ V_2' &= V_2 \oplus I_{\mathcal{K}_2^{\infty}} \oplus I_{\mathcal{K}_2^{\infty}}, \\ W' &= W \oplus W_2^{\infty} \oplus W_2^{\infty}, \end{aligned}$$

其中， X^{∞}（分别地， Y^{∞}）表示作用于 $\mathcal{K}_2^{\infty}$ 上的 X（分别地， Y）的无限扩张。由于 $V_i \times W$是 $S_i \times T$的等距 Nica 协变余扩张，且由于 $X \times W_2$,

$Y \times W_2$和 $I_{\mathcal{K}_2} \times W_2$是 $\mathbb{N} \times P$的等距 Nica 协变表示，因此 $V_i' \times W'$是 $\mathbb{N} \times P$的等距 Nica 协变表示。此外，由于 $\mathcal{H} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{L}$以及 $V_i' \times W'$中的附加直和项作用于与 $\mathcal{H}$正交的子空间，因此每个 $V_i' \times W'$都是 $S_i \times T$的等距 Nica 协变余扩张。

关于分解 $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_2^\infty \oplus \mathcal{K}_2^\infty$，算子 $V_1'V_2'$和 $V_2'V_1'$具有如下分块对角形式

$$V_1'V_2' = (M \oplus X) \oplus X^\infty \oplus Y^\infty \quad \text{and} \quad V_2'V_1' = (M \oplus Y) \oplus X^\infty \oplus Y^\infty.$$

设 $F \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_2^\infty \oplus \mathcal{K}_2^\infty)$ 由下式给出

$$F(k, \xi_1, \xi_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots) = (\eta_1, k, \xi_1, \xi_2, \dots, \eta_2, \eta_3, \dots).$$

定义 $U = I_{\mathcal{K}_1} \oplus F \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$。直接计算可得，

$$U^*(V_2'V_1')U = V_1'V_2'.$$

根据构造， $\mathcal{K}_1$ 约化 U 和 $U|_{\mathcal{K}_1} = I_{\mathcal{K}_1}$。由于 $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_1$，可知 $\mathcal{H}$ 也约化U 和 $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$。

现在定义 $\widetilde{V}_1 := V_1'U$，以及 $\widetilde{V}_2 := U^*V_2'$。于是

$$\widetilde{V}_1\widetilde{V}_2 = (V_1'U)(U^*V_2') = V_1'V_2' = U^*(V_2'V_1')U = \widetilde{V}_2\widetilde{V}_1.$$

因此， $\widetilde{V}_1$ 和 $\widetilde{V}_2$ 可交换。此外，由于 U是酉算子，且 V_1'， V_2'是等距算子，因此 $\widetilde{V}_1$ 和 $\widetilde{V}_2$ 也都是等距算子。由于 V_i 和 V_i' 在约化子空间 $\mathcal{K}_1$上重合，$\widetilde{V}_i$ 是 S_i 的等距膨胀，其中 $i = 1, 2$。

现在，就 $\mathcal{L} = (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2) \oplus \mathcal{K}_2^\infty \oplus \mathcal{K}_2^\infty$而言，我们有

$$W' = (W_1 \oplus W_2) \oplus W_2^\infty \oplus W_2^\infty.$$

关于 $\mathcal{K}_1^\perp \cong \mathcal{K}_2 \oplus \mathcal{K}_2^\infty \oplus \mathcal{K}_2^\infty \cong \mathcal{K}_2^\infty$、 $W'|_{\mathcal{K}_1^\perp} \cong W_2^\infty$，它们显然与置换算子 F 双重交换。关于 $\mathcal{K}_1$、 $U|_{\mathcal{K}_1} = I_{\mathcal{K}_1}$，它们也与 $W'|_{\mathcal{K}_1}$ 双重交换。因此，U 与 W' 双重交换。

