arXiv:2512.20979v1 [math.FA] 24 Dec 2025

算子代数与算子理论研究汇编

JAYDEB SARKAR

Abstract. 本章综述了过去十年间，印度数学家在算子代数与算子理论广泛领域所作贡献带来的进展。本章汇集了二十位数学家及其合作者的研究成果，他们分别从各自的研究领域及其延伸方向出发撰写。文中重点介绍的若干问题，有望在全球范围内影响这一学科未来的发展。

Contents

序言2 1. 算子理论及相关主题中的若干问题 3 2. 傅里叶理论、夹角、Pimsner-Popa 基与子代数包含的正则性 10 3. 巴拿赫空间理论方面的贡献 12 4. 量子动力学映射与量子高斯态 14 5. 关于 Carathéodory 逼近 16 6. 商域上的算子理论 18 7. 算子理论中的迹公式 21 8. 算子膨胀与代数簇 23 9. 加权离散半群代数 $\ell^1(S,\ \omega)$ 24 10. Cartan 等距算子与 Cartan 压缩映射 26 11. 算子空间张量积上的范数与算子系统的 C^*-包络 29 12. Bohr不等式与 Gleason–Kahane–Zelazko 定理 31 13. 冯·诺伊曼代数 33 14. Birkhoff-James 正交性在研究巴拿赫空间之间算子几何中的应用 35 15. 紧算子的交换子与李代数 37 16. 关于希尔伯特空间上范数达到算子的若干子类 39 17. 广义 Parrott 同态与 Banach 空间几何 41 18. 算子半群的长时间行为 43 19. E_0-半群与乘积系统的最新进展 45 20. C^*-代数、 K-理论与动力学 48 参考文献 49

Foreword

算子代数与算子理论是分析学的分支，更具体地说，是泛函分析的分支。广义而言，这些领域研究线性算子，以及由这类算子构成的代数、子代数和向量空间。这一学科起源于对矩阵和矩阵空间的研究。还应注意，底层空间的性质，即使是在有限维向量空间的层面上，也对更广泛的理论发挥着重要作用。这一视角在巴拿赫空间理论中尤为明显。

这些领域的核心几乎涉及数学的所有主要分支，包括调和分析、偏微分方程和常微分方程、复分析（涉及一个或多个变量）、几何、拓扑学，甚至数论。更广泛的领域还与控制理论、工程学分支，以及量子计算和机器学习的新进展相联系。线性分析领域的核心目标，是研究线性算子的结构，以及由这类算子生成的空间，就像研究矩阵那样。该领域取得了许多成果，并建立了具有广泛数学意义的联系。值得一提的例子包括阿蒂亚–辛格指标定理；关于本质谱和指标理论的布朗–道格拉斯–菲尔莫尔理论；比伯巴赫猜想的解决；C^*-代数分类的代数和拓扑方法；卡迪森–辛格问题的解决；泰勒的科祖尔复形方法在研究算子元组的谱方面的应用；巴拿赫空间几何的深奥理论；小波理论；以及代数簇和复几何在理解多个变量情形下算子结构方面的作用，等等。

线性分析理论，或更具体地说，矩阵理论，最初由 Grassmann 和 Sylvester 的研究正式奠定。然而，斯特凡·巴拿赫和约翰·冯·诺伊曼为希尔伯特空间和巴拿赫空间上线性算子现代理论奠定了大部分基础。不久之后，印度的线性分析研究也蓬勃发展，并很快成为许多印度数学家极为感兴趣的领域。当时，在印度从事研究的多位数学家引领了这一学科的发展，其中包括 K.R. Parthasarathy、M.G. Nadkarni、Ashoke Kumar Roy、K.B. Sinha、Rajendra Bhatia、V.S. Sunder、Gadadhar Misra、Subhash J. Bhatt、B. V. Limaye 和 Ameer Athavale 等人。

如今，这些资深数学家的学术薪火已由规模更大且仍在不断壮大的群体接续，他们在印度从事算子代数和算子理论研究。尤其是过去十年间，印度数学家取得了令人瞩目的成果，其中年轻研究人员的贡献尤为显著。

及时而重要的是，介绍过去十年印度数学家在这些领域取得的成就，并展望未来的发展方向与可能性。本章包含19篇贡献，另有Gadadhar Misra撰写的一个特别扩展部分，专门列举开放问题。这些贡献共同涵盖了算子代数、算子理论及相关主题中广阔的数学谱域。所有贡献者都是在该领域活跃多年的资深研究人员。他们的工作共同展现了印度数学在全球舞台上的当前实力，以及未来领导力量的崛起。

需要强调的是，我们在本章中的主要职责，是将所有贡献者汇聚到共同的平台上，并以凝聚的方式组织他们的工作。尽管如此，本章内容的全部学术贡献均归属于20个独立章节的作者。每个章节的贡献者姓名、所属机构和联系方式均列于该章节标题之后。

1. Some problems in operator theory and related topics

作者：*Gadadhar Misra* [*gm@isibang.ac.in*]，来自印度统计研究所班加罗尔分校和 *IIT Gandhinagar*。

引言。 多元算子理论的发展与多复变函数论的发展并行，只是非交换坐标带来了一系列全新的挑战。通过将一对算子 $(\mathcal{H}, \boldsymbol{T})$ 视为希尔伯特模，引入交换代数的方法来研究这一领域的问题，由此开启了系统性的新发展；其中 $\boldsymbol{T} := (T_1, \ldots, T_n)$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的交换 n-元算子组，模乘法定义为 $(p, h) \mapsto p(\boldsymbol{T})h$, $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, $h \in \mathcal{H}$。这一视角极具效力，因为它使我们能够应用交换代数中的工具。另一方面，由于模乘法在第一个变量或两个变量上都满足连续性假设，这些技术无法直接应用。具体采用哪种方式，取决于所研究的问题。

第二个要素是群（局部紧第二可数拓扑群） G 在模（$\mathcal{H}$, $\boldsymbol{T}$）上的作用。假设 X 是 $\mathbb{C}^d$的非空子集，并且 $g \in G$ 的作用在X的某个开邻域内是全纯的。若$\boldsymbol{T}$ 是一个 d 元组，且 X 是 σ（$\boldsymbol{T}$）的Taylor联合谱，那么 $g \cdot \boldsymbol{T}$ 由通常的全纯函数演算定义。诱导系统$\big(X$、G（$\mathcal{H}$, $\boldsymbol{T}$）$\big) := \big\{\boldsymbol{T}$: $U_g^* p$（$\boldsymbol{T}$）$U_g =$（$g \cdot p$）（$\boldsymbol{T}$）$\big\}$的分类是一个重要问题；其中该系统定义为满足$U^* gp$（$\boldsymbol{T}$）$Ug =$（$g \cdot p$）（$\boldsymbol{T}$）的 d元组 $\boldsymbol{T}$的集合，对所有 $g \in G$、 $p \in \mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$均成立；其中 U_g是群 G的酉表示，而 $g \cdot p = p \circ g^{-1}$。研究这类诱导系统的一种方法，是选取一个作用于 X上的群 G 。这一选择可能从传递作用变化到另一种作用，在后一种作用下， X 中的 G 的轨道数目相当多。作为一个典型例子，考虑 $X = \mathbb{D}^n$，即单位闭圆盘的 n重乘积，并令群 G为 $\mathbb{D}^n$ 的双全纯自同构群，或简单地取作用于$\mathbb{D}^n$上的置换群$\mathfrak{S}_n$ 。

通过分析可分复希尔伯特空间$\mathcal{H}$中秩为 n 的 Grassmann 流形 $\mathrm{Gr}(\mathcal{H}, n)$ 上的一类全纯曲线，可以极大地简化对这些问题的研究。这些全纯曲线源自论文 [159]中引入的一类作用于某个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的算子。此类算子具有一个由特征值构成的开集 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ，这些特征值的重数为（常数） k ，并且其特征在于存在一个全纯映射 $\gamma : \Omega \to \mathcal{H}$ ，使得 $\boldsymbol{\gamma}(w) := (\gamma_1(w) \ldots, \gamma_k(w))$, $T\gamma_i(w) = w\gamma_i(w)$ $1 \leq i \leq k$, $w \in \Omega$。对于 $k = 1$, 此类算子 T 的主要特点之一是，由全纯映射 γ_T 确定、并赋予厄米结构 $\|\gamma_T(w)\|^2$的全纯厄米线丛 E_T的曲率 $\mathcal{K}_T(w) := -\partial\bar{\partial} \log \|\gamma_T(w)\|^2$ 是算子 T的完全酉不变量。

Cowen 和 Douglas 最初为任意 $k \geq 1$ 得到的一组完备不变量，经过改进后，为 $B_k(\Omega)$ 中的一大类 Cowen-Douglas 算子提供了一组便于处理的不变量，其中 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, [238, 241]。在这些论文中，通过对 Cowen-Douglas 丛施加一个温和条件

，证明了曲率与第二基本形式共同构成一组完备不变量。

齐性算子。容易看出，如果 T 是单位圆盘 $\mathbb{D}$上 Cowen-Douglas 类中的一个压缩算子，那么 $\mathcal{K}_T(w) \leq \mathcal{K}_{S^*}(w)$，其中 S^* 是作用于 ℓ^2上的单侧后移算子。选取一个全纯标架 γ_{S^*}，例如 $\gamma_{S^*}(w) = (1, w, w^2, ...)$，由此可得

$$\|\gamma_{S^*}(w)\|^2 = (1-|w|^2)^{-1},\ \mathcal{K}_{S^*}(w) = -(1-|w|^2)^{-2},\ w \in \mathbb{D},$$

相对于标架 γ。因此，算子 S^* 是所有压缩 Cowen-Douglas 算子类中的一个极值算子。R. G. Douglas 曾问道：如果压缩算子 T 的曲率 $\mathcal{K}_T$ 在某一点（哪怕仅仅一点）取到此不等式中的等号，是否就能推出 T 必定与 S^*酉等价？一般而言，答案显然是否定的。然而，如果 T是齐性的，也就是说，对于单位圆盘的每个双全纯自同构 φ，都存在某个酉算子 U_φ使得 $U_\varphi^* T U_\varphi = \varphi(T)$，那么答案是肯定的。当然，接下来很自然会问：所有齐性算子有哪些?

