arXiv:2512.20972v1 [math.OA] 24 Dec 2025

非交换对称空间中的等距结构

Kai Fang（哈尔滨工业大学数学高等研究院，中国哈尔滨，150001），kaifang8.25@gmail.comTianbao Guo（数学系，哈尔滨理工大学，中国哈尔滨，150080），tianbaoguo.edu@gmail.comJinghao Huang（哈尔滨工业大学数学高等研究院，中国哈尔滨，150001），jinghao.huang@hit.edu.cn （通讯作者）Fedor Sukochev（数学与统计学院，新南威尔士大学，澳大利亚新南威尔士州肯辛顿，2052）f.sukochev@unsw.edu.au

2025年12月25日

摘要

本文系统研究非交换对称空间之间的等距映射。设 M 是作用在带有半有限忠实正规迹 τ 的可分希尔伯特空间 H 上的半有限冯·诺伊曼代数（或所有原子具有相同迹的有原子冯·诺伊曼代数）。我们证明，对于 Lindenstrauss–Tzafriri 意义下对应于对称函数空间 $E(0,\infty)$ 的任意非交换对称空间，只要 $\|\cdot\|_E \neq \lambda\|\cdot\|_{L_2}, \lambda \in \mathbb{R}_+$， $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的任意等距映射都具有初等形式。这一结果回答了 20 世纪 80 年代在非可分情形下提出的一个长期悬而未决的问题 [Math. Z. 1989], ，而可分对称函数空间的情形已在 [Huang & Sukochev, JEMS, 2024] 中得到处理。作为应用，我们得到一个非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理，从而刻画有限冯·诺伊曼代数上的非交换 L_p-空间，并给出非交换对称空间上的算子成为等距映射的充要条件。在此基础上，我们通过证明概率空间上的任意对称空间 $E(\mathrm{M},\tau) \neq L_p(\mathrm{M},\tau)$ 都不同构于装备半有限、无限、忠实正规迹的冯·诺伊曼代数上的对称空间，回答了 Mityagin 在 1970 [Uspehi Mat. Nauk] 中提出的问题及其非交换对应物。我们还证明，隶属于无原子半有限冯·诺伊曼代数的任意非交换 L_p-空间 $1 \leq p < \infty$，在等距映射意义下都具有唯一的对称结构。这有助于解决 Pełczyński 问题的一个等距版本，该问题涉及非交换对称空间中对称结构的唯一性。

关键词。 满射等距映射；厄米算子；半有限冯·诺依曼代数；非交换对称空间；对称结构的唯一性。

数学主题分类（*2020*）。主要分类 46B04，46L52；次要分类 47B15

致谢。 作者谨向 Mikhail Zaidenberg 教授致谢，感谢他对本文的关注，并为我们指出该领域已有的文献及相关问题。我们也感谢 Dmitriy Zanin 教授所进行的有益讨论。

经费支持。 Jinghao Huang 获国家自然科学基金资助（项目编号：12031004、12301160 和 12471134）。Fedor Sukochev 获澳大利亚研究理事会资助（ DP230100434）。

目录

1 引言.11.1 对称函数/序列空间上的等距映射 .11.2 非交换 L_p-空间上的等距映射 .31.3 非交换对称空间上的等距映射 .41.4 非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理 . 51.5 Mityagin 问题及其非交换对应问题 . . . . . 61.6 关于对称结构唯一性的 Pełczyński 问题 .7

2 预备知识 .9

2.1 τ-可测算子与广义奇异值.9 2.2 τ-可测算子的对称空间.11 2.3 厄米算子.14 3 等距映射的球拓扑与弱连续性.15 4 非交换对称空间上满射等距映射的初等形式.29 4.1 Jordan $*$-同构.29 4.2 定理 1.3.1 的证明.30 5 非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理 . 35 5.1 当 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$ 时定理 5.0.2 的证明 . . . . . 36 5.2 Kalton 定理的非交换版本.39 5.3 当 $E(0,1) = L_p(0,1)$ 时定理 5.0.2 的证明 . . . . . 45 5.4 当 $E(0,1)$ 可分时定理 1.4.1 的证明 . . . . . 46 5.5 当 $E(0,1)$ 具有 Fatou 性质时定理 1.4.1 的证明. 47

6 Mityagin 问题及其非交换对应物.51

6.1 定理 1.5.1 的证明 .516.2 Mityagin 问题的非交换对应问题 . . . . . 53**7 配备半有限、无限、忠实正规迹的冯 · 诺依曼代数上非交换对称空间的满射等距映射的描述** .61

8 非交换L_p空间中对称结构的唯一性：非交换塞梅诺夫–阿布拉莫维奇–扎伊登贝格定理 .71
8.1 定理 1.6.1 的证明 .71
8.2 定理 1.6.1 的无穷区间版本 .72

A H非交换对称空间上的厄米算子. 7 5

参考文献.83

第1章

引言

本文的主要动机是解决 Mityagin [84] 在1970年提出的问题中的等距部分。

问题 1.0.1. [84, p.99] 除 L_p、$1 \le p < \infty$ 以外，定义在 $[0,1]$ 上的可测函数对称空间 E，能否与定义在半轴 $[0,\infty)$ 或轴 $(-\infty, +\infty)$ 上的某个对称空间 F 同构（等距）？

完整答案见定理 1.5.1。定理 1.5.1 及其非交换对应物（见第 6 章）的证明，依赖于对交换/非交换对称空间满射等距映射的描述。这一研究始于20世纪50年代，也是本著作的第二个主要目标。

问题 1.0.2. [30,111] 若 $E(0, \infty)$ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的对称函数，且 (M, τ) 是一个半有限冯·诺依曼代数（作用于可分希尔伯特空间上），配有半有限忠实正规迹 τ，那么如何描述相关对称算子空间 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 的所有等距映射构成的族?

最近，[54] 在 $E(0, \infty)$ 可分的条件下，已证明任何此类等距映射都具有初等形式。这里，在定理1.3.1中，我们描述了按照 Lindenstrauss 和 Tzafriri 的意义，空间 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 上所有满射等距映射，其中的空间 $E(0, \infty)$ 不一定是可分的。

我们的研究还带来了一个令人欣喜的副产品：许多非交换对称空间实例的对称结构（在等距映射意义下）具有唯一性。Pełczyński 在 1979 [8,9]提出了关于这种唯一性的问题。特别是，我们得到了非交换 L_p-空间在非交换对称空间类中的等距刻画，见下文定理1.6.1 。20 世纪 60 年代，Semenov [103] 以及 Abramovich 和 Zaidenberg [3]分别在对称空间$(0, \infty)$的框架下得到了此类刻画。将我们的结果应用于对称函数空间时，可将 Semenov–Abramovich–Zaidenberg 定理推广到$(0, \infty)$上的对称函数空间情形。

1.1 对称函数/序列空间上的等距映射

巴拿赫空间的等距理论诞生并发展于与巴拿赫空间理论其他领域密不可分的联系之中 [71]。本文不使用“线性”这一修饰语，因为本文不讨论非线性等距映射。对称空间上等距映射的研究历史悠久，可追溯至斯特凡·巴拿赫 [13],，他证明了对于任意 $1 \le p < \infty$，空间l_p 中的等距映射都保持不相交性

（且 $p \neq 2$）在20世纪30年代。巴拿赫指出，关于 L_p（0，1）上等距映射的刻画证明将刊载于《Studia Mathematica》第四卷。然而，这篇承诺发表的论文始终未能问世。完整证明见 Lamperti 的论文 [75]，，他在文中给出了 L_p-空间以及某些定义在 σ-有限测度空间上的 Orlicz函数空间中等距映射的刻画。当 $p = 0$时，非范数化也非准范数化情形的解决方案见 [17]。

在复函数空间领域，由 Lumer [78, 79], 首创的一种方法（即所谓的厄米算子方法）已被证明非常有效。Lumer [78]运用该方法研究了自反Orlicz空间中的等距映射，随后 Zaidenberg [121, 123] 利用该方法研究了一般复对称函数空间中的等距映射。Arazy [10] 处理了可分复序列空间的情形，而 Aminov 和 Chilin 则在 [4]中讨论了非可分情形。回顾 Zaidenberg [123, 的以下定理 1]（另见 [43, 121]）：

定理 *1.1.1.* 设 $E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 和 $E_2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ 是分别与无原子 σ-有限测度空间 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 和 $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 相关联的复对称（复）函数空间。假设 $E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 上的范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。那么，对于任意等距映射 $T: E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1) \to E_2(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$，存在一个可测函数 h 和一个可逆可测变换 $\sigma: \Omega_2 \to \Omega_1$，使得

$$(Tf)(t) = h(t) f(\sigma(t)), \quad \text{for all } f \in E_1(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1). \tag{1.1.1}$$

请注意，(1.1.1) 是对称函数空间上的算子为等距映射的必要但不充分条件。

我们还强调实Banach空间与复Banach空间上的等距映射研究存在显著差异，因为 Lumer 的方法仅适用于复Banach空间。实Banach空间的情形似乎更为困难。 [22,23] 研究了实对称序列空间上的等距映射。Kalton 和 Randrianantoanina [66, 67, 92, 93] 按照 Lindenstrauss–Tzafriri 的定义，给出了 (0，1) 上实对称函数空间等距映射的描述。回顾 Zaidenberg、Kalton 和 Randrianantonina 的以下结果。

定理 1.1.2 [66,67,92,93,122] $E(0,1)$ $F(0,1)$ $\|\chi_{(0,1)}\|_E = \ldots$ 假设() 和() （其中 ） $\|\chi_{(0,1)}\|_F = 1$

(1) 要么是 *Lindenstrauss–Tzafriri* 意义下的实对称函数空间[1]；

[1]即，对称函数空间具有 Fatou 性质，或为极小空间（即简单可积函数的闭线性张成） [76, p.118]。注意，任何非可分的极小对称函数空间 $E(0，1)$ 都与 $L_\infty(0，1)$ 重合，而 $E(0，1)$ 具有 Fatou 性质。

(2) 要么是复对称函数空间。

若存在一个满射等距映射 T从 $E(0,1)$到 $F(0,1)$，则

(1) 或者，对于某个 $1 \le p \le \infty$， $E(0,1) = L_p(0,1)$在等价范数意义下，并且T是一个满射等距映射，从 $L_p(0,1)$到 $L_p(0,1)$；

(2) 或者 $E(0,1) \ne L_p(0,1)$，且等距映射 T从 $E(0,1)$到 $F(0,1)$具有如下形式：

$$a(s)x(\sigma(s)) \quad a.e.,$$

对任意 $x \in E(0,1)$，其中 a是一个处处非零的实值（分别地，复值）博雷尔函数，使得 $|a| = 1$几乎处处成立，并且 $\sigma : (0,1) \to (0,1)$是一个可逆的保测博雷尔映射。

本文专门研究复Banach空间及其上的满射线性等距映射。

1.2 非交换 L_p空间上的等距映射

非交换空间上等距映射领域的首项成果归功于 Kadison [65] 。20世纪50年代，他证明了两个冯·诺依曼代数之间的满射等距映射可表示为 Jordan $*$同构与一个酉算子的乘积。这一结果通常被视为 Banach–Stone 定理的非交换版本。非交换 L_p空间的研究可追溯至20世纪50年代，当时 Dixmier 和 Segal 引入了非交换 L_p空间 [32, 102]。继他们的工作之后，包括 Broise 在内的许多学者 [24],、Russo [99], 、Arazy [7], 、Tam [116],等人开始研究这些空间上的等距映射。Yeadon 完成了对非交换 L_p空间（半有限情形）上等距映射的完整刻画 [120]。

定理 1.2.1。 从一个非交换L_p-空间 $L_p(\mathcal{M}_1, \tau_1)$到另一个 $L_p(\mathcal{M}_2, \tau_2)$的每个（不一定满射的）等距映射$T$（其中代数 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$为半有限 *von Neumann* 代数）均具有如下形式

$$T(x) = uBJ(x),\ x \in L_p(\mathcal{M}_1, \tau_1) \cap \mathcal{M}_1,$$

其中 u 是 $\mathcal{M}_2$中的一个偏等距， J 是从 $\mathcal{M}_1$ 到 $\mathcal{M}_2$的一个 *Jordan* $*$-同构，其像为一个弱闭 $*$-子代数， B 是隶属于$\mathcal{M}_2$ 的正自伴算子，使得 B 的每个谱投影都与 $J(x)$ 对所有 $x \in \mathcal{M}_1$ 均交换，并且$\tau_1(x) = \tau_2(B^p J(x))$对所有 $0 \le x \in \mathcal{M}_1$均成立。

对于类型 III冯·诺依曼代数的情形，请参阅 [60,61,104–106,117]。本文仅讨论半有限冯·诺依曼代数。关于 $\mathscr{C}_p$-上的等距映射，

巢代数中的空间已在 [6]中研究。然而，在一般的半有限情形下，非交换 Hardy 空间的等距映射的描述似乎尚不清楚。

1.3 非交换对称空间上的等距映射

自 20 世纪 70 年代引入非交换对称空间以来，关于半有限冯·诺依曼代数上的一般非交换对称空间的研究已取得了广泛进展（例如参见 [35, 36, 68, 86, 87, 110] 及其中的参考文献）。研究非交换对称空间上等距映射的最初动机，是探讨这些等距映射是否 T 具有类似于定理 1.1.1、1.1.2 和 1.2.1的自然描述。该领域最重要的进展之一由 Sourour 取得， [108], 他在 $B(\mathcal{H})$ 中给出了可分对称算子理想上满射等距映射的完整描述。通过采用 Sourour 的方法，本文第四作者 [111] 成功推导出了与超有限型 II_1因子相关的可分对称算子空间上满射等距映射的描述。然而，Sourour 的证明 [108] 高度依赖于可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上紧算子的矩阵表示，这种方法似乎无法适用于一般对称算子空间。在后一情形下，人们已经获得了一些部分结果。例如，有限冯·诺依曼代数上洛伦兹空间的等距映射的一般形式已在 [30] 中得到（另见 [25, 26, 73, 82]）。当对等距映射施加附加条件（例如不交性保持、序保持等）时， [1, 27, 30, 44, 55–57, 69, 80, 81, 83, 94, 112], 中也给出了类似的描述，从而对问题 1.0.2提供了部分答案。

最近，本文的第三和第四位作者 [54] 回答了问题1.0.2 在具有序连续范数的非交换对称空间 E（M， τ）中的研究表明，作用在 E（M， τ）上的所有满射等距映射都具有基本形式，从而解决了 [111]中提出的问题。特别地，这意味着 Banach–Mazur 旋转问题（即每个具有等距映射的传递群的可分巴拿赫空间是否必定等距同构于希尔伯特空间 [13], 另见[96, 问题 9.6。2]）在可分交换/非交换对称空间的范围内得到了肯定回答。

本文的目标之一是处理 $E(\mathcal{M}, \tau)$上的范数不一定序连续的情形。我们注意到， [54] 中的证明适用于由极小对称函数空间生成的非交换对称空间。下述定理是本文的第一个主要结果，它回答了问题1.0.2 在 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 上的范数不一定序连续时的情形。这推广了文献中的许多结果。

定理 *1.3.1.* 设 M_1 和 M_2 是无原子 σ-有限冯·诺伊曼代数（或 σ-有限有原子冯·诺伊曼代数，且其原子的迹相同），分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2。设 $E(M1,\tau_1)$和 $F(M2,\tau_2)$是具有 *Fatou* 性质的两个强对称算子空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$成比例。若 $T\colon E(M1,\tau_1)\to F(M2,\tau_2)$是一个满射等距映射，则存在两个元素序列 $A_i\in F(M2,\tau_2)$、$i\in I$，它们的支集两两左不相交；以及 $B_i\in F(M2,\tau_2)$、$i\in I$，它们的支集两两右不相交；还存在一个满射 *Jordan* $*$-同构 $J:M_1\to M_2$ 和一个中心投影 $z\in M_2$，使得

$$T(x)=\sigma(F,F^{\times})-\sum_{i=1}^{\infty}J(x)A_iz+B_iJ(x)(\mathbf{1}-z),\ x\in E(\mathcal{M}_1,\tau_1)\cap\mathcal{M}_1.$$

特别地，若迹 τ 有限，则存在元素 A、$B\in F(\mathcal{M}_2,\ \tau_2)$，使得

$$T(x)=J(x)Az+BJ(x)(\mathbf{1}-z),\ \forall x\in E(\mathcal{M}_1,\tau_1)\cap\mathcal{M}_1.$$

1.4 非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理

请注意，[54] 中的主要结果以及上文的定理1.3.1 并未给出非交换对称空间 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 上的算子成为满射等距映射的充分条件。本文的另一个目的是通过建立 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理的非交换版本（见下文定理 1.1.2），给出 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 上算子成为等距映射的充要条件，见下文。

定理 *1.4.1.* 设 $E(0,1)$ 和 $F(0,1)$ 是 *Lindenstrauss* 和 *Tzafriri* 意义下的对称函数空间。设 M_1 和 M_2 是无原子有限冯·诺依曼代数，分别配备忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2。设 $E(M1,\tau_1)$ 和$F(M2,\tau_2)$ 分别是对应于 $E(0,1)$ 和$F(0,1)$ 的非交换对称空间。设 $T\colon E(M1,\tau_1)\to F(M2,\tau_2)$ 是一个满射等距映射。那么，

(1) 如果对于某个 $1\le p\le\infty$，$E(0,1)$与 $L_p(0,1)$（作为集合）重合，那么 T是从 $L_p(\mathcal{M}_1,\tau_1)$到 $L_p(\mathcal{M}_2,\tau_2)$的满射等距映射；
(2) 如果 $E(0,1)$与 $L_p(0,1)$（作为集合）不重合，那么

$$T(x)=u\cdot J(x),\ \forall x\in E(\mathcal{M}_1,\tau_1),$$

其中 u 是 $\mathcal{M}_2$ 中的酉算子，而 $J\colon S(\mathcal{M}_1,\tau_1)\to S(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ 是保迹 *Jordan* $*$-同构。

Potepun [90]（另见 [2, 推论 4]）证明了，只要 $E(0,1)$ 与 $F(0,1)$ 等距，那么 $E(0,1)$ $=F(0,1)$ 在等价范数下成立。该—

理 1.4.1 上面的（1）蕴含了这一结果的非交换版本。具体而言，如果两个定义在非交换概率空间上的非交换对称空间 $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$和 $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$彼此等距，那么 $E(0,1)=F(0,1)$在等价范数下成立。这个结果与 Pełczyński 问题直接相关，我们将在下文第1.6节讨论。

如 [64, 节 1], 所述，要将主要结果 [64, 定理1。1] 推广到 $[0,\infty)$上的对称函数空间情形，似乎存在障碍。在第7章中，我们还在赋有半有限、无限、忠实正规迹的冯·诺伊曼代数情形下，证明了上述定理1.4.1 的一个版本；即使在交换情形下，这也是一个新结果。

1.5 Mityagin 问题及其非交换对应问题

Mityagin 关于$(0，1)$与$(0，\infty)$上对称函数空间之间同构的问题，是重要专著 [59],以及 [76]的一大研究动机。对于某些特殊的对称函数空间，该问题已知有肯定答案，参见例如 [12], [76, 定理2.f.1] 和 [59]。下文将讨论 Mityagin 问题中有关等距同构的部分。在我们的论文中，我们证明了任意复对称函数空间 $E(0，1)\neq L_p(0，1)$，$1\leq p\leq\infty$，都不与对称函数空间 $F(0，\infty)$等距同构。

定理 1.5.1。若（复）对称函数空间 $E(0,1)\neq L_p(0,1)$（作为集合）满足 $1\leq p\leq\infty$，则 $E(0,1)$不等距于任何对称函数空间 $F(0,\infty)$。

对于范数等价（但不相等）的 $E(0,1)=L_p(0,1)$，Lamperti [75]，给出了从 $E(0,1)$到某个对称函数空间 $F(0,\infty)$的第一个等距映射，[121, 另见第639页例]。另见 [93, 例 1]，其中给出了一个 Orlicz 空间 $E(0,1)$与另一个 Orlicz 空间 $F(0,1)$等距的例子；这两个空间作为集合都与 $L_p(0,1)$相同。

下面的定理对非交换情形下的 Mityagin 问题给出了否定的回答。

定理 1.5.2。设 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$是作用在可分希尔伯特空间上的两个无原子冯·诺伊曼代数。设 $\mathcal{M}$配备忠实正规迹态 τ，而 $\mathcal{N}$配备半有限、无限、忠实正规迹 ν。若按照 *Lindenstrauss* 和 *Tzafriri* 的意义，某个对称函数空间$E(0，1)$与 $L_p(0，1)$（作为集合）不相同，$1\leq p\leq\infty$，那么 $E(\mathcal{M}，\tau)$不同构于任何定义在$(\mathcal{N}，\nu)$上的对称空间 $F(\mathcal{N}，\nu)$。

我们注意到，[49]证明了，对于任意 $1\leq p\neq 2<\infty$，有限冯·诺依曼代数上的 $L_p(\mathrm{M}，\tau)$不同构于无限半有限冯·诺依曼代数上的 $L_p(\mathrm{N}，\nu)$。

1.6 Pełczyński 关于对称结构唯一性的问题

令 C_E 为由对称序列空间 $B(l_2)$ 生成的对称算子理想。 E我们称 C_E 具有唯一对称结构，若 C_E 同构于某个理想 C_F ，该理想对应于对称序列空间 F ，则必有 $E = F$ 且二者范数等价。1979年8月，在俄亥俄州肯特举行的班纳赫空间理论及其应用国际会议上，Pełczyński 提出了关于希尔伯特空间l_2 上紧算子理想的对称结构这一问题（另见 [8, 问题 (B)] 和 [9, 问题 A]）：

> 与任意可分对称序列空间 E 相对应的紧算子理想 C_E 是否具有唯一的对称结构?

对此主题感兴趣的读者可参阅 [8,9,53]。我们可以从等距同构的角度考虑 Pełczyński 问题的类似版本。若非交换对称空间 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 与 $F(\mathrm{M}, \tau)$ 等距同构意味着 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 与 $F(\mathrm{M}, \tau)$ 在成比例范数意义下相同，则称 $F(\mathrm{M}, \tau)$ 在等距映射 [54] 意义下具有唯一的对称结构。由定理 1.4.1 可立即推出，若对称函数空间（按照 Lindenstrauss 和 Tzafriri 的定义） $F(0, 1) \neq L_p(0, 1)$（作为集合），那么对于任意配备忠实正规迹态 τ 的无原子有限 von Neumann 代数 M， $F(\mathrm{M}, \tau)$ 在等距映射意义下具有唯一的对称结构。此外，若 M 是一个 II_1-因子或 $B(\mathrm{H})$，则所有可分非交换对称空间 $F(\mathrm{M}, \tau)$（按照 Lindenstrauss–Tzafriri 的定义）都具有唯一的对称结构（在等距映射意义下），见 [54, Section 5]and [5,108, 111]。

Semenov [103] 证明，任何与 $L_2(0，1)$ 等距的对称函数空间 $E(0，1)$，在相差一个成比例范数的意义下，都与 $L_2(0，1)$ 相同；另见 [91]。随后，Abramovich 和 Zaidenberg [3], 扩展了这一结果，通过证明任何与 $L_p(0，1)$ 等距的对称函数空间$E(0，1)$，都与 $L_p(0，1)$ 相同（其中 $\|\cdot\|_E = \lambda\|\cdot\|_{L_p}, \lambda > 0$），从而刻画了 L_p-函数空间（$1 \leq p < \infty$）。因此， $L_p(0，1)$（$1 \leq p < \infty$）在定义于 $(0，1)$ 上的对称函数空间类中，除等距映射外具有唯一的对称结构。

本文建立了 Semenov– Abramovich–Zaidenberg 定理的非交换版本，证明在非交换 L_p-空间中，对称结构（除等距映射外）的唯一性，见第 8章。

定理 1.6.1。 设$\mathcal{M}$ 是一个无原子冯·诺伊曼代数，配备忠实正规迹态 τ。设 $E(0, 1)$ 是 *Lindenstrauss* 和 *Tzafriri* 意义下的对称空间。若存在一个无原子冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}$ ，配备忠实正规迹态 ν，使得 $E(\mathcal{M}, \tau)$与 $L_p(\mathcal{N}, \nu)$等距同构， $1 \leq p < \infty$，则 $E(\mathcal{M}, \tau)$与 $L_p(\mathcal{M}, \tau)$一致，且 $\|\cdot\|_E = \lambda\|\cdot\|_{L_p}, \lambda > 0$。

注意，定理 1.6.1 在无限半有限冯·诺依曼代数的情形下成立；即使在交换情形下，这也是一个新结果，因为它适用于无限区间 $(0,\infty)$上的对称函数空间，见下文推论 8.2.2 。

第2章

预备知识

本章回顾广义奇异值函数的若干性质，并定义非交换对称空间。本文中，H 表示一个希尔伯特空间，它不一定可分； $B(\mathrm{H})$ 表示作用于 H 上的所有有界线性算子构成的 $*$-代数，其中 1 表示 H 上的恒等算子。设 M 是 H 上的冯·诺依曼代数。用 $P(\mathrm{M})$ 表示 M 中所有投影的集合。我们用 M_p 表示由投影 $p \in P(\mathrm{M})$ 生成的约化冯·诺依曼代数 $p\mathrm{M}\,p$。关于冯·诺依曼代数理论的详细论述，请参阅 [19], [33], [64] 或 [101, 114]。关于可测算子的一般信息，请参阅 [85], [102], [39], [40] 和 [115]。

2.1 τ-可测算子与广义奇异值

若线性算子 $x: \mathfrak{D}(x) \to \mathrm{H}$ 满足 x 闭、稠密定义、隶属于 M，且存在序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中各项属于 M 中所有投影构成的集合 $P(\mathrm{M})$，使得 $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(\mathrm{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$，并且对所有 n， $\mathbf{1} - p_n$ 是（相对于 M 的）有限投影，则称其为关于 M 可测的。需要注意的是，条件 $p_n(\mathrm{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$ 蕴含 $xp_n \in \mathrm{M}$。关于 M 的所有可测算子构成的集合记为 $S(\mathrm{M})$；相对于强和与乘积（对所有 x, $y \in S(\mathrm{M})$，分别简记为 $x+y$ 和 xy），它是一个含幺 $*$-代数。

设 x 是隶属于 M 的自伴算子。我们用 $\{e^x\}$ 表示其谱测度。众所周知，若 x 是隶属于 M 的闭算子，其极分解为 $x = u|x|$，则对于所有投影 $e \in \{e^{|x|}\}$, $u \in \mathrm{M}$ 且 $e \in \mathrm{M}$。此外， $x \in S(\mathrm{M})$ 当且仅当 x 是闭的、稠密定义的、隶属于 M 的算子，并且对于某个 $\lambda > 0$, $e^{|x|}(\lambda, \infty)$ 是有限投影。由此立即可知，当 M 是 III 型冯·诺依曼代数或 I 型因子时，有 $S(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$。对于 II 型冯·诺依曼代数，这一结论不再成立。从现在起，设 M 是一个配备忠实正规半有限迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数。

对于任意闭且稠密定义的线性算子 $x: \mathfrak{D}(x) \to \mathrm{H}$，零投影 $n(x) = n(|x|)$ 是投影到其核 $\mathrm{Ker}(x)$ 上的投影。左支撑 $l(x)$ 是投影到其值域 $\mathrm{Ran}(x)$ 的闭包上的投影，而 x 的右支撑 $r(x)$ 定义为 $r(x) = \mathbf{1} - n(x)$。

如果存在一个序列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \text{in } P(\mathrm{M})$，使得 $p_n \uparrow \mathbf{1}, p_n(\mathrm{H}) \subseteq \mathfrak{D}(x)$ 且 $\tau(\mathbf{1} - p_n) < \infty$ for all n，则称算子 $x \in S(\mathrm{M})$ 为 τ-可测算子。所有 τ-可测算子的集合是 $S(\mathrm{M})$ 的一个含幺 $*$-子代数，记作 $S(\mathrm{M}, \tau)$。众所周知，线性算子 x 属于 $S(\mathrm{M}, \tau)$ 当且仅当 $x \in S(\mathrm{M})$

并且存在 $\lambda > 0$ 使得

$$\tau(e^{|x|}(\lambda, \infty)) < \infty.$$

或者，无界算子 x 隶属于 $\mathcal{M}$ 是 τ-可测的（见 [46]）当且仅当

$$\tau\left(e^{|x|}(n, \infty)\right) \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

定义 2.1.1。设半有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 配备了忠实正规半有限迹 τ，并令 $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$。算子 x 的广义奇异值函数 $\mu(x): t \to \mu(t; x),\ t > 0$，定义如下：

$$\mu(t; x) = \inf\left\{\|xp\|_\infty : \ p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),\ \tau(\mathbf{1} - p) \le t\right\}.$$