现在， V_i' 和 U 都与 W' 双重交换，因此，根据引理 2.2， $V_i \times W'$ 是等距 Nica 协变表示。每个 $V_i \times W'$ 都是 $S_i \times T$ 的余扩张，因为它包含最小等距 Nica 协变膨胀 $M \times W_1$ 的一个直和项。此外，由于 V_1 与 V_2 交换，我们有 $(V_1 \times V_2) \times W'$ 是 $(S_1 \times S_2) \times T$ 的等距膨胀。□

注记 3.2. 我们指出，在最简单的情形下，当 $P = \{e\}$ 和 $T(e) = I$ 时，定理 3.1 可还原为 Ando膨胀定理：两个交换压缩算子 S_1， S_2 存在交换的等距膨胀 V_1， V_2。事实上，定理 3.1 证明中使用的主要技巧，源自 [DK11, Corollary 7.11] 中 Ando 定理的证明。

例 3.3。 当 $P = \mathbb{N}^k$ 时，压缩表示 $T\colon P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 由一族 k 交换压缩算子 $\{T_1, \dots, T_k\}$ 唯一确定。在这种情况下，定理 3.1 断言，如果每个 $\{S_i, T_1, \dots, T_k\}$ 都具有一个 $*$正则膨胀，那么交换压缩算子 $\{S_1, S_2, T_1, \dots, T_k\}$ 具有交换等距膨胀 $\{V_1, V_2, W_1, \dots, W_k\}$。此外，对于每个 $i = 1, 2$，这族 $\{V_i, W_1, \dots, W_k\}$ 可以选为 $\{S_i, T_1, \dots, T_k\}$ 的双可交换等距余扩张，因为对于 $\mathbb{N}^k$ 的等距表示而言，Nica 协变性等价于生成元的双可交换性。通过确定 $S_1 = T_1$、 $S_2 = T_n$ 以及 $(T_1, \dots\dots, T_k) = (T_2, \dots\dots, T_{n-1})$，这便给出了 [BD22 中主要结果定理 3.9] 的一个简短证明（另见 [BDHS19]）。

作为另一个应用 应用定理 3.1，我们可以得到一种新的 Ando 型膨胀于 $\mathbb{N}^2\times\mathbb{F}_k^+$.

例 3.4。 设 $P=\mathbb{F}_k^+$。 P的压缩表示 T由一族 k（不一定交换的）压缩算子 $\{T_1,\dots,T_k\}$确定。设 S是一个与所有 T_j交换的压缩算子。那么， $S\times T$具有 $*$-正则膨胀 [Li17]，当且仅当 $\{T_1,\dots,T_k\}$是一个行压缩算子，并且

$$I-SS^*-\sum_{j=1}^k T_jT_j^*+\sum_{j=1}^k ST_jT_j^*S^*\geq 0.$$

在此情形下，定理 3.1 得出如下结论。设 $\{T_1,\dots,T_k\}$ 是一个行压缩算子，且 S_1, S_2 是交换压缩算子，使得对所有 $i=1$，2 以及所有 j，都有 $S_iT_j=T_jS_i$。假设

$$I-S_iS_i^*-\sum_{j=1}^k T_jT_j^*+\sum_{j=1}^k S_iT_jT_j^*S_i^*\geq 0,\qquad i=1,2.$$

那么， S_1 和 S_2 可膨胀为交换等距算子 V_1 和 V_2，而 $\{T_j\}$ 可膨胀为行等距算子$\{W_j\}$。此外，对每个 $i=1$，2， V_i 都与每个 W_j双重交换。

我们强调，一般而言，不能指望 V_1 and V_2 双重交换。事实上，要使这一附加性质成立，就相当于构造 $(S_1\times S_2)\times T$ 的 Nica 协变（因此是 $*$-正则）等距膨胀，而据 [Li17] 所知，这等价于一个更强的正性条件。