假设存在 M¨ob 的射影酉表示 σ，使得对于所有 M¨obius 变换 φ，$\varphi(T) = \sigma(\varphi)^* T \sigma(\varphi)$。在这种情况下，算子$T$ 是齐次的，我们称 $\sigma(\varphi)$ 与算子 T相关联。文献 [67] 中为完全非酉（cnu）压缩算子建立了 Sz.-Nagy–Foias 模型理论的 M¨obius 等变版本。作为应用，我们证明，若 T 是一个与（射影酉）表示 σ相关联的 cnu 压缩算子，则存在唯一的射影酉表示 $\hat{}\sigma$，它扩张 σ，并与 T的最小酉扩张相关联。扩张 σ的表示 $\hat{}\sigma$可由 σ 通过以下公式给出

$$\hat{\sigma} = (\pi \otimes D_1^+) \oplus \sigma \oplus (\pi_\star \otimes D_1^-),$$

其中，$D_1^\pm$ 是两个定义在 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 上的离散级数表示（一个全纯，另一个反全纯），而 π，$\pi_\star$ 是定义在 T 的两个缺陷空间上的 M¨ob 表示，并以 σ 和 T的形式明确给出。此外，cnu 压缩算子 T 存在相关联的表示，当且仅当其 Sz.-Nagy–Foias 特征函数 θ_T 具有乘积形式 $\theta_T(z) = \pi_\star(\varphi_z)^* \theta_T(0) \pi(\varphi_z)$ $z \in \mathbb{D}$，其中φ_z 是 M¨ob 中将 z 映射到 0。我们为 Cowen-Douglas 类中一大类齐次 cnu 压缩算子给出了这一乘积公式的具体实现；这类算子是齐次压缩中的全纯 imprimitivity 系统。

问题 1.1. 利用 Sz.-Nagy – Foias 特征函数的乘积公式，求出所有齐次压缩算子。

给定一对正实数 α，β 以及定义在有界域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$上的半解析函数 K，我们研究实解析函数的性质

$$K^{(\alpha,\beta)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) := \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} K^{(\alpha+\beta)} \log K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \right) \right)_{1 \leq i,j \leq m},\ \boldsymbol{z} \in \Omega,$$

取值于 $m \times m$ 矩阵。只要K^α 和 K^β 是半正定的，核 $K^{(\alpha,\beta)}$ 就是半正定的。在这种情况下，可以得到由核 $K^{(\alpha,\beta)}$ 确定的希尔伯特模的一种实现。设 $\mathcal{M}_i$和 $i = 1, 2$是多项式环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$上的两个希尔伯特模。张量积 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 显然是环 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{2m}]$上的一个模。该模乘法在 $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$ 上的限制可通过

对角映射 $z \mapsto (z, z), \quad z \in \Omega$得到。现在，相对于限制在$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$上的乘法，张量积$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 会出现一种自然分解，这与两个不可约酉表示的张量积的克莱布施-戈登分解十分相似。该分解中的两个初始部分已在 [203]中得到识别。其中第一部分就是将 $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 限制到对角集合 $\triangle$ 上所得的部分：$= \{(z, z) : z \in \Omega\}$；而分解中的第二部分则是由核 $K^{(\alpha,\beta)}$确定的模。此外，如果Ω是一个有界对称域，那么只要 K 在Ω的双全纯自同构群的作用下是协变的， $K^{(\alpha,\beta)}$ 就是协变的。

问题 1.2。 求出两个希尔伯特模的张量积分解中的所有分量。这类似于两个酉表示的张量积的 Clebsch-Gorden 分解。

全纯印射性。 设 $(\mathcal{H}, \boldsymbol{T})$ 是环 $\mathcal{R}$ 上的希尔伯特模。假设群 G 作用于 $\mathcal{H}$，即存在一个映射 $U: \ G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ，其定义为$U(g, f) = U_g f$，其中 U_g、 $g \in G$、 $f \in \mathcal{H}$ 为某个酉同态。还假设群 G 作用于环 $\mathcal{R}$ ，并将此作用记为 $(g, \phi) \to g \cdot \phi$、 $g \in G$ 和 $\phi \in \mathcal{R}$。印射性条件要求

$$U_g^* m_\phi(f) U_g = m_{g\cdot\phi}(f), \ g \in G, h \in \mathcal{H}, \phi \in \mathcal{R}.$$

特化到环 $\mathcal{R}$ 是交换的代数的情形，即对于某个局部紧豪斯多夫空间 X， $\mathcal{R}) = C(X)$, 其中 X 是一个 G -空间，则得到麦基印射性。在此情形下，模 $(\mathcal{H}, \boldsymbol{T})$ 可以与 $L^2(X, d\mu)$ 认同，而 $\boldsymbol{T}$ 是 $L^2(X, d\mu)$ 上的乘法算子的交换算子组，其中 $d\mu$ 是在群 G 的作用下拟不变的 X 上的测度。因此，交换算子组 $\boldsymbol{T}$ 是由正规算子组成的交换算子组。印射性条件要求 $\boldsymbol{T}$ 是齐性的，即

$$U_g^* \boldsymbol{T} U_g = g \cdot \boldsymbol{T}, \ g \in G,$$

其中， G 在 X 上的连续作用不过是 X 上的连续函数，而 $g \cdot \boldsymbol{T}$则通过交换正规算子的通常连续函数演算来定义。该印随关系显然具有更强的形式。 G 在X 上的作用诱导出 $C(X)$的一个 $*$ -同态，其公式为 $\phi_g: \ \phi \to \phi \circ g, \quad \phi \in C(X)$。现在，印随关系可以写成以下形式

$$U_g^* \phi(\boldsymbol{T}) U_g = \phi_g(\boldsymbol{T}), \ g \in G, \phi \in C(X).$$

Mackey 的诱导定理指出，这些诱导系统与子群 H 的诱导表示一一对应，其中 H 由将 X 实现为 $X := G/H$ 的形式来确定。如果不存在闭子空间 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ ，使得 $\mathcal{M}$ 在群 G 的表示 U_g 下不变，且在 $*$ -表示 $\phi \to \phi(\boldsymbol{T})$ 下也不变，那么称诱导系统为不可约。Mackey 的早期成果之一是，子群 H 的不可约表示与群 G 的不可约乘子表示相对应。关于这一主题已有大量文献。然而，尚无人尝试研究同时在 U_g 和 M_ϕ 以及 $\phi \in C(X)$ 下不变的子空间 $\mathcal{M}$。将诱导系统限制在这样的不变子空间上，对应于齐次次正规算子。我们与 A. Kor´anyi 合作，正在尝试描述最简单情形之一中的这些不变子空间，即

其中 $X = \mathbb{D}$ 是开单位圆盘， G 是圆盘 $\mathbb{D}$ 的双全纯自同构所构成的 M¨obius 群。这些不变子空间通常由定义在 X 上的全纯函数组成，因此我们选择将诱导系统（按 Mackey 的含义）限制在不变子空间上的情形称为“全纯印射性”。

例如，考虑开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上可测（复值）函数构成的希尔伯特空间 $L^{(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$\|f\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\lambda-2} |f(z)|^2 dA_z < \infty.$$

（dA_z 表示 $dxdy$, $z = x + iy$。）令 G 为 $SU(1,1)$ 的单连通覆盖群； $g(z)$ 和 $g'(z) = \partial_{(g(z))}\partial z$ 对 $g \in G$ 仍有意义。群 G 通过由乘子 $g'(z)^{-\lambda/2}$ 定义的酉表示 U_g 作用于 $L^{(\lambda)}$。明确地说（写出 $U_{g^{-1}}$ 比写出 U_g 更简单），

$$U_{g^{-1}} f(z) = g'(z)^{\lambda/2} f(g(z)).$$

酉性由恒等式 $(1-|z|^2)|g'(z)| = 1 - |g(z)|^2$ 得出。

按照 Mackey 的意义，由 K 中 0 的稳定子 G 的特征 $-\frac{\lambda}{2}$ 诱导出的表示为 U_g。注意到任何 $g \in K$ 都通过旋转 $g(z) = e^{i\theta} z$ 作用，进而有 $g'(z)^{-\lambda/2} = e^{-i\frac{\lambda}{2}\theta}$，即可得出这一结论。 $L^{(\lambda)}$ 中由全纯函数构成的子空间 $H^{(\lambda)}$ 在 $\{U_g$ 下不变： $g \in G\}$。当且仅当 $\lambda > 1$ 时，该子空间 $H^{(\lambda)}$ 非零；在此情形下， $\{U_g : g \in G\}$ 在 $H^{(\lambda)}$ 上的限制即为全纯离散级数。子空间 $H^{(\lambda)}$ 也是由 $Mf(z) = zf(z)$ 定义的算子 M 的不变子空间。

问题 em 1.3. $H^{(\lambda)}$ 是否是同时在 $\{U_g : g \in G\}$ 和 M 下不变的唯一子空间 ？

在有界对称域 Ω 上对全纯不可约性的分类，等价于对 Ω 的 Cowen-Douglas 类中的齐性算子交换元组进行分类。这些元组与有界对称域 Ω 上的齐性全纯向量丛一一对应。齐性向量丛可以通过全纯诱导，从某个抛物李代数在有限维内积空间上的表示得到。这些表示及其诱导的向量丛都有带不可约因子的合成列。在与 A. Kor´anyi [258, 257], 的合作研究中，我们的首个主要结果是构造了一个显式微分算子，将该向量丛与其各因子的直和交织起来。接下来，我们研究这些向量丛的截面希尔伯特空间。特别是，我们利用这一研究，对欧几里得单位球中 $\mathbb{C}^m$ 上的 Cowen-Douglas 类的齐性 n 元组算子给出了完整描述和相似定理。另一种方法见 [303]。关于这些问题的初步研究局限于齐性全纯线丛的情形，见 [107]。

所有这些例子都涉及群 G 在齐性 G空间上的传递作用，即 $\Omega = G/H$，其中 $H \subseteq G$为某个闭子群。研究群作用下的齐性，而该群不一定以传递方式作用，会更加复杂。 [205]确定了一小类在酉群作用下具有齐性的算子。

问题 1.4。设 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 中的欧几里得球， $\boldsymbol{T}$ 是 Cowen-Douglas 类 $\mathrm{B}_k(\mathbb{B})$ 中的可交换 d 元算子组。酉群 $\mathcal{U}(d)$ 作用于任意 d-

元可交换算子组，如下所示

$$u\cdot \boldsymbol{T}:=\left((u_{11}T_1+\cdots+u_{1d}T_d),\ldots,(u_{d1}T_1+\cdots+u_{dd}T_d)\right),u\in\mathcal{U}(K).$$

若对所有 $u\in\mathcal{U}$（d），$u\cdot\boldsymbol{T}$都与 $\boldsymbol{T}$ 酉等价，则称 $\boldsymbol{T}$ 为 $\mathcal{U}$（d）-齐性。求出 B_k（$\mathbb{B}$）中所有 $\mathcal{U}$（d）-齐性算子。

代数几何与算子理论。非常成功的 Sz.-Nagy – Foias 压缩算子模型理论包含两个部分。首先，确定一个圆盘代数上的希尔伯特模，作为一个普适对象，然后将每个压缩希尔伯特模表示为该普适对象的一个商。其次，对于任意压缩模（$\mathcal{H}$，T），Sz.-Nagy 和 Foias 定义了一个特征算子 Θ_T，并证明它是（$\mathcal{H}$，T）的完全酉不变量。Nagy – Foias 理论建立在两个基本结果之上：其一是等距算子的冯·诺依曼–Wold 分解，其二是移位算子不变子空间的 Beurling 刻画。以下是一个特例：类 $C_{\cdot 0}$ 中的任意压缩希尔伯特模（$\mathcal{H}$，T）都是 Hardy 模 $H^2_{\mathcal{E}}$（$\mathbb{D}$）对某个子模 $\mathcal{S}$ 取商所得；根据 Beurling 定理，该子模必为某个内函数 Θ 所确定的 $\Theta H^2_{\mathcal{E}}$（$\mathbb{D}$）形式。此外，Θ 是模（$\mathcal{H}$，T）的完全不变量。

Beurling 定理的一种证明可以基于这样的观察：Hardy模的所有子模都是同构的。有趣的是，与这些子模相对应的商模为“几乎”所有压缩模提供了模型。在 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的子模中，很容易构造出不具有 Beurling 刻画所预言形式的例子。例如，取由在 $(0,0)$ 处消失的函数组成的子模 $\mathcal{S}_0$。不仅如此，子模 $\mathcal{S}_0$ 与 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 也不同构，这与单变量情形相反。另一方面，子模无法识别商模的类别。为说明这一点，考虑分别由在集合 $\{z_1=0\}$ 和 $\{z_2=0\}$ 上消失的函数组成的子模 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$。在这种情况下，商模都与 Hardy模 $H^2(\mathbb{D})$ 同构。

这里的一个主要困难是，子模的特征子空间的维数通常并不恒定（除非它是某个主理想的完备化）。因此，这些子空间并不能定义一个全纯向量丛。事实上，对于子模 $\mathcal{S}_0$ of $H^2(\mathbb{D}^2)$，当 w_1,w_2 时，我们有 $\dim\cap_{i=1,2}\ker\ M_i^*=2$，而 $\dim\cap_{i=1,2}\ker(M_i-w_i)^*=1$ 为 $(0,0)$。因此，映射 $(w_1,w_2)\to\cap_{i=1,2}\ker(M_i-w_i)^*$ 并不能在 $\mathbb{D}^2$ 上定义一个全纯向量丛；然而，它在 $\mathbb{D}^2$ 上定义了一个凝聚层，并继承了 $H^2(\mathbb{D}^2)$上的厄米结构。