利用算子 x 的分布函数，还可以给出一个等价定义。对于每个自伴算子 $x \in S(\mathrm{M}, \tau)$，令

$$d_x(t) = \tau(e^x(t, \infty)), \quad t > 0,$$

我们有（例如参见 [46] 和 [77]）

$$\mu(t; x) = \inf\{s \ge 0 : \ d_{|x|}(s) \le t\}.$$

注意，$d_x(\cdot)$ 是一个右连续函数（例如参见 [46] 和 [40]）。

考虑由区间 $(0, \infty)$ 上所有勒贝格可测且本质有界的函数构成的代数 $\mathrm{M} = L^\infty(0, \infty)$。代数 M 可视为一个阿贝尔冯·诺依曼代数，它通过乘法作用在希尔伯特空间 $\mathrm{H} = L^2(0, \infty)$ 上，其迹由关于勒贝格测度的积分给出 $m_\circ$ 容易看出，所有隶属于 M 的 τ-可测算子组成的代数，可识别为代数 $S(0, \infty)$ 的子代数；该代数由勒贝格可测函数构成，其中包含所有满足以下条件的函数：对于某个 $s > 0$，$m(\{|f| > s\})$ 有限。还应指出，广义奇异值函数 $\mu(f)$ 正是函数 $|f|$ 的递减重排 $\mu(f)$（例如参见 [14, 72, 76]），其定义如下

$$\mu(t; f) = \inf\{s \ge 0 : \ m(\{|f| \ge s\}) \le t\}.$$

为方便读者，我们也回顾代数 $S(\mathrm{M}, \tau)$ 上测度拓扑 t_τ 的定义。对于每个 $\varepsilon, \delta > 0$，我们定义集合

$$V(\varepsilon, \delta) = \{x \in S(\mathcal{M}, \tau) : \ \exists p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ such that } \|x(\mathbf{1} - p)\|_\infty \le \varepsilon,\ \tau(p) \le \delta\}.$$

由集合 $V(\varepsilon, \delta)$、$\varepsilon, \delta > 0$，生成的拓扑称为 $S(\mathrm{M}, \tau)$ 上的测度拓扑 t_τ [40, 46, 85]。众所周知，赋予测度拓扑的代数 $S(\mathrm{M}, \tau)$ 是一个完备可度量拓扑代数 [85]。我们注意到

序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathrm{M},\ \tau)$ 关于测度拓扑 t_τ收敛到零，当且仅当

$$\tau\left(e^{|x_n|}(\varepsilon,\infty)\right) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

对所有 $\varepsilon > 0$ [40]。

$S_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 的 τ-紧算子空间是与函数代数相关联的空间，其中函数来自 $S(0,\ \infty)$ 且在无穷远处趋于零，即

$$S_0(\mathcal{M},\tau) = \{x \in S(\mathcal{M},\tau):\ \mu(\infty;x) = 0\}.$$

M 中由所有具有 τ-有限值域的 τ 的元素组成的双边理想 $\mathrm{F}(\tau)$ 定义为

$$\mathcal{F}(\tau) = \{x \in \mathcal{M}\ :\ \tau(r(x)) < \infty\} = \{x \in \mathcal{M}\ :\ \tau(s(x)) < \infty\}.$$

注意，$S_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 是 $\mathrm{F}(\tau)$ 关于测度拓扑 [39] 的闭包。

$S(\mathrm{M},\ \tau)$ 上另一个重要的向量空间拓扑是局部测度拓扑 [39,40]。该拓扑的邻域基由集合 $V(\varepsilon,\ \delta;\ p)$，$\varepsilon,\ \delta > 0,\ p \in \mathrm{P(M)} \cap \mathrm{F}(\tau)$ 给出，其中

$$V(\varepsilon,\delta;p) = \{x \in S(\mathcal{M},\tau) : pxp \in V(\varepsilon,\delta)\}.$$

显然，局部测度拓扑弱于测度拓扑 [39,40]。若 $\{x_\alpha\}$ 是 $\subset S(\mathrm{M},\ \tau)$ 中的一个网，并且 $x_\alpha \to_\alpha x \in S(\mathrm{M},\ \tau)$ 在局部测度拓扑中，则$x_\alpha y \to xy$和 $yx_\alpha \to yx$ 对所有 $y \in S(\mathrm{M},\ \tau)$ [39,40]均属于局部测度拓扑。若 $\{a_i\}$ 是 $S(\mathrm{M},\ \tau)$ 中正元素的递增网，且 $a \in S(\mathrm{M},\ \tau)$ 满足 $a = \sup\ a_i$，则记作 $0 \le a_i \uparrow a$ [39, p. 212]。若 $\{x_i\}$ 是 $S(\mathrm{M},\ \tau)$ 中的递增网$_+$，并且 $x \in S(\mathrm{M},\ \tau)_+$ 满足 $x_i \to x$ 在局部测度拓扑中，则 $x_i \uparrow x$（例如参见 [40, 第二章，命题 7.6 (iii)]）。

2.2 τ-可测算子的对称空间

现在我们来定义本文的主要研究对象。

定义 2.2.1. 设 $\mathcal{M}$ 是配备忠实正规半有限迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数。设 $\mathcal{E}$ 是 $S(\mathcal{M},\tau)$ 中的一个线性子集，并配备完备范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$。若对于 $x \in \mathcal{E}$，$y \in S(\mathcal{M},\ \tau)$ 和 $\mu(y) \le \mu(x)$，有 $y \in \mathcal{E}$且$\|y\|_{\mathcal{E}} \le \|x\|_{\mathcal{E}}$，则称 $\mathcal{E}$ 为对称空间。

设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个对称空间。众所周知，任意对称赋范空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 都是一个赋范 M-双模（例如参见 [39] 和 [40]）。也就是说，对于任意对称算子空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$，都有 $\|axb\|_E \le \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_E$，$a,\ b \in \mathrm{M},\ x \in E(\mathrm{M},\ \tau)$。已知，只要 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有序连续范数 $\|\cdot\|_E$，即$\|x_\alpha\|_E \downarrow 0$只要 $0 \le x_\alpha \downarrow 0 \subset E(\mathrm{M},\ \tau)$，就有 $E(\mathrm{M},\ \tau) \subset S_0(\mathrm{M},\ \tau)$ [39,40,55]。

若对称空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)\subset S(\mathrm{M},\ \tau)$ 对每个向上有向网 $\{a_\beta\}$ 都满足 Fatou 性质，则称其具有 Fatou 性质：对于 $E(\mathrm{M},\ \tau)^+$ 中的每个向上有向网 $\{a_\beta\}$，若满足 $\sup_\beta \|a_\beta\|_E<\infty$，则存在 $a\in E(\mathrm{M},\ \tau)^+$，使得 $a_\beta\uparrow a$ 属于 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 且 $\|a\|_E=\sup_\beta \|a_\beta\|_E$。

所谓柯特对偶被视为对偶空间的重要组成部分。若 $E(\mathrm{M},\ \tau)\subset S(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个对称空间，则 $E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$ 的柯特对偶 E 定义为

$$E(\mathcal{M},\tau)^\times=\left\{x\in S(\mathcal{M},\tau):\sup_{\|y\|_E\le 1,y\in E(\mathcal{M},\tau)}\tau(|xy|)<\infty\right\}.$$

若 $y\in E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$，则线性泛函

$$\phi_y:x\mapsto\tau(xy),\ x\in E(\mathcal{M},\tau),$$

在 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上是连续的，见 [39, 命题 22 (i).]。此外，$\|\phi_y\|_{E(\mathcal{M},\tau)^*}=\|y\|_{E(\mathcal{M},\tau)^\times}$，其中 $E(\mathrm{M},\ \tau)^*$ 是 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 的对偶空间（例如见 [39, 40]）。通过迹对偶 [39, p.228]，柯特对偶 $E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$ 可被视为 Banach 对偶 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 的子空间。若 $y\in E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$，则泛函 ϕ_y 是正规的，也就是说，$x_\alpha\downarrow 0$ 在 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 中蕴含 $\phi_y(x_\alpha)\to_\alpha 0$。注意，每个正规泛函 $\phi\in E(\mathrm{M},\ \tau)^*$ 都具有 ϕ_y 的形式，其中某个 $y\in E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$（例如见 [39, 定理 37.]）。由于 $E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$ 将 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 的点分离（见 [40, 推论 4.3.9]），因此弱拓扑 $\sigma(E(\mathrm{M},\ \tau),\ E(\mathrm{M},\ \tau)^\times)$ 是豪斯多夫拓扑。为简便起见，我们使用 $\sigma(E,E^\times)$ 代替 $\sigma(E(\mathrm{M},\ \tau),\ E(\mathrm{M},\ \tau)^\times)$。

回顾

$$x\in L_1(\mathcal{M},\tau)+\mathcal{M}:=\{a\in S(\mathcal{M},\tau):\mu(a)\in L_1(0,\infty)+L_\infty(0,\infty)\}$$

可以赋予一个范数 $\|x\|_{L_1+L_\infty}=\int_0^1\mu(s;\ x)ds$ 和

$$x\in L_1(\mathcal{M},\tau)\cap\mathcal{M}:=\{a\in S(\mathcal{M},\tau):\mu(a)\in L_1(0,\infty)\cap L_\infty(0,\infty)\}$$

可以赋予一个范数 $\|x\|_{L_1\cap L_\infty}:=\max\{\|x\|_1,\|x\|_\infty\}$。特别地，我们有 $(L_1(\mathrm{M},\ \tau)\cap\mathrm{M})^\times=L_1(\mathrm{M},\ \tau)+\mathrm{M}$ 且 $L_1(\mathrm{M},\ \tau)\cap\mathrm{M}=(L_1(\mathrm{M},\ \tau)+\mathrm{M})^\times$ [39, 例 4]。

对称函数空间（见 [72, 76, 98]）与 [68] 中介绍的算子空间（另见 [77]）之间存在紧密联系。由下式定义的算子空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$

$$E(\mathcal{M},\tau):=\{x\in S(\mathcal{M},\tau):\ \mu(x)\in E(0,\infty)\},\ \|x\|_{E(\mathcal{M},\tau)}:=\|\mu(x)\|_E\}$$

当 $(E(0,\infty),\ \|\cdot\|_E)$ 是 $(0,\infty)$ 上的完备对称函数空间时，它是完备对称空间 [68]。特别地，对于任意对称函数空间 $E(0,\infty)$，我们有 [39, 引理 18]

$$F(\tau)\subset E(\mathcal{M},\tau).$$

在特殊情形下，当 $E(0,\infty) = L_p(0,\infty)$ 时，$1 \le p \le \infty$, $E(\mathrm{M},\tau)$ 是隶属于 M 的非交换 L_p-空间，其范数记为 $\|\cdot\|_p$。注意，若$E(0,\infty)$ 可分（即具有序连续范数），则 $E^{\times}(\mathrm{M},\tau)$ 与 $E(\mathrm{M},\tau)$ 等距同构* [39, p.246]。回想一下，Lindenstrauss 和 Tzafriri 意义下的每个对称序列/函数空间 E 都是全对称的，也就是说，若 $x \in E$且 $y \in \mathrm{l}_\infty$（分别为 $y \in S(0,\infty)$），并且

$$\int_0^t \mu(t;y)dt \le \int_0^t \mu(t;x)dt,\ t \ge 0$$

（记为 $y \prec\prec x$），则 $y \in E$ 具有 $\|y\|_E \le \|x\|_E$（例如参见 [76, 命题 2.a.8], [72, 第二章，定理 4.10] 或 [40, 定理 4.5.7]）。

E（M，τ）的载体投影 $c_E \in \mathrm{M}$ 定义为

$$c_E := \vee\{p : p \in \mathcal{P}(E)\}.$$

显然，c_E 属于 M 的中心 $Z(\mathrm{M})$，见 [40] 或 [39]。通常假设载体投影 c_E 等于 $\mathbf{1}$。事实上，对于任意对称函数空间$E(0,\ \infty)$，相应算子空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 的载体投影总是$\mathbf{1}$（例如参见 [39,68]）。另一方面，如果 M 无原子，或者 M 是原子的且所有原子的迹相等，那么任意非零对称空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 必然是 $\mathbf{1}$ [39, 40]。

回顾以下众所周知的事实。

引理 2.2.2. 设$\mathcal{M}$ 是赋有半有限忠实正规迹 τ 的冯·诺依曼代数。设 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是隶属于$\mathcal{M}$的对称空间。设$\{e_i\}$ 是$\mathcal{M}$ 中一列递增至$\mathbf{1}$的 τ-有限投影网。则 $\cup_i e_i\mathcal{M}e_i$ 关于 $\sigma(E, E^{\times})$-拓扑在 $E(\mathcal{M},\ \tau)$中稠密。

证明。设 $x \in E(\mathrm{M},\tau) \cap \mathrm{M}$。我们断言，$e_i x e_i \to_i x$在 $\sigma(E, E^{\times})$-拓扑下成立。对于任意 $y \in E(\mathrm{M},\tau)^{\times}$，有

$$\tau(ye_ixe_i - yx) = \tau(ye_ixe_i - ye_ix) + \tau(ye_ix - yx).$$

显然，$\tau(ye_ix - yx) \to_i 0$。另一方面，有

$$\mu(2t; ye_ixe_i - ye_ix) \overset{[77,\ \text{Corollary 2.3.16}]}{\le} \mu(t; ye_i)\mu(t; x(\mathbf{1}-e_i)) \le \mu(t;y)\mu(t;x(\mathbf{1}-e_i))$$

and

$$\mu(2t; ye_ix - e_iye_ix) \overset{[77,\ \text{Corollary 2.3.16}]}{\le} \mu(t; (\mathbf{1}-e_i)y)\mu(t; e_ix) \le \mu(t;(\mathbf{1}-e_i)y)\mu(t;x).$$

注意，x或 y是 τ-紧的。由 [40, 命题 2.6.4],，$\mu(ye_ixe_i - ye_ix)$ 或 $\mu(ye_ix - e_iye_ix)$ 在测度意义下收敛于 0。因此，由 [40, 定理 3.4.21], 可得 $\tau(ye_ixe_i - ye_ix) \to_i 0$。这就证明了该断言。

现在，只需注意到 $E(\mathrm{M},\ \tau)_+ \cap \mathrm{M}_+$ 在关于 $\sigma(E,\ E^\times)$-拓扑的意义下稠密于 $E(\mathrm{M},\ \tau)_+$。令 $x_n = xe^x(0,\ n),\ n \geq 1$。我们有 $x - x_n \downarrow 0$，因为 $n \to \infty$。对于任意 $y = y_1 - y_2 + iy_3 - iy_4 \in E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$，其中 y_i 对每个 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 均为正，我们有

$$\tau((x - x_n)y_i) = \tau\left(y_i^{1/2}(x - x_n)y_i^{1/2}\right) \to 0$$

作为 $n \to \infty$，也就是说，相对于 $\sigma(E, E^\times)$-拓扑，$x_n \to x$ 作为 $n \to \infty$. ■

2.3 厄米算子

设 X 是一个巴拿赫空间。回顾一下，X 上的一个半内积 （简称*s.i.p.*）是一个将 $X \times X$ 映射到复数域的映射 $\cdot,\cdot$，满足：

(1) $x + y, z = x, z + y, z,$ 对于 $x, y, z \in X$；

(2) $\lambda x, y = \lambda x, y,$ 对于 $x, y \in X$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$；

(3) $x, x > 0$，对于 $0 \neq x \in X$；(4) $|x, y$

$|^2 \leq x, x y, y,$ 对于任意 $x, y \in X$。

当在 X 上定义了一个半内积时，我们称 X 为半内积空间（简称 s.i.p.s.）。若 X 是半内积空间，则 $x, x^{\frac{1}{2}}$ 是 X 上的范数。另一方面，每个巴拿赫空间都可以赋予半内积空间结构（通常有无穷多种方式），使半内积与范数相容，即对于任意 $x \in X$ [43]，$x, x^{\frac{1}{2}} = \|x\|$。根据 Hahn–Banach 定理，可以通过为每个 $x \in X$ 选取一个有界线性泛函 f_x 来实现，其中 $\|f_x\| = \|x\|$ 且 $f_x(x) = \|x\|^2$（f_x 称为 x 的支撑泛函），再对任意 $x, y \in X$ [18,43,47,78] 定义 $x, y = f_y(x)$。给定一个将半内积空间映射到自身的线性变换 T，我们用 $W(T)$ 表示 T 的数值域，即 $\{Tx, x|x, x = 1,$ $x \in X\}$。设 T 是巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上的算子。尽管原则上可能存在许多种与 $\|\cdot\|$ 相容的半内积，但如果相对于其中一种半内积，T 的数值域为实数，那么相对于任何此类半内积，其数值域也为实数（例如参见 [43, 第 107], [78, 页第 6] 节及 [18, 第 377] 页）。若情况如此，则称 T 是 X 上的厄米算子。

第3章

球拓扑与等距映射的弱连续性

本章节的主要目的是证明非交换对称空间 $E(\mathrm{M},\tau)$ 上等距映射/厄米算子的 $\sigma(E,E^{\times})$-连续性（见下文定理 3.0.15 和 3.0.16）。只关注可分巴拿赫空间的读者可以注意到，当 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有序连续范数（尤其是可分）时， $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的任何有界线性算子都会自动具有 $\sigma(E,E^{\times})$-连续性。然而，对于 $E(\mathrm{M},\tau)$ 不具有序连续范数的情形， $E(\mathrm{M},\tau)$ 上等距映射/厄米算子 T 的 $\sigma(E,E^{\times})$-连续性并非显而易见。

Kalton 和 Randrianantoanina [67, 命题 2。5] 为具有 Fatou 性质的 Köthe 函数空间获得了下面的定理 3.0.16。最近，Aminov 和 Chilin [5,命题 4。3] 研究了可分希尔伯特空间上的紧算子的完备范数理想。其主要工具是所谓的巴拿赫空间球拓扑，该拓扑由 Godefroy 和 Kalton 引入并加以发展 [48]。

设 $(X,\|\cdot\|_X)$ 表示一个实巴拿赫空间，并令 b_X 表示其球拓扑；该拓扑是使每个闭球均为闭集的最粗拓扑

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in X:\|y-x\|_X\le\varepsilon\},\quad \varepsilon>0,$$

在 b_X 中，参见例如 [48]。族

$$X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\varepsilon_i),\quad x_i\in X,\quad \|x_0-x_i\|_X>\varepsilon_i,\quad i=1,\dots,n,\quad n\in\mathbb{N},$$

构成点 $x_0\in X$ 在 b_X中的一个邻域基。因此，我们得到球拓扑中收敛性的如下刻画。

引理 3.0.1。 [48, p.200] 设 X 是一个巴拿赫空间。设 $\{x_\alpha\}$ 是 X 中的一个网，且令$x\in X$。那么， $x_\alpha\xrightarrow{b_X}x$ 当且仅当

$$\liminf\|x_\alpha-y\|_X\ge\|x-y\|_X$$

对所有 $y\in X$ 都成立。特别地，从 $(X,\|\cdot\|_X)$ 到另一个巴拿赫空间$(Y\|\cdot\|_Y)$ 的每个等距映射T都是 b_X-b_Y-连续的。

众所周知，球拓扑不是豪斯多夫的 [48]。以下定理弥补了这一不足。回顾一下，巴拿赫空间 X 的绝对凸子集 A 若有界，且不包含任何与l_1 的单位向量基等价的基本序列，则称为 Rosenthal 集（等价地， A 中的每个序列都包含一个弱柯西子列 [97]）。

定理 3.0.2。 [48, 定理 3.3] 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个实/复巴拿赫空间，且 A 是 X 的有界绝对凸 *Rosenthal* 子集。那么 (A, b_X) 是一个豪斯多夫空间。

在继续证明本章节的主定理之前，我们需要一些辅助结果。

引理 3.0.3. 对于任意配备忠实正规迹态 τ 的有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$，若

$$0 \leq x_\lambda \uparrow_\lambda \leq x \in S(\mathcal{M}, \tau) \text{ and } \mu(x_\lambda) \uparrow \mu(x),$$

那么我们有

$$x_\lambda \uparrow x.$$

证明. 反设 $0 \leq x_\lambda \uparrow x \in S(\mathrm{M}, \tau)$ 和 $\mu(x_\lambda) \uparrow \mu(x)$，但存在一个非零正元素 $b \in S(\mathrm{M}, \tau)$，使得

$$x_\lambda + b \leq x$$

对所有 λ均成立。由 [39, 命题 2(ii)], 可得

$$a = \sup_\lambda x_\lambda$$

e存在于 $S(\mathrm{M}, \tau)$ 中。根据 [55, 引理 4.3] （另见 [29, 命题 2.2]），我们有 e

$$\mu(x_\lambda) \leq \mu(a) \overset{[55,\ \text{Lemma 4.3}]}{<} \mu(a+b) \leq \mu(x)$$

对所有 λ均成立。也就是说，

$$\sup_\lambda \mu(x_\lambda) \leq \mu(a) < \mu(x),$$

这就产生了矛盾。 ∎

以下结果专家们当然熟知。然而，由于缺少合适的参考文献，我们在下文给出完整证明。

引理 3.0.4. 设 $\mathcal{M}$ 是一个带有半有限忠实正规迹 τ 的 σ-有限半有限冯·诺依曼代数。对于 $S(\mathcal{M}, \tau)$ 中的任意网 $\{x_\lambda\}$，若满足 $x_\lambda \uparrow x \in S(\mathcal{M}, \tau)$ （分别地，$x_\lambda \downarrow 0$），则存在一个序列 $\{x_n\} \subset \{x_\lambda\}$，使得 $x_n \uparrow x$（分别地，$x_n \downarrow 0$）。

因此，对于任意配备半有限忠实正规迹 τ 的半有限（不一定是 σ-有限）冯·诺依曼代数$\mathcal{M}$，以及任意满足 $x_\lambda \uparrow x \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$（分别为 $S_0(\mathcal{M}, \tau) \ni x_\lambda \downarrow 0$）的网 $\{x_\lambda\}$（属于 $S(\mathcal{M}, \tau)$），存在一个序列$\{x_n\} \subset \{x_\lambda\}$，使得 $x_n \uparrow x \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$（分别为 $S_0(\mathcal{M}, \tau) \ni x_n \downarrow 0$）。

证明。只需考虑 $x_\lambda \uparrow x$ 的情形。由于 M 是 σ-有限的，因此存在一个递增序列 $\{p_n\}_{n\geq 1}$，由 τ-有限投影构成，且满足 $p_n \uparrow \mathbf{1}$。注意，对于任意 $0 \leq y \in S(\mathrm{M},\tau)$，我们有

$$\mu\left(yp_ny\right) = \mu\left((p_ny)^*p_ny\right) \overset{[40,\,\text{Prop. } 3.2.10]}{=} \mu\left(p_ny(p_ny)^*\right) = \mu\left(p_ny^2p_n\right).$$

对于每个 n，我们有

$$p_nx_\lambda p_n \uparrow_\lambda p_nxp_n$$

（特别地，$p_nx_\lambda p_n \to_\lambda p_nxp_n$ 在测度拓扑 [39, 命题 2(iv)]中）。注意到

$$\mu(p_nx_\lambda p_n) \leq \mu(x_\lambda) \leq \mu(x).$$

设 x_1 是 $\{x_\lambda\}$ 中的一个元素，使得

$$m\left\{|\mu(p_1x_1p_1) - \mu(p_1xp_1)| > \frac{1}{2}\right\} < \frac{1}{2}.$$

存在 $\{x_\lambda\}$ 中的一个元素 $x_2 \geq x_1$，使得

$$\sup_{1\leq k\leq 2} m\left\{|\mu(p_kx_2p_k) - \mu(p_kxp_k)| > \frac{1}{2^2}\right\} < \frac{1}{2^2}.$$

通过归纳构造，我们得到一个递增序列 $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \{x_\lambda\}$，使得

$$\sup_{1\leq k\leq n} m\left\{|\mu(p_kx_np_k) - \mu(p_kxp_k)| > \frac{1}{2^n}\right\} < \frac{1}{2^n}.$$

特别地，对每个 k，我们有

$$\lim_{n\to\infty} m\left\{|\mu(p_kx_np_k) - \mu(p_kxp_k)| > \frac{1}{2^n}\right\} = 0.$$

由于 $p_kx_np_k \uparrow \leq p_kxp_k$ [39, 命题 1(iii)]，根据引理 3.0.3 可知，对每个 k，我们有

$$p_kx_np_k \uparrow p_kxp_k \tag{3.0.1}$$

如 $n \to \infty$。

反设存在一个非零正元素 $a \in S(\mathrm{M},\tau)$，使得

$$x_n + a \leq x \tag{3.0.2}$$

对所有 $n \geq 1$。由于 $p_k \to \mathbf{1}$，因此存在一个足够大的 k 使得 $p_kap_k \neq 0$。我们有

$$p_kxp_k \overset{(3.0.2)}{\geq} p_k\left(x_n + a\right)p_k \overset{(3.0.1)}{\uparrow} p_kxp_k + p_kap_k,$$

即， $p_k a p_k \leq 0$，这与矛盾相矛盾。

第二个断言可由以下事实推出：来自 $S_0(\mathcal{M}, \tau)$的元素的左支撑和右支撑必然是 σ-有限的 [40,引理 5.5。8], 以及 $l(x_\lambda) \leq l(x)$和 $r(x_\lambda) \leq r(x)$。

■

以下引理的交换对应形式是众所周知的，参见例如 [67]。为完整起见，我们在下文给出完整证明。

引理 *3.0.5*。设 M_1 和 M_2 是分别配备半有限忠实正规迹 τ_1和 τ_2的半有限冯·诺依曼代数。设 $E(M1, \tau_1)$ 和 $F(M2, \tau_2)$ 是两个非交换强对称空间。从$E(M1, \tau_1)$到 $F(M2, \tau_2)$的有界线性算子 T 是 $\sigma(E, E^\times) - \sigma(F, F^\times)$-连续的，当且仅当 T^*将$F(M2, \tau_2)^\times$映入 $E(M1, \tau_1)^\times$[1]。

证明。 ($\Leftarrow$) 令 $y \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)^\times$。根据假设，有

$$y(T) = T^*(y) \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1)^\times.$$

对于任意 $x_\lambda \to 0$ 属于 $\sigma(E, E^\times)$-拓扑的元素，我们有

$$\tau_2(yT(x_\lambda)) = T^*(y)(x_\lambda) \to 0.$$

也就是说， $T(x_\lambda) \to 0$ 属于 $\sigma(F, F^\times)$-拓扑。

($\Rightarrow$)假设 T 是 $\sigma(E, E^\times) - \sigma(F, F^\times)$-连续的。令 y 为 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)^\times$中的任意元素。根据 [39, 定理，只需证明

$$T^*(y)$$

是 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$上的正规泛函。

令 $\{x_\lambda\}$ 为 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$中的一个网，且满足 $x_\lambda \downarrow 0$。令 z 为$E(\mathrm{M}_1, \tau_1)^\times$中的任意元素。存在一个分解

$$z = z_1 - z_2 + i(z_3 - z_4),$$

其中 z_i、 $i = 1$， 2， 3， 4 是 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)^\times$ 中的一个正元素。注意

$$\tau_1(z_i x_\lambda) \overset{[40,\ \text{Proposition 3.4.30}]}{=} \tau_1(z_i^{1/2} x_\lambda z_i^{1/2}) \overset{[39,\ \text{Proposition 1(vi)}]}{\downarrow} 0$$

对于 $i = 1$， 2， 3， 4。我们有

$$\tau_1(z x_\lambda) = \tau_1(z_1 x_\lambda) - \tau_1(z_2 x_\lambda) + i \cdot \tau_1(z_3 x_\lambda) - i \cdot \tau_1(z_4 x_\lambda) \to 0,$$

[1]这里， T^*： $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)^* \to E(\mathrm{M}_1, \tau_1)^*$ 表示 T 的伴随算子。

即， $x_\lambda \to 0$在 $\sigma(E,\ E^\times)$-拓扑中。根据 $\sigma(E,\ E^\times) - \sigma(F,\ F^\times)$-连续性，我们有

$$T^*(y)(x_\lambda) = \tau_2(yT(x_\lambda)) \to 0.$$

也就是说， $T^*(y)$是定义在 $E(\mathcal{M}_1, \tau_1)$ [39, 定义 9], 由此完成证明。

■

对于巴拿赫空间 X 和 Y，我们用 $\mathrm{B}(X,Y)$ 表示从 X 到 Y的所有有界线性算子所构成的空间。下面的命题是 [5, 命题 2.4] 的半有限版本。

命题 3.0.6. 设 M_1 和 M_2 是分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2 的半有限冯·诺依曼代数。设 $E(\mathrm{M1}, \tau_1)$ 和 $F(\mathrm{M2}, \tau_2)$ 是两个非交换强对称空间。设 $T_n \in \mathrm{B}(E(\mathrm{M1}, \tau_1),\ F(\mathrm{M2}, \tau_2)), n \geq 1$, 以及 $T \in \mathrm{B}(E(\mathrm{M1}, \tau_1),\ F(\mathrm{M2}, \tau_2))$。若 T_n 的算子是 $\sigma(E,\ E^\times) - \sigma(F, F^\times)$-连续的，并且

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{B}(E(\mathcal{M}_1,\tau_1),F(\mathcal{M}_2,\tau_2)} \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

那么 T 也是 $\sigma(E, E^\times) - \sigma(F, F^\times)$-连续的。

证明。 由引理 3.0.5，只需证明

$$T^*(f) \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1)^\times$$

对于任意泛函 $f \in F(\mathrm{M2}, \tau_2)^\times$。由于 $T_n \in \mathrm{B}(E(\mathrm{M1}, \tau_1),\ F(\mathrm{M2}, \tau_2))$ 是 $\sigma(E, E^\times) - \sigma(F, F^\times)$-连续算子，由引理 3.0.5 可知，对于任意泛函 $f \in F(\mathrm{M2}, \tau_2)^\times, n \in \mathbb{N}$, $T_n^*(f) \in E(\mathrm{M1}, \tau_1)^\times$。注意到 $E(\mathrm{M1}, \tau_1)^\times$是 $(E(\mathrm{M1}, \tau_1)^*, \|\cdot\|_{E^*})$ [40, p.319] 中的一个闭子空间，并且

$$\begin{aligned} \left\|T_n^*(f) - T^*(f)\right\|_{E^*} &\leq \left\|T_n^* - T^*\right\|_{\mathcal{B}(F(\mathcal{M}_2,\tau_2)^*,E(\mathcal{M}_1,\tau_1)^*)} \|f\|_{F^*} \\ &\overset{\text{[31, Chapter VI, Prop. 1.4]}}{=} \|T_n - T\|_{\mathcal{B}(E(\mathcal{M}_1,\tau_1),F(\mathcal{M}_2,\tau_2))} \|f\|_{F^*} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