现在考虑右最小公倍数幺半群 $\mathbb{N}^2*P$。采用定理 3.1 证明中的相同技巧，我们得到以下结果。

定理 3.5。 设 P 是离散右最小公倍数幺半群，且 $(S_1\times S_2)*T$ 是 $\mathbb{N}^2*P$ 在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的压缩表示。假设对于 2， S_i*T 具有 $*$-正则膨胀。那么存在 $(V_1\times V_2)*W$，它是 $(S_1\times S_2)*T$ 的等距膨胀。此外，V_i*W 可以选为等距 *Nica* 协变余扩张。

证明。 令 $A_i*B_i\colon \mathbb{N}*P\to\mathcal{B}(\mathcal{M}_i)$ 表示 $*$-正则的、因而也是 S_i*T在 $i=1$上的最小等距 Nica 协变膨胀，2。对于 $i=1$， 2， 引理 2.1 保证存在一个分解 $\mathcal{M}_i=\mathcal{M}_0\oplus\mathcal{N}_i$ 为约化子空间，使得相对于此分解，

$$B_i=W_0\oplus Z_i,$$

其中 $W_0\colon P\to\mathcal{B}(\mathcal{M}_0)$ 是 T 的最小等距 Nica 协变膨胀，而 $Z_i\colon P\to\mathcal{B}(\mathcal{N}_i)$ 是一个等距 Nica 协变表示。

定义 $\mathcal{K}=\mathcal{M}_0\oplus\mathcal{N}_1\oplus\mathcal{N}_2\oplus\ell^2(P)^\infty$， 其中 $\ell^2(P)^\infty$ 表示无限扩张$\ell^2(P)\otimes\ell^2(\mathbb{N})$。令

$$W=W_0\oplus Z_1\oplus Z_2\oplus\lambda^\infty\quad\text{on }\mathcal{K}.$$

这里， $\ell^2(P)\equiv\overline{\operatorname{span}}\{e_p\colon p\in P\}$ 表示具有标准正交基$\{e_p\}_{p\in P}$的希尔伯特空间； $\lambda\colon P\to\mathcal{B}(\ell^2(P))$ 表示由 $\lambda(p)e_q=e_{pq}$ 定义的左正则表示，而 λ^∞ 表示其无限放大。表示 λ 是等距的且 Nica 协变。

令 $P_0\subset P$ 表示 P 中可逆元的集合，并令 $\mathcal{L}_0=\ell^2(P_0)^\infty$。由于 P 是一个幺半群， $1\in P_0$，从而 $P_0\neq\emptyset$。我们将 $\mathcal{L}_0=\ell^2(P_0)^\infty$ 视为 $\ell^2(P)^\infty\cong\ell^2(P)\otimes\ell^2(\mathbb{N})$ 的闭子空间，该子空间由 $\{e_p\otimes\delta_n$ 张成：$p\in P_0$， $n\in\mathbb{N}\}$，其中 $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\ell^2(\mathbb{N})$ 的标准正交基。显然， $\mathcal{L}_0$ 是一个无限维可分

希尔伯特空间。因此，我们可以选取等距算子 $C_i\colon \mathcal{N}_i \oplus \ell^2(P)^\infty \to \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{N}_i \oplus \ell^2(P)^\infty$。定义

$$V_1 = A_1 \oplus C_2, \text{ and } V_2 = A_2 \oplus C_1.$$

那么 V_1, V_2 是作用在 $\mathcal{K}$ 上的等距算子。此外，若 $p \notin P_0$，则 $pP \cap P_0 = \varnothing$，因此

$$\operatorname{ran} \lambda(p) = \overline{\operatorname{span}}\{e_{pq} : q \in P\} \perp \ell^2(P_0).$$

因此，$\operatorname{ran} \lambda(p)^\infty \perp \mathcal{L}_0$，于是可以验证，对于所有 $p \notin P_0$，V_i 与 $W(p)$ 的值域正交。由引理 2.3 可知，$V_i * W$ 都是 $S_i * T$ 的等距 Nica 协变余扩张。