一般而言，确定希尔伯特模的子模的同构类所构成的模空间是一个困难的问题。得益于 Beurling 定理，Hardy模 $H^2(\mathbb{D})$ 的子模的模空间是单点集；也就是说，所有子模都是同构的。然而，在 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 中会出现刚性现象，即 $H^2(\mathbb{D}^n)$ 的任意两个子模都不同构，极少数例外情形除外。这种刚性现象在多变量情形中很典型。

设 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^m$ 为有界连通开集，$\mathcal{H}\subseteq\mathcal{O}(\Omega)$ 为解析希尔伯特模，即希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 具有再生核 K，多项式环 $\mathbb{C}[z]\subseteq\mathcal{H}$ 稠密，且由 $p\in\mathbb{C}[z]$ 诱导的逐点乘法在 $\mathcal{H}$上有界。我们固定一个理想 $\mathcal{I}\subseteq\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$，并用 $[\mathcal{I}]$ 表示它在 $\mathcal{H}$中的完备化。令 $X:[\mathcal{I}]\to\mathcal{H}$

为包含映射。因此我们有如下希尔伯特模的短正合列

$$0 \to [\mathcal{I}] \xrightarrow{X} \mathcal{H} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \to 0,$$

其中，商 $\mathcal{Q}$中的模乘法由公式 $m_p f = P_{[\mathcal{I}]^\perp}(pf)$ $p \in \mathbb{C}[z]$， $f \in \mathcal{Q}$给出。解析希尔伯特模 $\mathcal{H}$ 定义了层 $\mathcal{O}(\Omega)$的一个子层 $\mathcal{S}^{\mathcal{H}}$ ，其中层 $\mathcal{O}(\Omega)$由Ω上定义的全纯函数构成。对于任意开集 $U \subset \Omega$，通过设定可得到

$$\mathcal{S}^{\mathcal{H}}(U) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (f_i|_U) h_i : f_i \in \mathcal{H}, h_i \in \mathcal{O}(U), n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

这是局部自由的，并且自然地产生Ω上的一个全纯线丛。然而，一般而言，与子模 $[\mathcal{I}]$ 对应的层并非局部自由，而仅仅是凝聚的。

将模 $[\mathcal{I}]$ 和 $\mathcal{H}$ 在 $w \in \Omega$处局部化，我们得到模映射 X的局部化 $X(w)$。这些局部化不过就是商模 $[\mathcal{I}]/[\mathcal{I}]_w$ 和$\mathcal{H}/\mathcal{H}_w$，其中 $[\mathcal{I}]_w$ 和 $\mathcal{H}_w$ 是由在 w处消失的函数构成的极大子模。这些局部化分别在$\Omega \setminus V(\mathcal{I})$上定义了反全纯线丛 $E_{[\mathcal{I}]}$ 和 $E_{\mathcal{H}}$。然而，还存在第三个线丛，即 $\mathrm{Hom}(E_{\mathcal{H}}, E_{[\mathcal{I}]})$，它由反全纯映射 $X(w)^*$定义。全纯线丛 $\mathcal{L}$ 在Ω上的曲率，相对于全纯标架 γ 计算，由公式给出

$$\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(z) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \log \|\gamma(z)\|^2 dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

它是线丛 $\mathcal{L}$的完全不变量。现在，考虑交错和

$$\mathcal{A}_{[\mathcal{I}],\mathcal{H}}(w) := \mathcal{K}_X(w) - \mathcal{K}_{[\mathcal{I}]}(w) + \mathcal{K}_{\mathcal{H}}(w) = 0, \ w \in \Omega \setminus V_{[\mathcal{I}]},$$

其中， $\mathcal{K}_X$、 $\mathcal{K}_{[\mathcal{I}]}$和 $\mathcal{K}_{\mathcal{H}}$分别表示$\Omega \setminus V_{[\mathcal{I}]}$上线丛 E_X、 $E_{[\mathcal{I}]}$和$E_{\mathcal{H}}$的曲率 (1，1) 形式。因此，它是这对对象 $([\mathcal{I}], \mathcal{H})$ 的不变量。

问题 1.5。解析希尔伯特模 $(\mathcal{H}, \boldsymbol{T})$ 的特征空间分布定义了Ω上的一个具有厄米结构的凝聚层 $\mathcal{S}^{\mathcal{H}}$ 。请基于层模型，寻找解析希尔伯特模 $(\mathcal{H}, \boldsymbol{T})$ 的易于处理的酉不变量。

沿着这些思路的研究始于 [185, 118, 117, 188], ，不过，关于这一主题的最新研究可参见 [119, 427,428, 429] 。

旗结构。取一个有界平面域Ω。设 E 是$\Omega \times \mathcal{H}$中的一个秩为 n 的全纯厄米向量丛。根据Grauert的一个著名定理，平面域上的每个全纯向量丛都是平凡的。因此，存在一个全纯标架γ_1，……， $\gamma_n : \Omega \to \mathcal{H}$。相对于这个标架， E 上的厄米度量由公式 $G_\gamma(w) = (\langle \gamma_i(w) \ \gamma_j(w) \rangle)$ 给出。向量丛 E 的曲率是一个复 (1，1) 形式，其公式为

$$\mathcal{K}_E(w) = \sum_{i,j=1}^{m} \mathcal{K}_{i,j}(w) \, dw_i \wedge d\bar{w}_j,$$

其中

$$\mathcal{K}_{i,j}(w) = -\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} \big(G_\gamma^{-1}(w) (\frac{\partial}{\partial w_i} G_\gamma(w)) \big).$$

它显然取决于标架 γ 的选择，除非 $n=1$。[159] 给出了一组完备的不变量。然而，这些不变量并不容易计算。因此，为一类较小的向量丛找到一组易于处理且完备的不变量，将很有价值。例如，在论文 [238], 中，确定了一类具有旗结构的不可约全纯厄米向量丛。对于这些向量丛，曲率与第二基本形式（相对于旗结构）构成一组完备不变量。作为应用，至少对于 $n=2$，研究表明齐性全纯厄米向量丛属于这一类，随后给出了对它们的完整描述。这与 $n=1$ 的情形非常相似，不同之处在于，现在除了曲率之外，还必须考虑与旗结构相关的第二基本形式。这一类中的所有向量丛及其对应的算子都是不可约的。根据定义，它们所具有的旗结构是刚性的，这有助于构造典范模型并找到一组完备的酉不变量。目前正在研究具有旗结构的 Cowen-Douglas 类交换算子组。

下面的 $\mathcal{F}B_2(\Omega)$ 中算子这一较小类的定义源自 [238]。类似地，可以定义 $\mathcal{F}B_n(\Omega)$、$n>1$，并讨论这一新类的性质，参见[238]。

定义。记 $\mathcal{F}B_2(\Omega)$ 为有界线性算子 T 的集合，其中可以找到算子 T_0, T_1 属于 $\mathcal{B}_1(\Omega)$，以及一个在 T_0 与 T_1 之间的非零交织算子 S，即 $T_0S=ST_1$，使得 $T=\begin{pmatrix} T_0 & S \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$.

$B_2(\Omega)$ 中的算子 T 可表示为如下形式的分解：$\begin{pmatrix} T_0 & S \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$，其中算子对 T_0 和 T_1 属于 $B_1(\Omega)$（参见 [243, 定理 1.49]）。反之，可以证明，若算子 T, 对某些选取的 T_0, T_1 属于 $B_1(\Omega)$ 而具有这种形式的分解，则该算子属于 $B_2(\Omega)$。在定义新类 $\mathcal{F}B_2(\Omega)$ 时，我们只施加了一个附加条件，即 $T_0S=ST_1$。

算子 T属于类 $\mathcal{F}B_2(\Omega)$，当且仅当向量丛 E_T存在一个标架 $\{\gamma_0,\gamma_1\}$，使得对于所有 $w\in\Omega$, $\gamma_0(w)$ 与 $t_1(w):=\frac{\partial}{\partial w}\gamma_0(w)-\gamma_1(w)$正交。这也等价于向量丛 E_T存在一个标架 γ_0, γ_1，满足对于所有 $w\in\in\Omega$, $\frac{\partial}{\partial w}|\gamma_0(w)|^2=\langle\gamma_1(w)\ \gamma_0(w)\rangle$。

定理 [238, 定理 2.10]。设 $T=\begin{pmatrix} T_0 & S \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$, $\tilde{T}=\begin{pmatrix} \tilde{T}_0 & \tilde{S} \\ 0 & \tilde{T}_1 \end{pmatrix}$ 是$\mathcal{F}B_2(\Omega)$中的两个算子。另设 t_1 和 $\tilde{t}_1$ 分别是全纯厄米向量丛 E_{T_1} 和 $E_{\tilde{T}_1}$ 的非零截面。算子 T 和 T 等价，当且仅当$\mathcal{K}_{T_0}=\mathcal{K}_{\tilde{T}_0}$ (或 $\mathcal{K}_{T_1}=\mathcal{K}_{\tilde{T}_1}$)，并且

$$\frac{\|S(t_1)\|^2}{\|t_1\|^2}=\frac{\|\tilde{S}(\tilde{t}_1)\|^2}{\|\tilde{t}_1\|^2}.$$

Cowen 和 Douglas 在 [159] 中指出，$B_1(\Omega)$ 中的算子必定是不可约的。然而，要确定 $B_n(\Omega)$ 中哪些算子是不可约的，是一项艰巨的任务。$\mathcal{F}B_2(\Omega)$ 中的算子总是不可约的。事实上，如果我们假设 S 可逆，那么 T就是强不可约的。

回顾一下，Cowen-Douglas 类 $B_n(\Omega)$ 中的算子 T，在酉等价意义下，是由乘法算子 M 的伴随算子构成的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的算子，该空间由

Ω 上的全纯函数组成* := $\{\bar{w}: w \in \Omega\}$，并具有再生核 K。那么 $\mathcal{F}B_n(\Omega)$ 中的算子又如何呢? 对于 $n = 2$, 下面将介绍这类算子的一个模型。

对于算子 $T \in \mathcal{F}B_2(\Omega)$，存在一个全纯标架 $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$，满足性质 $\gamma_1(w) := \frac{\partial}{\partial w}\gamma_0(w) - t_1(w)$，且对于某个全纯映射 $t_1 : \Omega \to \mathcal{H}$, $t_1(w)$ 与 $\gamma_0(w)$, $w \in \Omega$ 正交。下文中，我们固定一个具有此性质的全纯标架。于是，算子 T 酉等价于希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\Gamma \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega^*, \mathbb{C}^2)$ 上乘法算子 M 的伴随算子，该空间具有再生核 $K_\Gamma : \Omega^* \times \Omega^* \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$。详情见 [238]。核 K_Γ 的显式表达式很容易写出：对于 $z, w \in \Omega^*$，有

$$\begin{aligned} K_\Gamma(z,w) &= \begin{pmatrix} \langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle & \langle \gamma_1(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle \\ \langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_1(\bar{z})\rangle & \langle \gamma_1(\bar{w}), \gamma_1(\bar{z})\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle & \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle \\ \frac{\partial}{\partial z}\langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}}\langle \gamma_0(\bar{w}), \gamma_0(\bar{z})\rangle + \langle t_1(\bar{w}), t_1(\bar{z})\rangle \end{pmatrix}, w \in \Omega. \end{aligned}$$

令 $K_0(z,w) = \langle \gamma_0(\bar{w})\ \gamma_0(\bar{z})\rangle$ 和 $K_1(z,w) = \langle t_1(\bar{w})\ t_1(\bar{z})\rangle$，可见再生核 K_Γ 具有如下形式:

$$K_\Gamma(z,w) = \begin{pmatrix} K_0(z,w) & \frac{\partial}{\partial \bar{w}}K_0(z,w) \\ \frac{\partial}{\partial z}K_0(z,w) & \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}}K_0(z,w) + K_1(z,w) \end{pmatrix}.$$