由于 $n \to \infty$, 我们得出 $T^*(f) \in E(\mathrm{M}, \tau)^\times$。

■

以下命题在 $B(\mathrm{H})$ 中紧算子的对称赋范理想这一情形下已为人所知（参见 [38, 命题 2.8]）。

命题 3.0.7。 设 M 是一个半有限冯·诺依曼代数，配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 是一个非交换强对称空间。假设

(1) M 是 σ-有限的，或
(2) $E(\mathrm{M}, \tau) \subset S_0(\mathrm{M}, \tau)$。

若 $\phi \in E(\mathrm{M},\ \tau)^*$, 则以下陈述等价。

（1）存在唯一的元素 $y \in E(\mathrm{M},\ \tau)^{\times}$，使得

$$\phi(x) = \tau(xy), \qquad \forall x \in E(\mathcal{M}, \tau).$$

(2) $\phi(x_\lambda) \to 0$ 对于任意满足 $x_\lambda \downarrow 0$ 的网 $\{x_\lambda\}_\lambda \subset E(\mathrm{M},\ \tau)$。
(3) $\phi(x_n) \to 0$ 对于任意满足 $x_n \downarrow 0$ 的序列 $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset E(\mathrm{M},\ \tau)$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 ϕ 为正，参见例如 [40,命题 4.2。2]。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 的等价性是众所周知的，参见例如 [39,定理 37] 或 [40]。(2) $\Rightarrow$ (3) 的推论是显然的。对于推论 (3) $\Rightarrow$ (2)，只需注意，对于任意满足 $x_\lambda \downarrow 0$ 的网 $\{x_\lambda\}$，存在一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x_\lambda\}$，使得 $x_n \downarrow 0$，参见上面的引理 3.0.4。根据陈述 (3)，我们有 $\phi(x_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时成立，这意味着

$$\phi(x_\lambda) \to_\lambda 0.$$

证明完毕。 ■

注 3.0.8。 如果前述任一等价断言成立，那么 ψ 是自伴的，当且仅当 $y = y^*$；ψ 是正的，当且仅当 $y \geq 0$ （见 [39,定理37]或 [40, 定理 5.2.9]）。

下面的结果表明，$\mathrm{F}(\tau)$ 在弱拓扑 $\sigma(E,\ E^{\times})$ 下，在非交换对称空间中稠密；这是 [5, 命题 2.3] 的半有限版本。

命题 3.0.9。 设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个与带有半有限忠实正规迹 τ 的 σ-有限冯·诺依曼代数 M 相伴的非交换强对称空间。若 $x \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，则存在一个序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{F}(\tau)$，使得

$$x_n \overset{\sigma(E,E^{\times})}{\longrightarrow} x.$$

证明。 设 $a \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，且 $a = v|a|$ 是极分解 [40, 命题 2.1.4]。根据 [40, 命题 2.3.12], , 存在一个向上有向网 $\{a_\lambda\} \subset \mathrm{F}(\tau)$，使得 $0 \leq a_\lambda \uparrow_\lambda |a|$，也就是说，

$$(|a| - a_\lambda) \downarrow_\lambda 0.$$

由于 $\mathcal{M}$ 是 σ-有限的，由引理 3.0.5 可知，存在一个子序列$\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \{a_\lambda\}$ 使得

$$(|a| - a_n) \downarrow_n 0,$$

根据命题 3.0.7，我们有

$$\tau((|a| - a_n)yv) = \tau(v(|a| - a_n)y) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

对任意 $y \in E(\mathrm{M}, \tau)^{\times}$，即

$$\mathcal{F}(\tau) \ni a_n \overset{\sigma(E,E^{\times})}{\longrightarrow} |a|,$$

等价地，

$$\mathcal{F}(\tau) \ni va_n \overset{\sigma(E,E^{\times})}{\longrightarrow} a,$$

由此完成证明。 ∎

为方便起见，我们回顾以下著名结果 [89,第 3 节，C.1§5]。

命题 3.0.10。设 p_{nk}' 为实数，$n, k \in \mathbb{N}$，满足 $\sum_{k=1}^{n} |p_{nk}| = 1$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$。若对每个固定的 $k \in \mathbb{N}$，极限 $\lim p_{nk} = p_k$ 均存在，则序列$_{n\to\infty}$

$$s_n = p_{n1}r_1 + p_{n2}r_2 + \ldots + p_{nn}r_n$$

对每个收敛序列 $\{r_n\}_{n\geq 1}$均收敛。

以下结果是 [5,定理 3.3] 的半有限版本。

定理 3.0.11。设 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个隶属于半有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 的对称空间，并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $0 \leq x_n \downarrow 0 \in E(\mathcal{M}, \tau)$。则序列 $\{x_n\}$ 关于拓扑 $b_{E(\mathcal{M},\tau)}$收敛至至多一个元素。

证明。众所周知，$E(\mathrm{M}, \tau)_h$（$E(\mathrm{M}, \tau)$ 的自伴部分）是 $E(\mathrm{M}, \tau)$ [40,第4章1],中的范数闭实子空间，而空间 $E(\mathrm{M}, \tau)_h^*$ 可被视为实赋范空间 $E(\mathrm{M}, \tau)_h$ 的 Banach 对偶（见 [40,第4章2]）。设 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 是 $E(\mathrm{M}, \tau)^+$ 的一个序列，且满足 $x_n \downarrow 0$。令 A 为 $\{x_n\}_{n\geq 1}$的绝对凸包。根据范数的单调性 $\|\cdot\|_E$，可知 A 是 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 的范数有界子集。下面证明 A 是 $E(\mathrm{M}, \tau)_h$的 Rosenthal 子集。

回顾一下，[40,命题 4.2.2] 线性泛函 $f \in E(\mathrm{M}, \tau)_h^*$ 可以分解为 $E(\mathrm{M}, \tau)_h^*$中两个正泛函之差。由于 $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$，因此对于每个泛函 $f \in E(\mathrm{M}, \tau)_h^*$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在。对于任意序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$，我们有

$$y_n = p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \ldots + p_{nk(n)}x_{k(n)}, \quad \text{where } \sum_{i=1}^{k(n)} |p_{n_i}| = 1.$$

特别地，对所有 $i \in 1, \ldots\ldots, k(n)$ 均有 $p_{ni} \in [-1, 1]$。考虑序列

$$q_n = (p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nk(n)}, 0, 0, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1].$$

根据蒂霍诺夫定理 [70, 第 5 章，定理 13], 集合 $\prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]$ 关于乘积拓扑是紧的。此外，根据 [70,第 4 章，定理 17],$\prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]$ 是一个可度量化紧集。因此，存在一个收敛子序列

$$\{q_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{q_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

特别地，对于每个固定的 $\{p_{n_i k}\}_{i\geq 1}$，数项级数 $k \in \mathbb{N}$ 收敛。因此，根据命题 3.0.10，序列

$$f(y_{n_i}) = \sum_{j=1}^{k(n_i)} p_{n_i j} f(x_j) = p_{n_i 1} f(x_1) + p_{n_i 2} f(x_2) + \ldots + p_{n_i k(n_i)} f(x_{k(n_i)})$$

对于所有 $f \in E(\mathrm{M}, \tau)_h^*$ 都是收敛序列。因此，序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 有一个弱柯西子列 $\{y_{n_i}\}$。这表明 A 是 $(\mathrm{M}, \tau)_h$ 的 Rosenthal 集。

根据定理 3.0.2，拓扑 $(A, b_{E(\mathcal{M},\tau)_h})$ 是豪斯多夫的。因此，序列 $\{x_n\} \subset A$ 关于拓扑 $b_{E(\mathcal{M},\tau)_h}$ 至多有一个极限（例如参见 [70,第2章，定理 3]）。注意，限制 $b_{E(\mathcal{M},\tau)}|_{E(\mathcal{M},\tau)_h}$ 比 $b_{E(\mathcal{M},\tau)_h}$ 更细。事实上，设

$$B_E(x,\varepsilon) = \{y \in E(\mathcal{M},\tau) : \|y - x\| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

and

$$B_{E_h}(x,\varepsilon) = \{y \in E(\mathcal{M},\tau)_h : \|y - x\| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

分别是 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 和 $E(\mathrm{M}, \tau)_h$ 中的闭球。显然，对于所有 $x \in E(\mathrm{M}, \tau)_h$, $B_{E_h}(x, \varepsilon) \subset B_E(x, \varepsilon)$。对于 $E(\mathrm{M}, \tau)_h$ 中任意 x_0 的任意邻域 $b_{E(\mathcal{M},\tau)_h}$:

$$E(\mathcal{M},\tau)_h \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{E_h}(x_i,\varepsilon_i), \quad x_i \in E(\mathcal{M},\tau)_h, \quad \|x_0 - x_i\|_E > \varepsilon_i,$$
$$i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N},$$

存在点 $x_0 \mathrm{in}\ (b_{E(\mathcal{M},\tau)})|_{E(\mathcal{M},\ \tau)_h}$ 的一个邻域，使得

$$\left(E(\mathcal{M},\tau) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_E(x_i,\varepsilon_i)\right) \cap E(\mathcal{M},\tau)_h = E(\mathcal{M},\tau)_h \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon_i)$$
$$\subset E(\mathcal{M},\tau)_h \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{E_h}(x_i,\varepsilon_i),$$
$$x_i \in E(\mathcal{M},\tau)_h, \quad \|x_0 - x_i\|_E > \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \in \mathbb{N}.$$

因此，序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$关于拓扑 $b_{E(M,\tau)}$至多有一个极限。证明至此完成。

■

下面，我们将 [5,命题 3。4]推广到隶属于半有限冯·诺依曼代数的强对称空间这一情形。

命题 3.0.12. 设 M 是一个配备半有限忠实正规迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数。设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个隶属于 M 且具有 Fatou 性质的非交换强对称空间。那么，拓扑 $\sigma(E,\ E^{\times})$ 比 $b_{E(\mathcal{M},\tau)}$ 更细。

证明. 只需证明

$$B(0,1) := \{x \in E(\mathcal{M},\tau) : \|x\|_E \leq 1\}$$

关于弱拓扑 $\sigma(E,\ E^{\times})$ 是闭的。设 $x_\alpha \in B(0,\ 1)$ 且 $x_\alpha \to x \in E(\mathrm{M},\ \tau)$ 属于 $\sigma(E,\ E^{\times})$-拓扑。反设

$$x \notin B(0,1).$$

由于 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，由 [39, 定理 32] 可得

$$\|x\|_E = \|x\|_{E^{\times\times}} = \sup_{\|y\|_{E^\times}\leq 1, y\in E(\mathcal{M},\tau)^\times} \tau(|xy|) \overset{[39,\ \text{Prop. 22}]}{=} \sup_{\|y\|_{E^\times}\leq 1, y\in E(\mathcal{M},\tau)^\times} |\tau(xy)|.$$

那么存在 $\varepsilon > 0$ 和 $y_0 \in E(\mathrm{M},\ \tau)^{\times}$，使得 $\|y_0\|_{E^\times} \leq 1$

$$|\tau(xy_0)| > 1 + \varepsilon. \tag{3.0.3}$$

另一方面，在 $\sigma(E,\ E^{\times})$-拓扑中 $x_\alpha \to x$ 意味着

$$\tau(x_\alpha y_0) \to_\alpha \tau(xy_0).$$

然而， $x_\alpha \in B(0,\ 1)$ 意味着 $|\tau(xy_0)| \leq 1$。存在 α 使得 $|\tau((x_\alpha - x)y_0)| < \varepsilon$, 并且

$$1 + \varepsilon \overset{(3.0.3)}{<} |\tau(xy_0)| \leq |\tau(x_\alpha y_0)| + |\tau((x_\alpha - x)y_0)| < 1 + \varepsilon,$$

这就产生了矛盾。证明完毕。 ∎

对于巴拿赫空间 X 中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，如果对每个 $f \in X^*$ [119, , 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ 都绝对收敛，则称其为弱无条件级数，见 Ch. 2, §3]。

命题 3.0.13。 [119, Ch. 2,§ 3] 设 $(X,\ \|\cdot\|_X)$ 是一个巴拿赫空间，且 $x_n \in X$、$n \in \mathbb{N}$。则以下条件等价：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 弱无条件收敛；

(2) 存在常数 $C>0$ 使得

$$\sup_N \left\| \sum_{n=1}^{N} t_n x_n \right\|_X \le C \left\| \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \quad \text{for all } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}.$$

以下结果是上述命题的直接推论。

推论 3.0.14. [4, 推论 4] 设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是两个巴拿赫空间。若 $T: X \to Y$ 是一个满射线性等距映射，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 X 中弱无条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ 也在 Y 中弱无条件收敛。

现在我们可以证明，非交换对称空间 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 上的满射线性等距映射在 $\sigma(E, E^{\times})$-拓扑下是连续的。以下结果是 [5,定理 4.4] 和 [67, 命题 2.5] 的半有限版本。

定理*3.0.15.* 设M_1 和M_2 是无原子 σ-有限冯·诺依曼代数，分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2。设 $E(M1,\tau_1)$和 $F(M2,\tau_2)$是具有 *Fatou* 性质的两个非交换强对称空间。设$T: E(M1,\tau_1) \to F(M2,\tau_2)$是一个满射线性等距映射。那么，$T$ 是 $\sigma(E, E^{\times})$ –$\sigma(F, F^{\times})$-连续的。

证明。 根据引理 3.0.5，我们只需证明 $T^*(y) \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1)^{\times}$对每个$y \in F(\mathcal{M}_2,\tau_2)^{\times}$。根据命题 3.0.7，只需证明

$$\tau_2(yT(x_n)) = T^*(y)(x_n) \to 0 \tag{3.0.4}$$

对于任意序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E(\mathrm{M}_1,\tau_1)^+$，其中 $x_n \downarrow 0$。

对于任意正线性泛函 $f \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)^*$，有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} |f(x_n - x_{n+1})| &= f\left(\sum_{n=1}^{m} (x_n - x_{n+1}) \right) \\ &= f(x_1 - x_{m+1}) \\ &\le f(x_1) \end{aligned}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n - x_{n+1})$$

绝对收敛。由于每个泛函 $f \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)_h^*$ 都是来自 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)_h^*$ 的两个正泛函之差（见 [40, 命题 4.2。2]），且空间 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)_h^*$

可与实赋范空间 $E(\mathcal{M}_1,\ \tau_1)_h$ 的 Banach 对偶（见 [40,第 4 节。2]）相识别，因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$$

在 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)_h$ 中无条件弱收敛。令 f 为 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)^*$ 中的任意元素。设

$$u(x) = \mathrm{Re}\ f(x) = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2},\ x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1),$$

and

$$v(x) = \mathrm{Im}\ f(x) = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i},\ x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1).$$

特别地，$u, v \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)_h^*$。因此，该级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(x_n - x_{n+1}) \text{ and } \sum_{n=1}^{\infty} v(x_n - x_{n+1})$$

绝对收敛。因此，该级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n - x_{n+1})$$

也绝对收敛。也就是说，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - x_{n+1})$ 在 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 中无条件弱收敛。

根据命题 3.0.14，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Tx_n - Tx_{n+1})$$

也在 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 中弱无条件收敛。因此，

$$\sum_{k=1}^{n} f(Tx_n - Tx_{n+1}) = f(Tx_1) - f(Tx_n)$$

对每个 $f \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)^*$ 都收敛。特别地，极限 $\lim_{n\to\infty} f(Tx_n)$ 存在。因此，序列

$$\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

是一个 $\sigma(F,\ F^{\times})$-柯西序列。根据 [34, 命题 3.1], ，我们知道 $F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 是 $\sigma(F,\ F^{\times})$-序列完备的，并且 T 是一个双射，因此存在$x_0 \in E(\mathrm{M}_1,\ \tau_1)$ 使得

$$T(x_n) \xrightarrow{\sigma(F,F^{\times})} T(x_0) \tag{3.0.5}$$

如 $n \to \infty$。

接下来我们证明 $T(x_0) = 0$。由命题 3.0.12，可得

$$T(x_n) \xrightarrow{b_{F(\mathcal{M}_2,\tau_2)}} T(x_0)$$

由于 $n \to \infty$。因为 $T^{-1}\colon F(\mathcal{M}_2,\tau_2) \to E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ 也是一个满射等距映射，因此 T^{-1} 在 $b_{F(\mathcal{M}_2,\tau_2)} - b_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}$-连续（见引理 3.0.1），因此，

$$x_n \xrightarrow{b_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}} x_0.$$

现在，考虑到 $x_n \downarrow 0$，我们得到

$$x_n \xrightarrow{\sigma(E,E^\times)} 0$$

（见命题 3.0.7）。由命题 3.0.12，可得

$$x_n \xrightarrow{b_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}} 0,$$

并且由定理 3.0.11 可知 $x_0 = 0$。由（3.0.5），可得

$$T(x_n) \xrightarrow{\sigma(F,F^\times)} 0$$

作为 $n \to \infty$，这证明了（3.0.4）。 ∎

现在我们证明具有 Fatou 性质的对称空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上厄米算子的 $\sigma(E,E^\times)$-连续性，这是 [4, 定理 5] 的半有限版本。

定理 3.0.16。设 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-有限冯·诺依曼代数，并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathcal{M},\ \tau) \subset S(\mathcal{M},\ \tau)$ 是具有 *Fatou* 性质的非交换强对称空间。那么，任意有界厄米算子 $T\colon\ E(\mathcal{M},\ \tau) \to E(\mathcal{M},\ \tau)$ 必然是 $\sigma\left(E,\ E^\times\right) - \sigma\left(E,\ E^\times\right)$-连续的。

证明。考虑如下定义的非负连续函数

$$\alpha(t) = \left\|e^{itT} - I\right\|_{E(\mathcal{M},\tau)\to E(\mathcal{M},\tau)},$$

其中 $t \in \mathbb{R}$。由于 $\alpha(0) = 0$，可知存在 $0 \neq t_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha(t_0) < 1$。由于算子 T 在 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上是厄米的，根据 [43, 定理 5.2.6]可知，算子 $V = e^{it_0T}$（因而 $V^{-1} = e^{-it_0T}$）是从 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 到 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 的等距映射。由上面的定理 3.0.15，算子 $S := V - I$ 是 $\sigma(E,E^\times)$-连续的。此外，我们有

$$\|S\|_{E(\mathcal{M},\tau)\to E(\mathcal{M},\tau)} = \alpha(t_0) < 1.$$

现在，由于（例如参见 [41, 引理 2。13]）

$$it_0T = \ln(I + S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}S^n}{n}$$

且$\frac{(-1)^{n-1}S^n}{n}$在$\sigma(E, E^\times)$拓扑下连续，对每个$n \geq 1$，由命题3.0.6可知it_0T在$\sigma(E, E^\times)$拓扑下连续。因此，T在$\sigma(E, E^\times)$拓扑下连续。 ∎

注 3.0.17. 尽管本章节中的结果是针对隶属于一个 σ-有限半有限冯·诺依曼代数的对称空间陈述的，但同样的论证也适用于以下情形：隶属于一个（不一定是 σ-有限的）半有限冯·诺依曼代数的 τ-紧算子构成的强对称空间（具有 Fatou 性质）。

第4章

非交换对称空间上满射等距映射的初等形式

本章的目标是回答 [30,111]在 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 上提出的问题：其范数不一定是序连续的。除非另有说明，本章中我们始终假设$\mathcal{M}$ 要么是无原子的半有限冯·诺依曼代数，要么是所有原子具有相同迹的原子半有限 von Neumann 代数，并假设 τ 是$\mathcal{M}$上的半有限忠实正规迹。

4.1 Jordan $*$-同构

设 (M_1, τ) 和 (M_2, τ) 是两个配备了半有限忠实正规迹的半有限冯·诺依曼代数。若复线性映射 $J : \mathrm{M}_1 \longrightarrow \mathrm{M}_2$ （分别为 $S(\mathrm{M}_1, \tau_1) \ \to S(\mathrm{M}_2, \tau_2)$）满足下式，则称其为 Jordan $*$-同态

$$J(x^*) = J(x)^* \text{ and } J(x^2) = J(x)^2,\ x \in \mathcal{M}_1 \text{ (respectively, } S(\mathcal{M}_1, \tau_1)),$$

等价地，

$$J(xy + yx) = J(x)J(y) + J(y)J(x),\ x, y \in \mathcal{M}_1 \text{ (respectively, } S(\mathcal{M}_1, \tau_1))$$

（例如参见 [21,104,120]）。若 Jordan $*$-同态 J 是单射，则称其为 Jordan $*$-单同态。若 J 是双射 Jordan $*$-同态，则称其为 Jordan $*$-同构。

若 Jordan $*$-同态 $J : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 完全可加（等价地，超弱连续），则称其为正规。或者，我们采用以下等价定义：

$$J(x_\alpha) \uparrow J(x) \text{ whenever } x_\alpha \uparrow x \in (\mathcal{M}_1)_+$$

（例如参见 [33,第 I.4.3] 章）。若 $J : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是 Jordan $*$-同构，则 J 必然是正规映射（见 [95, 附录 A]）。从 $S(\mathrm{M}_1,\ \tau_1)$ 到 $S(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 的 Jordan $*$-同态称为正规，如果

$$J(x_\alpha) \uparrow J(x) \text{ whenever } x_\alpha \uparrow x \in S(\mathcal{M}_1, \tau_1)_+.$$

以下引理给出了 Jordan $*$-同态关于测度拓扑连续性的一个刻画，另见 [40, 引理 2.9.1]，其中讨论了 $*$-同态的情形。

引理 4.1.1. 设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是两个分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2的冯·诺伊曼代数。

对于 *Jordan* $*$-同态 $J:\ S(\mathcal{M}_1,\tau_1)\to S(\mathcal{M}_2,\tau_2)$，以下陈述等价：

(1) J 关于测度拓扑连续；(2) $J|_{\mathcal{M}_1}$ 关于测度拓扑连续；(3) $\tau_2(J(p_n))\to 0$ 对于 $P(\mathcal{M}_1)$ 中的每个序列$\{p_n\}$，若满足 $\tau_1(p_n)\to 0$，则$n\to\infty$。

证明。 显然，(1) 蕴含 (2)。(2) $\Rightarrow$ (3) 由 [40,推论 2.5。8]。(3) $\Rightarrow$ (1) 直接由 [118, 定理 313]可得（另见 [74]）。

■

为便于参考，我们陈述以下辅助结果，该结果对下面的讨论十分重要。

推论 4.1.2。 设 M 和 N 是有限 von Neumann 代数，分别配备忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2。设 J 是从 M 到 N 的正规 Jordan $*$-同态。那么， J 是测度拓扑到测度拓扑连续的。

以下结论直接由引理4.1.1 以及 $\mathcal{M}$在 $S(\mathcal{M},\tau)$ 中关于测度拓扑的稠密性得出（参见 [40, 命题 2.5。4]）。另见 [40, 命题 2.9。2] 或 [118,定理 43]的证明。

命题 4.1.3。 设 M_1 和 M_2 是两个冯·诺依曼代数，分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2。若 $J:\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$ 是一个 Jordan $*$- 同态（分别地，Jordan $*$- 同构），且关于测度拓扑连续，则 J 可唯一延拓为 Jordan $*$-同态（分别地，Jordan $*$-同构） $\tilde{J}:\ S(\mathrm{M}_1,\tau_1)\to S(\mathrm{M}_2,\tau_2)$，且该延拓关于测度拓扑连续。

4.2 定理 1.3.1的证明

在开始证明定理 4.2.4之前，我们需要以下辅助工具，该工具可由与 [54, 推论 41]（其中 [54, 定理 310] 替换为下文的定理 A.0.11 ）中相同的论证得到。因此，我们省略证明。

推论 4.2.1. 设 (M,τ) 是一个无原子 σ-有限冯·诺依曼代数，或一个其原子具有相同迹的原子 σ-有限冯·诺依曼代数。设 $E(\mathrm{M},\tau)$ 是一个范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例且具有 Fatou 性质的非交换对称空间。设 T 是 $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的有界厄米算子。那么， T^2 也是 $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的厄米算子，当且仅当

$$T(y)=ay+yb,\ \forall y\in L_1(\mathcal{M},\tau)\cap\mathcal{M},$$

存在自伴算子 $a \in \mathrm{M}w$ 和 $b \in \mathrm{M}_{\mathbf{1}-w}$，其中 $w \in P(Z(\mathrm{M}))$。

注记 4.2.2. [54, 注记 4.2.] 设 T, a, b, w 如推论 4.2.1中所定义。特别地，$l(a) \leq w$和 $l(b) \leq \mathbf{1} - w$。定义

$$z_a := \sup\{p \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M})) : p \leq w,\ pa \in Z(\mathcal{M})\}$$

and

$$z_b := \sup\{p \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M})) : p \leq \mathbf{1} - w,\ pb \in Z(\mathcal{M})\}.$$

对于任意 $y \in L_1(\mathrm{M}, \tau) \cap \mathrm{M}$，我们有

$$T(y) = a(w - z_a)y + yb((\mathbf{1} - w) - z_b) + (az_a + bz_b)y. \tag{4.2.1}$$

特别地,

(1) $w - z_a, (\mathbf{1} - w) - z_b, z_a + z_b$ 是 $Z(\mathrm{M})$ 中两两正交的投影；(2) 如果 $p \in Z(\mathrm{M})$ 使得 $p \leq w - z_a$且 $ap \in Z(\mathrm{M}, \tau)$（或 $p \leq (\mathbf{1} - w) - z_b$且 $bp \in Z(\mathrm{M})$），那么 $p = 0$；(3) $w - z_a$（分别地，$(\mathbf{1} - w) - z_b$）是 $a(w - z_a)$（分别地，$b((\mathbf{1} - w) - z_b)$）的中心支撑。

注记 4.2.3。设$\mathcal{M}$是一个半有限因子。由推论 4.2.1 立即可得，若 T 是 $\mathcal{M}$ 上的有界厄米算子，则 T^2 是厄米算子，当且仅当 T 是由 $\mathcal{M}$ 中的某个自伴算子进行左（或右）乘法（另见 [108, 推论 2] 和 [111,推论 3。2]的证明）。

以下定理是本章节的主要结果。尽管以下证明的主要思路与 [54, 定理 4.4], 相同，但二者在技术细节上有所不同。

定理 4.2.4。设 $\mathcal{M}_1$ 和$\mathcal{M}_2$ 是无原子 σ-有限冯·诺伊曼代数（或 σ-有限的原子冯·诺伊曼代数，且其原子具有相同的迹），分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2。设 $E(\mathcal{M}_1, \tau_1)$和 $F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$是两个具有 *Fatou* 性质的强对称算子空间，其范数不与 $\|\|_2$ 成比例。

如果T： $E(\mathcal{M}_1, \tau_1) \to F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ 是满射等距映射，那么存在两个元素序列 $A_i \in F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$，它们从左侧具有不相交支集；以及 $B_i \in F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$，它们从右侧具有不相交支集；此外，还存在一个满射 *Jordan* $*$-同态J： $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$和一个中心投影 $z \in \mathcal{M}_2$，使得

$$T(x) = \sigma(F, F^\times) - \sum_{i=1}^{\infty} J(x)A_i z + B_i J(x)(\mathbf{1} - z),\ x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1) \cap \mathcal{M}_1.$$

证明。冯·诺伊曼代数 M_1 和 M_2 的指标在下面的证明中不起作用。为简化记号，我们可以假设

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}.$$

我们将 L_a（分别为 R_a）记作由 $a \in \mathrm{M}$ 给出的左乘（分别为右乘），即

$$L_a(x) = ax$$

（分别是 $R_a(x) = xa$），对所有 $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$而言，它是 $E(\mathcal{M}, \tau)$上的厄米算子（见定理 A.0.11）。对于任意自伴算子 $a \in \mathcal{M}$，算子 TL_aT^{-1}和$TL_a^2T^{-1}$在 $F(\mathcal{M}, \tau)$上均为厄米算子（例如见 [42,引理 2.3]或 [58]）。

与 [54,定理 4.4] 中相同的论证表明，存在 $z \in \mathrm{P}(Z(\mathrm{M}))$（不依赖于下文的 a），使得

$$TL_aT^{-1} = L_{J_1(a)z} + R_{J_2(a)(\mathbf{1}-z)},\ a = a^* \in \mathcal{M}, \tag{4.2.2}$$

其中 $J_1(a)$，$J_2(a)$ 是 M 中的自伴算子。

注意

$$L_{J_1(a)^2z} + R_{J_2(a)^2(\mathbf{1}-z)} \overset{(4.2.2)}{=} (TL_aT^{-1})^2 = TL_{a^2}T^{-1} \overset{(4.2.2)}{=} L_{J_1(a^2)z} + R_{J_2(a^2)(\mathbf{1}-z)}$$