由此，我们可以按照定理 3.1 的证明采用相同的构造。可以验证，$(V_1V_2) * W$ 和 $(V_2V_1) * W$ 都是 $(S_1S_2) * T = (S_2S_1) * T$ 的等距 Nica 协变余扩张。根据最小等距 Nica 协变膨胀 $M * W_1$ 对于 $(S_1S_2) * T$ 的存在性，我们可以利用引理 2.1 分解 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$，在此分解下

$$(V_1V_2) * W = (M * W_1) \oplus (X * W_2)$$
$$(V_2V_1) * W = (M * W_1) \oplus (Y * W_2)$$

定义 $\mathcal{K}_2^\infty \cong \mathcal{K}_2 \otimes \ell^2(\mathbb{N})$，并令 $\mathcal{L} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}_2^\infty \oplus \mathcal{K}_2^\infty$. 在 $\mathcal{L}$ 上定义算子

$$V_1' = V_1 \oplus X^\infty \oplus Y^\infty,$$
$$V_2' = V_2 \oplus I_{\mathcal{K}_2^\infty} \oplus I_{\mathcal{K}_2^\infty},$$
$$W' = W \oplus W_2^\infty \oplus W_2^\infty,$$

其中，X^∞（分别地，Y^∞）表示作用在相应的 $\mathcal{K}_2^\infty$副本上的 X（分别地，Y）的无限扩张。采用与定理 3.1 的证明中相同的技巧，存在一个酉算子 $U \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$，使得

$$U^*(V_2'V_1')U = V_1'V_2'.$$

此外，$U|_{\mathcal{K}_1} = I_{\mathcal{K}_1}$和 U与 W'双重交换。

Now $\tilde{V_1}\tilde{V_2} = \tilde{V_1'}\tilde{U^*}\tilde{U}$和是交换等距算子，因此 $(V_1 \times V_2) * W'$是 $(S_1 \times S_2) * T$的等距扩张。此外，由于 U和 W'双重交换，我们有 $V_i^*W'(p) = 0$，对所有 $p \notin P_0$均成立。因此，$V_i * W'$都是 $S_i * T$的等距 Nica 协变余扩张。□

注 3.6。我们注意到，证明中的无限放大 $\ell^2(P)^\infty$ 是必要的，以便为算子 C_i 的值域留出空间，因为要求每个 V_i 的值域都与 W 的值域正交。

注 3.7。回顾 [Li19], $T\colon P \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 具有 $*$-正则膨胀，当且仅当对所有有限的 $F \subset P$，

$$Z_F = \sum_{U \subset F} (-1)^{|U|} T_U T_U^* \geq 0.$$

这里，

$$T_U T_U^* = \begin{cases} T_r T_r^*, & \text{if } \cap_{p \in P} pP = rP, \\ 0, & \text{if } \cap_{p \in P} pP = \emptyset. \end{cases}$$

现在，对于压缩算子 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，要验证 $S \times T$ 和 $S * T$ 在$\mathbb{N} \times P$和 $\mathbb{N} * P$上具有 $*$-正则膨胀，无需考虑所有有限子集 F，只需考察少得多的一组 Z_F 的正性。可以应用 [Li19, 定理 6.7]，得到以下刻画。

(1) F或者，若对所有有限 $F \subset P$， $S \times T$在 $\mathbb{N} \times P$上有 $*$-正则膨胀，

$$Z_F \geq 0, \text{ and } SZ_F S^* \leq Z_F.$$

(2) 对于 $S * T$ 上的 $\mathbb{N} * P$， $S * T$ 在所有有限 $F \subset P$ 上都有 $*$-正则膨胀，若

$$Z_F \geq 0, \text{ and } Z_F - SS^* \geq 0.$$

给定一个具有 n 个顶点 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 的简单图 Γ，回顾一下，右角 Artin 幺半群 A_Γ^+ 是幺半群

$$A_\Gamma^+ = \langle e_1, \ldots, e_n : e_i e_j = e_j e_i \text{ if } v_i v_j \text{ is an edge in } \Gamma \rangle.$$