问题1.6。给出 $\mathcal{F}B_n(\Omega)$ 类中算子的内在定义。对于有界域 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$，找出 $\mathrm{B}_n(\Omega)$ 中一类更小的交换 d-算子元组，使其具有一组易于处理的酉不变量，类似于 $n = 1$ 的情形。

最后说明。本文未讨论若干重要而有趣的主题，例如:

(1) 曲率不等式（参见 [116, 204, 378, 299, 445, 426, 274]），(2) Cowen-Douglas 类中的相似问题（参见 [239, 240, 242, 231, 274]），以及 (3) 具有旗结构的 Cowen-Douglas 算子的细化（参见 [448, 450,241]）。

所列参考文献旨在具有代表性，而非面面俱到。尽管如此，我希望这篇简短的介绍能为这些领域未来的研究有所助益。

2. Fourier theory、 angle、 Pimsner-Popa bases and regularity for inclusions of C^*-algebras

作者: *Keshab Chandra Bakshi [keshab@iitk.ac.in]*, 来自坎普尔印度理工学院; 以及 *Ved Prakash Gupta[vedgupta@jnu.ac.in, vedgupta@mail.jnu.ac.in]*, 来自新德里的贾瓦哈拉尔·尼赫鲁大学。

正如在各种范畴中所显而易见的，在数学中，研究给定对象的子对象（从定性和定量的角度出发）是广受认可的一种思路，也是深入理解该环境对象的结构和性质最有效的方法之一。事实上，这种方法在群、冯·诺伊曼代数和 C^*-代数这些范畴中，促成了一些卓越的分类结果。

在过去大约五十年间，不同作者发展出了各种工具和技术，用于研究算子代数的子代数之间的相对位置。

本报告主要介绍我们近期开展的研究，内容包括：（i）为包含 C^*-代数的包含关系发展傅里叶理论；（ii）针对算子代数的有限指数包含中相容的中间算子子代数，提出一种新的夹角工具；（iii）研究 Jones 和 Popa 关于 Pimsner-Popa 基（研究算子代数包含关系时广泛使用的一种工具）提出的一些问题；以及（iv）更好地理解所谓的算子代数正则包含，这在很大程度上依赖于我们在（iii）项下取得的进展。

- **算子代数包含的夹角与傅里叶理论**

最近，我们提出了某些算子代数有限指数包含中相容的中间子代数之间内部角和外角的概念（见 [41, 46]）。以下简要介绍这一进展。

Vaughan Jones（[245]）为任意含幺包含 $N \subset M$ 中的因子引入了指标和基本构造的概念。随后，Bisch（[111]）证明，有限指数包含 $N \subset M$ 的中间子因子与基本构造 M_1中 N 的相对交换子里的所谓双投影之间存在一一对应。利用这一对应关系，文献 [41]引入了有限指数包含 $N \subset M$ 中任意两个中间子因子之间内部角和外角的概念。作为应用，对于不可约的有限指数包含 $N \subset M$（即 $N' \cap M = \mathbb{C}$），借助子因子的相对交换子上（众所周知的）傅里叶理论的某些方面，Longo（[279]）提出的一个问题得到肯定回答，同时改进了他对 $N \subset M$的中间子因子格基数所给出的界。之后，文献 [44] 对群-子群子因子的中间子因子之间的夹角进行了若干明确计算。

受 [41], Watatani 关于指标和基本构造的理论（见[443]）启发，近期在 [46] 中引入了有限指标包含 $B \subset A$ 中所谓相容中间 C^*子代数之间的内部角和外部角的概念（参见 [233]），并在 [222]中进行了一些计算。（遵循 Watatani 的做法，这一研究方向的基础理论采用了 HilbertC^*-模的概念。）有趣的是，当 $B \subset A$都是简单的时，存在唯一一个条件期望 E_0： $A \to B$，其 Watatani 指数最小。于是，类似于 Jones 的基本构造塔，可得到一个由简单幺 C^*代数组成的递增塔$\{A_k : \ k \geq 1\}$。受子因子理论启发，我们针对相对交换子 $\{B' \cap A_k, A' \cap A_k : \ k \geq 0\}$ 建立了傅里叶理论，以移位算子和旋转算子为工具，并在 [43, 42]中进一步加以完善。作为应用，在 [46] 本身，我们给出了有限指标不可约包含中简单幺 C^*代数的中间 C^*子代数格基数的一个上界（其有限性已由 Ino 和 Watatani 证明（[233]）；此外，我们还改进了 Longo 关于有限指标不可约包含中 II 型因子之中间子因子格的上界。

- **子因子及简单含单位 C^*-代数包含的 Pimsner-Popa 基与正则性**

在过去大约四十年间，所谓的 Pimsner-Popa 基（[341]）在 II_1-因子的有限指数包含中发挥了不可或缺的作用，推动了子因子理论的发展（例如傅里叶理论、Popa 的 λ- 格以及 Jones 平面代数）。Jones 尤其赞赏它们的实用性，并进而

不止一次询问：每个所谓的 II_1-因子的极值包含是否总是存在双侧 Pimsner-Popa 基。迄今，这个问题仍未解决。不过，在 [45], 中，我们通过证明 II_1-因子的有限指数正则包含总是存在双侧 Pimsner-Popa 基且具有整数指数，对 Jones 的问题给出了部分答案。（如果含单位 C^* 或 W^*-代数的包含 $P \subset Q$ 具有如下性质，则称其为正则包含：P 在 Q 中的酉正规化子生成 Q，且这一生成是在 C^* 或 W^* 意义下进行的。）这是通过恰当地应用 Sunder 和 Ocneanu 各自独立发展的路径代数概念实现的。

最近，Popa（[346]）提出疑问：每个整数指数不可约的 II_1-因子包含是否都存在一组正交归一（Pimnser-Popa）基? 在 [47], 中，我们对 Popa 的问题给出了肯定答案，适用于相对交换子为简单或交换的有限指数正则子因子。随后，我们根据这些结果推导出（见 [314]），这类子因子同构于交叉积子因子；该交叉积子因子是相对于所谓双连通弱 Kac 代数在一个 II_1-因子上的极小作用构造的。

基于 [47] 取得的进展以及量子信息论领域的一些技术，Crann 等人（[160]）最近证明，每个有限指数正则子因子都存在一组正交归一（Pimsner-Popa）基，从而回答了我们在 [47]提出的一个猜想。因此， [47]中的证明意味着每个有限指数正则子因子的深度至多为 2。在有限维情形下，对于有限维 C^*-代数的适当包含，Popa 的问题在 [40] 中再次得到进一步研究，研究者再次运用了一些量子信息论技术。

在过去约 30 年里，算子代数学家一直积极探索子因子理论与简单 C^*-代数包含理论之间的相似之处。根据多位作者的研究成果，众所周知，每个不可约有限指数子因子都同构于相对于有限群外作用的交叉积子因子。受这一刻画启发，令人欣慰的是，我们最近已能证明（见 [48]），每个简单含单位元 C^*-代数的有限指数正则包含，都同构于相对于有限群“外”作用的约化余圈交叉积包含。此外，我们还证明了，任何这类简单含单位元 C^*-代数的包含都具有整数（Watatani）指标，深度至多为 2，且这种包含的极小条件期望具有双侧 Pimsner-Popa 基。

3. Contributions in Banach space theory

作者：*Pradipta Bandyopadhyay [pradipta@isical.ac.in]*，来自印度统计研究所加尔各答分校。

关于 L_1-预对偶空间：若存在某个测度 μ，使得 $X^* = L_1(\mu)$，则称巴拿赫空间 X 为 L_1-预对偶空间或 Lindenstrauss空间。

在 [189], 中，受近似有限维（AF）C^*-代数的 Bratteli图 启发，作者考察了可分 L_1-预对偶空间的图示表示，并证明，类比 AF C^*-代数理论中的一个结果，在这类空间中，每个有向子图都表示一个 M-理想。反过来，也就是对于可分 L_1-预对偶空间 X 中的给定 M-理想，是否存在一种 X 的图示表示，使该 M-理想由一个有向子图给出，这个问题一般仍未解决。我们将其称为“主要问题”。在 [189], 中，作者在一些特殊情形下对这个问题给出了肯定答案。

继续这项研究，我们在 [61] 中证明，对于紧致度量空间 K，在$C(K)$-空间中，我们的“主要问题”有肯定答案。空间 $C_0(T)$、$\mathbf{c}$ 和$\mathbf{c}_0$也有类似结果。

在 [56], 中，我们根据其表示矩阵，给出了可分L_1-前对偶空间中多面性（I）、（II）和（III）的刻画。我们还证明，在 L_1的一个多面（IV）前对偶空间中，我们的“主要问题”得到了肯定的回答。

在 [55], 中，我们研究了不可分古拉里空间及其几乎等距理想。主要结果是，一个（不可分的）巴拿赫空间是古拉里空间，当且仅当 X 中的每个可分几乎等距理想 （几乎等距理想）都与可分古拉里空间 $\mathbb{G}$等距。我们还根据理想，得到了 L_1-前对偶空间的类似刻画。在此过程中，我们证明了巴拿赫空间中的理想/几乎等距理想族在递增极限下是闭的。因此，巴拿赫空间中所有可分理想/几乎等距理想构成的族是一个骨架。

接下来，在 [62], 中，我们证明，如果巴拿赫空间 X 几乎等距于一个古拉里空间，那么它本身也是古拉里空间。在可分情形下，这肯定地回答了 Rao [372, Remark 6] 提出的问题。我们还证明了这一结果在非交换古拉里空间中的类似结论。此外，我们还证明，巴拿赫空间 X 是古拉里空间，当且仅当它是每个包含它且它作为超平面嵌入其中的超空间中的几乎等距理想，从而肯定地回答了 Rao [371, Question 17] 提出的另一个问题。关于 Mazur 交性质及其变体：Mazur 交性质（MIP）——每个有界闭凸集都是包含它的闭球的交——是巴拿赫空间理论中研究极为深入的一种性质。

Giles、Gregory 和 Sims [212], 给出了 MIP 的一个完备刻画；其中最著名的判据指出，$B(X^*)$ 的弱星凹陷点在 $S(X^*)$ 中关于范数稠密。本文还考察了对偶空间中的弱星 MIP。

Whitfield 和 Zizler [445]提出了一个研究较少的 MIP 一致版本（UMIP）。人们也得到了与 [212]类似的刻画，但缺少类似于弱星齿状点判据的结果，这或许是它较少受到研究的原因。关于 UMIP，一个长期未解的问题是：UMIP 是否意味着X^* 可以通过一致凸的重新赋范来赋范。

Chen 和 Lin [151] 引入了弱星半凹陷点的概念，并证明巴拿赫空间 X 具有 MIP，当且仅当每个 $f \in S(X^*)$ 都是$B(X^*)$的弱星半凹陷点。

在 [57], 中，我们证明巴拿赫空间 X 具有 UMIP，当且仅当每个 $f \in S(X^*)$ 都是 $B(X^*)$的一致弱星半齿状点，从而填补了长期以来的空白。在此过程中，我们还为 [445]中的一些刻画给出了更简洁的证明。

在 [214], 中，我们引入了两个弱星半凹陷点模，并用这些模刻画 MIP 和 UMIP。其中一个模的提出受到 Dutta 和 Lin [190]讨论的齿状点模的启发。我们引入一种称为超平面一致中点性质（H-UMIP）的性质，它略强于 UMIP，并证明它刻画了 X^*的一致凸性。事实证明，这也等价于 [190]的统一齿状点概念。本文还根据这些模分析了在 ℓ_p-和、 $1 < p < \infty$下 UMIP 稳定的条件。特别地，我们证明 $\ell_p(X)$具有 UMIP，当且仅当 X 具有 UMIP。

给定巴拿赫空间 X 中的闭有界凸集族 $\mathcal{C}$，若每个 $C \in \mathcal{C}$ 都是包含它的闭球的交集，我们就称 X 具有 $\mathcal{C}$-MIP。这