对每个 $a = a^* \in \mathrm{M}$ 都成立。根据标准论证（例如见 [111,第 117] 页），我们得到

$$J(\cdot) := J_1(\cdot)z + J_2(\cdot)(\mathbf{1} - z) \tag{4.2.3}$$

是 M 上的 Jordan $*$-单同态。令 $0 \le a_i \uparrow a \in \mathrm{M}$。我们有

$$J(a_i)z \uparrow \le J(a)z$$

（例如，参见 [55,Eq.(12)]和 [21,p.211]）。由于 $a_i \uparrow a$，可知对于任意 $x \in E(\mathrm{M}, \tau)$，都有

$$a_i x \to_{\sigma(E,E^\times)} ax.$$

由定理3.0.15，可得

$$T(a_i x) \to_{\sigma(F,F^\times)} T(ax).$$

换言之，

$$T((a_i - a)x) \to_{\sigma(F,F^\times)} 0. \tag{4.2.4}$$

因此，对于所有满足 $T(x)z = T(x)$ 且 $y \in F(\mathrm{M}, \tau)^\times$ 的 $x \in E(\mathrm{M}, \tau)$，都有

$$\tau\Big(J(a - a_i) \cdot z \cdot T(x) \cdot y\Big) \overset{(4.2.2)}{=} \tau\Big(T\big((a - a_i)x\big)y\Big) \to 0.$$

由于 T 是满射，可知对于任意满足 $p \le z$ 的 τ-有限投影 $p \in \mathrm{M}$，都有

$$\tau\left(J(a - a_i)zp\right) \overset{(4.2.4)}{\longrightarrow} 0.$$

因此，$J(a - a_i)z \to 0$ 在局部测度拓扑下 [39,命题 20]。因此，$J(a_i)z \uparrow J(a)z$(参见第 2.1节)。同样的论证表明，$J(a_i)(\mathbf{1} - z) \uparrow J(a)z(\mathbf{1} -$

z）。因此， $J(\mathrm{M})$ 是弱闭的 [55,注 2.16]且 $J\colon\ \mathrm{M}\ \to J(\mathrm{M})$ 是一个满射（正规）Jordan $*$-同构。

与 [54, 定理 4.4]中相同的论证表明， J 是满射的。

将 (4.2.2) 应用于 $T(x)$，我们得到

$$\begin{aligned} T(ax) &= J_1(a)zT(x) + T(x)(\mathbf{1}-z)J_2(a) \\ &= J_1(a)zT(x) + T(x)J_2(a)(\mathbf{1}-z) \\ &\overset{(4.2.3)}{=} J(a)zT(x) + T(x)J(a)(\mathbf{1}-z) \end{aligned}$$

对所有 $a = a^* \in \mathrm{M},\quad x \in E(\mathrm{M},\ \tau)\ \cap \mathrm{M}$。因此，对于 M 中任意 τ-有限投影 e，有

$$T(xe) = J(x)T(e)z + T(e)J(x)(\mathbf{1}-z),\ x \in E(\mathcal{M},\tau)\cap\mathcal{M}. \tag{4.2.5}$$

令 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 M 中一列两两正交的 τ-有限投影，使得 $\sup_{i\geq 1} e_i = \mathbf{1}$ [39, 推论 8]。注意，对于任意 $x \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，有

$$\sigma(E,E^{\times}) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} xe_i = x.$$

由于 T 是满射等距映射，由定理 3.0.15 可知 T 是 $\sigma(E,\ E^{\times})\ -\sigma(F,\ F^{\times})$-连续的。我们得到

$$\begin{aligned} T(x) &= \sigma(F,F^{\times}) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} T(xe_i) \\ &= \sigma(F,F^{\times}) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} J(x)T(e_i)z + T(e_i)J(x)(\mathbf{1}-z) \\ &= \sigma(F,F^{\times}) - \sum_{i=1}^{\infty} J(x)T(e_i)z + T(e_i)J(x)(\mathbf{1}-z), \end{aligned}$$

对每个 $x \in E(\mathrm{M},\ \tau)\ \cap \mathrm{M}$。

注意

$$T(e_i) \overset{(4.2.5)}{=} J(e_i)T(e_i)z + T(e_i)J(e_i)(\mathbf{1}-z).$$

回顾一下，Jordan $*$-同构保持投影的不相交性（例如参见[55, 命题2.14]）。令

$$A_i := T(e_i)z = J(e_i)T(e_i)z$$

and

$$B_i := T(e_i)(\mathbf{1}-z) = T(e_i)J(e_i)(\mathbf{1}-z),$$

我们便完成了证明。 ∎

第5章

非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理

本章旨在确立非交换 Kalton–Randrianantoanina–Zaidenberg 定理。尽管 [54]已证明，在可分非交换对称空间上的所有等距映射都具有初等形式，但这远不足以构成充分条件。本章给出了非交换对称空间上的算子为等距映射的充要条件。利用第 4 章的结果，我们还可以处理非可分对称空间的情形。

R回顾以下由 Kalton、Randrianantoanina 和 Zaidenberg 得出的定理 .

定理 5.0.1。 [67][93, 命题 3][121] 设 X、Y 是定义在 (0、1)上的两个复对称函数空间，并设 $T\colon X \to Y$ 是一个满射等距映射。若 X、Y 在重新赋范后仍不相等于 L_p，则

$$(Tf)(t) = a(t)f(\sigma(t)),\ \forall\, f \in X,$$

其中 a 是一个满足 $|a| = 1$ 的可测函数，而 σ 是 (0,1) 上的保测可逆博雷尔映射。

我们指出，Lamperti 的结果 [75，第 4] 节（另见 [121，第 639 页，例]）表明，上述定理的条件不能放宽为对所有 $\lambda > 0$，均有 $\|\cdot\|_E \neq \lambda\|\cdot\|_p$ 的情形。

下面的定理表明，如果一个定义在对称空间（该空间基于一个配备忠实正规迹态的有限冯·诺依曼代数）上的满射等距映射具有初等形式，那么它就是一个 L_p-等距映射，或者由一个酉算子和一个保迹 Jordan $*$-同构生成。

定理 5.0.2。设 $E(0, 1)$、$F(0, 1)$ 为对称函数空间。设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 为无原子有限冯·诺依曼代数，分别配备忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2。设 $E(\mathcal{M}_1, \tau_1)$ 和 $F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ 为分别对应于 $E(0, 1)$ 和 $F(0, 1)$的非交换对称空间。

设 $T\colon\ E(\mathcal{M}_1, \tau_1) \to F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ 是一个满射等距映射。假设 T 具有如下形式：

$$T(x) = J'(x)Az + BJ'(x)(\mathbf{1} - z),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1)$$

其中 A、$B \in F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$、$z \in P(Z(\mathcal{M}_2))$ 以及 $J'\colon\ S(\mathcal{M}_1, \tau_1) \to S(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ 是一个 *Jordan* $*$-同构。那么，

(1) 如果 $E(0, 1) = L_p(0, 1)$ 在某个 $1 \le p \le \infty$ 下范数等价，那么 T 是从 $L_p(\mathcal{M}_1, \tau_1)$ 到 $L_p(\mathcal{M}_2, \tau_2)$的满射等距映射；

(2) 如果 $\|\cdot\|_E$ 与 $\|\cdot\|_p$不等价，那么 J' 是保迹 *Jordan* $*$-同构，并且存在一个酉算子 $u \in \mathcal{M}_2$ 满足 $A + B = u$，使得

$$T(x) = u \cdot J(x), \ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1),$$

其中 $J: \ S(\mathcal{M}_1, \tau_1) \to S(\mathcal{M}_2, \tau_2)$ 是一个保迹的 *Jordan* $*$-同构，满足 $J(x) = u^* J'(x) z u + J'(x)(\mathbf{1} - z), \ \ x \in S(\mathcal{M}_1, \tau_1)$。

5.1 定理 5.0.2 在 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$时的情形的证明

在本部分中，我们证明定理 5.0.2的第二种情形。

证明。 令 $A^* = u_{A^*}|A^*|$ 和 $B = u_B|B|$ 为极分解。由于 T 是满射，因此 $u_{A^*}(u_{A^*})^* = z$ 且 $u_B(u_B)^* = \mathbf{1} - z$。我们有

$$A = |A^*|u_A, \ B^* = |B|(u_B)^*.$$

由于 $u_{A^*} + \mathbf{1} - z$和 $z + u_B^*$ 是 M_2, 中的酉算子，因此映射

$$T'(\cdot) := (u_B^* + z)T(\cdot)(u_{A^*} + \mathbf{1} - z), \ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_2),$$

是从 $(E(\mathrm{M}_1, \tau_1), \|\cdot\|_E)$ 到 $(F(\mathrm{M}_2, \tau_2), \|\cdot\|_F)$ 的满射等距映射。 注意到 $\forall x \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$, 我们有

$$\begin{aligned} T'(x) &= (z + u_B^*)\Big(J'(x)Az + BJ'(x)(\mathbf{1} - z)\Big)(u_{A^*} + \mathbf{1} - z) \\ &= J'(x)Au_{A^*}z + u_B^* BJ'(x)(\mathbf{1} - z) \\ &= J'(x)|A^*|u_A u_A^* z + u_B^* u_B |B| J'(x)(\mathbf{1} - z) \\ &= J'(x)|A^*|z + |B|J'(x)(\mathbf{1} - z). \end{aligned}$$

不失一般性，我们可以假设 T 具有如下形式

$$T(x) = J'(x)Az + BJ'(x)(\mathbf{1} - z), \ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1), \tag{5.1.1}$$

其中 $A, B \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 是正的， $z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$，且 J' 是一个满射 Jordan $*$-同构，从 $S(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 映到 $S(\mathrm{M}_2, \tau_2)$。为简单起见，我们可以假设

$$Az = A, \ Bz = B.$$

令 N_2 为 M_2 的一个无原子交换 von Neumann 子代数，其中包含 A 和 B 的所有谱投影，并且存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_1，将 N_2 映 onto $L_\infty(0, 1)$，该区间配备勒贝格测度 [28,

引理 1.3]。注意，$(J')^{-1}$ 也是一个 Jordan $*$-同构，将 $S(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 映 onto$S(\mathrm{M}_1, \tau_1)$。记

$$\mathcal{N}_1 := (J')^{-1}(\mathcal{N}_2),$$

它也是 M_1 的一个交换冯·诺依曼子代数（例如参见 [118,引理 4.2] 和 [55, 命题 2.14]），[40, 命题 2.9.2(i)]）。特别地，由于 J' 的测度连续性（见上文推论4.1.2），我们得到 $J'|_{S(\mathcal{N}_1)}$ 是一个满射
$*$-同构，从 $S(\mathrm{N}_1, \tau_1)$ 映 onto $S(\mathrm{N}_2, \tau_2)$。

我们声称 T 是从 $E(\mathrm{N}_1, \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$ 的满射等距映射。对于任意元素 $y \in F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$，有

$$y(A+B)^{-1}z, \quad y(A+B)^{-1}(\mathbf{1}-z) \in S(\mathcal{N}_2, \tau_2).$$

由于 J' 是从 $S(\mathrm{N}_1, \tau)$ 到 $S(\mathrm{N}_2, \tau)$ 的满射 $*$-同构，因此存在 $x \in S(\mathrm{N}_1, \tau_1)$，使得

$$S(\mathcal{N}_2, \tau_2) \ni y(A+B)^{-1} = J'(x). \tag{5.1.2}$$

我们只需注意到 $x \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$。事实上，由于 T 是满射，且 $y \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$，因此存在 $x' \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$，使得

$$J'(x')Az + BJ'(x')(\mathbf{1}-z) \overset{(5.1.1)}{=} T(x') = y \overset{(5.1.2)}{=} J'(x)A + BJ'(x). \tag{5.1.3}$$

注意到

$$A(A+B)^{-1}z = Az(A+B)^{-1} = (A+B)z(A+B)^{-1} = z.$$

两边同乘 $(A+B)^{-1}z$，在（5.1.3）中，我们得到

$$zJ'(x') = zJ'(x).$$

同理，我们得到

$$(\mathbf{1}-z)J'(x') = (\mathbf{1}-z)J'(x).$$

因此，$J'(x') = J'(x)$，即 $x = x'$。这意味着

$$x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1) \cap S(\mathcal{N}_1, \tau_1) = E(\mathcal{N}_1, \tau_1).$$

换言之，T 是从 $E(\mathrm{N}_1, \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$ 上的满射等距映射。

由于 $0 \leq A, B \in F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$，由（5.1.1）可知，对于任意 $x \in E(\mathrm{N}_1, \tau_1)$，我们有

$$T(x) = J'(x)Az + BJ'(x)(\mathbf{1}-z) = A^{1/2}J'(x)A^{1/2}z + B^{1/2}J'(x)B^{1/2}(\mathbf{1}-z),$$

这意味着 T是从 $E(\mathrm{N}_1, \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$ 上的正等距映射。

回想一下，N_2与 $*$-同构于 $L_\infty(0,1)$。由于 N_1和 N_2也彼此 $*$-同构，因此存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_2，将 $S(\mathrm{N}1,\tau_1)$ 映到配备勒贝格测度 m的 $S(0,1)$，参见例如 [20, 定理 9.3.4]。我们得到

$$I_1 \circ T \circ I_2^{-1}$$

是 $E(0,\ 1)$ 上的正满射等距映射。由于 $E(0,\ 1) \neq L_p(0,\ 1)$在重新赋范意义下，根据定理 5.0.1可得

$$I_1 \circ T \circ I_2^{-1}(x)(t) = x(\sigma(t)),$$

其中，σ是从 $(0,\ 1)$ 到 $(0,\ 1)$ 上的保测博雷尔映射。

取 $x = \chi_{(0,1)}$，我们得到

$$I_1 \circ T(\mathbf{1}) = \chi_{(0,1)}.$$

因此，我们有

$$A + B = T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}. \tag{5.1.4}$$

因此，A和 B是偏等距算子（分别记为 u_1和 u_2），满足$u_1u_1^* = z$, $u_2^*u_2 = \mathbf{1} - z$。我们有

$$T(x) = J'(x)u_1 + u_2J'(x),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1).$$

定义 $J(x) = u_1^*J'(x)zu_1 + J'(x)(\mathbf{1} - z)$，$x \in S(\mathrm{M}_1,\tau_1)$，可得

$$T(x) = J'(x)u_1 + u_2J'(x) = (u_1 + u_2)J(x) \overset{(5.1.4)}{=} J(x),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1).$$

剩下要证明的是 J 保持迹。注意到，J 也是一个从 $E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 到 $F(\mathrm{M}_2,\tau_2)$ 的满射等距映射。只需证明，对于任意 $0 \leq x \in E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$，都有

$$\tau_2(J(x)) = \tau_1(x).$$

根据 [28, 引理 1.3], ，存在 M_1 的一个包含 x 的交换无原子冯·诺依曼子代数 A，以及一个从 $S(\mathrm{A},\tau_1)$ 到 $S(0,1)$ 的迹测度 $*$-同构 L_1。另一方面，由于 A 与 $S(0,1)$ $*$-同构，且 $S(\mathrm{A},\tau_1)$，可知存在一个从 $S(J(\mathrm{A}),\tau_2)$ 到带勒贝格测度的 $(0,1)$ 的迹测度保持 $*$-同构 L_2，参见例如 [20,定理 9.3.4]。由于 J 是一个从$E(\mathrm{A},\tau_1)$ 到 $F(J(\mathrm{A}),\tau_2)$ 的等距映射，因此

$$L_1 \circ J \circ L_2^{-1}$$

是从 $E(0,1)$到 $F(0,1)$的正满射等距映射。由于 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$在重新赋范的意义下，因此由定理5.0.1可知

$$L_1 \circ J \circ L_2^{-1}(y)(t) = y(\sigma(t)),\ \forall y \in E(0,1), \tag{5.1.5}$$

其中 σ 是从 (0，1) 到 (0，1) 的保测可逆博雷尔映射。令$y := L_2(x)$，我们有

$$\begin{aligned}\tau_1(x) = \tau_1(L_2^{-1}(y)) &= \int_0^1 y(t)dt \\ &= \int_0^1 y(\sigma(t))dt \overset{(5.1.5)}{=} \int_0^1 L_1 \circ J \circ L_2^{-1}(y)(t)dt \\ &= \tau_2(J \circ L_2^{-1}(y)) = \tau_2(J(x)).\end{aligned}$$

证明至此完成。 ∎

5.2 Kalton 定理的非交换版本

在开始证明定理 5.0.2 (1) 之前，我们先建立 Kalton 一项结果的非交换版本 [65] （另见 [67, 命题 7。1]），他证明了对称函数空间 $E(0,1)$ 上算子的范数可以用 $E(0,1)$的 Boyd 指数来估计。主要工具是 Segal 建立的非交换 Radon–Nikodym 定理 [102]。

设 (M, τ_1) 和 (N, τ_2) 是非交换概率空间（即配备了忠实正规迹态的无原子冯·诺伊曼代数）。设 $a \in S(\mathrm{N}, \tau_2)$，并设 $J\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是 Jordan $*$-同构（双射，但不一定保迹）。定义映射 $T\colon S(\mathrm{M}, \tau_1) \to S(\mathrm{N}, \tau_2)$ 如下：

$$T(x) = a \cdot J(x) + J(x) \cdot b, \ \forall x \in S(\mathcal{M}, \tau_1), \tag{5.2.1}$$

其中 a，$b \in S(\mathrm{N}, \tau_2)$ 的中心支撑两两不相交。为简化记号，我们只考虑 $b = 0$ 的情形，即

$$T = T_{a,J}(x) := a \cdot J(x), \ \forall x \in S(\mathcal{M}, \tau_1). \tag{5.2.2}$$

由推论 4.1.2，我们得到 J 在测度拓扑下连续。注意到 J 可扩张为 Jordan $*$-同构，从 $S(\mathcal{M}, \tau_1)$ 映到 $S(\mathcal{N}, \tau_2)$（例如参见命题 4.1.3）。对于任意在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上有界的博雷尔函数 f 以及任意 $a \in S_h(\mathcal{M}, \tau_1)$，有 [40, 命题 2.9。2]

$$f(J(a)) = J(f(a)). \tag{5.2.3}$$

设 $E(0,1)$ 是 (0，1) 上的对称函数空间。假设$T_{a,J}\colon E(\mathrm{M}, \tau_1) \to F(\mathrm{N}, \tau_2)$ 是一个有界算子，即$\|T_{a,J}\|_{E(\mathcal{M},\tau_1)\to F(\mathcal{N},\tau_2)} < \infty$并且

$$\|T_{a,J}x\|_{F(\mathcal{N},\tau_2)} \le \|T_{a,J}\|_{E(\mathcal{M},\tau_1)\to F(\mathcal{N},\tau_2)} \|x\|_{E(\mathcal{M},\tau_1)}, \quad x \in E(\mathcal{M}, \tau_1).$$

特别地，$a = T_{a,J}(\mathbf{1}) \in F(\mathrm{N}, \tau_2)$。

引理 5.2.1。 设 $(\mathrm{M},\ \tau_1)$ 和 $(\mathrm{N},\ \tau_2)$ 是两个非交换概率空间。设 $J:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ 是一个（不一定保迹的）Jordan $*$-同构。存在 $0\le b\in L_1(Z(\mathrm{M}),\ \tau_1)$，使得

$$\tau_2(J(x))=\tau_1(bx),\quad \forall x\in\mathcal{M}.$$

证明。 注意，$\tau(J(\cdot))$ 是 $\mathcal{M}$上的忠实正规迹态。结论由 [102]或 [51, 推论 451] 得出。 ∎

引理 5.2.2。 设 $(\mathrm{M},\ \tau_1)$ 和 $(\mathrm{N},\ \tau_2)$ 是两个非交换概率空间。设 $J:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ 是一个（不一定保迹的）Jordan $*$-同构。存在一个正元素 $b\in L_1(Z(\mathrm{M}),\ \tau_1)$，使得对任意 $0<r<\infty$，有

$$\left\|T_{a,J}(x)\right\|_{L_r(\mathcal{N},\tau_2)}\le\left\|b^{\frac{1}{r}}\cdot J^{-1}(a)\right\|_\infty\|x\|_{L_r(\mathcal{M},\tau_1)},\quad \forall x\in E(\mathcal{M},\tau_1).$$

证明。 根据 Stormer 定理 [109, 定理 3.3]（另见 [17, 命题 3.1]或[118, 定理 4.3]），存在一个元素 $z\in P(Z(\mathrm{M}))$，使得 $J(z\cdot)$ 是一个 $*$-同态，而 $J((\mathbf{1}-z)\cdot)$ 是一个 $*$-反同态。

由引理 5.2.1，存在一个正元素 $b\in L_1(Z(\mathcal{M}),\ \tau)$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left\|T_{a,J}(x)\right\|_{L_r(\mathcal{N},\tau_2)}^r\\
=\ &\|aJ(x)\|_{L_r(\mathcal{N},\tau_2)}^r\\
=\ &\|aJ(xz)+aJ(x(\mathbf{1}-z))\|_{L_r(\mathcal{N},\tau_2)}^r\\
=\ &\left\|J(J^{-1}(a)\cdot xz)+J(x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z))\right\|_{L_r(\mathcal{N},\tau_2)}^r\\
=\ &\tau_2\left(\left|J\left(J^{-1}(a)\cdot xz+x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right)\right|^r\right)\\
\overset{[55,\text{ Prop. }2.19]}{=}\ &\tau_2\left(J\left(\left|J^{-1}(a)\cdot xz\right|+\left|\left(x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right)^*\right|\right)^r\right)\\
=\ &\tau_2\left(J\left(\left|J^{-1}(a)\cdot xz\right|^r+\left|\left(x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right)^*\right|^r\right)\right)\\
\overset{\text{Lemma }5.2.1}{=}\ &\tau_1\left(b\left|J^{-1}(a)\cdot xz\right|^r+b\left|\left(x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right)^*\right|^r\right)\\
=\ &\tau_1\left(b\left|J^{-1}(a)\cdot xz\right|^r\right)+\tau_1\left(b\left|\left(x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right)^*\right|^r\right)\\
=\ &\tau_1\left(b\left|J^{-1}(a)\cdot xz\right|^r\right)+\tau_1\left(b\left|x\cdot J^{-1}(a)(\mathbf{1}-z)\right|^r\right)\\
\le\ &\left\|b^{\frac{1}{r}}\cdot J^{-1}(a)\right\|_\infty^r\tau_1\left(|xz|^r\right)+\left\|b^{\frac{1}{r}}\cdot J^{-1}(a)\right\|_\infty^r\tau_1\left(|x(\mathbf{1}-z)|^r\right)\\
=\ &\left\|b^{\frac{1}{r}}\cdot J^{-1}(a)\right\|_\infty^r\cdot\|x\|_{L_r(\mathcal{M},\tau_1)}^r.
\end{aligned}$$

证明完毕。 ∎

回顾以下关于伸缩算子和 Boyd 指数的已知事实，专家对此都很熟悉，参见例如 [67, 第 323 页，第 22] 行。给定 $0<a\le\infty$，对于任意可测

函数 f属于对称空间 $E(0,\ a)$，且 $s>0,\ f$的伸缩算子 D_s 定义为

$$(D_s f)(t)=\begin{cases} f(\frac{t}{s}), & \text{if } t\in(0,a) \text{ and } \frac{t}{s}\in(0,a),\\ 0, & \text{if } t\in(0,a) \text{ and } \frac{t}{s}\notin(0,a).\end{cases}$$

引理 5.2.3. 设 $(\mathrm{M},\ \tau_1)$ 和 $(\mathrm{N},\ \tau_2)$ 是两个非交换概率空间。设 $J:\mathrm{M}\ \to\mathrm{N}$ 是一个 Jordan $*$-同构。设 $\beta>0$，并令 $q=\chi_{(\beta,\infty)}(b)$，其中$0\le b\in L_1(Z(\mathrm{M}),\ \tau_1)$，使得 $\tau_2(J(x))\ =\tau_1(bx),\ \ x\in\mathrm{M}$。如果

$$q\ge r(zx)+l((\mathbf{1}-z)x),$$

then

$$\mu(J(x))\ge D_\beta\left(\mu(x)\right),$$

其中 $z\in P(Z(\mathrm{M}))$，使得 $J(z\cdot)$ 是一个 $*$-同态，而 $J((\mathbf{1}-z)\cdot)$ 是一个 $*$-反同态。

证明。 注意， J 是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ [62]的等距映射。根据奇异值函数的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\mu(t;J(x))\\
=\ &\inf\left\{\|J(x)(\mathbf{1}-p)\|_\infty:\ p\in P(\mathcal{N}),\ p\le r(J(x)),\ \tau_2(p)\le t\right\}\\
=\ &\inf\left\{\left\|J(zx(\mathbf{1}-J^{-1}(p)))+J((\mathbf{1}-z)(\mathbf{1}-J^{-1}(p))x)\right\|_\infty:\right.\\
&\qquad\left.p\in P(\mathcal{N}),\ p\le r(J(x)),\ \tau_2(p)\le t\right\}\\
=\ &\inf\left\{\left\|zx(\mathbf{1}-J^{-1}(p))+(\mathbf{1}-z)(\mathbf{1}-J^{-1}(p))x\right\|_\infty:\right.\\
&\qquad\left.p\in P(\mathcal{N}),\ J^{-1}(p)\le r(zx)+l((\mathbf{1}-z)x),\ \tau_2(p)\le t\right\}\\
=\ &\inf\left\{\|zx(\mathbf{1}-p_0)+(\mathbf{1}-z)(\mathbf{1}-p_0)x\|_\infty:\right.\\
&\qquad\left.p_0\in P(\mathcal{M}),\ p_0\le r(zx)+l((\mathbf{1}-z)x),\ \tau_2(J(p_0))\le t\right\}\\
=\ &\inf\left\{\|zx(\mathbf{1}-p_0)+(\mathbf{1}-z)(\mathbf{1}-p_0)x\|_\infty:\right.\\
&\qquad\left.p_0\in P(\mathcal{M}),\ p_0\le r(zx)+l((\mathbf{1}-z)x),\ \tau_1(bp_0)\le t\right\}.
\end{aligned}$$

根据条件 $q=\chi_{(\beta,\infty)}(b)$，对于任意满足 $p_0\le r(zx)\ +_l((\mathbf{1}-z)x)\ \le q$以及 $\tau_1(bp_0)\ \le t$的 p_0s，我们有

$$\tau_1(\beta p_0)=\tau_1(\beta p_0qp_0)\le\tau_1(p_0bqp_0)=\tau_1(bp_0)\le t,$$

即， $\tau(p_0) \leq \frac{t}{\beta}$. 另一方面，假设 $q \geq r(zx) + l((\mathbf{1}-z)x)$ 意味着

$$\mu(t; J(x)) \geq \inf\left\{\|x(\mathbf{1}-p_0)\|_\infty : p_0 \in \mathcal{M},\ p_0 \leq q,\ \tau_1(p_0) \leq \frac{t}{\beta}\right\} = \mu\left(\frac{t}{\beta}; x\right).$$

换言之， $\mu(J(x)) \geq D_\beta \mu(x)$。 ∎

对于对称函数空间 $E(0, a)$, $0 < a \leq \infty$, $E(0, a)$ 的 Boyd 指数定义为

$$p_{X(0,a)} = \sup_{s>1} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,a)\to X(0,a)}}$$

and

$$q_{X(0,a)} = \inf_{s<1} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,a)\to X(0,a)}}.$$

给定对称函数空间 $E(0, b)$、$0 < b \leq \infty$ 和 $0 < a \leq b$，我们通过设定以下内容来定义$E(0, a)$

$$E(0,a) := \Big\{ f \in S(0,a) : g \in E(0,b), \quad \text{where } g(x) = \begin{cases} f(t) & \text{if } t \in (0,a), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \text{ with } \|f\|_{E(0,a)} := \|g\|_{E(0,b)} \Big\}.$$

注意， $E(0, a)$ 是 $E(0, b)$ 的 1-补子空间。

事实 5.2.4。 设 $X(0, 1)$ 是一个对称函数空间。对于任意 $0 < \delta \leq 1$, $X(0, \delta)$ 的 Boyd 指数与 $X(0, 1)$ 的 Boyd 指数相同。

事实 5.2.5。 设 $X(0, 1)$ 是一个对称函数空间。对于每个 $\beta > 0$ 和 $\delta > 0$，我们有

$$\|D_\beta\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)} \geq \max\left\{\beta^{\frac{1}{p_X}}, \beta^{\frac{1}{q_X}}\right\}, \tag{5.2.4}$$

其中 p_X 和 q_X 表示 $X(0, 1)$ 的 Boyd 指数。

证明。 只需证明当5.2.4时的 $\beta \neq 1$（5.2.4）。根据事实

$$p_X = p_{X(0,\delta)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}} \overset{[76,\,\text{Def.2.b.1}]}{=} \sup_{s>1} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}}$$

and

$$q_X = q_{X(0,\delta)} = \lim_{s\to 0+} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}} \overset{[76,\,\text{Def.2.b.1}]}{=} \inf_{0<s<1} \frac{\ln s}{\ln \|D_s\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}}.$$

因此，我们有

$$p_X \geq \frac{\ln \beta}{\ln \left\|D_\beta\right\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}}, \text{ if } \beta > 1,$$

and

$$q_X \leq \frac{\ln \beta}{\ln \left\|D_\beta\right\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)}}, \text{ if } 0 < \beta < 1.$$

也就是说,

$$\ln \left\|D_\beta\right\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)} \geq \frac{\ln \beta}{p_X}, \text{ if } \beta > 1,$$

and

$$\ln \left\|D_\beta\right\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)} \geq \frac{\ln \beta}{q_X}, \text{ if } 0 < \beta < 1.$$

我们有

$$\|D_\beta\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)} \geq \max\left\{\beta^{\frac{1}{p_X}}, \beta^{\frac{1}{q_X}}\right\}.$$