对于一个顶点 v，用 $\Gamma/\{v\}$ 表示删去 v 后得到的子图。我们的主要结果确立了一类右角 Artin 幺半群上的以下 Ando 型膨胀定理。

例 3.8. 设 Γ 是一个具有 n 个顶点的简单图，其中 $v_1 v_2$ 是一条边。此外，假设 v_1, v_2 要么与所有其他顶点相邻，要么与任何其他顶点都不相邻。在此假设下，设压缩表示 T: $A_\Gamma^+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足：对于 $i = 1, 2$， $T|_{A^+_{\Gamma/\{v_i\}}}$ 具有 $*$-正则膨胀（其刻画见 [Li17, Li25]）。那么，根据定理 3.1 和 3.5，我们知道 T 必须有一个等距余扩张 V。此外， $V|_{A^+_{\Gamma/\{v_i\}}}$ 是 $i = 1,2$ 的等距 Nica 协变余扩张。

在直角 Artin 幺半群为

$$A_\Gamma^+ = \langle e_1, e_2, f_1, \ldots, f_k : e_1 e_2 = e_2 e_1 \rangle \cong \mathbb{N}^2 * \mathbb{F}_k^+,$$

的特殊情形下，我们得到关于 $\mathbb{N}^2 * \mathbb{F}_k^+$ 的以下膨胀定理。

例 3.9。 考虑 $P = \mathbb{F}_k^+$ 的特殊情形。设 $\{S_1, S_2, T_1, \ldots, T_k\}$ 是满足 $S_1 S_2 = S_2 S_1$ 的压缩算子。假设对于每个 $i = 1$， 2，元组 (S_i， T_1，……， T_k) 都是行压缩算子。那么，根据定理 3.5，存在 (S_i， T_1，……， T_k) 的行等距膨胀 (V_i， W_1，……， W_k)，使得 V_1 与 V_2 交换。

将这一新的膨胀结果与文献中其他已知结果进行比较可知，行压缩算子条件比 [Li17] 中推导出的 $*$-正则膨胀条件更弱。尽管由 Frazho-Bunce-Popescu 对行压缩算子的膨胀可知，每一对 (S_i， T) 都分别存在行等距膨胀，但目前尚不清楚能否选择 W_1 和 W_2 使它们彼此交换。我们还想指出，Opˇela[Opˇe06] 的一个结果表明，族 $\{S_1, S_2, T_j : 1 \leq j \leq k\}$ 存在等距膨胀（其中 S_i 被膨胀为交换等距算子）。然而，这并不能保证满足行等距条件。

References

[ABLS19] Zahra Afsar、Nathan Brownlowe、Nadia S. Larsen 和 Nicolai Stammeier。右 LCM 半群 C C^*-代数上的平衡态。国际数学研究通知，(6):1642–1698，2019。[aHNSY21] Astrid an Huef、Brita Nucinkis、Camila F. Sehnem 和 Dilian Yang。半群 C*-代数的核性。《*J. Funct. Anal.*》，280(2):论文编号 108793，46 页，2021。[And63] T. Andˆo。关于一对交换压缩算子。《塞格德数学学报》，24:88–90，1963。[BD22] Sibaprasad Barik 和 B. Krishna Das。交换压缩算子的等距膨胀与 Brehmer 正性。《复分析与算子理论》，16(5):论文编号 69，25 页，2022。[BDHS19] Sibaprasad Barik、B. Krishna Das、Kalpesh J. Haria 和 Jaydeb Sarkar。多圆盘中一类元组的等距膨胀与 von Neumann 不等式。《美国数学会汇刊》，372(2):1429–1450，2019。[BLS17] Nathan Brownlowe、Nadia S. Larsen 和 Nicolai Stammeier。与右 LCM 半群相关的 C C^*-代数。《美国数学会汇刊》，369(1):31–68，2017。