在文献中，人们也针对特定的集合族以及更一般的情形研究了这一性质。在 [58]，中，我们不再只考虑集合族 $\mathcal{C}$，而是讨论将形如 $A + \lambda B(X)$ 的集合表示为闭球交集的问题，其中 $A \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \geq 0$。很容易看出，这比 $\mathcal{C}$-MIP 更强。我们称之为强 $\mathcal{C}$-MIP，并表明它是 MIP 一种更令人满意的推广，因为可以得到 [212]中 MIP 各种刻画的完整类比。我们还定义并刻画了（一致）强 $\mathcal{C}$-MIP 的一致版本。即使在这种情形下，强 $\mathcal{C}$-UMIP 似乎也比 $\mathcal{C}$-UMIP具有更丰富的刻画。

如果巴拿赫空间 P 存在一个具有性质 P的范数，那么在 X 上“几乎所有”（相对于某个适当度量而言具有剩余性）的等价范数也具有性质 P，则称性质 P 具有剩余性。在 [59], 中，我们证明了 UMIP、一致光滑范数和渐近一致光滑范数的剩余性。其中一些已知是球分离性质。对于其他性质，我们首先得到球分离刻画，再据此证明它们具有剩余性。

众所周知，Fr´echet 光滑性蕴含 MIP。由于 Fr´echet 光滑性具有遗传性，因此它实际上蕴含遗传 MIP，也就是说， X 的所有子空间都具有 MIP。反过来又如何呢？遗传 MIP 是否蕴含 Fr´echet 光滑性？不难看出，遗传 MIP 蕴含光滑性。在 [60], 中，我们根据 S（X）的非 Fr´echet 光滑点集合 N，得到了遗传 MIP 的一些充分条件。特别地，我们证明，如果 X 光滑且 N 有限，那么 X 具有遗传 MIP。

Borwein 和 Fabian 在 [126] 证明了一个无限维 WCG 阿斯普伦德空间 X存在等价光滑范数，使得 $N = \{\pm x_0\}$ 对某个 $x_0 \in S(X)$成立。因此，Borwein-Fabian 范数具有遗传 MIP，但并非 Fr´echet 光滑。

4. Quantum dynamical maps and quantum Gaussian states

作者：*B V Rajarama Bhat [bhat@isibang.ac.in, bvrajaramabhat@gmail.com]*，来自班加罗尔的印度统计研究所。

本文简要介绍了近年来印度数学家在我所熟悉的一些数学领域所取得的进展。本文必须在相当短的时间内完成。不幸的是，这意味着文中引用的大多数论文都出自我的合作者和我本人。

量子高斯态：玻色子福克空间上的量子高斯态，是经典概率中高斯分布的量子版本。K. R. Parthasarathy 在论文《什么是高斯态？》 [323]中对这一概念作了精妙的阐释。晚年，他积极投入这一主题的研究，发现了有限模量子高斯态在凸性和对称性方面的多种性质。他提出了将该理论拓展到无限模情形的问题。这项工作在 [89]中得以完成。可以看到，每个量子高斯态都对应一个“协方差矩阵”，如今它是一个对称且可逆的实线性算子。无限模量子高斯态的协方差算子已得到完整刻画，其中涉及一些有限模情形下不会出现的微妙迹条件。玻色子福克空间上的酉算子若在共轭作用下保持态的高斯性，就称为高斯对称。研究表明，辛谱是高斯对称共轭作用下高斯态的完全不变量。

在 [93]中可以看到，双部量子高斯态的可分性与完全可扩张性等价。K R Parthasarathy 提出的一些问题最近已在 [180]中得到解答。在 [244] 中，我们可以找到一种新颖的量子高斯态参数化方法。它在涉及这些态的一些计算中非常有用 [322]，其全部潜力或许尚未得到充分发挥。

如上所述，在研究量子高斯态时，辛谱发挥着重要作用。这促使人们开始研究辛特征值的逼近性质和扰动性质（[95], [254]）。

C^*-凸性与完全正映射：人们提出了多种方法，试图将凸性的概念推广到量子情境中。其中一种思路是，用 C^*-代数中的正、收缩且可逆元素，替代区间 $[0,1]$ 中作为凸组合系数的正标量。文献 [63]研究了可测空间上归一化正算子值测度（POVM）的 C^*-凸结构。一个令人惊讶的结果是，可数空间上的归一化 POVM 的 C^*-极点（特别是有限集上的情形）总是谱测度（归一化投影值测度）。而在通常的凸性下，这一结论并不成立！此外，人们还证明了一个针对 POVM 的 Krein–Milman 型定理。

从含幺 C^*代数到希尔伯特空间上所有有界算子构成的代数的含幺完全正映射（UCP 映射）全体，称为广义状态空间，其凸性结构颇受关注。它还是一个C^*-凸集。文章 [91] 将该集合的 C^*-极端性与某些代数的分解性质联系起来。这里也可以证明一个类似 Krein–Milman 定理的结果。这项工作揭示了 C^*-凸性理论与算子代数理论中的一些经典概念之间的重要联系，例如巢代数（上三角矩阵的无限维类比）和对数模代数。若 $*$代数 $\mathcal{M}$的子代数 $\mathcal{A}$ 不一定是 C^*闭的，则称其为对数模的（或具有分解性质），如果集合 $\{a^*a:\ a\in\mathcal{M}$ 可逆且 $a,\ a^{-1}\in\mathcal{A}\}$ 在 $\mathcal{M}$. 的所有正可逆元素构成的集合中稠密（或与之相等）。 [92] 中的一个主要结果是：在（可分）冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 中，若其投影格的值域在 $\mathcal{M}$中的某个对数模代数作用下保持不变，则该投影格是交换子空间格。此外，若 $\mathcal{M}$是因子，则该格是巢。作为特例，由此可知，I型因子中的所有自反对数模子代数都是巢代数，从而解决了一个悬而未决十余年的问题。作为另一特例，我们还得到了有限维冯·诺伊曼代数中对数模子代数的完整刻画。

近期，文献 [84] 研究了纠缠破坏映射（EB 映射）中的 C^*-凸性概念。这对量子信息论具有重要意义。

外围泊松边界：含幺完全正映射（UCP 映射）是经典概率中随机映射的量子类比。设 $\mathcal{A}$ 是一个冯·诺伊曼代数，且 $\tau:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个正规 UCP 映射。τ 的不动点空间是一个向量空间，但通常不是 $\mathcal{A}$ 的子代数。不过，可以通过一种称为 Choi-Effros 乘积的修正乘积，赋予它一种 $*$-代数结构。受经典概率启发，M. Izumi 将其称为该 UCP 映射的非交换泊松边界。对于全福克空间上的一些特定马尔可夫映射，非交换泊松边界已在 [83] 中得到计算，并由此产生了一些有趣的冯·诺伊曼代数。

在 [90] 中有人指出，Choi-Effros 乘积可以扩展到 τ 的外围特征向量空间的闭线性张成空间：

$$E_\lambda(\tau) = \{x \in \mathcal{A} : \tau(x) = \lambda x\}, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1.$$

由此我们得到一个 C^*-代数，称为 τ. 的外围泊松边界。令人惊讶的是，可能无法得到冯·诺依曼代数。该构造采用了早先在 [82] 及相关论文中发展的完全正映射膨胀理论。这一概念非常重要，因为量子动力半群的渐近行为由外围特征子空间决定。

函数的迭代根：考虑非空集合上的一个自映射 f 。若自映射 g 满足 $f = g^n$，则称其为 f 的一个迭代 n 次根，其中幂是相对于复合而言的。文献（[85]-[87]）提出了一种强大且适用范围广的新方法，可在非常一般的情形下证明此类根不存在。例如，若存在特殊点 x_0，使得 $f(x_0) \neq x_0$， $f^{-2}(\{x_0\})$ 是无限集，且对于 $x \neq x_0$， $f^{-1}(\{x\})$ 是有限集，则 f 不存在任何阶数为 $n \geq 2$ 的迭代根。对于多种拓扑空间（例如 $\mathbb{R}^m$ 中的单位立方体），可利用此方法证明：没有迭代 n 次根（固定 $n > 1$）的连续自映射在所有连续自映射构成的空间中稠密。迭代根的存在与否，即便在随机映射和量子动力半群理论中也颇受关注 [88]。

5. On Carathéodory approximation

作者：*TirthankarBhattacharyya [tirtha@iisc.ac.in]*，来自 *IISc*；以及 *PoornenduKumar [poor- nendukumar@gmail.com]*，来自加拿大的曼尼托巴大学。

在开单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上，全纯映射用多项式或有理函数逼近，通常并不能保证良好的边界行为。鉴于这一局限，Carath´eodory 于 1926年证明了以下重要定理：

定理（Carath´eodory, [129]。）任意全纯函数 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$都可以在 $\mathbb{D}$的紧子集上一致地由有限 *Blaschke* 乘积逼近。

该定理是全纯函数论和算子理论中的强大工具。例如，它可用于证明冯·诺伊曼不等式 [187], 、推导 Herglotz积分表示 [97], ，并确立 Halmos猜想——或者更一般地说，Berger–Stampfli定理；例如参见 [293,第 12] 节。

在寻求该定理的推广时，必须注意到，Carath´eodory 的原始证明在很大程度上依赖于 $\mathbb{D}$ 上全纯函数的幂级数展开，而这一方法无法自然地推广到矩阵值或算子值情形，也无法推广到多重连通等更复杂的域。不难看出，有限 Blaschke 乘积恰好就是有理内函数。这里，内函数 指的是 $\mathbb{D}$ 上的有界全纯映射，其边界值相对于单位圆$\mathbb{T}$上的弧长测度几乎处处具有模长 1。这一概念自然地扩展到矩阵值或算子值情形，此时模长为 1 的条件被替换为边界值在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处为等距算子的要求。

通过 Pick–Nevanlinna 插值定理可以证明 Carath´eodory 逼近定理。这种方法的优点是可以自然地推广到

矩阵值情形；参见 [12]引言中的讨论。不过，这依赖于皮克–涅万林纳插值问题存在内函数解，而在多连通域上尚无此类结果。值得庆幸的是，可以根据 Grunsky 的工作 [215], 推导出多连通域上的 Carath´eodory 逼近结果；此外，Fisher [198]也提出了另一种版本。然而，这些方法无法推广到矩阵值情形，因此需要新的技术。近期，利用 Herglotz积分表示以及某一特定类中的极点理论（参见 [97], ），这一逼近定理已推广到矩阵值情形。此外，考虑到开篇的讨论可知，Carath´eodory 逼近定理与 Herglotz积分表示本质上是等价的。

此外，对于一类良好的域，已有研究表明，一旦建立了矩阵值 Carath´eodory 逼近结果 [97, 定理 4.4], ，便可将其推广到算子值情形。因此，只需关注该逼近定理的矩阵值版本。由此，现已为多连通域得到了算子值 Carath´eodory 逼近定理。

转向多变量情形，Aleksandrov [7] 和 Rudin [382]分别独立地在开单位球上证明了标量值 Carath´eodory 逼近定理。此外，Rudin 将这一结果推广到了多圆盘 [384]。最近，该定理已被证明适用于管状域 [442] 以及与多圆盘 [106], 相关的商域，还适用于由伪反射群分类得到的域。

然而，现有技术无法直接将这些结果推广到多个变量的矩阵值情形。尽管如此，借助涅万林纳–皮克插值定理，可以证明双圆盘 $\mathbb{D}^2$上的一个矩阵值类比结果。在近期工作[12], 中，研究者运用算子理论，更具体地说是膨胀理论和实现公式，证明了这一结果。此外，研究还给出了矩阵值 Carath´eodory 逼近结果的若干应用。举例而言，矩阵值函数的 Carath´eodory 定理以及 Potapov 对 $\mathbb{D}$ [347] 上矩阵值有理内函数的优美刻画，促成了 Fisher 定理 [197]的推广——即，在 $\mathbb{D}$ 上全纯且在$\mathbb{D}$ 上连续的矩阵值函数，可以在 $\mathbb{D}$上由矩阵值有理内函数的凸组合一致逼近；此外，也得到了一个适用于取值于对称双圆盘或四叶域的函数的 Carath´eodory 定理版本。