这就完成了证明。 ■

引理5.2.6。设 $X(0,1)$和 $Y(0,1)$为对称函数空间。假设$X(0,1)$具有 Boyd 指数 p_X 和 q_X。设(M, τ_1)和(N, τ_2)为非交换概率空间，并设 T 具有形式(5.2.1)。对于任意 $p_X \leq r \leq q_X$，我们有

$$\left\|b^{\frac{1}{r}} \cdot J^{-1}(a)\right\|_{L_\infty(\mathcal{N},\tau_2)} \leq \|T\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)\to Y(\mathcal{N},\tau_2)}.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设

$$\|T\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)\to Y(\mathcal{N},\tau_2)} = 1.$$

反设存在数 α， $\beta > 0$ ，使得

$$\alpha\beta^{\frac{1}{r}} > 1$$

and

$$pq \neq 0,$$

其中

$$p = \chi_{(\alpha,\infty)}(J^{-1}(a)) \text{ and } q = \chi_{(\beta,\infty)}(b).$$

特别是， $b \in L_1(Z(\mathcal{M}), \tau_1)$意味着 $q \in Z(\mathcal{M}_1)$。注意 $p = J^{-1}(\chi_{(\alpha,\infty)}(a))$(见上文（5.2.3）），因此， $J(p) = \chi_{(\alpha,\infty)}(a)$。对于每个 $x \in X(\mathcal{M}, \tau_1)$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|T_{a,J}(x)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)} &\geq \|\alpha e^a(\alpha,\infty)J(x)\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)} \\ &= \left\|\alpha \cdot J\left(J^{-1}(e^a(\alpha,\infty))\right)J(x)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)} \\ &= \alpha\|J(p)\cdot J(x)\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)}.\end{aligned}$$

如果 $x \in X(\mathrm{M}_{pq},\ \tau_1)$（这里，$\mathrm{M}_{pq}$ 表示由投影 pq 生成的约化代数），那么

$$\begin{aligned}\left\|T_{a,J}(x)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)} &\geq \alpha\left\|J(p)J(x)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)}\\ &\overset{[118,\,\mathrm{Th.4.3}]}{=} \alpha\left\|J(px)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)}\\ &= \alpha\left\|\mu(J(x))\right\|_{Y(0,1)}\\ &\overset{\text{Lemma 5.2.3}}{\geq} \alpha\left\|D_\beta\mu(x)\right\|_{X(0,1)}.\end{aligned} \tag{5.2.5}$$

固定 $\varepsilon > 0$ 并令 $\delta := \tau(J(p \wedge q))$。由事实5.2.5，可得

$$\left\|D_\beta\right\|_{X(0,\delta)\to X(0,\delta)} \geq \max\left\{\beta^{\frac{1}{p_X}}, \beta^{\frac{1}{q_X}}\right\}. \tag{5.2.6}$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $f = \mu(f) \in E(0,\ 1)$，使得 $\|f\|_{E(0,1)} = 1$ 满足

$$\left\|D_\beta\mu(f)\right\|_{X(0,1)} \geq (1-\varepsilon)\left\|D_\beta\right\|_{X(0,1)\to X(0,1)}.$$

选择 $x \in E(\mathrm{M}_{pq},\ \tau_1)$，使得 $\mu(x) = f$，例如参见 [28, 引理 1.3] 或 [68]。特别地，可得

$$\left\|D_\beta\mu(x)\right\|_{X(0,1)} \geq (1-\varepsilon)\left\|D_\beta\right\|_{X(0,1)\to X(0,1)} \quad \text{and} \quad \|x\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)} = 1. \tag{5.2.7}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\|T\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)\to Y(\mathcal{N},\tau_2)} &\geq \left\|T_{a,J}(x)\right\|_{Y(\mathcal{N},\tau_2)}\\ &\overset{(5.2.5)}{\geq} \alpha\left\|D_\beta\mu(x)\right\|_{X(0,1)}\\ &\overset{(5.2.7)}{\geq} \alpha(1-\varepsilon)\left\|D_\beta\right\|_{X(0,1)\to X(0,1)}\\ &\overset{(5.2.6)}{\geq} \alpha(1-\varepsilon)\cdot\max\left\{\beta^{\frac{1}{p_X}}, \beta^{\frac{1}{q_X}}\right\}.\end{aligned}$$

由于 $\epsilon > 0$ 可以任意小，由 $p_X \leq r \leq q_X$ 可得

$$\|T\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)\to Y(\mathcal{N},\tau_2)} \geq \alpha\beta^{\frac{1}{r}} > 1,$$

这就产生了矛盾。 ∎

结合引理5.2.2和5.2.6，我们得到 Kalton 的一个结果的以下非交换版本 [65]（另见 [67, 命题 7。1]）。

定理 *5.2.7.* 设 $X(0,1)$ 和 $Y(0,1)$ 是对称函数空间。假设 $X(0,1)$ 的 *Boyd* 指数为 p_X 和 q_X。设 (M,τ_1) 和 (N,τ_2) 为非交换概率空间，并设 T 具有 *(5.2.1)* 的形式。对于任意 $p_X \leq r \leq q_X$，以及任意配备忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2 的无原子有限 *von Neumann* 代数 M 和 N，我们有

$$\|T\|_{L_r(\mathcal{M},\tau_1)\to L_r(\mathcal{N},\tau_2)} \leq \|T\|_{X(\mathcal{M},\tau_1)\to Y(\mathcal{N},\tau_2)}.$$

5.3 定理 5.0.2 在 $E(0,1) = L_p(0,1)$ 的情形下的证明

定理 *5.3.1.* 设 $X(0,1)$、$Y(0,1)$ 是 *Lindenstrauss* 和 *Tzafriri* 意义下的对称函数空间。设 M_1 和 M_2 是分别配备忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2 的无原子有限 *von Neumann* 代数。设 $T: X(M1,\tau_1) \to Y(M2,\tau_2)$ 是具有 *(5.2.1)* 形式的满射等距映射。若 $X(0,1)$ 和 $= L_p(0,1)$ 在等价范数意义下相同，则 T 是从 $L_p(M1,\tau_1)$ 到 $L_p(M2,\tau_2)$ 的满射等距映射。

证明。注意，$Y(0,1)$ 与 $L_p(0,1)$ 在等价范数意义下相同。事实上，如果对于某个 $q \in [1,\infty$，$Y(0,1)$ 与 $L_q(0,1)$ 相同，那么 $L_p(\mathrm{M}1,\tau_1)$ 与 $L_q(\mathrm{M}2,\tau_2)$ 等距，这在 $p \neq q$ 时是不可能的，参见例如 [45, p.267]。因此，对于所有 $1 \leq q < \infty$，$Y(0,1) \neq L_q(0,1)$。由定理 5.0.2 (2) 可知，$Y(\mathrm{M}2,\tau_2)$ 与 $X(\mathrm{M}1,\tau_1)$ 之间的等距映射由酉算子和保迹 Jordan $*$- 同构生成，这些显然是 L_p- 等距映射。这意味着 $Y(0,1)$ 与 $L_p(0,1)$ 相同，这就产生了矛盾。

根据定理 5.2.7，我们有

$$\|T\|_{L_p(\mathcal{M}_1,\tau_1)\to L_p(\mathcal{M}_2,\tau_2)} \leq \|T\|_{X(\mathcal{M}_1,\tau_1)\to Y(\mathcal{M}_2,\tau_2)} = 1.$$

将定理 5.2.7 应用于满射等距映射 T^{-1}: $Y(\mathrm{M}2,\tau_2) \to X(\mathrm{M}1,\tau_1)$，可得

$$\left\|T^{-1}\right\|_{L_p(\mathcal{M}_2,\tau_2)\to L_p(\mathcal{M}_1,\tau_1)} \leq \left\|T^{-1}\right\|_{Y(\mathcal{M}_2,\tau_2)\to X(\mathcal{M}_1,\tau_1)} = 1.$$

因此，T 是从 $L_p(\mathrm{M}1,\tau_1)$ 到 $L_p(\mathrm{M}2,\tau_2)$ 上的等距映射。 ∎

注 5.3.2. 如果对称函数空间 $E(0,1) = L_p(0,1)$ 在等价范数意义下相同，那么 $E(0,1)$ 上的等距映射必定也是 $L_p(0,1)$ 上的等距映射（见定理 1.1.2），但反之不成立。

事实上，设 $L_1(0,1)$ 配备范数 $\|f\| = \int_0^{\frac{1}{2}} \mu(s;\ f)ds;\ f \in L_1(0,1)$。设 T 是 $(L_1(0,1), \|\cdot\|)$ 上任意一个满射等距映射。根据 [67, 93] 或 [121],，我们有

$$(Tf)(t) = a(t)f(\sigma(t)),\ t \in (0,1),$$

其中 $0 \leq a \in L_1(0,1)$ 且 σ 是从 $(0,1)$ 到 $(0,1)$ 的可逆博雷尔映射。假设 $a \neq \chi_{(0,1)}$. 那么存在 $A, B, C \subset (0,1)$，使得 $a > 1$ 在 A 上成立，且 $a < 1$ 在 B 上成立，$a = 1$ 在 C 上成立。对于 C 中满足 $m(C') < \frac{1}{2}$ 的任意子集 C'，我们有

$$\left\|\chi_{C'}(\sigma(\cdot))\right\| = \left\|a(\cdot)\chi_{C'}(\sigma(\cdot))\right\| = \left\|T(\chi_{C'})(\cdot)\right\| = \left\|\chi_{C'}(\cdot)\right\|.$$

特别是，这意味着 σ 保持了 C 上的测度。

用反证法，假设 $m(A) \neq 0$。假设 $m(A \cup C) \geq \frac{1}{2}$。

(1) 如果 $m(A) \geq \frac{1}{2}$，那么存在 A 的一个子集 A'，使得 $m(A') = \frac{1}{2}$;

(2) 或者，如果 $0 < m(A) < \frac{1}{2}$，那么存在 C 的一个子集 C'，使得 $m(A \cup C') = \frac{1}{2}$。令 $A' := A \cup C'$。

因此，

$$\|\chi_{A'}(\sigma(\cdot))\| < \|a(\cdot)\chi_{A'}(\sigma(\cdot))\| = \|T(\chi_{A'})(\cdot)\| = \|\chi_{A'}(\cdot)\| = \frac{1}{2}.$$

这意味着 $m(\sigma^{-1}(A')) < m(A') = \frac{1}{2}$。现在，定义 $x = \chi_{A'} + \chi_{B'}$，其中 $B' \subset (0,1) \setminus A'$。我们有

$$\frac{1}{2} = \|x\| = \|Tx\| = \left\|a\chi_{\sigma^{-1}(A')} + a\chi_{\sigma^{-1}(B')}\right\| > \left\|a\chi_{\sigma^{-1}(A')}\right\| = \|T\chi_{A'}\| = \|\chi_{A'}\| = \frac{1}{2},$$

这就产生了矛盾。

当 $m(A) < \frac{1}{2}$ 且 $m(A \cup C) < \frac{1}{2}$ 时的情形，可通过取等距映射 T^{-1}，由上述结果得到。

我们得出 $a = 1$，a。e。。这表明，在配备等价范数的 $L_p(0,1)$ 上，$(L_p(0,1), \|\cdot\|_p)$ 上的等距映射可能并不是一个等距映射。

5.4 定理1.4.1 在 $E(0,1)$ 可分的情形下的证明

定理 1.4.1 在 $E(0,1)$ 可分（或极小）时，是定理 5.0.2的推论。

推论 5.4.1. 设 $E(0,1)$ 和 $F(0,1)$ 是可分（或极小）的对称函数空间。设 M_1 和 M_2 是配备了忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2 的无原子有限 von Neumann 代数，分别对应于它们。设 $T\colon E(\mathrm{M}_1, \tau_1) \to F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 是一个满射等距映射。那么，

(1) 若 $E(0,1)$ 与 $= L_p(0,1)$ 在等价范数意义下相同，则 T 是从 $L_p(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 到 $L_p(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 的满射等距映射；

(2) 如果 $\|\cdot\|_E$ 与 $\|\cdot\|_p$ 不等价，那么

$$T(x) = u \cdot J(x), \ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1),$$

其中 u 是 M_2 中的酉算子，而 $J\colon S(\mathrm{M}_1, \tau_1) \to S(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 是保迹 Jordan $*$-同构。

证明。 根据 [54, 定理1.2],，任意满射等距映射 $T\colon E(\mathrm{M}_1, \tau_1) \to F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 都具有如下形式

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z), \quad \forall x \in \mathcal{M}_1, \tag{5.4.1}$$

其中 $A, B \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$，$z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$，且 $J\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是满射 Jordan $*$-同构。

由于 J 是满射，因此由推论 4.1.2 可知 $J:\ \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ 是测度-测度连续的。根据命题 4.1.3，J 可以唯一延拓为 Jordan $*$-同构 $S(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 到 $S(\mathrm{M}_2,\tau_2)$，且该映射在测度拓扑下连续。

由于 $E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 具有序连续范数（或是极小的），因此对于任意$x \in E(\mathrm{M}_1,\tau_2)$，存在一个序列 $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathrm{M}_1$ 使得

$$\|x_n - x\|_E \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

（因此，$x_n \to x$ 依测度收敛，如 $n \to \infty$ [39, 命题 11]所述）。特别地，我们有$T(x_n) \to T(x)$ 在 $\|\cdot\|_E$ 中，如 $n \to \infty$所示。特别地，

$$T(x_n) \to T(x) \text{ as } n \to \infty$$

依测度 [39, 命题 11]。此外，由于 J 关于测度拓扑连续，因此 $J(x_n) \to J(x)$ 依测度收敛，如 $n \to \infty$。由（5.4.1）以及 [40, 命题 2.6。11]，我们得到

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1),$$

其中 $A,\ B \in F(\mathcal{M}_2,\ \tau_2),\ z \in P(Z(\mathcal{M}))$，且 J 是一个满射 Jordan $*$-同构，从 $S(\mathcal{M}_1,\ \tau_1)$ 映到 $S(\mathcal{M}_2,\ \tau_2)$。应用定理 5.0.2，即可完成证明。 ∎

5.5 定理 1.4.1 在 $E(0,\ 1)$ 具有 Fatou 性质时的证明

下面的推论给出了在 1.4.1 定理所处的 $E(\mathcal{M},\ \tau)$具有 Fatou 性质这一情形下的证明。

推论 5.5.1。设 $E(0,\ 1)$ 和 $F(0,\ 1)$ 是具有 Fatou 性质的对称函数空间。设 M_1 和 M_2 是配备了忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2 的无原子有限冯 · 诺依曼代数。设 $T\colon E(\mathrm{M}_1,\ \tau_1) \to F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 是一个满射等距映射。那么，

(1) 如果 $E(0,\ 1) = L_p(0,\ 1)$ 在某个等价范数下成立，那么 T 是从 $L_p(\mathrm{M}_1,\ \tau_1)$ 到 $L_p(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 的满射等距映射；(2) 如果 $\|\cdot\|_E$ 不等价于 $\|\cdot\|_p$，那么

$$T(x) = u \cdot J(x),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1),$$

其中 u 是 M_2 中的一个酉算子，且 $J:\ S(\mathrm{M}_1,\ \tau_1) \to S(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 是一个保迹的 Jordan $*$-同构。

证明。 根据定理 4.2.4，任意满射等距映射 $T\colon E(\mathrm{M}_1,\ \tau_1) \to F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 都具有如下形式：

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z), \quad \forall x \in \mathcal{M}_1, \tag{5.5.1}$$

其中 $A,\ B \in F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$、 $z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$ 和 $J\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是一个满射 Jordan $*$-同构。

对于任意 $x \in E(\mathrm{M}_1,\ \tau_1)^+$，定义 $x_n = xe^x(0,\ n),\ n \geq 1$。我们有 $x - x_n \downarrow 0$ 如 $n \to \infty$。注意

$$x_n \overset{\sigma(E,E^\times)}{\longrightarrow} x$$

如 $n \to \infty$。由于 T 是 $\sigma(E,\ E^\times) - \sigma(F,\ F^\times)$-连续的（见定理 3.0.15），因此可得

$$T(x_n) \overset{\sigma(E,E^\times)}{\longrightarrow} T(x)$$

如 $n \to \infty$。注意 J 可以扩展为一个 Jordan $*$-同构，从 $S(\mathcal{M}_1,\ \tau_1)$ 到 $S(\mathcal{M}_2,\ \tau_2)$（见命题 4.1.3），它关于测度拓扑是连续的。此外，我们有

$$J(x_n) = J(x)J(e^x(0,n)) \to J(x)$$

在测度拓扑中收敛至 $n \to \infty$，且

$$J(e^x(0,n)) \uparrow J(e^x(0,\infty)).$$

我们有

$$J(x_n)Az + BJ(x_n)(\mathbf{1} - z) \to J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z)$$

在测度意义下收敛至 $n \to \infty$。此外，我们有

$$\|J(x_n)Az + BJ(x_n)(\mathbf{1} - z)\|_{F(\mathcal{M}_2,\tau_2)} = \|T(x_n)\|_{F(\mathcal{M}_2,\tau_2)} = \|x_n\|_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)} \leq \|x\|_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}.$$

由 Fatou 性质可得 [39,定理 32]

$$\|J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z)\|_{F(\mathcal{M}_2,\tau_2)} \leq \|x\|_{E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}.$$

对于任意 $y \in F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)^\times$，我们有

$$\begin{aligned} & \tau\left((J(x_n)Az + BJ(x_n)(\mathbf{1} - z))\, y\right) \\ = \ & \tau\left(\left(J(x)J(e^x(0,n))Az + BJ(x)J(e^x(0,n))(\mathbf{1} - z)\right)y\right) \\ \to \ & \tau\left((J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z))\, y\right) \end{aligned}$$

如 $n \to \infty$。因此，

$$J(x_n)Az + BJ(x_n)(\mathbf{1} - z) \to J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z) \in F(\mathcal{M}_2, \tau_2)$$

如 $n \to \infty$ 在 $\sigma(F,\ F^{\times})$-拓扑中。由于 $E(\mathcal{M}_1,\ \tau_1)$ 中的任意元素都是 $E(\mathcal{M}_1,\ \tau_1)_+$ 中的四个元素的线性组合，并且 $J,\ T$ 是线性算子，由（5.5.1）可得

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1, \tau_1),$$

其中 $A, B \in F(M_2, \tau_2),\ z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$, 且 $J\colon\ S(\mathrm{M}_1, \tau_1) \to S(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 是一个 Jordan $*$-同构。定理的结论由定理 5.0.2 得出。 ■

注 5.5.2。 设 $E(0,1)$ 和 $F(0,1)$ 是 Lindenstrauss 和 Tzafriri 意义下的对称函数空间。设 M_1 和 M_2 是配备了忠实正规迹态 τ_1 和 τ_2 的有限 von Neumann 代数，且 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 和 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 分别是对应于 $E(0,1)$ 和 $F(0,1)$ 的非交换对称空间。定理 1.4.1 表明，若 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 与 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 等距，则 $E(0,1)$ 与 $F(0,1)$ 相同（作为集合）；这是 [90] 中所得结果的一个非交换类比（另见 [2, 推论 4]）。

第6章

Mityagin 问题及其非交换对应物

本章将证明定理1.5.1 ，并确立其非交换对应形式。

6.1 定理1.5.1的证明

定理1.5.1的证明。假设存在一个满射等距映射 T 从 $E(0,1)$到 $F(0,\infty)$。根据扎伊登贝格定理 [121, 定理 1]， T 具有如下形式

$$T(x)(t) = a(t)x(\sigma(t)),\ x \in E(0,1), \tag{6.1.1}$$

其中 $a \in F(0, \infty)$，且 σ 是一个从 $(0, \infty)$ 到 $(0, 1)$ 的可逆可测变换。特别地， T 保持不交性。

记

$$I_n = \sigma(0,n).$$

考虑 $T|_{E(I_n)}$。由于 T 具有不相交性保持性质，因此 $T|_{E(I_n)}$ 是从 $E(I_n)$ 到 $F(0,n)$ 的满射等距映射。

Let

$$i_n : I_n \to (0, m(I_n))$$

为一个保测变换。定义

$$T_0 f = f \circ i_n,\ f \in E(0, m(I_n)).$$

注意， T_0 是从 $E(0,m(I_n))$ 到 $E(I_n)$ 的满射等距映射。定义

$$E'(0,1) := \left\{ f \in S(0,1) | D_{m(I_n)} f \in E(0,m(I_n)) \text{ and } \|f\|_{E'} = \frac{\|D_{m(I_n)} f\|_E}{\|\chi_{I_n}\|_E} \right\} \tag{6.1.2}$$

and

$$F'(0,1) := \left\{ f \in F(0,1) | D_n f \in F(0,n) \text{ and } \|f\|_{F'} = \frac{1}{\|\chi_{(0,n)}\|_F} \|D_n f\|_F \right\}. \tag{6.1.3}$$

显然， $E'(0, 1)$ 和 $F'(0, 1)$ 是对称函数空间。

注意映射

$$f \mapsto \frac{\|\chi_{(0,n)}\|_F}{\|\chi_{I_n}\|_E} D_{\frac{1}{n}} \circ T \circ T_0 \circ D_{m(I_n)}(f)$$

是从 $E'(0,\ 1)$ 到 $F'(0,\ 1)$ 的等距映射。事实上，对于任意 $f \in E'(0,\ 1)$，有

$$\begin{aligned}
&\left\| D_{\frac{1}{n}} \circ T \circ T_0 \circ D_{m(I_n)}(f) \right\|_{F'(0,1)} \\
\overset{(6.1.3)}{=}\ & \frac{1}{\|\chi_{(0,n)}\|_{F(0,\infty)}} \left\| T \circ T_0 \circ D_{m(I_n)}(f) \right\|_{F(0,\infty)} \\
=\ & \frac{1}{\|\chi_{(0,n)}\|_{F(0,\infty)}} \left\| T_0 \circ D_{m(I_n)}(f) \right\|_{E(0,1)} \\
\overset{(6.1.2)}{=}\ & \frac{\|\chi_{I_n}\|_{E(0,1)}}{\|\chi_{(0,n)}\|_{F(0,\infty)}} \|f\|_{E'(0,1)} .
\end{aligned}$$

由于 $E\left(0,\ 1\right) \neq L_p\left(0,\ 1\right)$ 作为集合相等，因此 $E'\left(0,\ 1\right) \neq L_p\left(0,\ 1\right)$ 作为集合相等。由定理1.1.2，有

$$\frac{\|\chi_{(0,n)}\|_F}{\|\chi_{I_n}\|_E} D_{1/n} T \circ T_0 \circ D_{m(I_n)}(f) = c_n f \circ \sigma_n,\ \forall f \in E'(0,1).$$

其中 $c_n : (0,\ 1) \to \mathbb{C}$ 是一个处处非零的博雷尔函数，满足 $|c_n| = 1$，且 $\sigma_n : (0,\ 1) \to (0,\ 1)$ 是一个可逆保测博雷尔变换。取 $f = \chi_{(0,1)}$，有

$$T(\chi_{I_n}) = D_n \circ \frac{\|\chi_{I_n}\|_E}{\|\chi_{(0,n)}\|_F} c_n f \circ \sigma_n = \frac{\|\chi_{I_n}\|_E}{\|\chi_{(0,n)}\|_F} \tilde{c}_n \chi_{(0,n)} \tag{6.1.4}$$

其中 $\tilde{c}_n : (0,\ n) \to \mathbb{C}$ 是一个处处非零的博雷尔函数，满足 $|\tilde{c}_n| = 1$。对于任意 $m \geq n$，有

$$T(\chi_{I_m}) = \frac{\|\chi_{I_m}\|_E}{\|\chi_{(0,m)}\|_F} \tilde{c}_m \chi_{(0,m)},$$

其中 $\tilde{c}_m : (0,\ m) \to \mathbb{C}$ 是一个处处非零的博雷尔函数，且满足 $|\tilde{c}_m| = 1$。根据 T 的不交性保持性质，我们得到 $T\left(\chi_{I_n}\right)$和 $T\left(\chi_{I_m \setminus I_n}\right)$具有

互不相交的支集。因此， $T\left(\chi_{I_m\setminus I_n}\right)$ 支集包含于 $[n,m)$。我们有

$$\begin{aligned}\tilde{c}_m\frac{\left\|\chi_{I_m}\right\|_E}{\left\|\chi_{(0,m)}\right\|_F}\chi_{(0,n)} &= T(\chi_{I_m})\chi_{(0,n)}\\ &= T(\chi_{I_n})\chi_{(0,n)}+T(\chi_{I_m\setminus I_n})\chi_{(0,n)}\\ &= T(\chi_{I_n})\chi_{(0,n)}\\ &= \tilde{c}_n\frac{\left\|\chi_{I_n}\right\|_E}{\left\|\chi_{(0,n)}\right\|_F}\chi_{(0,n)}.\end{aligned}$$

因此，我们有 $\frac{\left\|\chi_{I_m}\right\|_E}{\left\|\chi_{(0,m)}\right\|_F}=\frac{\left\|\chi_{I_n}\right\|_E}{\left\|\chi_{(0,n)}\right\|_F}$ 并且

$$\tilde{c}_n=\tilde{c}_m \quad \text{a.e. on} \quad (0,n)$$

对所有 $m\geq n$。由（6.1.1），我们得到

$$T(\chi_{I_n})=a\cdot\chi_{(0,n)}. \tag{6.1.5}$$

比较等式（6.1.4）和（6.1.5），我们得出

$$|a|=\text{Const}\ a.e..$$

考虑 $\chi_{I_n/I_{n-1}}\in E(0,1)$。由于 T 是等距映射，因此

$$\left\|\chi_{I_n\setminus I_{n-1}}\right\|_E=\text{Const}\cdot\left\|\chi_{(n-1,n)}\right\|_F=\text{Const}\cdot\left\|\chi_{(0,1)}\right\|_F.$$

然而，由于 (0,1) 是一个有限区间，因此

$$m(I_n\setminus I_{n-1})\to 0 \text{ as } n\to\infty.$$

根据我们的假设 $E(0,1)\neq L_\infty(0,1)$，可得 [76, p.118]

$$\left\|\chi_{I_n\setminus I_{n-1}}\right\|_E\to 0$$

由于 $n\to\infty$，这表明 $a=0$。这意味着 $T=0$，与 T 是等距映射这一假设矛盾。

■

6.2 Mityagin 问题的非交换对应物

下面，我们建立定理 1.5.1的非交换版本。

定理 *6.2.1.* 若 $E(0,1)$ 是 $(0,1)$ 上的可分对称函数空间，且 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$（作为集合），则 $1 \leq p \leq \infty$。设 M_1 是配备有限忠实正规迹 τ_1 的无原子冯·诺伊曼代数。那么，$E(M1,\tau_1)$ 不等距同构于任何非交换对称空间 $F(M2,\tau_2)$；该空间关联于任意对称函数空间 $F(0,\infty)$ 以及任意配备半有限、无限、忠实正规迹 τ_2 的无原子冯·诺伊曼代数 M_2。

证明。设 T 是从 $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ 到 $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ 的满射等距映射。根据 [54, 定理 1，2]，可得

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1}-z), \quad x \in \mathcal{M}_1, \tag{6.2.1}$$

其中 $A,B \in F(\mathrm{M}_2,\tau_2)$，$z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$，且 $J\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是一个 Jordan $*$-同构[1]。

不失一般性，可假设 $A = Az, B = B(\mathbf{1}-z)$。设 $A = u_A|A|, B = u_B|B|$ 为极分解。由于 T 是满射，因此

$$u_A u_A^* = z \text{ and } u_B u_B^* = \mathbf{1} - z.$$

注意到 $z + u_B^*$ 和 $u_A^* + \mathbf{1} - z$ 是酉算子，我们得到

$$T'(\cdot) := (u_B^* + z)T(\cdot)(1 - z + u_A^*) = J(\cdot)|A| + |B|J(\cdot)$$

是从 $E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 到 $F(\mathrm{M}_2,\tau_2)$ 的满射等距映射。因此，不失一般性，我们可以假设 A 和 B 均为正。

由于 $E(0,1)$ 可分，因此 $E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 不包含 l_∞ [40, 定理 5.6.30]，的一个副本，因此 $F(0,\infty)$ 不包含 l_∞ 的副本，这意味着 $F(0,\infty)$ 也是可分的 [40, 定理 5.6.30]。特别地，我们有

$$A, B \subset F(\mathcal{M}_2,\tau_2) \subset S_0(\mathcal{M}_2,\tau_2).$$

根据 [28, 引理1.3]，，存在 M_2 的一个无原子交换冯·诺依曼子代数 N_2，包含 A 和 B 的所有谱投影，使得 N_2 与 $L_\infty(0,\infty)$ 迹测度保持 $*$-同构。

注意，J^{-1} 是一个从 M_2 到 M_1 的 Jordan $*$-同构。记

$$\mathcal{N}_1 := J^{-1}(\mathcal{N}_2),$$

这是 M_1 的一个无原子交换 von Neumann 子代数。由于 N_1 和 N_2 都是交换的，因此可得 $J\colon \mathrm{N}_1 \to \mathrm{N}_2$ 是一个 $*$-同构。

[1]注意，J 不能扩张为一个从 $S(\mathrm{M}_1,\tau_1)$ 到 $S(\mathrm{M}_2,\tau_2)$ 的 Jordan $*$-同构，参见 [118, 定理 3.10 和 3.13]。