[BLS18] Nathan Brownlowe、Nadia S. Larsen 和 Nicolai Stammeier。代数动力系统与右 LCM 半群的 C C^*-代数。Indiana Univ. Math. J.，67(6):2453–2486，2018。.[Bre61] S. Brehmer。关于希尔伯特空间中可交换的压缩算子。Acta Sci. Math. Szeged，22:106–111，1961。[Bun84] John W. Bunce。非交换算子的 n-元组模型。J. Funct. Anal.，57(1):21–30，1984。[CL02] John Crisp 和 Marcelo Laca。直角 Artin 群和有限型 Artin 群的 Toeplitz 代数。J. Aust. Math. Soc.，72(2):223–245，2002。[DK11] KennethR. Davidson 和 Elias G. Katsoulis。膨胀理论、交换子提升与半交叉积。Doc. Math.，16:781–868，2011。[FK09] John Fountain 和 Mark Kambites。右消去幺半群的图乘积。J. Aust. Math. Soc.，87(2):227–252，2009。[Fra82] Arthur E. Frazho。非交换算子的模型。J. Funct. Anal.，48(1):1–11，1982。[GS97] Dumitru Ga¸spar 和 Nicolae Suciu。关于正则膨胀的交织。第 66 卷，105–121 页，1997。纪念 W˙lodzimierz Mlak 专辑。[Li12] Xin Li。半群 C*-代数与半群的可和性。J. Funct. Anal.，262(10):4302– 4340，2012。[Li16] Boyu Li。格序半群的正则表示。J. Operator Theory，76(1):33–56，2016。[Li17] Boyu Li。图积上的正则膨胀 $\mathbb{N}$。J. Funct. Anal.，273(2):799–835，2017。[Li19] Boyu Li。右 LCM 半群上的正则膨胀与 Nica 协变表示。Integral Equations Operator Theory，91(4):论文编号 36，35 页，2019。[Li25] Boyu Li。直角 Artin 幺半群上的泊松变换。arXiv 预印本 arXiv:2504.00127，2025。[LL20] Marcelo Laca 和 Boyu Li。右 LCM 半群 C*-代数的可和性与函子性。Proc. Amer. Math. Soc.，148(12):5209–5224，2020。[LL22] Marcelo Laca 和 Boyu Li。右 LCM 半群动力系统的膨胀理论。J. Math. Anal. Appl.，505(2):论文编号 125586，37 页，2022。[LR96] Marcelo Laca 和 Iain Raeburn。半群交叉积与非阿贝尔群的 Toeplitz 代数。J. Funct. Anal.，139(2):415–440，1996。[LS22] Marcelo Laca 和 Camila Sehnem。半群的 Toeplitz 代数。Trans. Amer. Math. Soc.，375(10):7443–7507，2022。[Nic92] A. Nica。由等距算子和 Wiener-Hopf 算子生成的 C^*-代数。J. Operator Theory，27(1):17–52，1992。[Opˇe06] David Opˇela。Andˆo 定理及 Parrott 例子的一种推广。Proc. Amer. Math. Soc.，134(9):2703–2710，2006。[Par70] Stephen Parrott。交换压缩算子的酉膨胀。Pacific J. Math.，34:481–490，1970。[Pop89] Gelu Popescu。非交换算子无限序列的等距膨胀。Trans. Amer. Math. Soc.，316(2):523–536，1989。[Sch55] J. J. Sch¨affer。关于压缩算子的酉膨胀。Proc. Amer. Math. Soc.，6:322，1955。[SN53] B´ela Sz.-Nagy。关于希尔伯特空间的压缩算子。Acta Sci. Math. (Szeged)，15:87–92，1953。[Sta15] Charles Starling。右 LCM 半群 C*-代数的边界商。J. Funct. Anal.，268(11):3326–3356，2015。[Var74] N. Th. Varopoulos。关于 von Neumann 不等式，以及张量积的度量理论在算子理论中的一个应用。J. Functional Analysis，16:83–100，1974。

Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, Las Cruces, NewMexico, 88003, USA*E*
*mail add*地址: boyuli@nmsu.e du

Faculty of Mathematics, Technion – Israel Institute of Technology, Haifa 3200003, Is-rael电子邮箱地址: suryawanshi@campus.technion.ac.il