为在本文中纳入一个证明，我们选择了借助圆盘上的膨胀理论证明 Carath´eodory 定理。相同的证明也适用于双圆盘。给定一个全纯函数 $f\colon \mathbb{D} \to M_d(\mathbb{C})$，满足 $\|f(z)\| \leq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立，可以先用有理函数对其进行逼近。如果 f 是有理函数，那么它具有一个有限维压缩实现，即 $f(z) = A + zB(I - zD)^{-1}C$，其中相应的耦合压缩矩阵 $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 作用于某个 m对应的 $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^m$ 上。当 T 是酉算子时，由此得到的函数f 是有理内函数。这一实现是卡尔曼–雅库博维奇–波波夫引理的圆盘版本；关于该引理的一个不定版本，见 [181]；而其在 $\mathbb{D}^2$ 中的对应结果最近已由 Knese [259, 命题 4.2]证明。

令 D_{T^*}和 D_T分别为缺陷算子（$I - TT^*$）$^{1/2}$和（$I - T^*T$）$^{1/2}$。对于每个 N，考虑空间 $\mathcal{K}_{N+1} =$（$\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^m$） $\oplus \cdots \oplus$（$\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^m$），其中（$\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^m$）出现（$N + 1$）次，而 N步酉膨胀对应的压缩算子 T（最初由

O. Nevanlinna [311] 提出，后来由 Levy 和 Shalit [277]大力推广）定义为

$$U_N := \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & \dots & D_{T^*} \\ D_T & 0 & \dots & \dots & -T^* \\ 0 & I_{\mathcal{H}} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{\mathcal{H}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_N \\ C_N & D_N \end{bmatrix}$$

作用于空间 $\mathcal{K}_{N+1}$，其中 B_N，C_N和 D_N可以适当地读出。考虑有理内函数 $f_N(z)$ $= A+zB_N(I-zD_N)^{-1}C_N$。直接计算可得，$f_N \to f$ 当且仅当 $A_N \to A$，并且对每个 $k.$ 都有 $B_N D_N^k C_N \to BD^kC$。证明完成，因为对所有 $N \geq k+2$，$B_N D_N^k C_N = BD^kC$。

Knese [260] 使用 $\mathbb{D}^2$ 上的标量值 Carath´eodory 定理，证明了 $\mathbb{D}^2$ 上 Nevanlinna–Pick 插值问题中必要性。最后，我们提出一个开放问题。

开放问题。 多圆盘上的矩阵值函数是否存在 *Carath´eodory* 逼近定理?

The first named author is supported by ANRF(JCB/2021/000041) and the second named author is supported by a PIMS post-doctoral fellowship.

6. Operator theory on quotient domains

作者：*Shibananda Biswas [shibananda@iiserkol.ac.in]* 和 *Subrata Shyam Roy [ssroy@iiserkol.ac.in]*，来自 *IISER Kolkata*。

对以多圆盘和欧几里得球为谱集的 n 元算子组的模型，已有深入研究。自然的下一步是在非齐次域上考察这类模型 [6, 推论 4.4]。Γ_n-压缩算子类是这项探索中的首个实例。Agler 和 Young [4, 5]发现，单个压缩算子理论中的许多基本结果（例如 Sz-Nagy-Foias 模型理论中的相当大一部分）在 Γ_2-压缩算子——以闭对称双圆盘 Γ_2 为谱集的可交换算子对——的理论中都有相近的对应结果。受这些进展启发，我们转而关注（开）对称多圆盘 $\mathbb{G}_n$ [120]上的函数模型，从构造 Γ_2-压缩算子的 Schaffer 膨胀 [101] 开始，并探索将其推广到 n-元组的可能性。通过将 [394] 中的相应结果推广到 $n = 2$ 情形，我们得到了纯 Γ_n-等距算子的联合不变子空间的 Beurling-Lax-Halmos 型定理。事实上，在 Γ_2上，许多问题都得到了令人满意的解答，例如特征簇 [318], 的描述，以及全纯函数的实现、插值和延拓 [102, 2, 100]。由于若干正面结果取决于膨胀理论，且关于 Γ_n-压缩算子的有理膨胀（例如 $n > 2$）的积极结果在受限子类 [317]之外仍难以获得，因此，将这一方向上的若干结果推广到 $n = 2$ 情形之外一直受到阻碍。文献 [209]研究了一种图论模型，它适用于一大类 n 元算子组，其中包括作为特例的 Γ_n-压缩算子。

另一方面，[297], 上 $\mathbb{G}_n$ 的函数论是通过引入希尔伯特空间方法来计算 $\mathbb{G}_n$ 的伯格曼核而得到研究的；该核此前在 [193]中借助贝尔公式 [75]获得。这项工作自然引出了对希尔伯特

$\mathbb{G}_n$ 上的函数空间以及对作用于其上的算子的研究。在 [120], 中，我们为加权 Bergman 空间 $\mathbb{A}^{(\lambda)}(\mathbb{D}^n)$、$\lambda > 1$以及 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^n)$构造了 Γ_n-压缩算子的函数模型，其中后者是极限情形 $\lambda = 1$。这些空间分解为不变环 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]^{\mathfrak{S}_n}$上的子模的正交直和，每个子模都对应于对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的一个不可约表示，因此由 n 的分拆 $\boldsymbol{p}$ 标记，记作 $\boldsymbol{p} \vdash n$。$(M_{s_1}, \dots, M_{s_n})$在这些子模上的限制是 Γ_n-压缩算子。在 [114], 中，这一框架被推广到具有 $\mathfrak{S}_n$-不变再生核 K的希尔伯特空间，从而得到核为 $\mathrm{imm}^{(\boldsymbol{p})}\big((K(z_i, w_j))_{i,j=1}^{n}\big)$，的约化子模，其中 $\mathrm{imm}^{(\boldsymbol{p})}$ 是与分拆 $\boldsymbol{p}$ 对应的不变量，而映射 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是由下式给出的正交投影

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}} f = \frac{\deg \boldsymbol{p}}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_{\boldsymbol{p}}(\sigma^{-1})(f \circ \sigma^{-1}), \ f \in \mathcal{H},$$

$\chi_{\boldsymbol{p}}$ 是与 $\boldsymbol{p} \vdash n$ 对应的表示的特征。还得到了进一步的分解，将其分解为约化子模 $\mathbb{P}^{ii}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$, $1 \leq i \leq \deg \boldsymbol{p}$。这自然引出了对这些约化子模的酉等价、相似与极小性的研究，以及它们在 $\mathbb{G}_n$ 上的实现。

关于酉等价。每个 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$ 都是秩为 $(\deg \boldsymbol{p})^2$ 的局部自由希尔伯特模。因此，若 $\deg \boldsymbol{p} \neq \deg \boldsymbol{q}$，则子模 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$ 和 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{q}}\mathcal{H}$ 不酉等价。当 $\deg \boldsymbol{p} = \deg \boldsymbol{q}$ 时，一般情况下该问题仍未解决。然而，若 $\deg \boldsymbol{p} = \deg \boldsymbol{q} = 1$，则对于 $\mathfrak{S}_n$ 的平凡表示和符号表示所对应的约化子模，$\mathcal{H} = \mathbb{A}^{(\lambda)}(\mathbb{D}^n)$ 并不等价于 $\lambda > 0$ [114]。这是因为将 $\mathbb{A}^{(\lambda)}(\mathbb{D}^n)$ 中对应于 $\mathfrak{S}_n$ 的符号表示的子模识别为加权伯格曼模 $\mathbb{A}^{(\lambda)}(\mathbb{G}_n)$，并利用 Giambelli 公式在 $\mathbb{G}_n$ 的坐标中推导出 $\mathbb{A}^{(\lambda)}(\mathbb{G}_n)$ 的再生核公式；这一结果本身也颇具意义。

关于相似。即使酉等价不成立，相似的可能性依然存在。若 $\boldsymbol{p} = (n)$ 和 $\boldsymbol{q} = (1^n)$，那么实现这种同构的一种候选算子是乘以范德蒙德 Δ的算子，其中 $\Delta(\boldsymbol{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(z_i - z_j)$，从$\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$ 到 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{q}}\mathcal{H}$。乘以范德蒙德是单射，因此要使其可逆，只需检查它是否为满射。我们将满射性问题重新表述为一个除法问题：对于 $f \in \mathbb{P}_{\boldsymbol{q}}\mathcal{H}$，假设存在一个 g 使得 $\Delta g = f$，那么能否推出 g 属于 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$? 如果能够了解这一点，将会非常有趣，因为目前已知的结果大多针对严格伪凸域；这些结果能否推广到乘积域 $\mathbb{D}^n$, ，即使是在次数为 1 的情形下（参见 [354] 及其中的参考文献）。

关于极小约化子空间。对于每个分拆 $\boldsymbol{p} \vdash n$ 以及每个满足$1 \leq i \leq \deg \boldsymbol{p}$的指标 i，子模 $\mathbb{P}^{ii}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$ 都是 n-元组 $(M_{s_1}, \dots\dots, M_{s_n})$ 的约化子空间。因此，一个自然的问题是这些子模是否为极小约化子空间。更一般地，我们考虑一个有限复反射群 G，它具有不变环 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]^G$. 的齐次生成元$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots\dots, \theta_n)$。在此框架下，在具有 G-不变再生核、定义于 G-不变域 Ω 上的希尔伯特模 $\mathcal{H}$ 上乘以 $\boldsymbol{\theta}$，可得到约化子空间 $\mathbb{P}_{\varrho}\mathcal{H}$ 和 $\mathbb{P}^{ii}_{\varrho}\mathcal{H}$，其中 $\varrho \in \widehat{G}$, $1 \leq i \leq \deg \varrho$，而 $\widehat{G}$ 是 G [112] 的不可约表示的等价类。由 [383, 命题 2.2] 和 [422, 命题 1，第 556] 页可知，映射 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots\dots, \theta_n) : \Omega \to \boldsymbol{\theta}(\Omega)$，是真全纯映射。特别地，$\boldsymbol{\theta}(\Omega)$ 是一个域，而商拓扑

空间 Ω/G 具有复解析空间结构，且与 $\boldsymbol{\theta}(\Omega)$ 双全纯等价——这也说明了“商域”这一名称的合理性。在 [383], 中证明了，每个由自同构分解的真全纯映射都与一个基本多项式映射 $\boldsymbol{\theta}$ 密切相关。因此，将研究对象从对称群推广到有限复反射群，为真全纯映射 [186, 453] 下极小约化子空间问题提供了新的视角，也自然地与我们在 [120, 114, 112] 中的研究相关联。近年来，文献中对此进行了广泛探讨；例如参见 [207, 230]。

关于商域上的实现。 在 [112], 中，证明了子模 $\mathbb{P}_{\varrho}\mathcal{H}$ 可实现为秩为 $(\deg \varrho)^2$ 、定义在 $\mathbb{C}[\boldsymbol{z}]$上的解析希尔伯特模，其中由商域 $\boldsymbol{\theta}(\Omega)$ 上的全纯函数构成。该结果是通过将 Chevalley–Shephard–Todd 定理推广到全纯函数代数的情形而得到的。它在显著改进早先关于对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的结果 [114, 推论 3.12] 方面发挥了关键作用；该结果表明，对于任意分拆 $\boldsymbol{p} \vdash n$，模 $\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}}\mathcal{H}$ 仅在 $\boldsymbol{s}(\Omega) \setminus \boldsymbol{s}(\mathcal{Z})$ 的一个开子集上局部自由，秩为 $(\deg \boldsymbol{p})^2$。此处， $\boldsymbol{s}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 表示对称化映射， $\mathcal{Z}$ 是 $\boldsymbol{s}$ 的临界点集。这为发展几何和解析酉不变量 [159, 161], 提供了强有力的框架，并为将约化子模 $\{\mathbb{P}_{\varrho}\mathcal{H}\}_{\varrho\in\widehat{G}}$ 按酉等价分类提供了途径。