设 $\{q_n^a\}$、$\{q_n^b\} \subset P(\mathrm{N}_2)$，使得 $q_n^a \uparrow z$ 和 $q_n^b \uparrow \mathbf{1}-z$ 满足 $\tau_2(q_n^a)$，$\tau_2(q_n^b) < \infty$。定义

$$p_n^a := J^{-1}(q_n^a) \text{ and } p_n^b := J^{-1}(q_n^b).$$

由（6.2.1），可得 T将 $(\mathrm{N}_1)_{p_n^a}$映入 $F((\mathrm{N}_2)_{q_n^a}, \tau_2)$（分别地，将 $(\mathrm{N}_1)_{p_n^b}$映入 $F((\mathrm{N}_2)_{q_n^b}, \tau_2)$）。此外，由于 $(\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}$和 $(\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}$都配备了有限忠实正规迹，由推论 4.1.2可知，$J|_{(\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}}$关于测度拓扑是连续的。

我们断言，对于所有 $n \geq 1$，T都是从 $E\left((\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}, \tau_1\right)$到 $F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_m^b}, \tau_2\right)$上的满射等距映射。事实上，由命题 4.1.3，$J|_{(\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}}$可扩张为从 $S\left((\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}, \tau_1\right)$到 $S\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}, \tau_2\right)$的 $*$-同构。对于任意 $0 \leq y \in F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}, \tau_2\right)$，我们有

$$y\left((A+B)(q_n^a+q_n^b)\right)^{-1} \in S\left((\mathcal{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}, \tau_2\right)$$

并且存在 $x := J^{-1}\left(y\left((A+B)(q_n^a+q_n^b)\right)^{-1}\right) \in S\left((\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}, \tau_1\right)$（注意$x \geq 0$）使得

$$J(x)A + BJ(x) = y.$$

我们只需注意到 $x \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$。事实上，由于 T是从 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 的满射等距映射，因此存在 $x' \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 使得

$$T(x') = y = J(x)A + BJ(x).$$

令 $x_m := x'e^{|x'|}(0, m) \in \mathrm{N}_1, m \geq 1$。特别地，

$$|x_m| \uparrow |x'|$$

并且 $x_m \to x'$ 在 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 中（特别是在测度拓扑中）当 $m \to \infty$。我们有 e

$$\|T(x_m) - T(x')\|_F \to 0$$

当 $m \to \infty$。因此，

$$T(x_m) = J(x_m)A + BJ(x_m) \to J(x)A + BJ(x)$$

在测度拓扑中为 $m \to \infty$。特别地，对于任意固定的 $i \geq n$，我们有

$$J\left((p_i^a + p_i^b)x_m(p_i^a + p_i^b)\right)A = (q_i^a + q_i^b)\left(J(x_m)A\right)(q_i^a + q_i^b) \to J(x)A$$

and

$$BJ\left((p_i^a + p_i^b)x_m(p_i^a + p_i^b)\right) = (q_i^a + q_i^b)\left(BJ(x_m)\right)(q_i^a + q_i^b) \to BJ(x)$$

在测度拓扑中为 $m \to \infty$。我们有

$$J\Big((p_i^a + p_i^b)x_m(p_i^a + p_i^b)\Big) \to J(x)$$

在测度拓扑下收敛至 $m \to \infty$。因此，

$$(p_i^a + p_i^b)x_m(p_i^a + p_i^b) \to x$$

在测度拓扑下收敛至 $m \to \infty$。这表明

$$x = (p_i^a + p_i^b)x'(p_i^a + p_i^b).$$

注意，当 $i \to \infty$ 时，对任意充分大的 i 和 $p_i^a + p_i^b \to \mathbf{1}$，此等式均成立。由此可得，对任意 τ-有限投影 $f \in \mathrm{M}_2$,

$$\begin{aligned}
& \mu\left(4t; f(x' - x)f\right) \\
= \quad & \mu\left(4t; f(x' - (p_i^a + p_i^b)x'(p_i^a + p_i^b))f\right) \\
\overset{[40,\ \text{Proposition 3.2.7}]}{\leq} \quad & \mu\left(2t; f(x' - (p_i^a + p_i^b)x')f\right) + \mu\left(2t; x'(\mathbf{1} - p_i^a - p_i^b))f\right) \\
\overset{[40,\ \text{Proposition 3.2.7}]}{\leq} \quad & \mu\left(t; f(\mathbf{1} - p_i^a - p_i^b))\right)\mu\left(t; x'\right) + \mu\left(t; x'\right)\mu\left(t; (\mathbf{1} - p_i^a - p_i^b))f\right) \\
\overset{[40,\ \text{Proposition 2.6.4}]}{\longrightarrow} \quad & 0
\end{aligned}$$

当 $i \to \infty$ 时，即 $x = x'$。因此，

$$x \in S\left((\mathcal{N}_1)_{p_n^a + p_n^b}, \tau_1\right) \cap E(\mathcal{M}_1, \tau_1) = E\left((\mathcal{N}_1)_{p_n^a + p_n^b}, \tau_1\right).$$

这证明了对 $F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a + q_n^b}, \tau_2\right)$ 中元素的断言。对于任意元素 $y \in F(\mathrm{N}_2, \tau_2)$，存在一个由元素 $y_n \in F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a + q_n^b}, \tau_2\right)$ 构成的序列，使得

$$\|y_n - y\|_F \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

存在 $x_n \in E(\mathrm{N}_1, \tau_1)$，使得 $T(x_n) = y_n$。特别地，

$$\|x_m - x_n\|_E = \|y_m - y_n\|_F$$

对于任意 $m,\ n > 0$。由于 $E(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 是一个巴拿赫空间（例如参见 [68] 或 [77]），因此存在 x，使得当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to x$ 在 $E(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 中成立。特别地，我们有$T(x) = y$。特别地，T是从 $E(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{N}_2,\ \tau_2)$ 的满射等距映射。

注意，$\tau_1|_{\mathcal{N}_1}$ 是一个迹态，且 $\tau_2|_{\mathcal{N}_2}$ 是无限的。存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_1，它将 $S(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 映到带有勒贝格测度的 $S(0,\ 1)$；并且存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_2，它将 $S(\mathrm{N}_2,\ \tau_2)$ 映到带有勒贝格测度 [28] 的 $S_\infty(0,\ \infty)$。

我们得到 $I_2 \circ T \circ I_1^{-1}$是从 $E(0,1)$到 $F(0,\infty)$的满射等距映射，这与定理 1.5.1相矛盾。 ∎

下面，我们将证明上述定理的一个非可分版本。

定理 *6.2.2.* 若 $E(0,1)$ 是 $(0,1)$ 上具有 *Fatou* 性质的对称函数空间，且 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$（作为集合），$1 \leq p \leq \infty$。设 M_1 是一个无原子冯·诺伊曼代数，配备忠实正规迹态 τ_1。那么，$E(M1,\tau_1)$ 不等距于任何非交换对称空间 $F(M2,\tau_2)$；该空间关联于任意对称函数空间 $F(0,\infty)$，以及任意配备半有限、无限、忠实正规迹 τ_2 的无原子 σ-有限冯·诺伊曼代数 M_2 。

证明。 设 T是从 $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$到 $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$的满射等距映射。由于 $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$具有 Fatou 性质，因此 $F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ 也具有 Fatou 性质 [37, 定理 4。1]。由定理4.2.4，可得

$$T(x) = J(x)Az + BJ(x)(\mathbf{1} - z), \quad x \in \mathcal{M}_1, \tag{6.2.2}$$

其中 A， $B \in F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$、$z \in P(Z(\mathrm{M}_2))$，且 $J\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是 Jordan $*$-同构。

不失一般性，我们可以假设 $A = Az$， $B = B(\mathbf{1} - z)$ 和 A， B 均为正（参见定理6.2.1的证明）。

根据 [28, 引理 1.3]，，存在 M_2 的一个无原子交换冯·诺依曼子代数 N_2，它包含 A 和 B 的所有谱投影，并且 N_2 与 $L_\infty(0, \infty)$（迹测度保持）$*$-同构。注意， J^{-1} 是从 M_2 到 M_1 的 Jordan $*$-同构。记

$$\mathcal{N}_1 := J^{-1}(\mathcal{N}_2),$$

它是 M_1 的一个无原子交换冯·诺依曼子代数。由于 N_1 和 N_2 都是交换的，因此 $J : \mathrm{N}_1 \to \mathrm{N}_2$ 是一个 *-同构。

回顾一下，假设 M_2是 σ-有限的。令 $\{q_n^a\}_{n\geq 1}$、$\{q_n^b\}_{n\geq 1} \subset P(\mathrm{N}_2)$，使得 $q_n^a \uparrow z$且 $q_n^b \uparrow \mathbf{1} - z$，其中 $\tau_2(q_n^a)$， $\tau_2(q_n^b) < \infty$，并且 $q_n^a A + q_n^b B$在 $(\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}$中有界且可逆。定义

$$p_n^a := J^{-1}(q_n^a) \text{ and } p_n^b := J^{-1}(q_n^b).$$

由（6.2.2），我们得到 T将 $(\mathcal{N}_1)_{p_n^a}$映入 $F\left((\mathcal{N}_2)_{q_n^a},\ \tau_2\right)$（相应地，将$(\mathcal{N}_1)_{p_n^b}$映入 $F\left((\mathcal{N}_2)_{q_n^b},\ \tau_2\right)$）。

我们声称，对于所有 $n \geq 1$， T是从 $E\left((\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b},\ \tau_1\right)$到 $F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b},\ \tau_2\right)$的满射等距映射。事实上，由于 $(\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}$和 $(\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}$都配备了有限、忠实的正规迹，根据推论 4.1.2可知，$J|_{(\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}}$关于测度拓扑是连续的。由命题 4.1.3， $J|_{(\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}}$可延拓为一个 Jordan $*$从 $S\left((\mathrm{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}\ \tau_1\right)$到 $S\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}\ \tau_2\right)$的同构。对于任意正元素 $y \in F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}\ \tau_2\right)$，我们有

$$y\left((A+B)(q_n^a+q_n^b)\right)^{-1} \in S\left((\mathcal{N}_2)_{q_n^a+q_n^b}, \tau_2\right)$$

并且存在 $x := J^{-1}\left(y\left((A+B)(q_n^a+q_n^b)\right)^{-1}\right) \in S\left((\mathrm{N}_1)_{q_n^a+q_n^b}\tau_1\right)$（注意$x \geq 0$），使得

$$J(x)A + BJ(x) = y.$$

我们只需注意到 $x \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 和 $T(x) = y'$。事实上，由于 T是从 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$到 $F(\mathrm{M}_2, \tau_2)$ 的满射等距映射，因此存在 $x' \in E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$，使得

$$T(x') = y = J(x)A + BJ(x).$$

设 $x_m := x'e^{|x'|}(0, m) \in \mathrm{M}_1, m \geq 1$。特别地，

$$|x_m| \uparrow |x'|$$

并且 $x_m \to x'$ 在 $\sigma(E, E^\times)$-拓扑下收敛至 $m \to \infty$。我们有

$$T(x_m) \to T(x')$$

在 $\sigma(F, F^\times)$-拓扑下收敛至 $m \to \infty$ （见定理 3.0.15）。因此，

$$T(x_m) = J(x_m)A + BJ(x_m) \to J(x)A + BJ(x)$$

在 $\sigma(F, F^\times)$-拓扑下收敛至 $m \to \infty$。特别地，我们有

$$J\Big((p_n^a + p_n^b)x_m(p_n^a + p_n^b)\Big)A = (q_n^a + q_n^b)\big(J(x_m)A\big)(q_n^a + q_n^b) \to J(x)A$$

and

$$BJ\Big((p_n^a + p_n^b)x_m(p_n^a + p_n^b)\Big) = (q_n^a + q_n^b)\big(BJ(x_m)\big)(q_n^a + q_n^b) \to BJ(x)$$

在 $\sigma(F,\ F^\times)$-拓扑中，$m \to \infty$。我们有

$$J\Big((p_n^a + p_n^b)x_m(p_n^a + p_n^b)\Big) \to J(x)$$

在 $\sigma(F,\ F^\times)$-拓扑中，$m \to \infty$。因此，

$$J\Big((p_n^a + p_n^b)x'(p_n^a + p_n^b)\Big) = J(x)$$

这表明

$$x = (p_n^a + p_n^b)x'(p_n^a + p_n^b).$$

注意，当 $n \to \infty$ 时，对于任意充分大的 n 和 $p_n^a + p_n^b \to \mathbf{1}$，该等式都成立。我们得到 $x = x'$。因此，

$$x \in S\left((\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}, \tau_1\right) \cap E(\mathcal{M}_1, \tau_1) = E\left((\mathcal{N}_1)_{p_n^a+p_n^b}, \tau_1\right).$$

这就证明了对于 $F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b},\ \tau_2\right)$ 中元素的结论。对于一般元素 $y \in F(\mathrm{N}_2,\ \tau_2)$，存在一个由元素 $y_n \in F\left((\mathrm{N}_2)_{q_n^a+q_n^b},\ \tau_2\right)$ 构成的序列，使得

$$y_n \to y$$

在 $\sigma(F,\ F^\times)$-拓扑中，当 $n \to \infty$ 时。存在 $x_n \in E(\mathcal{N}_1,\ \tau_1)$ 使得 $T(x_n) = y_n$。由 $\sigma(F,\ F^\times) - \sigma(E,\ E^\times)$ 的连续性 T^{-1} (见定理 3.0.15)，序列

$$\{x_n\}_{n\geq 1}$$

当 $n \to \infty$ 时，该序列在 $\sigma(E,\ E^\times)$-拓扑中收敛。根据 [34, 命题 3.1], ，我们知道 $E(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 是 $\sigma(E,\ E^\times)$-序列完备的。因此，存在 $x \in E(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 使得

$$x_n \to x$$

当 $n \to \infty$ 时，在 $\sigma(E,\ E^\times)$-拓扑中。特别地，我们有 $T(x) = y$。

注意，$\tau_1|_{\mathcal{N}_1}$ 是一个迹态，且 $\tau_2|_{\mathcal{N}_2}$ 是无限的。存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_1，将 $S(\mathrm{N}_1,\ \tau_1)$ 映到 $S(0,\ 1)$，其中测度为勒贝格测度；并且存在一个迹测度保持的 $*$-同构 I_2，将 N_2 映到$L_\infty(0,\ \infty)$，其测度为勒贝格测度 [28]。

我们得到，$I_2 \circ T \circ I_1^{-1}$是从 $E(0,1)$ 到 $F(0,\infty)$的满射等距映射，这与定理1.5.1矛盾。

■

第 7 章

配备半有限、无限、忠实正规迹的冯·诺依曼代数上的非交换对称空间的满射等距映射描述

本章的主要结果将定理 1.1.2 推广到了无限情形。请注意， $E(0,\infty) \neq L_p(0,\infty)$ 在等价范数下成立这一条件，并不能保证 $E(0,\infty)$ 上的等距映射由模为一的可测函数和可逆的保测博orel映射生成。例如， $L_{p,q}(0,\infty)$ 上的等距映射可以由伸缩算子 $D_t, t>0$ 生成。事实上，

$$t^{-1/p}\|D_t f\|_{L_{p,q}(0,\infty)} = \|f\|_{L_{p,q}(0,\infty)}, \forall f \in L_{p,q}(0,\infty).$$

注7.0.1. 设 $E(0,\infty)$ 是一个对称函数空间。请注意，

$$f \in E(0,a) \text{ for any } a>0 \text{ if and only if } D_{1/a} f \in E(0,1)$$

and

$$f \in L_p(0,a) \text{ for any } a>0 \text{ if and only if } D_{1/a} f \in L_p(0,1).$$

因此，如果对称函数空间 $E(0,\infty)$ 满足 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$，那么对于任意具有有限支集的非零 $f \in E(0,\infty)$，都有 $E(\text{supp}\{f\}) \neq L_p(\text{supp}\{f\})$。

以下辅助工具是定理 1.5.1的推论。

引理 *7.0.2.* 设 $E(0,\infty)$ 和 $F(0,\infty)$ 是两个（复）对称空间。假设对于所有 $1 \leq p \leq \infty$，都有 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$（作为集合）。设 $T: E(0,\infty) \to F(0,\infty)$ 是一个满射等距映射。那么，对于任意满足 $m(supp\{f\}) < \infty$ 的 $0 \neq f \in E(0,\infty)$，有

$$m(supp\{Tf\}) < \infty.$$

证明。 设 $0 \neq f \in E(0,\infty)$，且 $m(\text{supp}\{f\}) < \infty$。根据 Zaidenberg 的结果 [123, 定理 1], , 有

$$T(x)(t) = a(t)x(\sigma(t)), \quad \forall x \in E(0,\infty), \quad t \in (0,\infty),$$

其中 $a \in F(0,\infty)$，且 σ 是从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 的可逆可测变换。于是， T 是从 $E(\text{supp}\{f\})$ 到 $F(\sigma^{-1}(\text{supp}\{f\}))$ 的满射等距映射。由定理 1.5.1，得到

$$m\left(\sigma^{-1}(\text{supp}\{f\})\right) < \infty.$$

证明完成。 ∎

 距映射的描述，其中冯·诺依曼代数配备了

定理 7.0.3。 设 $E(0,\infty)$和 $F(0,\infty)$是复对称函数空间，且满足 $\|\chi_{(0,1)}\|_E = \|\chi_{(0,1)}\|_F = 1$。令 $T:\ E(0,\infty) \to F(0,\infty)$为一个满射等距映射。假设 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$， $1 \le p \le \infty$ （作为集合）。那么，我们有

$$\sup_{0\neq f\in E, m(\mathrm{supp}\{f\})<\infty} \frac{\|D_t f\|_E}{\|f\|_F} = \inf_{0\neq f\in E, m(\mathrm{supp}\{f\})<\infty} \frac{\|D_t f\|_E}{\|f\|_F} \tag{7.0.1}$$

对于某个 $t \in (0,\infty)$，并且存在 $t = \alpha > 0$ 满足 (7.0.1) 以及

$$(Tf)(s) = a(s)\cdot f\left(j(\alpha s)\right), \quad \forall f \in E(0,\infty),$$

其中 $j:(0,\infty) \to (0,\infty)$是 $(0,\infty)$上的可逆保测博雷尔变换，而 a 是$(0,\infty)$上的处处非零的博雷尔复函数，并且 $|a|$ 几乎处处为常数。

此外，如果 (7.0.1) 对任何 $0 < t \neq 1$都不成立，那么

$$Tf = af\circ\sigma,\ \forall f \in E(0,\infty),$$

其中， a 是定义在$(0,\infty)$上的处处非零的博雷尔复函数，且几乎处处有 $|a| = 1$ ，而 $\sigma:(0,1) \to (0,1)$是一个可逆的保测博*orel*映射。

证明。 假设 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$上的范数等价。设T是从 $E(0,\infty)$到 $F(0,\infty)$的满射等距映射。根据 [121, 定理 1],，我们有

$$T(x)(t) = a(t)x(\sigma(t)) \tag{7.0.2}$$

其中 $a \in F(0,\infty)$，且 σ 是从$(0,\infty)$到$(0,\infty)$的可逆可测变换。特别地， T 保持不相交性。

设 s 为正整数。记

$$I_s = \sigma(0,s).$$

根据引理7.0.2，我们有 $m(I_s) < \infty$。由于T是等距映射，因此$m(I_s) > 0$。因此，T是从 $E(I_s)$到 $F(0,s)$的满射等距映射。

Let

$$i_s : I_s \to (0, m(I_s))$$

是一个可逆的保测博orel映射，使得当 $t > s$ 时， $i_s = i_t$ 在 I_s 上。

定义 $T_0 f = f\circ i_s$。于是， T_0是从 $E(0,m(I_s))$ 到 $E(I_s)$ 的满射等距映射。定义

$$E'(0,s) := \left\{ f \in S(0,s) \middle| T_0 \circ D_{\frac{m(I_s)}{s}} f \in E(I_s) \text{ and } \|f\|_{E'} = \frac{1}{\|\chi_{I_s}\|_E} \left\| D_{\frac{m(I_s)}{s}} f \right\|_E \right\} \tag{7.0.3}$$

and

$$F'(0,s) := F(0,s) \text{ with } \|f\|_{F'} = \frac{1}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} \|f\|_F, \ \forall f \in F(0,s). \tag{7.0.4}$$

显然，$E'(0,s)$ 和 $F'(0,s)$ 是对称函数空间。

由于对于任意 $f \in E'(0, s)$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\|T \circ T_0 \circ D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f)\right\|_{F'} &= \frac{1}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} \left\|T \circ T_0 \circ D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f)\right\|_F \\
&= \frac{1}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} \left\|T_0\left(D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f)\right)\right\|_E \\
&= \frac{1}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} \left\|D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f)\right\|_E \\
&= \frac{\|\chi_{I_s}\|_F}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} \|f\|_{E'},
\end{aligned}$$

因此映射

$$T' := \frac{\|\chi_{(0,s)}\|_F}{\|\chi_{I_s}\|_E} T \circ T_0 \circ D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f)$$

是从 $E'(0, s)$ 到 $F'(0, s)$ 的满射等距映射。

根据定理1.1.2，我们有

$$T'f = \frac{\|\chi_{(0,s)}\|_F}{\|\chi_{I_s}\|_E} T \circ T_0 \circ D_{\frac{m(I_S)}{s}}(f) = c_s f \circ \sigma_s, \quad f \in E'(0,s),$$

其中 $c_s : (0,s) \to \mathbb{C}$ 是处处非零的博雷尔函数，满足 $|c_s| = 1$；而 σ_s 是从 $(0,s)$ 到 $(0,s)$ 的可逆保测博雷尔变换，即，

$$\frac{\|\chi_{(0,s)}\|_F}{\|\chi_{I_s}\|_E} a \cdot \left(D_{\frac{m(I_S)}{s}} f\right) \circ i_s \circ \sigma \overset{(7.0.2)}{=} c_s f \circ \sigma_s, \quad \forall f \in E'(0,s). \tag{7.0.5}$$

取 $f = \chi_{(0,s)}$，我们有

$$T(\chi_{I_s}) = \frac{\|\chi_{I_s}\|_E}{\|\chi_{(0,s)}\|_F} c_s \chi_{(0,s)}. \tag{7.0.6}$$

设 $t \geq s$。我们有

$$T(\chi_{I_t}) = \frac{\|\chi_{I_t}\|_E}{\|\chi_{(0,t)}\|_F} c_t \chi_{(0,t)}.$$

根据T的不交性保持性质，我们得到$T(\chi_{I_t/I_s})$和$T(\chi_{I_s})$的支集互不相交。因此，$T(\chi_{I_t/I_s})$的支集包含于(s,t)。我们有

$$\begin{aligned}\frac{\|\chi_{I_t}\|_E}{\|\chi_{(0,t)}\|_F}c_t\chi_{(0,s)} &= T(\chi_{I_t})\chi_{(0,s)} = T(\chi_{I_s})\chi_{(0,s)} + T(\chi_{I_t/I_s})\chi_{(0,s)}\\ &= T(\chi_{I_s})\chi_{(0,s)} = \frac{\|\chi_{I_s}\|_E}{\|\chi_{(0,s)}\|_F}c_s\chi_{(0,s)}.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $t \geq s$，我们有

$$\frac{\|\chi_{I_s}\|_E}{\|\chi_{(0,s)}\|_F}c_s = \frac{\|\chi_{I_t}\|_E}{\|\chi_{(0,t)}\|_F}c_t \quad \text{on} \quad (0,s).$$

这意味着 $\frac{\|\chi_{I_s}\|_E}{\|\chi_{(0,s)}\|_F}$ 是一个与 s和 $c_t\,|_{(0,s)} = c_s$无关的常数。由（7.0.2），我们有

$$T\left(\chi_{I_s}\right) = a \cdot \chi_{(0,s)}. \tag{7.0.7}$$

比较（7.0.6）和（7.0.7），得到

$$\frac{\|\chi_{I_s}\|_E}{\|\chi_{(0,s)}\|_F}c_s = a, \ a.e. \quad \text{on} \quad (0,s). \tag{7.0.8}$$

这意味着 $|a|$ 在$(0,\infty)$上为常数，并且由（7.0.5）可得

$$\left(D_{\frac{m(I_s)}{s}}f\right)\circ i_s \circ \sigma = f \circ \sigma_s, \quad \forall f \in E'(0,s). \tag{7.0.9}$$

令 $g = \left(D_{\frac{m(I_s}{s}}f\right)\circ i_s \in E(I_s)$。特别地，$f = D_{m^s(I_s)}(g \circ i_s^{-1})$。因此，由（7.0.9）可得

$$g \circ \sigma = D_{\frac{s}{m(I_s)}}(g \circ i_s^{-1}) \circ \sigma_s = (g \circ i_s^{-1})\left(\frac{m(I_s)}{s} \cdot \sigma_s(\cdot)\right), \quad g \in E(I_s). \tag{7.0.10}$$

由于 $I_s \subset I_t$ 当 $s \leq t$时，由（7.0.10）（令$g = \chi_{I_s}$）可得

$$\sigma(\cdot) = i_s^{-1}\left(\frac{m(I_s)}{s}\sigma_s(\cdot)\right) = i_t^{-1}\left(\frac{m(I_t)}{t}\sigma_t(\cdot)\right) \text{ on } (0,s). \tag{7.0.11}$$

由于 i_s 和 σ_s 都是保测的，因此，对于任意 $J_s \subset (0,s)$，我们有

$$m(\sigma(J_s)) = m\left(i_s^{-1}(\frac{m(I_s)}{s}\sigma_s(J_s))\right) = \frac{m(I_s)}{s}m\left(\sigma_s(J_s)\right) = \frac{m(I_s)}{s}m(J_s).$$

因此，对于任意 $t \geq s$，我们有

$$m(\sigma(J_s)) = \frac{m(I_t)}{t} m(J_s).$$

这意味着 $\frac{m(I_s)}{s}$ 对于任意正整数 s 都是常数。令 $\alpha = \frac{m(I_s)}{s}$，$s \neq 0$。由于 σ_s 是从 $(0,s)$ 到 $(0,s)$的保测博雷尔变换，根据（7.0.11）可得

$$\sigma(\cdot) = j(\alpha \cdot)$$

其中，j 是$(0,\infty)$上的可逆保测博雷尔变换。因此，对于任意 $f \in E(0,\infty)$，有

$$T(f)(t) = a(t) \cdot f(\sigma(t)) = a(t) \cdot f\left(j(\alpha t)\right),$$

其中 $a: (0,\infty) \to \mathbb{C}$ 是一个处处非零的博雷尔函数，满足 $|a|$ 几乎处处为常数。特别地，这证明了（7.0.1）。

接下来，我们考虑对任意 $0 < t \neq 1$，（7.0.1）均不成立的情形。由于 $\alpha = \frac{m(I_s)}{s}$ 是一个与 s 无关的常数，因此，对于任意 $f \in E(0,s)$，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| D_{\frac{m(I_s)}{s}} f \right\|_E &\overset{(7.0.3)}{=} \left\| \chi_{I_s} \right\|_E \|f\|_{E'} \\
&= \left\| \chi_{I_s} \right\|_E \|T' f\|_{F'} \\
&= \left\| \chi_{I_s} \right\|_E \|c_s f \circ \sigma_s\|_{F'} \\
&\overset{(7.0.4)}{=} \frac{\left\| \chi_{I_s} \right\|_E}{\left\| \chi_{(0,s)} \right\|_F} \|c_s f \circ \sigma_s\|_F \\
&= \frac{\left\| \chi_{I_s} \right\|_E}{\left\| \chi_{(0,s)} \right\|_F} \|f\|_F .
\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\inf_{f \in E, f \neq 0, m(\operatorname{supp}\{f\}) < \infty} \frac{\|D_\alpha f\|_E}{\|f\|_F} = \sup_{f \in E, f \neq 0, m(\operatorname{supp}\{f\}) < \infty} \frac{\|D_\alpha f\|_E}{\|f\|_F}.$$

因此，$\alpha = 1$，这意味着对任意 $s > 0$，$s = m(I_s)$。这意味着 σ 是保测的。因此，对于任意 $s > 0$，

$$|a| = \frac{\left\| \chi_{I_s} \right\|_E}{\left\| \chi_{(0,s)} \right\|_F} = \frac{\left\| \chi_{I_1} \right\|_E}{\left\| \chi_{(0,1)} \right\|_F} = \frac{\left\| \chi_{(0,1)} \right\|_E}{\left\| \chi_{(0,1)} \right\|_F} = 1 \quad \text{on} \quad (0,s).$$

证明至此完成。 ∎

注 7.0.4. 设 $1 \leq p \leq q < \infty$。注意，$(L_p + L_q)(0,\infty)$ 在任意有限区间上都与 L_p（作为集合）一致。即使在交换情形下，$L_p + L_q$ 上的满射等距映射的描述似乎仍然未知。

定理 7.0.5 E 0 ∞ F 0 ∞ $\|\chi_{(0,1)}\|_E$ =...设 (,) 和 (,) 为对称函数空间，且 。 $\|\chi_{(0,1)}\|_F = 1$

设$\mathcal{M}_1$和$\mathcal{M}_2$是无原子冯·诺依曼代数，分别配备半有限忠实正规迹 τ_1 和 τ_2。

假设

(1) $\mathcal{M}_1$和 $\mathcal{M}_2$是 σ-有限的，且 $E(0,\infty)$和 $F(0,\infty)$具有 *Fatou* 性质；(2) 或者 $E(0,\infty)$和 $F(0,\infty)$是极小的。