近年来，研究关注范围已从对称多圆盘扩展到其他商域，例如四叶域、单项式多面体和肥 Hartogs 三角形。这一研究方向通常沿着两个方向展开：一方面，将针对特殊域得到的结果推广到更广泛的商域族；另一方面，运用一般结构定理，在具体情形中获得更精细的信息。例如， [297] 用于计算 Bergman 核的希尔伯特空间方法，在 [422] 中被推广到任意真全纯映射，并在 [206] 中被推广到商域，其中包括单项式多面体和肥 Hartogs 三角形等特殊情形。Hardy 空间方面也开展了相应研究。在 [297], 中，研究者引入了 $\mathbb{G}_n$ 上的 Hardy 空间这一自然概念，并明确求得其再生核。后来， [211] 将这一构造推广到有界对称域的商域，并建立了关于 Toeplitz 算子的 Brown–Halmos 型定理——其中一些定理已在 [99, 174]的对称多圆盘背景下得到研究。 [210] 研究了 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子。近来，纯等距算子和不变子空间的结构理论，沿着 Beurling–Lax–Halmos 定理的思路，已从 $\mathfrak{S}_n$ 推广到更广泛的反射群族 G（m、 p、 n） [115]。不变子空间的研究与内函数理论密切相关，因此也引出了类似于 [1] 中针对对称双圆盘所探讨的问题，即商域上的相关问题。沿着这一思路， [106] 研究了$\boldsymbol{\theta}$（$\mathbb{D}^n$）上 $G = G$（m、 p、 n）上的有理内函数结构。多个方向也取得了显著进展：商域上 Bergman 投影和 Szego 投影的L^p正则性、 [77, 208, 232], Hankel 算子、 [98], 自同构群非传递作用下的齐次解析希尔伯特模 [113], ，以及其他方面。综上，这些研究凸显了商域上希尔伯特函数空间理论的蓬勃发展及其相互交织的特征；该理论巧妙融合了算子理论、复几何与表示论，从而为进一步探索开辟了诸多途径。

7. Trace formulas in operator theory

作者为来自印度理工学院古瓦哈提分校的 *Arup Chattopadhyay* *[2003 arupchattopadhyay@gmail.com]* 和 *Saikat Giri* *[saikatgiri90@gmail.com]*；以及来自 *IISc* 的 *Chandan Pradhan* *[chandan.pradhan2108@gmail.com]*。

设 $\mathcal{H}$ 为一个复可分希尔伯特空间。对于 $1 \le p < \infty$， $\mathcal{H}$ 上的 p 阶 Schatten 类记为 $\mathcal{S}^p(\mathcal{H})$ [408]。

迹公式是算子理论中的核心对象，其研究动机既来自物理学，也来自数学。1953 年，Krein [263], 在 Lifshitz 早期工作的基础上 [278], 为受自伴迹类算子 $V \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 扰动的自伴算子 H_0 建立了一个基本公式：

$$\operatorname{Tr}\big(f(H_0+V)-f(H_0)\big) = \int_{\mathbb{R}} f'(\lambda)\,\xi_{H_0,V}(\lambda)\,d\lambda, \tag{7.1}$$

当 f' 的傅里叶变换属于 $L^1(\mathbb{R})$ 时，该公式成立。

函数 $\xi_{H_0,\,V}$称为谱移位函数（SSF），描述了算子受到扰动时谱的变化。自引入以来，SSF 已成为扰动理论、谱流、数学物理和非交换几何 [36, 37, 408]的基石。在 [147], Chattopadhyay–Sinha 通过 Krein 的 SSF 分析了经典的 Carey–Helton–Howe–Pincus 迹公式。这些进展启发人们将迹公式推广到更广泛的算子框架，包括非紧扰动和非正规算子。

关于酉算子和压缩算子的（7.1）类似结果已得到广泛研究 [9, 148, 192, 264, 265, 290, 291]。不同于此前的工作，Chattopadhyay–Sinha [148]建立了一个适用于压缩算子对的迹公式，其中谱移函数的支集位于单位圆盘上，而早期结果中则位于单位圆上 [290, 291]。

将克莱因迹公式推广到迹类扰动之外一直十分困难。对于$V \in \mathcal{S}^2(\mathcal{H})$，Koplienko [261] 用泰勒余项替代了（7.1）的左端。 [145, 191, 403], 曾尝试建立高阶公式，但仅适用于 $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$ 扰动（另见 [310, 338, 352]）。Potapov–Skripka–Sukochev [348] 对 $V \in \mathcal{S}^n(\mathcal{H})$ 建立了完整的推广，证明了

$$\operatorname{Tr}\Big(f(H_0+V)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}\Big|_{t=0} f(H_0+tV)\Big) = \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(\lambda)\,\xi_{n,H_0,V}(\lambda)\,d\lambda. \tag{7.2}$$

证明依赖于多重算子积分（MOI） [408], 这一现代扰动理论中的强大工具。MOI 由 Peller [339] 以及 Azamov–Carey–Dodds–Sukochev [36], 分别独立引入，是对 Birman–Solomyak 经典双重算子积分 [110]的重大推广。自问世以来，MOI 已成为分析算子扰动的核心技术，使得诸如 (7.2) 这样的迹公式得以大幅推广。例如，借助它们，(7.2) 得以推广到压缩算子 [349], 和酉算子 [351, 406]的情形。在相关进展中，Aleksandrov–Peller [8]为 Besov 空间中的函数建立了 (7.2)，扩展了 [348]中所考虑的函数类。值得注意的是，最近 Coine–Le Merdy–Sukochev [157] 引入了一种 MOI，涵盖了范围最广的标量函数类。

谱移函数的显式表示十分罕见。为解决这一问题，Voiculescu [438], Sinha–Mohapatra [304, 305], 和 Potapov–Sukochev–Zanin [353] 采用了有限维逼近。后来，Chattopadhyay–Sinha 以及随后 Chattopadhyay–Das–Pradhan，为自伴 [144], 、酉 [134], 和压缩算子 [135]建立了二阶迹公式。然而，高阶情形仍无法处理。

关于更广泛算子类的高阶结果已取得重大进展。Chattopadhyay–Pradhan–Skripka [143] 证明了压缩算子和极大耗散算子的迹公式，消除了先前的限制 [141, 292, 291, 406], ，并表明压缩算子的高阶谱移函数可支撑于单位圆盘上。对于具有非紧扰动的狄拉克算子和薛定谔算子，在相对 Schatten 类扰动 [149, 432, 433, 350, 404] 以及 τ-紧预解式 [142, 407], （假设扰动有界）的情形下，得到了 (7.2) 型公式。最近，Chattopadhyay–van Nuland–Pradhan [140] 研究了无界扰动：对于自伴 H_0 和对称、相对 H_0-有界 V的情形，他们推导出了$\frac{d^n}{dt^n}\big|_{t=0} f(H_0 + tV)$的显式公式，证明了非交换泰勒展开的收敛性，并在自然的可和性假设下建立了高阶谱移函数。最后这一结果将 Yafaev [449] 和 Aleksandrov–Peller [10] 的工作推广到了高阶情形。

另一个研究方向是扩大（7.2）中容许函数类的范围。Peller [340]（自伴情形）和 Aleksandrov–Peller [9] （酉情形）确定了克雷因迹公式的最优函数类，但高阶情形尚无已知结果。最近，Chattopadhyay– Coine–Giri–Pradhan [132, 133] 统一了自伴、酉和压缩算子的可微性结果，并为迄今为止更广泛的标量函数类建立了二阶迹公式。在 [132], 中，他们进一步得到了具有最优标量函数类的修正高阶迹公式，拓展了 Skripka [406] 和 Bhattacharyya–Chattopadhyay–Giri–Pradhan [103]的早期结果。

多个变量的情形则更为微妙。Aleksandrov–Peller–Potapov [11]证明，对于非交换自伴算子元组，（7.1）的类似结论并不成立；他们还提出，对于由自伴算子构成的交换算子元组$\mathbf{H}_n = (H_1, \dots, H_n)$、$\mathbf{H}_n(1) = (H_1 + V_1, \dots, H_n + V_n)$，若有 $V_i \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$，是否存在测度 μ_j使得

$$\operatorname{Tr}\big(f(\mathbf{H}_n(1)) - f(\mathbf{H}_n)\big) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial \lambda_j}\, d\mu_j. \tag{7.3}$$

假设对所有 $t \in [0,1]$，$\mathbf{H}_n(t) := (H_1 + tV_1, \dots, H_n + tV_n)$ 彼此交换，则问题得以解决：首先，Skripka [405], 对有界算子给出了证明，随后 Chattopadhyay– Giri–Pradhan–Usachev [137] 又将结果推广到无界算子。此外， [137] 表明，若 V_i 属于 Lorentz理想，并以有界奇异迹 τ [283] 取代 Tr，则无需这一额外的交换性假设，(7.3) 仍然成立。 [136], 研究了高阶情形，但一般的多变量问题仍未解决。值得注意的是，Chattopadhyay–Sinha [146] 在多变量背景下研究了另一类迹公式（类似Stokes的公式）。

因此，从 Krein 最初的结果到现代的高阶及多变量延拓，迹公式理论不断发展，揭示了扰动理论、非交换分析与谱理论之间的深刻联系。

关于迹公式和谱移位函数的研究由来已久且至今仍十分活跃。由于无法在这篇综述短文中完整列举所有相关成果，作者可能会遗憾地遗漏一些重要文献；不过，读者可以从我们引用的著作中找到更多资料。

8. Dilation of operators and algebraic varieties

作者：*B. Krishna Das* *[bata436@gmail.com]*，印度理工学院孟买分校。

膨胀理论是算子理论的基石之一，它通过将希尔伯特空间上的可交换压缩算子延拓或膨胀为等距算子或酉算子，为理解这些算子提供了一个框架。Sz.-Nagy 和 Foias 的基础性成果（[417]），以及 Ando 对其所作的推广（[15]），分别为单个压缩算子和一对可交换压缩算子给出了膨胀定理。然而，当变量数超过两个时，这类膨胀通常并不存在。这些经典结果的局限性推动了对膨胀理论的进一步研究，也使得理解那些不属于这些已知定理适用范围的算子元组成为必要。下面的总结综合介绍了我与合作者在若干论文中取得的进展，这些工作研究了可交换压缩算子元组的等距扩张及其与代数簇的联系。

经典的冯·诺伊曼不等式（[439]）通过在单位圆盘上的上确界，为在压缩算子处取值的多项式的范数提供了一个界。虽然 Ando 定理将这一结果推广到一对可交换压缩算子，但所得不等式通常并不尖锐。为了寻求更精确的估计，Agler 和 McCarthy（[3]）证明，对于一对严格可交换矩阵，冯·诺伊曼不等式在一个特殊簇上成立——该簇是双圆盘的一个代数子集，即一条仅与双圆盘边界的特殊部分相交的代数曲线。受此启发，我们研究了对于希尔伯特空间算子的可交换对，是否存在更精确的膨胀结果，从而得到更尖锐形式的冯·诺伊曼不等式。对于压缩算子T，若 $T^{*n} \to 0$ 在强算子拓扑中成立，我们称 T为纯的；并将 T的缺陷算子和缺陷空间分别定义为 $D_T := (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$以及 $\mathcal{D}_T :$ Ran $(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$。在这一背景下，我们的主要结果是如下明确的 Ando 型膨胀定理和尖锐的冯·诺伊曼不等式。

定理 8.1 ([170])。 设(T_1, T_2) 是一对可交换压缩算子，其中 T_1 是纯的，且 T_1 和 T_2 的缺陷空间均为有限维。则：

(a) 存在一个取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{D}_{T_1})$ 的有理内函数 Ψ，使得作用于 $\mathcal{D}_{T_1}$ 值 *Hardy* 空间上的乘法算子对(M_z, M_Ψ)是(T_1, T_2)的膨胀。(b) 若 T_2 也为纯的，则存在一个特征簇 $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^2$，使得