假设 $E(0,1) \neq L_p(0,1)$，$1 \leq p \leq \infty$（作为集合）。设 $T: E(\mathcal{M}_1,\tau_1) \to F(\mathcal{M}_2,\tau_2)$是一个满射等距映射。那么，我们有

$$\sup_{0\neq f\in E(0,\infty),m(\mathrm{supp}\{f\})<\infty} \frac{\|D_t f\|_E}{\|f\|_F} = \inf_{0\neq f\in E(0,\infty),m(\mathrm{supp}\{f\})<\infty} \frac{\|D_t f\|_E}{\|f\|_F} \tag{7.0.12}$$

对于某个 $t \in (0,\infty)$，并且存在一个正数 $t = \alpha$ 满足 (7.0.12) 且

$$T(x) = au \cdot J(x),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1),$$

其中，$a > 0$是一个常数，u是$\mathcal{M}_2$中的酉算子，而 $J: S(\mathcal{M}_1,\tau_1) \to S(\mathcal{M}_2,\tau_2)$是一个 *Jordan* $*$-同构，满足 $\alpha\cdot\tau_2(J(x)) = \tau_1(x)$，$\forall x \in \mathcal{M}_1$。

此外，若 (7.0.12) 对任何 $0 < t \neq 1$都不成立，则

$$T(x) = u \cdot J(x),\ \forall x \in E(\mathcal{M}_1,\tau_1), \tag{7.0.13}$$

其中，u 是$\mathcal{M}_2$ 中的酉算子，而 $J: S(\mathcal{M}_1,\tau_1) \to S(\mathcal{M}_2,\tau_2)$ 是一个保迹 *Jordan* $*$-同构。

证明。不失一般性，我们可以假设 τ_1 和 τ_2 均为无限的，参见第 5章和第 6章。

由定理 4.2.4 和 [54, 定理 4。4]，T 具有如下形式：

$$T(x) = \sigma(F,\ F^{\times}) - \sum_i J\ (x)\ A_i z + B_i J\ (x)\ \ (\mathbf{1} - z)\ ,\ \ x \in E\ (\mathrm{M}_1,\ \tau_1)\ \cap \mathrm{M}_1, \tag{7.0.14}$$

其中，$A_i \in F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 从左侧具有互不相交的支撑，而 $B_i \in F(\mathrm{M}_2,\ \tau_2)$ 从右侧具有互不相交的支撑；$J: \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$是一个满射 Jordan $*$-同构，且 z 是 M_2中的一个中心投影。

我们只证明具有 Fatou 性质的对称空间这一情形。极小情形可由相同的论证得到。为简单起见，我们可以假设所有 $A_i = 0$。也就是说，$z = 0$。

我们断言，存在一个递增网 $\{e_i\}_{i\in I}$，其元素是 M_1 中的 τ-有限投影，使得

$$e_i \uparrow \mathbf{1} \text{ and } \tau_2(J(e_i)) < \infty \text{ for all } i.$$

事实上，由佐恩引理可知，存在一个由非零且两两正交的 τ-有限投影组成的极大族 $\{e_i\}_{i\in I}$，它们属于 M_1，并满足对所有 i 都有 $\tau_2(J(e_i)) < \infty$。令 $p = \vee_{i\in I} e_i$。设 $q \le \mathbf{1} - J(p)$ 是 M_2 中的一个 τ-有限投影。对于任意满足 $f \le J^{-1}(q)$ 的 τ-有限投影 $f \in \mathrm{M}_1$，我们有 $\tau_2(J(f)) \le \tau_2(q) < \infty$。由 $\{e_i\}_{i\in I}$ 的极大性可得 $f = 0$ 和 $q = 0$。因此，$p = \mathbf{1}$。这就证明了该断言。

由于 M_1 是 σ-有限的（或 $E(\mathrm{M}_1, \tau_1)$ 是极小的），因此 $\{e_i\}_{i\in I}$ 至多可数，记为 $\{e_n\}_{n\ge 1}$。

对于任意 $x \in e_n \mathcal{M}_1 e_n$，我们有（参见定理 4.2.4 和 [54, 定理 4.4]的证明）

$$T(x) = T(e_n)J(x).$$

定理6.2.1和6.2.2中的论证表明

$$T(x) = T(e_n)J(x),\ \forall x \in E\left((\mathcal{M}_1)_{e_n}, \tau_1\right),$$

其中 $J : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 是一个 Jordan $*$-同构，可以扩展为一个 Jordan $*$-同构，从 $S\left((\mathrm{M}_1)_{e_n}, \tau_1\right)$ 映到 $S\left((\mathrm{M}_2)_{J(e_n)}, \tau_2\right)$ 对所有 n 均成立。

令 $v_n|T(e_n)^*| = T(e_n)^*$ 为极分解。第5.1节中的论证表明

$$|T(e_n)|J(\cdot)$$

一个从 $E(\mathrm{A}_n, \tau_1)$ 到 $F(\mathrm{B}_n, \tau_2)$ 的满射等距映射，其中 B_n（分别地，A_n）是 $J(e_n)\mathrm{M}_2 J(e_n)$（分别地，$e_n \mathrm{M}_1 e_n$）的一个无原子交换冯·诺依曼子代数，包含 $|T(e_n)|(\mathbf{1} - z)$ 的所有谱投影，且 $J(\mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_n$。此外，存在一个迹测度保持的 $*$-同构，从 A_n 映到 $L_\infty(0, \tau_1(e_n))$（分别地，从 B_n 映到 $L_\infty(0, \tau_2(J(e_n)))$）。

记

$$\alpha_n = m(0, \tau_1(e_n)) \text{ and } \beta_n = m(0, \tau_2(J(e_n))).$$

定义

$$E'(0,\beta_n) := \left\{ f \in S(0,\beta_n) \middle| D_{\frac{\beta_n}{\alpha_n}} f \in E(0,\alpha_n) \text{ and } \|f\|_{E'} := \frac{1}{\left\|\chi_{(0,\alpha_n)}\right\|_E} \left\| D_{\frac{\beta_n}{\alpha_n}} f \right\|_E \right\}$$

and

$$F'(0,\beta_n) := F(0,\beta_n) \text{ with } \|f\|_{F'} = \frac{1}{\left\|\chi_{(0,\beta_n)}\right\|_F} \|f\|_F,\ \forall f \in F(0,\beta_n).$$

显然 $E'(0,\beta_n)$ 和 $F'(0,\beta_n)$ 是对称函数空间。定理 7.0.3（见（7.0.8））中所使用的相同论证表明

$$\mu\left(|T(e_n)|J(e_n)\right) = c_n := \frac{\left\|\chi_{(0,\alpha_n)}\right\|_E}{\left\|\chi_{(0,\beta_n)}\right\|_F}$$

在 $(0,\beta_n)$ 上。因此，存在一个偏等距 $u_n\in \mathrm{M}_2$，满足 $l(u_n)=l(T(e_n))$ 且 $r(u_n)=r(T(e_n))=J(e_n)$（例如参见 [55, 注 3.5]），使得

$$T(x)=c_nu_nJ(x),\ \forall x\in E\left(e_n\mathcal{M}_1e_n,\tau_1\right).$$

对于任意 $m\geq n$，存在一个偏等距 u_m，使得 $l(u_m)=l(T(e_m))$ 且 $r(u_m)=r(T(e_m))$

$$T(x)=c_mu_mJ(x),\ \forall x\in E(e_m\mathcal{M}_1e_m,\tau_1).$$

我们有

$$c_nu_nJ(e_n)=T(e_n)=c_mu_mJ(e_n).$$

这表明，对于所有 $m\geq n$，$c_m=c_n$。记 $c:=c_n$。我们有

$$u_mJ(e_n)=u_nJ(e_n)=u_n.$$

注意到 $l(T(e_n))\uparrow\mathbf{1}$（例如参见 [55,注 3.5] 中的证明）。由于 J 是正规的，因此可得 $J(e_n)\uparrow\mathbf{1}$，且 $\{u_n\}_{n\geq1}$ 在强算子拓扑下收敛于算子 $u\in\mathrm{M}_2$（例如参见 [55, 命题 2.17], 的证明，另见 [120]），其中

$$u_n=l(T(e_n))\cdot u\cdot J(e_n)=u\cdot J(e_n).$$

我们有

$$T(x)=cuJ(x),\ \forall x\in E\left(e_n\mathcal{M}_1e_n,\tau_1\right)\tag{7.0.15}$$

and

$$P(\mathcal{M}_2)\ni l(T(e_n))=u_nu_n^*=uJ(e_n)u^*\uparrow uu^*.$$

这意味着 u 是一个偏等距 [40, 第 1 节7]。

由于 T 是 $\sigma(E,E^\times)-\sigma(F,F^\times)$-连续的（见定理 3.0.15），且 $\cup_{n\geq1}e_n\mathcal{M}_1e_n$ 在 $E(\mathcal{M}_1,\tau_1)$ 中关于 $\sigma(E,E^\times)$-拓扑是稠密的（见引理 2.2.2），由（7.0.15）可得

$$T(x)=cuJ(x)$$

对所有 $x\in E(\mathrm{M}_1,\tau_1)$。我们有

$$l(u)\geq\cup_{x\in E(\mathcal{M}_1,\tau_1)\cap\mathcal{M}_1}l(T(x))=\cup_{x\in E(\mathcal{M}_1,\tau_1)}l(T(x))=\mathbf{1},$$

这表明 $l(u)=\mathbf{1}$。另一方面，如果 $r(u)\neq\mathbf{1}$，那么存在一个 τ-有限投影 $p\in\mathrm{M}_1$，使得 $J(p)\leq\mathbf{1}-r(u)$。我们有

$$\|T(p)\|_F=\|cuJ(p)\|_E=0,$$

这与假设 T 是等距映射相矛盾。因此，$r(u)=\mathbf{1}$，且 u 是酉元。

设 A 是 M_1, 的任意无原子阿贝尔弱闭 $*$-子代数，且与 $L_\infty(0,\ \infty)$ 迹测度保持 $*$-同构。对于任意 τ-有限投影 $p \in$A，我们有 $c\|J(p)\|_F = \|p\|_E$。我们断言 $J(p)$ 是 τ-有限的。事实上，若 $\tau_2(J(p)) = \infty$，则存在 p 的一个划分 $\{p_n\}_n$，使得

$$\tau_1(p_n) \to 0 \text{ as } n \to \infty \text{ but } \tau_2(J(p_n)) \to \infty \text{ as } n \to \infty .$$

注意，$0 \neq \|cJ(p)\|_F = \|cJ(p_n)\|_F = \|J(p_n)\|_E$。这与 $E(0,1) \neq L_\infty(0,1)$ [76, p.118] 的假设相矛盾。因此，τ_2 是 J(A) 上的半有限忠实正规迹，而 J 是从 E(A, τ_1) 到 F(J(A), τ_2) 的满射等距映射。根据定理 7.0.3，对于任意 τ-有限的 $p \in$ A，我们有

$$\frac{\tau_1(p)}{\tau_2(J(p))}\tau_2(J(x)) = \tau_1(x),\ \forall x \in \mathcal{A}.$$

设 $\{p_n\}_{n\geq 1}$ 是一个递减序列，满足 $p_n \downarrow 0$ 和 $\tau(J(p_n)) < \infty$。特别地，对于所有 $n \geq 1$，我们有 $\frac{\tau_1}{\tau_2(J(p_n))} = \frac{\tau_1}{\tau_2(J(p_1))}$。对于任意非平凡的 τ-有限投影 p，我们有

$$\frac{\tau_1(p_1)}{\tau_2(J(p_1))} = \frac{\tau_1(p_n)}{\tau_2(J(p_n))} = \frac{\tau_1((\mathbf{1}-p_n)p(\mathbf{1}-p_n))}{\tau_2(J((\mathbf{1}-p_n)p(\mathbf{1}-p_n)))}.$$

取 $n \to \infty$，我们得到

$$\frac{\tau_1(p)}{\tau_2(J(p))}$$

对所有非平凡的 α-有限投影 τ，$p \in \mathcal{M}_1$ 上的 τ_1 是常数（记作 τ_2）。由于 $\tau_2(J(x)) = \alpha \cdot \tau_1(x)$，$\forall x \in \mathcal{M}_1$ 都是正规映射，因此可得（7.0.12）。

由定理 7.0.3可知，若对于任何 $0 < t \neq 1$，（$c = 1$和 $\alpha = 1$（即 J 是保迹的 Jordan $*$-同构）都不满足（7.0.12），则.....这就完成了证明。

■

第 8 章

非交换 L_p-空间中对称结构的唯一性：非交换塞梅诺夫–阿布拉莫维奇–扎伊登贝格定理

8.1 定理1.6.1 的证明

下面，我们建立塞梅诺夫–阿布拉莫维奇–扎伊登贝格定理的非交换版本，从而在1.6.1 有限迹的情形下给出定理的证明。

定理 1.6.1的证明。不失一般性，我们可以假设 ν 是一个迹态。

由于 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 同构于 $L_p(\mathrm{N},\ \nu)$，因此 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 不包含c_0-份 [40, 定理 5.9.6]。因此，$E(0,\ 1)$ 不包含 c_0-份，即$E(0,\ 1)$ 是一个 KB-空间。特别地，$E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是全对称的 [40, 推论 5.3.6]。

假设 $p = 2$。空间 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 与 $L_2(\mathrm{N},\ \nu)$ 等距，意味着 $E(0,\ 1)$ 与 $L_2(\mathrm{N},\ \nu)$ 的一个可补子空间等距；而后者仍是一个可分的无限维希尔伯特空间。特别地，$E(0,\ 1)$ 与 $L_2(0,\ 1)$ 等距。根据 [3,定理 1]（另见 [103]），我们有

$$E(0,1) = L_2(0,1)$$

在成比例范数意义下。

设 $p \neq 2$。存在一个等距映射 T，将 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 映到 $L_p(\mathrm{N},\ \nu)$ 上，且其形式为

$$T(x) = AJ(x)z + J(x)B(\mathbf{1} - z),\ x \in \mathcal{M},$$

其中 z 是 M 中的中心投影，J 是从 M 到 N 上的 Jordan $*$-同构，且 $A,\ B \in L_p(\mathrm{N},\ \nu)$ [54]。不失一般性，我们可以假设 $A,\ B \geq 0$。

存在 N 的一个无原子交换冯·诺伊曼子代数 N'，包含 A 和 B [28]。令 $\mathrm{N}'' = J^{-1}(\mathrm{N}')$。通过与定理 1.4.1 证明中相同的论证，我们得到 T 是一个满射等距映射，将 $E(\mathrm{N}'')$ 映到 $L_p(\mathrm{N}')$ 上，并采用勒贝格测度。

令（参见 [77, 定理 3.1。1]）

$$E(0,1) := \{x \in S(0,1) : \mu(x) = \mu(A) \text{ for some } A \in E(\mathcal{M},\tau)\}$$

with

$$\|x\|_E := \|A\|_{E(\mathcal{M},\tau)}.$$

注意，存在从 $S(\mathrm{N}', \nu)$（分别为 $S(\mathrm{N}'', \tau)$）到 $S(0,1)$的迹测度保持同构 I_1（分别为 I_2）。因此，

$$I_2 \circ T \circ I_1^{-1}$$

是从 $E(0,1)$到 $L_p(0,1)$的等距映射。根据 [3, 定理 1]，$E(0,1)$与$L_p(0,1)$相同，且

$$\|\cdot\|_E = \left\|\chi_{(0,1)}\right\|_E \|\cdot\|_p .$$

换言之，$E(\mathrm{M}, \tau) = L_p(\mathrm{M}, \tau)$ 在成比例范数 [77, 定理 3.1.1] 下相同。

■

8.2 定理 1.6.1的无穷区间版本

下面，我们将在一般半有限冯·诺依曼代数的情形下证明定理 1.6.1；即使对于无穷区间上的对称函数空间，这也是新的。

定理8.2.1。设 $1 \le p < \infty$。设 $\mathcal{M}$ 是一个无原子冯·诺依曼代数，配备有半有限、无限、忠实正规迹 τ。若对称空间 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 与 $L_p(\mathcal{N}, \nu)$ 等距，其中 $\mathcal{N}$ 是某个配备有半有限忠实正规迹 ν 的无原子冯·诺依曼代数，则 $E(0,\infty)$ 与 $L_p(0,\infty)$ 相同，且

$$\|\cdot\|_E = \lambda \|\cdot\|_{L_p}$$

对于某个 $\lambda > 0$。

证明。我们只考虑 ν 为无限的情形。ν 为有限的情形可由相同的论证得出。

由于 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 与 $L_p(\mathrm{N}, \nu)$ 同构，因此由定理 5.9.6] 可知，$E(\mathrm{M}, \tau)$ 不包含 c_0-副本 [40,。因此，$E(0,\infty)$ 不包含 c_0-副本，即 $E(0,\infty)$ 是一个 KB-空间。特别地，由推论 5.3.6] 可知，$E(\mathrm{M}, \tau)$ 是全对称的 [40,。根据 [54],，存在一个从 M 到 N 上的 Jordan $*$- 同构，它可以扩展为一个从 $S(\mathrm{M}_e, \tau)$ 到 $S\left(\mathrm{N}_J(e)\right.$ 的 Jordan $*$-同构 $\nu\big)$，其中 τ 为任意满足 $\nu(J(e)) < \infty$ 的有限投影e，参见推论 4.1.2。

(1) 假设 $p = 2$。空间 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 与 $L_2(\mathrm{N}, \nu)$ 等距，意味着 $E(0, a)$，$0 < a \le \infty$ 与 $L_2(\mathrm{N}, \nu)$ 的一个有补子空间等距；而后者又是一个可分的无限维希尔伯特空间。特别地，$E(0, a)$ 与 $L_2(0, 1)$ 等距。(2) 假设 $p \ne 2$。设 T 是从 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 到 $L_p(\mathrm{N}, \nu)$ 上的一个满射等距映射。仿照定理 7.0.5 的证明进行论证，可得存在一个递增网 $\{e_i\}_{i \in I}$，由 M 中的 τ-有限投影组成，使得 $\nu(J(e_i)) < \infty$，并且

$\sup_i e_i = \mathbf{1}$。根据 [54, 定理1.2], , 我们有

$$x \mapsto T(x) = J(x)T(e_i)z + T(e_i)J(x)(\mathbf{1} - z)$$

是从 $E(e_i\mathrm{M}e_i, \tau)$ 到 $L_p(\mathrm{N}, \nu)$ 的等距映射，并且

$$x \mapsto J(x)|T(e_i)^*|z + |T(e_i)|J(x)(\mathbf{1} - z)$$

是从 $E(e_i\mathrm{M}e_i, \tau)$ 到 $L_p(J(e_i)\mathrm{N}\ J(e_i), \nu)$ 的满射等距映射。事实上，对于任意 $y \in L_p(J(e_i)\mathrm{N}\ J(e_i), \nu)$，存在 $x \in E(\mathrm{M}, \tau)$，使得

$$J(x)T(e_i)z + T(e_i)J(x)(\mathbf{1} - z) = T(x) = yu_1^*z + u_2y(\mathbf{1} - z),$$

其中 $T(e_i)^* = u_1|T(e_i)^*|$ 和 $T(e_i) = u_2|T(e_i)|$ 是极分解。特别地，

$$J(x)|T(e_i)^*|z + |T(e_i)|J(x)(\mathbf{1} - z) = y.$$

注意到 $J(x)|T(e_i)^*|z = yz$ 和 $|T(e_i)|J(x)(\mathbf{1} - z) = y(\mathbf{1} - z)$，且 $r(T(e_i)^*z) = l(T(e_i)z) \le J(e_i)z$ 和 $r(T(e_i)(\mathbf{1} - z)) \le J(e_i)(\mathbf{1} - z)$，我们有

$$xJ^{-1}(z) = J^{-1}\left(y|T(e_i)^*|^{-1}z\right) \in S(e_i\mathcal{M}e_i, \tau)$$

and

$$xJ^{-1}(\mathbf{1} - z) = J^{-1}\left(|T(e_i)|^{-1}y(\mathbf{1} - z)\right) \in S(e_i\mathcal{M}e_i, \tau).$$

这表明 $x \in E(e_i\mathcal{M}e_i, \tau)$。根据定理 1.6.1，$E(0, \tau(e_i))$ 与 $L_p(0, 1)$ 等距，对于每个 i。

根据定理 1.6.1，对于任意 $i \ge 1$，存在常数 λ_i 使得

$$\|\cdot\|_E = \lambda_i \|\cdot\|_{L_p}$$

对于每个 i，在 $E(0, \tau(e_i))$ 上成立。对于任意 $j \ge i$，有 $\lambda_i = \lambda_j$。也就是说，存在常数λ 使得

$$\|f\|_{E(0,\infty)} = \lambda \|f\|_{L_p(0,\infty)}$$

对于所有有限支撑元素 $f \in E(0, \infty)$。由于 $E(0, \infty)$ 具有序连续范数，因此可得

$$\|f\|_{E(0,\infty)} = \lambda \|f\|_{L_p(0,\infty)}$$

对于所有 $f \in E(0, \infty)$。证明完毕。 ∎

推论 8.2.2。设 $1 \le p < \infty$。如果对称函数空间 $E(0, \infty)$ 与 $L_p(0, \infty)$ 等距，则它与 $L_p(0, \infty)$ 重合，并且

$$\|\cdot\|_E = \lambda \|\cdot\|_{L_p}$$

对于某个 $\lambda > 0$。

附录 A

非交换对称空间上的厄米算子

在本附录中，我们将 [54, 定理13]中对序连续范数的非交换对称空间上的厄米算子的描述，推广到具有 Fatou 性质的非交换对称空间情形。请注意， [54, 定理13] 中的结果在稍一般的条件下也成立，即对称空间是极小的（也就是说，具有有限支集的有界算子稠密）。主要工具是定理3.0.16中确立的厄米算子的连续性。

从现在起，除非另有说明，我们始终假设 M 是无原子半有限冯·诺依曼代数，或是一个原子的迹都相同的原子半有限冯·诺依曼代数（不失一般性，假设对于 M 中任意原子 $e\in$， $\tau(e)=1$），并假设 τ 是 M 上的半有限忠实正规迹。特别地，当 M 是无原子的（分别地，原子的）时，集合

$$E(0,\tau(\mathbf{1})):=\{f\in S(0,\tau(\mathbf{1})):\mu(f)=\mu(x)\text{ for some }x\in E(\mathcal{M},\tau)\}$$

（分别为

$$\ell_E:=\{f\in\ell_\infty:\mu(f)=\mu(x)\text{ for some }x\in E(\mathcal{M},\tau)\})$$

是对称函数（分别为序列）空间[77,定理 2.5.3]。对称算子空间与对称函数/序列空间之间存在一一对应关系。因此，如果 $\|\cdot\|_E$ 在 E(M， τ) 上不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例于L_2(M， τ)，那么对于 M 的任意极大阿贝尔 von Neumann 子代数 A，$\|\cdot\|_E$ 在 L_2(A， τ) 上也不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。

以下结果的证明与 [54, 命题 3.1] 类似。证明从略。

命题 A.0.1。 假设 M 是无原子半有限冯·诺依曼代数，或是一个原子半有限冯·诺依曼代数，且所有原子的迹均相同（不失一般性，假设对于任意原子 $e\in$ M， $\tau(e)=1$）。设 $p\in$F (τ) 是一个投影，且 E(M， τ) 是任意一个非交换强对称空间。那么，

$$\frac{\|p\|_E^2}{\tau(p)}p\in E(\mathcal{M},\tau)^*$$

是 $p\in E$(M， τ) 的一个支撑泛函，即 $\tau\left(p\cdot\frac{\|p\|_E^2}{\tau(p)}p\right)=\|p\|_E^2=\|p\|_E\left\|\frac{\|p\|_E^2}{\tau(p)}p\right\|_{E^*}$。特别地，对于 E(M， τ) 上任意有界厄米算子 T，我们有

$$\tau(T(p)p)\in\mathbb{R}. \tag{A.0.1}$$

推论 A.0.2。设 M 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子具有相同迹的有原子冯·诺依曼代数），并配备半有限、忠实且正规的迹 τ。设 $u \in \mathrm{F}(\tau)$ 是一个偏等距，并且 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 是任意一个非交换强对称空间。那么，

$$\frac{\|u^*u\|_E^2}{\tau(u^*u)} u^* \in E(\mathcal{M}, \tau)^*$$

是 $u \in E(\mathrm{M}, \tau)$ 的一个支撑泛函。特别地，对于 $E(\mathrm{M}, \tau)$ 上任意有界厄米算子 T，有

$$\tau(T(u)u^*) \in \mathbb{R}.$$

引理 *A.0.3.* 设 M 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子迹相同的原子冯·诺依曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(M, \tau)$ 是一个非交换对称空间，且不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。设 $x_1, x_2 \in F(\tau)$ 是两个偏等距算子，满足 $l(x_1) \perp l(x_2)$ 且 $r(x_1) \perp r(x_2)$。那么，对于任意有界厄米算子 $T: E(M, \tau) \to E(M, \tau)$，有

$$\tau(T(x_1)x_2^*) = 0.$$

推论，$x_1 \in \mathcal{F}(\tau)$ 以及 $x_2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \cap \mathcal{M}$ 满足 $l(x_1) \perp l(x_2)$ 且 $r(x_1) \perp r(x_2)$，则

$$\tau(T(x_1)x_2^*) = 0.$$

此外，假设以下条件之一成立：

(1) $E(\mathcal{M}, \tau)$ 是极小的；(2) $E(\mathcal{M}, \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，且 $E(\mathcal{M}, \tau) \subset S_0(\mathcal{M}, \tau)$；(3) $E(\mathcal{M}, \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，且 $\mathcal{M}$ 是 σ-有限的。

若 $x_1 \in E(\mathcal{M}, \tau)$ 和 $x_2 \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \cap \mathcal{M}$ 满足 $l(x_1) \perp l(x_2)$ 以及 $r(x_1) \perp r(x_2)$，则

$$\tau(T(x_1)x_2^*) = 0.$$

证明。 我们只证明无原子冯·诺伊曼代数的情形。原子情形可通过类似的论证得出。

我们只考虑 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 具有 Fatou 性质的情形。极小情形可由与 [54, 引理 3。3] 中相同的论证得出。注意，Fatou 性质意味着 $E(\mathcal{M}, \tau)$ 是全对称的 [40, 推论 5.1。12]。

我们首先考虑 x_1 和 x_2 是两个满足 $x_1x_2 = 0$ 的投影的情形。

固定一个投影 $p \in \mathrm{F}$（τ）。由于 $\|\cdot\|_E$ 与 $\|\cdot\|_2$不成比例，因此存在一组两两正交且迹相同的投影 $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} e_i = p$$

对于某个 $m \leq n$， $\|\cdot\|_E$在 $E(\mathrm{A})$ 上与 $\|\cdot\|_2$在 $L_2(\mathrm{A})$ 上不成比例，其中 A 是由 $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$生成的阿贝尔弱闭 $*$-代数。沿用 [54, 引理 3.3]，中的相同论证，对于任意 τ-有限投影 $q \in \mathrm{M}$，若 $pq = 0$ 且$\tau\left(q\right) = \frac{1}{2^k}\tau\left(p\right)$，则有

$$\tau(T(p)q) = 0. \tag{A.0.2}$$

对于所有 $k \geq 1$， $\tau(q) \neq \frac{1}{2^k}\tau(p)$ 的情形由标准逼近论证得出。事实上，设 q 是一个 τ-有限投影，且满足 $pq = 0$。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一组 τ-有限投影 $\{q_i\}_{1\leq i\leq m}$，使得

$$\tau\left(q - \sum_{1\leq i\leq m} q_i\right) \leq \varepsilon$$

and

$$\tau(q_i) = \frac{1}{2^k}\tau(p),\ 1 \leq i \leq n,$$

对于某个 $k \in \mathbb{N}$。注意到

$$\begin{aligned}
&\tau\left(T(p)q\right)\\
&= \tau\left(T(p)\left(q - \sum_{1\leq i\leq m} q_i\right)\right) + \tau\left(T\left(p\right)\sum_{1\leq i\leq m} q_i\right)\\
&\overset{(A.0.2)}{=} \tau\left(T(p)\left(q - \sum_{1\leq i\leq n} p_i\right)\right).
\end{aligned}$$

由于

$$\left|\tau\left(T(p)\left(q - \sum_{1\leq i\leq m} q_i\right)\right)\right| \to 0$$

由于 $\varepsilon \to 0$，可知

$$\left|\tau\left(T\left(p\right)q\right)\right| = 0.$$

一般情形，即 x_1和 x_2是 $\mathcal{F}(\tau)$中的偏等距算子，且 $l(x_1) \perp l(x_2)$以及 $r(x_1) \perp r(x_2)$，通过与推论 A.0.2 (另见 [54]) 中相同的论证，可化归为刚才考虑的情形。因此，我们得到

$$\tau\left(T(x_1)x_2^*\right) = 0,$$

由此完成了第一个断言的证明。

现在，我们证明第二个断言。由于$\mathcal{M}$是σ-有限（或$E(\mathcal{M},\ \tau) \subset S_0(\mathcal{M}, \tau)$，由引理3.0.4 可知，存在两个序列$\{y_n\}_{n\geq 1}$ 和$\{y_n'\}_{n\geq 1}$ 属于

$\mathrm{F}(\tau)$，使得 $y_n \uparrow |x_1|$ 和 $y_{n'} \uparrow |x_2|$。令 $x_1 = u_1|x_1|$ 和 $x_2 = u_2|x_2|$ 为极分解。根据引理的第一个断言，

$$\tau(T(u_1 y_n)(u_2 y'_m)^*) = 0$$

对所有 n和 m。由于 $u_1 y_n \overset{\sigma}{\underset{(E,E^\times)}{\longrightarrow}} x_1$和 T是 $\sigma(E,E^\times)-\sigma(F,F^\times)$-连续的（见定理 3.0.16），可得

$$T(u_1 y_n) \overset{\sigma(E,E^\times)}{\longrightarrow} T(x_1)$$

如 $n \to \infty$。注意，$\{(u_2 y'_m)^*\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{F}(\tau) \subset E(\mathrm{M},\ \tau)^\times$（见 [40, 引理 4.4.5]）。因此，

$$\tau(T(x_1) y'_m u_2^*) = \tau(T(x_1)(u_2 y'_m)^*) = 0$$

对所有 m。同样，由于 $y'_m u_2 \to x_2^*$ 在 $\sigma(L_1 \cap L_\infty,\ L_1 \cup L_\infty)$-拓扑下如 $m \to \infty$，我们有

$$\tau(T(x_1) x_2^*) = 0.$$

证明至此完成。 ■

引理 A.0.3 结合 [54, 推论 3.4] 中使用的论证，推出以下结果。

推论 A.0.4。设 M 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子的迹相同的有原子冯·诺伊曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。

设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个隶属于 M 的对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。设 T 是 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子。对于任意 $x \in \mathrm{F}(\tau)$，存在 $y,\ z \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，使得 $T(x) = y + z$且 $r(y) \le r(x)$ 以及 $l(z) \le l(x)$。

此外，假设下列条件之一成立

(1) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是极小的；(2) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 $E(\mathrm{M},\ \tau) \subset S_0(\mathrm{M},\ \tau)$；(3) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 M 是 σ-有限的。

对于任意 $x \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，存在 $y,\ z \in E(\mathrm{M},\ \tau)$，使得 $T(x) = y + z$且 $r(y) \le r(x)$，并且 $l(z) \le l(x)$。

下面的引理表明，任意作用于 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子 T（其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例）都会将所有 τ-有限投影组成的集合映射为 M 中的一致有界集；这应与 [111, 注 2.5] 中给出的估计进行比较。

引理 A.0.5。设 $\mathcal{M}$ 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子具有相同迹的原子冯·诺依曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是隶属于 $\mathcal{M}$ 的对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。假设以下条件之一成立：

(1) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是极小的；(2) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，且 $E(\mathcal{M},\ \tau) \subset S_0(\mathcal{M},\ \tau)$；(3) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，且 $\mathcal{M}$ 是 σ-有限的。

设 T 是 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子。那么，对于任意 τ-有限投影 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，有 $\|T(p)\|_\infty \leq 3\|T\|$。

证明。 这可由 [54, 引理 35] 中所使用的相同论证得到。我们注意到，其中在 [54, 引理 35] 的证明中定义的投影 $q = E^{|p^\perp Ap|}(\|T\|,\ \infty)$ 应替换为 $q = E^{|p^\perp Ap|}(\|T\| + \varepsilon,\ \infty) \neq 0$，其中某个 $\varepsilon > 0$。 ■

我们将 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 记为 M 中 τ-有限投影的线性张成在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的闭包。等价地，

$$C_0(\mathcal{M},\tau) = \{a \in S(\mathcal{M},\tau) : \mu(a) \in L_\infty(0,\infty),\ \mu(\infty,a) = 0\} = S_0(\mathcal{M},\tau) \cap \mathcal{M},$$

参见 [77, 引理 2.6。9], 另见 [40]。

对 [54, 引理 3.6] 中所用论证稍作修改，即可得到如下引理。主要工具是所谓的广义Gleason定理 [50]。

引理 A.0.6。 设$\mathcal{M}$ 是一个无原子的 *von Neumann* 代数（或其原子的迹相同的原子 *von Neumann* 代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是隶属于$\mathcal{M}$的强对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。

设 T 是作用在 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子。

（1）如果 $E(M,\ \tau)$ 是极小的或具有 Fatou 性质，且 $E(M,\ \tau) \subset S_0(M,\ \tau)$，那么 T 是从 $(F(\tau),\ \|\cdot\|_\infty)$ 到 $(C_0(M,\ \tau),\ \|\cdot\|_\infty)$ 的有界算子。特别地，T 可延拓为从 $C_0(M,\ \tau)$ 到 $C_0(M,\ \tau)$ 的有界算子。（2）如果 $E(M,\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 M 是 σ-有限的，那么 T 可延拓为从 M 到 M 的有界算子。

命题A.0.7。 [54, 命题 3.7]设 M 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子具有相同迹的有原子冯·诺依曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个非交换强对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。假设以下条件之一成立

(1) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是极小的；(2) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 $E(\mathrm{M},\ \tau) \subset S_0(\mathrm{M},\ \tau)$；(3) $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 M 是 σ-有限的。

设 T 是 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子。那么，对于任意算子 $x \in C_0(\mathrm{M},\ \tau)$（或 M），以及与 $|x|$ 交换的 τ- 有限投影 $p \in \mathrm{P}(\mathrm{M})$，有

$$\langle Tx, pu^*\rangle_{(\mathcal{M},\mathcal{M}^*)} := \tau(T(x)pu^*) \in \mathbb{R},$$

其中 $x = u|x|$ 是极分解。

命题 A.0.8. 设 M 是无原子冯·诺伊曼代数（或其原子具有相同迹的有原子冯·诺伊曼代数），并带有半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是 Lindenstrauss 和 Tzafriri 意义下的非交换对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。

设 T 是 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的有界厄米算子。

(1) 若 $E(\mathrm{M},\ \tau) \subset S_0(\mathrm{M},\ \tau)$，则 T 可扩张为 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的有界算子（仍记作 T）；并且对于任意算子 $x \in C_0(\mathrm{M},\ \tau)$，存在 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 中关于 x 的支撑泛函 x'^*，使得 $Tx,\ x' \in \mathbb{R}$。特别地，T 是 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 上的厄米算子。(2) 若 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 具有 Fatou 性质，且 M 是 σ-有限的，则 T 可扩张为从 M 到 M 的有界厄米算子。

证明。 由与 [54, 命题 38] 中相同的论证可得，只需将谱投影 $e^{|x|}(1-1/n, 1]$ 替换为一个 τ-有限投影 $p_n \le e^{|x|}(1-1/n, 1]$它与 $|x|$可交换。 ∎

回顾一下，代数 A 上的导子 δ 是满足莱布尼茨法则的线性算子。尽管已知从 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 到 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 的导子不一定是内导子 [15, 52] (非内导子的例子见 [100, 例 4.1。8] 从 $K(\mathrm{H})$ 到 δ 的导子已知总是内导子，即存在一个元素 $a \in C_0(\mathrm{M},\ \tau)$，使得 [16, 52]

$$\delta(\cdot) = [a, \cdot].$$

另一方面，从 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 到 $C_0(\mathrm{M},\ \tau)$ 的每个导子都是空间的，也就是说，它可以由 M 中的一个元素实现（例如参见 [100,定理 2] 和 [11, 定理 4.1]）。另一方面，回想一下，从 M 到 M 的每个导子必定都是内导子 [63, 100]。

引理 A.0.9。 [54, 引理 3。9]设 $\mathcal{M}$ 是一个配备半有限忠实正规迹 τ 的半有限冯·诺依曼代数。每个导子 δ 从 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$ 到 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$（或从$\mathcal{M}$ 到$\mathcal{M}$）都是空间的。特别地，若 δ 是一个 $*$-导子，则实现 δ 的元素可以取为自伴的。

根据推论 A.0.8， T 可延拓为一个有界厄米算子，其定义域为 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$，值域为 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$（或从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$）。回想一下，任意一个定义在 T 上的 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的厄米算子，都是一个由 $\mathcal{A}$ 中的自伴算子左乘所得到的算子与一个 $*$-导子作用于 $\mathcal{A}$ (例如参见 [88] 和 [107, 第213]页）。由引理 A.0.9 可知，存在自伴元 $a,\ b \in \mathcal{M}$ 使得

$$Tx = ax + xb,\ x \in C_0(\mathcal{M}, \tau).$$

推论 A.0.10。 设 M 是一个无原子冯·诺依曼代数（或其原子的迹均相同的原子冯·诺依曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathrm{M},\ \tau)$ 是一个非交换强对称空间，其范数与 $\|\cdot\|_2$ 不成比例。

设 T 是 $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的有界厄米算子。

(1) 若 $E(\mathrm{M},\tau)$ 是极小的，或者 $E(\mathrm{M},\tau)\subset S_0(\mathrm{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质，则 T 可延拓为 $C_0(\mathrm{M},\tau)$ 上的有界厄米算子（仍记作 T），并且存在自伴元 $a,b\in\mathrm{M}$，使得

$$Tx=ax+xb,\ x\in C_0(\mathcal{M},\tau).$$

(2) 若 $E(\mathrm{M},\tau)$ 具有 Fatou 性质且 M 是 σ-有限的，则 T 可延拓为从 M 到 M 的有界厄米算子，并且存在自伴元 $a,b\in\mathrm{M}$，使得

$$Tx=ax+xb,\ x\in\mathcal{M}.$$

现在我们给出本附录的主要结果，它完整刻画了对称空间 $E(\mathrm{M},\tau)$ 上的厄米算子。

定理 A.0.11。 设$\mathcal{M}$ 为无原子冯·诺依曼代数（或其原子具有相同迹的有原子冯·诺依曼代数），并配备半有限忠实正规迹 τ。设 $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 为一个非交换对称空间，其范数不与 $\|\cdot\|_2$ 成比例。若以下条件之一成立

(1) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是极小的；(2) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，并且 $E(\mathcal{M},\ \tau)\subset S_0(\mathcal{M},\ \tau)$；(3) $E(\mathcal{M},\ \tau)$ 具有 *Fatou* 性质，且$\mathcal{M}$ 是 σ-有限的，

那么，有界线性算子 $T\colon E(\mathcal{M},\ \tau)\to E(\mathcal{M},\ \tau)$ 是厄米算子，当且仅当存在自伴算子 a 和 b 属于$\mathcal{M}$，使得

$$Tx=ax+xb,\ x\in E(\mathcal{M},\tau). \tag{A.0.3}$$

In 特别地，T 可扩张为从$\mathcal{M}$ 到$\mathcal{M}$的有界厄米算子 .

证明。 定理的“若”部分显然（例如参见 [108, 第71] 页或[44, 第 167]页）。

由推论 A.0.8，T 可延拓为一个有界厄米算子，从 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$映射到 $C_0(\mathcal{M},\ \tau)$（或从 $\mathcal{M}$ 映射到 $\mathcal{M}$）。由引理 A.0.9 可知，存在自伴元 $a,\ b\in\mathcal{M}$ 使得

$$Tx=ax+xb,\ x\in\mathcal{F}(\tau).$$

固定 $x \in E(\mathcal{M}, \tau)$。由命题 3.0.9，存在一个序列 $\{x_n\} \subset \mathrm{F}(\tau)$，使得$x_n \xrightarrow{\sigma(E, E^\times)} x$。若 $y \in E(\mathrm{M}, \tau)^\times$，则

$$\begin{aligned} & \tau_1(y(ax_n + x_n b)) \\ = \ & \tau_1((ya)x_n) + \tau_1((by)x_n) \\ \to \ & \tau_1((ya)x) + \tau_1((by)x) \\ = \ & \tau_1(y(ax)) + \tau_1(y(xb)) \\ = \ & \tau_1(y(ax + bx)), \end{aligned}$$

如 $n \to \infty$。因此，

$$ax_n + x_n b \xrightarrow{\sigma(E, E^\times)} ax + xb.$$

由于 T 是厄米算子，因此 T 是 $\sigma(E, E^\times)$-连续的（参见定理3.0.16）。因此，我们有

$$\begin{aligned} T(x) &= \sigma(E, E^\times) - \lim_{n\to\infty} T(x_n) \\ &= \sigma(E, E^\times) - \lim_{n\to\infty} (ax_n + x_n b) \\ &= ax + xb. \end{aligned}$$

证明完成。 ■

参考文献

[1] Yu. Abramovich，《范数格的等距变换》，Optimizatsiya 43(60)（1988）74–80（俄文）。[2] Yu. Abramovich，《重排不变空间上保持不交性的算子》，Pacific J. Math. 148(2)（1991），201–206。[3] Yu. Abramovich，M. Zaidenberg，《一个与 L_p 等距的重排不变空间与 L_p 重合》，《泛函分析、调和分析与概率论之间的相互作用》（美国密苏里州哥伦比亚，1994），13–18，Lecture Notes in Pure and Appl. Math.，175，Dekker，纽约，1996。[4] B. Aminov，V. Chilin，《复对称序列空间上的等距映射与厄米算子》，Siberian Adv. Math. 27（2017），239–252。[5] B. Aminov，V. Chilin，《紧算子的完备范数理想的等距映射》，Studia Math. 241（2018），87–99。[6] M. Anoussis，A. Katavolos，《巢代数中 $\mathscr{C}_p$-空间的等距映射》，J. London Math. Soc. 51（1995），175–188。[7] J. Arazy，《C_p 的等距映射》，Israel J. Math. 22（1975），247–256。[8] J. Arazy，《基本序列、嵌入以及酉矩阵空间中对称结构的唯一性》，J. Funct. Anal. 40（1981），302–340。[9] J. Arazy，《酉矩阵空间的同构》，《巴拿赫空间理论及其应用》（布加勒斯特，1981），第1–6页，Lecture Notes in Math.，991，Springer，柏林–纽约，1983。[10] J. Arazy，《复对称序列空间的等距映射》，Math. Z. 188（1985），427–431。[11] W. Arveson，《算子代数的自同构群》，J. Funct. Anal. 15（1974），217–243。[12] S. Astashkin，《有限区间和半轴上的重排不变空间中的 Rademacher 级数与同构》，J. Funct. Anal. 260（2011），第1期，195–207。[13] S. Banach，《线性运算理论》，华沙（1932）。[14] C. Bennett，R. Sharpley，《算子插值》，Academic Press，波士顿，1988。[15] A. Ber，J. Huang，G. Levitina，F. Sukochev，《取值于半有限冯·诺伊曼代数的理想中的导子》，J. Funct. Anal. 272（12）（2017），4984–4997。[16] A. Ber，J. Huang，G. Levitina，F. Sukochev，《取值于与半有限冯·诺依曼代数相联系的 τ-紧算子理想中的导子》，Comm. Math. Phys. 390（2022），第2期，577–616。[17] A. Ber，J. Huang，F. Sukochev，《非交换 L_0-空间的线性等距变换》，Bull. Lond. Math. Soc. 56（2024），第6期，2075–2092。[18] E. Berkson，《若干类型的巴拿赫空间、厄米算子与 Bade 函数》，Trans. Amer. Math. Soc. 116（1965），376–385。

[19] B. Blackadar，《算子代数：C*-代数与冯·诺依曼代数理论》，《数学科学百科全书》第122卷，《算子代数与非交换几何》第III卷。施普林格出版社，柏林，2006年。.
[20] V.I. Bogachev，《测度论》，第I、II卷。施普林格出版社，柏林，2007年，第I卷：xvii+500 页。[21] O. Bratteli、D. Robinson，《算子代数与量子统计力学》，第I卷，纽约，施普林格出版社，1979年。[22] M. Braverman、E. Semenov，《对称空间的等距映射》（俄文），《科学院通报》SSSR 217（1974），257–259。[23] M. Braverman、E. Semenov，《对称空间的等距映射》（俄文），Vorone˘z国立大学数学研究所论文集，第17期《算子方程理论》（1975），7–18。[24] M. Broise，论某些冯·诺依曼代数的同构，《高等师范学校科学年刊》（第3辑）83（1966），91–111。[25] N. Carothers、R. Haydon、P.-K. Lin，洛伦兹函数空间上的等距映射，Israel J. Math. 84（1993），265–387。[26] N. Carothers、B. Turett，L_p上的等距映射，《美国数学会汇刊》297（1986），第1期，95–103。[27] J.-T. Chan、C.-K. Li、N.-S. Sze，酉不变范数的等距映射，《线性代数及其应用》399（2005），53–70。[28]V. Chilin、A. Krygin、F. Sukochev，可测算子非交换对称空间的局部一致凸性与一致凸性，《剑桥哲学学会数学学报》111（1992），355–368。[29] V. Chilin、A. Krygin、F. Sukochev，可测算子凸全对称集的极点，《积分方程与算子理论》15（1992），第2期，186–226。[30] V. Chilin、A. Medzhitov、F. Sukochev，非交换洛伦兹空间的等距映射，《数学杂志》200（1989），527–545。[31] J. Conway，《泛函分析教程》，施普林格出版社，纽约，1997年。[32] J. Dixmier，希尔伯特空间有界算子集上的线性泛函，《数学年刊》51（1950），387–408。[33] J. Dixmier，《希尔伯特空间中的算子代数》，第2版，Gauthier-Vallars，巴黎，1969年。[34] P. Dodds、T. Dodds，对称算子空间的弱紧子集，《剑桥哲学学会数学学报》110（1991），169–182。[35] P. Dodds、T. Dodds、B. de Pagter，非交换巴拿赫函数空间，《数学杂志》201（1989），583–597。[36] P. Dodds、T. Dodds、B. de Pagter，非交换科特对偶，《美国数学会汇刊》339（1993），717–750。[37] P. Dodds、T. Dodds、F. Sukochev、O. Tikhonov，非交换吉田–休伊特定理及在测度局部拓扑下闭的可测算子凸集，《正性》9（2005），第3期，457–484。

[38] P. G. Dodds、C. J. Lennard，迹理想中的正规性，《算子理论杂志》16（1986），127–145。[39] P. Dodds、B. de Pagter，《赋范Köthe空间：一种非交换视角》，Indag. Math. 25（2014），206–249。[40] P. Dodds、B. de Pagter、F. Sukochev，《非交换积分与算子理论》，《数学进展》第349卷。Birkhäuser/Springer，查姆，2023年。[41] R. Douglas，《算子理论中的Banach代数技巧》，《数学研究生教材》第179卷（Springer，纽约，1998年），原由Academic Press于1972年出版。[42] R. Fleming、J. Jamison，巴拿赫空间和上的厄米算子与等距映射，《爱丁堡数学学会学报》12（1989），169–191。[43] R. Fleming、J. Jamison，《巴拿赫空间上的等距映射：函数空间》，《纯数学与应用数学专著与综述》第129卷。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2003年。[44] R. Fleming、J. Jamison，《巴拿赫空间上的等距映射：向量值函数空间》，第2卷。《纯数学与应用数学专著与综述》第138卷。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2008年。[45] T. Fack，非交换 L^p空间的型与余型不等式，《算子理论杂志》17（1987），255–279。[46] T. Fack、H. Kosaki，τ可测算子的广义 s数，《太平洋数学杂志》123（2）（1986），269–300。[47] J. Giles，半内积空间类，《美国数学会汇刊》129（1967），436–446。[48] G. Godefroy、N. Kalton，球拓扑及其应用，当代数学85（1989），195–237。[49]U. Haagerup、H. Rosenthal、F. Sukochev，非交换 L_p空间的巴拿赫嵌入性质，《美国数学会回忆录》163（2003），第776期，vi+68 页。[50] J. Hamhalter，《量子测度论》，Springer Science, Business Media Dordrecht，2003年。[51] F. Hiai，《冯·诺依曼代数专题讲座》，EMS数学讲座系列。EMS出版社，柏林，2021年。viii+241 页。[52] J. Huang，取值于半有限冯·诺依曼代数理想中的导子，博士论文，新南威尔士大学，2019年。[53] J. Huang、O. Sadovskaya、F. Sukochev，关于紧算子理想同构嵌入的Arazy问题，《数学进展》406（2022），论文编号108530，共21页。[54] J. Huang、F. Sukochev，对称算子空间上的厄米算子与等距映射，JEMS 26（2024），第9期，3287–3325。[55] J. Huang、F. S ukochev、D. Zanin，对数次主化与序保持等距映射，J. Funct. Anal. 278（2020），108352。[56] P. de Jager、J. Conradie，半有限冯·诺依曼代数所关联的非交换对称空间之间的等距映射，《正性》24（2020），815–835。

[57] P. de Jager, J. Conradie, 《极端点方法在某些非交换空间等距映射研究中的应用》, Glasg. Math. J. 64 (2022), no. 2, 462–483.[58] J. Jamison, I. Loomis, 《向量值函数 Orlicz 空间的等距映射》, Math. Z. 193 (1986), 363–371.[59] W. Johnson, G. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, 《Banach空间中的对称结构》, Mem. Amer. Math. Soc. 19 (1979), no. 217, v+298pp.[60] M. Junge, Z. Ruan, D. Sherman, 《非交换 L_p-空间的 2-等距映射分类》, Israel J. Math. 150 (2005), 285–314.[61] M. Junge, D. Sherman, 《非交换 L^p 模》, 《算子理论杂志》53 (2005), 3–34.[62] R. Kadison, 《算子代数的等距映射》, 《数学年刊》(2) 54 (1951), 325–338.[63] R. Kadison, 《算子代数的导子》, 《数学年刊》(2) 83 (1966), 280–293.[64] R. Kadison, J. Ringrose, 《算子代数理论基础》第 I 卷, 纯粹与应用数学, 100, Academic Press, 纽约 (1983).[65] N. Kalton, 《L_p的端同态》, $0 \le p \le 1$, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 353–381.[66] N. Kalton, B. Randrianantoanina, 《重排不变空间上的等距映射》, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 316 (1993), 351–355.[67]N. Kalton, B. Randrianantoanina, 《重排不变空间上的满射等距映射》, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 45 (1994), no. 179, 301–327.[68] N. Kalton, F. Sukochev, 《对称范数与算子空间》, J. Reine Angew. Math. 621 (2008), 81–121.[69] A. Katavolos, 《非交换的 L_p 空间真的非交换吗？》, Canad. J. Math. 6 (1976), 1319–1327.[70] L. Kelley, 《一般拓扑学》, 数学研究生教材, 第27卷, 施普林格出版社, 纽约–柏林, 1975.[71] A. Koldobsky, H. König, 《Banach空间等距理论的若干方面》, 《Banach空间几何手册》第 I 卷, 899–939, North-Holland, 阿姆斯特丹, 2001.[72] S. Krein, Y. Petunin, E. Semenov, 《线性算子的插值》, Trans. Math. Mon., 54, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1982.[73] A. Krygin,A. Medzhitov, 《Lorentz空间的等距映射》, 《数学分析、代数与概率论》, 科学论文集, 塔什干, 52–62 (1988).[74] L.E. Labuschagne, 《非交换 L_p-空间上的复合算子》, Expo. Math. 17 (1999), 429–468.[75] J. Lamperti, 《关于某些函数空间的等距映射》, Pacific J. Math. 8 (1958), 459–466.[76] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, 《经典Banach空间 II：函数空间》, 数学及其应用领域成果丛书, 第92卷, 施普林格出版社, 柏林–纽约, 1977.[77] S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, 《奇异迹：理论与应用》, De Gruyter 数学研究丛书, 46, De Gruyter, 柏林, 2013。

[78] G. Lumer, 《半内积空间》, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 29–43.[79] G. Lumer, 《自反Orlicz空间的等距映射》, 《美国数学会通报》68 (1962), 28–30.[80] A. Medzhitov, 《有原子冯·诺伊曼代数上的对称空间的等距映射》, 数学分析、代数与几何, 塔什干国立大学, 52–54 (1989).[81] A. Medzhitov, F. Sukochev, 《非交换对称空间的正等距映射》, 乌兹别克苏维埃社会主义共和国科学院物理数学科学系列学报 3 (1987), 20–25（俄文）.[82] A. Medzhitov, F. Sukochev, 《非交换洛伦兹空间的等距映射》, 乌兹别克苏维埃社会主义共和国科学院院刊 4 (1988), 11–12（俄文）.[83] C. le Merdy, S. Zadeh, 非交换 L^p-空间上的 l^1-压缩映射, 《算子理论杂志》85 (2021), no. 2, 417–442.[84] B. Mityagin, 《Banach空间线性群的同伦结构》（俄文）, Uspehi Mat. Nauk 25 (1970), no. 5 (155), 63–106。译载于《俄罗斯数学评论》1970年, 第25卷第5期, 59–103页。[85] E. Nelson, 《非交换积分札记》, J. Funct. Anal. 15 (1974), 103–116.[86] V. Ovčinnikov, 《可测算子的对称空间》, 苏联科学院文献 191 (1970), 448–451。（俄文）[87] V. Ovčinnikov, 《可测算子的对称空间》, WGU 数学研究所学报 3 (1971), 88–107。（俄文）[88] A. Paterson, A. Sinclair, 《C^*-代数之间等距映射的刻画》, J. London Math. Soc. 2 (1972), 755–761.[89] G. Polya 和 G. Szego, 《分析中的问题与定理》, 数学科学基础丛书, 施普林格出版社, 柏林和纽约, 第 I 卷, 1972.[90] L. I. Potepun, 《重排不变空间的同构》, 西伯利亚数学杂志 12 (1971), 第3期, 623–629（俄文）.[91] L. I. Potepun, 《希尔伯特型对称空间》, 高等院校学报：数学 1 (1974), 90–95。译载于：苏联数学（高等院校学报）18 (1974), 73–77.[92] B. Randrianantoanina, 《函数空间的等距映射》, 博士论文, 密苏里大学哥伦比亚分校, 1993.[93] B. Randrianantoanina, 《重排不变函数空间中范数的等距分类》, 卡罗来纳大学数学评论 38 (1997), 73–90.[94] B. Randrianantoanina, 《Orlicz空间中的单射等距映射》, 《函数空间》（伊利诺伊州爱德华兹维尔, 1998）, 269–287, 当代数学, 232, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999.[95] A. Rieckers, H. Roos, 《一般冯·诺伊曼代数中 Jordan 同构的实现》, 亨利·庞加莱研究所理论物理年刊 50 (1989), 95–113.[96] S. Rolewicz, 《度量线性空间》, 波兰科学出版社, 华沙, 1972.[97] H. Rosenthal, 《包含 l_1, 的Banach空间的刻画》, 美国国家科学院院刊 71 (1974), 2411–2413.[98] B. Rubshtein, G. Grabarnik, M. Muratov, Y. Pashkova, 《可测函数对称空间基础：洛伦兹、马尔钦凯维奇和Orlicz空间》, 数学进展丛书, 45, Springer, 查姆, 2016。

[99] B. Russo，有限冯·诺依曼代数相关 L_p空间的等距变换，《美国数学会通报》74 (1968)，228–232。[100] S. Sakai， W^*代数的导子，《数学年刊》83 (1966)，273–279。[101] S. Sakai， C^*代数与 W^*代数，施普林格出版社，柏林–海德堡–纽约，1971年。[102] I. Segal，抽象积分的非交换扩张，《数学年刊》53 (1953)，401–457。[103] E. Semenov，对称空间中线性算子的插值，博士论文，沃罗涅日，1968。[104] D. Sherman，非交换 L^p 结构准确编码约当结构，《J. Funct. Anal.》221 (2005)，150–166。[105] D. Sherman，论非交换 L_p 空间之间等距变换的结构，《数理科学研究所刊物》42 (2006)，第1期，45–82。[106] D. Sherman，非交换巴拿赫–斯通定理的新证明，《量子概率》，363–375，Banach Center Publ.，73，波兰科学院数学研究所，华沙，2006。[107] A. Sinclair，半单巴拿赫代数上的约当同态与导子，《美国数学会会刊》24 (1970)，209–214。[108] A. Sourour，紧算子范数理想的等距变换，《J. Funct. Anal.》43 (1981)，69–77。[109] E. Størmer，关于 C∗代数的约当结构，Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965)，438–447。[110] F. Sukochev，有限冯·诺依曼代数上可测算子的对称空间，博士论文（俄文），塔什干，1987年。[111] F. Sukochev，与II 型 AFD 因子相关的对称算子空间及对称向量值空间的等距变换，《积分方程与算子理论》26 (1996)，102–124。[112] F. Sukochev，A. Veksler，对称算子空间中的正线性等距映射，《积分方程与算子理论》(2018)，90:58，1–15。[113] F. Sukochev，J. Huang，非交换对称空间上的等距变换，《科学院通报》496 (2021)，64–67。《数学通报》103 (2021)，第1期，54–56。[114] M. Takesaki，《算子代数理论 I》，施普林格出版社，纽约，1979。[115] M. Takesaki，《算子代数理论 III》，施普林格出版社，纽约，2003年。[116] P. Tam，与半有限冯·诺依曼代数相关的 L_p空间的等距变换，Trans. Amer. Math. Soc. 254 (1979)，339–354。[117] K. Watanabe，论任意冯·诺依曼代数相关的非交换 L^p空间之间的等距变换，《算子理论杂志》28 (1992)，267–279。[118] M. Weigt，可测算子代数之间的约当同态，《数学问题》32 (2009)，203–214。[119] P. Wojtaszczyk，《分析学家的巴拿赫空间》，剑桥大学出版社，1991。[120] F. Yeadon，非交换 L^p 空间的等距变换，《剑桥哲学学会数学会刊》90 (1981)，41–50。

[121] M. Zaidenberg，对称空间的等距分类，苏联数学文献18 (1977)，636–640。
[122] G. Zaidenberg，函数空间等距变换的特殊表示，《多变量函数理论研究》，84–91，174，雅罗斯拉夫尔国立大学，雅罗斯拉夫尔，1980年（俄文）。[123] M. Zaidenberg，函数空间上等距变换的一种表示，数学物理分析与几何4 (1997)，339–347。