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{(z_1,z_2)\in\mathcal{V}} |p(z_1, z_2)|, \ \textit{for all} \ \ p \in \mathbb{C}[z_1, z_2].$$

该结果中出现的内函数 Ψ 可通过传递函数模型显式实现，而相关的特征簇 $\mathcal{V}$ 可用 Ψ 表示为行列式形式。该结果将 Agler 和 McCarthy 的工作从矩阵推广到希尔伯特空间上的压缩算子，并显著加以强化，同时为他们的结果提供了一种简洁的新证明。此外，定理 (a) 部分中的膨胀结果在以下意义下是最优的：若一对可交换压缩算子 (T_1, T_2) 在一个取值于 $\mathcal{E}$ 的 Hardy 空间上膨胀为 (M_z, M_Ψ)，其中 $\mathcal{E}$ 是有限维的，且 Ψ 是一个取值于 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ 的有理内函数，那么 T_1 必须是纯的，并且 T_1 和 T_2 的缺陷空间必须是有限维的（见 [172]）。上述结果还表明，识别那些可膨胀为特定类型等距算子的算子元组，可以揭示这些元组更精细的结构信息。我们在以下关于 BCL等距算子对的膨胀结果中进一步展示了这一原理

。Berger、Coburn 和 Lebow (BCL) 的著名结果（[81]）刻画了 Hardy移位算子 M_z 可分解为可交换等距算子乘积的所有可能方式。识别可膨胀为一对 BCL 等距算子的可交换压缩算子对，可得出以下关于压缩算子的因子分解定理。

定理 8.2 ([171]). 设 T 是一个纯压缩算子，且 $T \cong P_{\mathcal{Q}} M_z|_{\mathcal{Q}}$ 是 T的 *Sz.-Nagy–Foias*表示。则：

(a) 一对可交换压缩算子(T_1, T_2) 若满足 $T_1 T_2$ ，则可纯膨胀为某个向量值*Hardy*空间上的一对 *BCL* 等距算子。(b) 若对某一对可交换压缩算子(T_1, T_2)， $T = T_1 T_2$ 成立，则存在$\mathcal{B}(\mathcal{D}_T)$值的一次多项式 φ 和 ψ ，使得

$$(T_1, T_2) \cong (P_{\mathcal{Q}} M_\varphi|_{\mathcal{Q}}, P_{\mathcal{Q}} M_\psi|_{\mathcal{Q}}).$$

第 (a) 部分的膨胀结果已被用于推导其他若干膨胀定理。例如，它提供了 Ando 定理（[104]）的一种替代证明，并已用于为由特定正性条件定义的各种类别的 n 元组（$n \geq 3$）的可交换压缩算子构造膨胀（见 [68, 69, 70, 105]）。

在闭双圆盘中零点集为特征簇的二元多项式称为环面多项式。若一对可交换压缩算子被某个环面多项式湮灭，则称其为环面对。定理 8.1 的一个推论是，若 (T_1, T_2) 是一对可交换压缩算子，且 T_1 和 T_2 都是有限缺陷的纯压缩算子，那么 (T_1, T_2) 是环面对，并且存在一个同样为环面对的等距提升。这自然引出了以下受约束的 Ando 膨胀问题，该问题与双圆盘特征簇上的有理膨胀问题密切相关：一对环面可交换压缩算子是否存在环面等距提升？一般而言，答案是否定的。不过，我们有以下肯定结果。

定理 8.3 ([173])。 任意一对具有有限缺陷空间的环面可交换压缩算子都存在环面等距提升。

该定理意味着，若一对具有有限缺陷空间的可交换压缩算子以双圆盘的某个特征簇作为其谱集，则存在另一个（可能不同的）特征簇，可作为完全谱集。如今，众所周知，有理膨胀问题在特征簇上通常并不成立；Neil抛物线就是一个有理膨胀失败的例子。我们旨在探讨的问题之一如下：

问题： 在什么条件下，双圆盘的特征簇上的有理膨胀成立？

总之，这些工作通过膨胀理论以及特征簇上的精确冯·诺依曼不等式，显著深化了我们对算子的理解。这些工作的一项关键特点是构造了显式膨胀。展望未来，这些进展也指向若干具有挑战性的开放问题，其中最值得关注的是双圆盘特征簇上的有理膨胀问题。

9. The Weighted Discrete Semigroup Algebra $\ell^1(S,\ \omega)$

作者：*H. V. Dedania [hvdedania@gmail.com]*，来自萨达尔·帕特尔大学。

巴拿赫代数是一种结合代数 A，配备一个范数 $\|\cdot\|$，使得 $(A,\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间，并且 $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ $(a,b \in A)$。巴拿赫代数的经典例子包括 $C_0(\Omega)$、$BL(X)$ 和 $L^1(G)$；其中，Ω 是局部紧豪斯多夫空间，X 是巴拿赫空间，而 G 是局部紧豪斯多夫拓扑群。分析学及数学其他分支中的许多重要代数都是巴拿赫代数。巴拿赫代数的代数结构与拓扑结构之间存在紧密联系。A 的代数结构决定了其拓扑结构的各种性质。例如，A 上的每个乘法线性泛函都是连续的 [163,定理 2.1。29]

设 A 是一个巴拿赫代数，A^* 是其巴拿赫空间对偶。设 $S(A) = \{x \in A: \|x\| = 1\}$, $D_A(x) = \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = 1 = \varphi(x)\}$，且 $V_A(a;x) = \{\varphi(ax) : \varphi \in D_A(x)\}$ 适用于$a \in A$ 和 $x \in S(A)$。那么集合 $V_A(a) = \cup\{V_A(a;x) : x \in S(A)\}$ 称为 a 在 A 中相对于 $\|\cdot\|$的空间数值域（SNR）。空间数值域 $V_A(a)$高度依赖于代数 A 和范数 $\|\cdot\|$。[176, 定理 2.1] 证明，$V_A(a;x)$总是凸的。因此，一个自然的问题是：空间数值域 $V_A(a)$总是凸的吗？我们不知道答案。如果 A 有一个满足 $\|e\| = 1$ 的单位元 e，那么 $V_A(a) = V_A(a;e)$是凸的（ [176, 推论 2.1]）。在许多非幺巴拿赫代数 [177, 324] 中，它都是凸的。另一方面，Bonsall 和 Duncan 为任意有界线性算子$T \in BL(X)$定义了空间数值域，这一定义与我们的定义略有不同。他们构造了一个作用在 $\mathbb{C}^2$ 上的算子T，其空间数值域 $V_{BL(X)}(T)$不是凸的（ [124, 第-98]页）。遗憾的是，这个算子T 并不能帮助我们在 A 中找到一个元素 a，使得 $V_A(a)$不是凸的。

最重要的巴拿赫代数之一是加权离散半群代数$\ell^1(S, \omega)$，其中 S 是半群，ω 是定义在 S上的权，即对于所有 $s, t \in S$ [163, Page-159]，有 $0 < \omega(s)$和 $\omega(st) \leq \omega(s)\omega(t)$。其上的巴拿赫代数范数记为 $\|\cdot\|_\omega$。巴拿赫代数 $\ell^1(S, \omega)$主要用作反例。然而，对它本身也进行了独立研究。其巴拿赫代数结构深受 S 和 ω的影响。例如，当且仅当 S 是阿贝尔的时，它是交换的；当且仅当 S 是分离的且ω 是半单的 [175, 定理 2.3]时，它是半单的。在这里，我们介绍一些关于 $\ell^1(S, \omega)$的结果，这些结果由我们证明。

如果 A 是半单巴拿赫代数，那么我们可以在 A上得到另一个范数；即算子范数 $\|\cdot\|_{op}$，其定义为 $\|a\|_{op} = \sup\{\|ax\| : x \in A, \|x\| \leq 1\}$ $(a \in A)$。一般而言，$\|\cdot\|_{op} \leq \|\cdot\|$ 在 A 上。若 $\|\cdot\|_{op} = \|\cdot\|$ 在 A上，则范数 $\|\cdot\|$ 是正则的。例如，每个 C^*-范数都是正则范数。一个自然的问题是：加权范数 $\|\cdot\|_\omega$ 何时是正则的？，即 $\|\cdot\|_{\omega op} = \|\cdot\|_\omega$ 在 $\ell^1(S, \omega)$上？我们证明了以下结果。

定理（A）： [178] 设 S 是一个右消去半群，且 ω 是定义在 S上的一个权。令 $k \in \mathbb{N}$ 和 $\widetilde{\omega}_0 = \omega$。定义 $\widetilde{\omega}_k(s) = \sup\{\widetilde{\omega}_{k-1}(st)\, \widetilde{\omega}_{k-1}(t) : t \in S\}$ $(s \in S)$。则

(1) 每个 $\widetilde{\omega}_k$ 都是 S上的权。(2) 对每个 k，$\widetilde{\omega}_{k+1} \leq \widetilde{\omega}_k$ 在 S 上。(3) $\ell^1(S,\omega) \subseteq \ell^1(S,\widetilde{\omega}_{k-1}) \subseteq \ell^1(S,\widetilde{\omega}_k)$。(4) $(\ell^1(S,\widetilde{\omega}_k)\ \|\cdot\|_{\widetilde{\omega}_k})$ 是一个巴拿赫代数。(5) $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\omega}_k(s^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\Rightarrow\infty} \widetilde{\omega}_{k+1}(s^n)^{\frac{1}{n}}$ $(s \in S)$。(6) $\|\delta_t\|_{\widetilde{\omega}_k op} = \|\delta_t\|_{\widetilde{\omega}_{k+1}}$ $(t \in S)$。(7) $\|f\|_{\widetilde{\omega}_k op} \leq \|f\|_{\widetilde{\omega}_{k+1}}$ $(f \in \ell^1(S,\omega))$。

(8) $\widetilde{\omega}_{k-1}$具有*F*-性质（即，对于每个有限集 $\{t_1,\dots,t_n\}\subset S$和 $r<1$，存在$s\in S$使得 $\widetilde{\omega}_{k-1}(t_i s)\,\widetilde{\omega}_{k-1}(s)\geq r\widetilde{\omega}_k(t_i)$ $(1\leq i\leq n)$）当且仅当 $\|\cdot\|_{\widetilde{\omega}_k op}=\|\cdot\|_{\widetilde{\omega}_{k+1}}$在 $\ell^1(S,\omega)$上。(9) 1-范数 $\|\cdot\|_1$在 $\ell^1(S)$上是正则的。

另一方面，对于 $1\leq p<\infty$， p范数 $\|\cdot\|_p$在逐点乘法的序列代数 ℓ^p [178,上从来不是正则的。定理 2.8]。

交换巴拿赫代数 A 中的元素 a ，如果线性算子 $L_a: A\longrightarrow A; x\longmapsto ax$ 在范数拓扑下是紧算子，则称其为紧元 。令$K(A)$表示 A中所有紧元的集合。那么， $K(A)$是 A中的闭理想。如果 A 维数有限，那么显然 $K(A)=A$。另一方面，如果半单交换巴拿赫代数 A 的盖尔范德空间 $\triangle(A)$没有孤立点，那么$K(A)=\{0\}$。因此，紧元这一概念主要在无限维根交换巴拿赫代数中具有意义；卷积代数 $L^1(\mathbb{R}_+,\omega)$和 $l^1(S,\omega)$就是这样的巴拿赫代数。

$L^1(\mathbb{R}_+,\omega)$ 中所有紧元的集合已由 Bade 和 Dales 研究，而 Grønbæk 研究了 $l^1(S,\omega)$的情形。作者还研究了 $l^1(S,\omega)$ 中紧元的一些其他结果。我们最近证明了关于 $L^1(\mathbb{R}_+,\omega)$ 中紧元的结果的若干加权离散类比 [53]。我们还纠正了 Grønbæk 所声称的一些论断，以正视听。令 $K(S,\omega)$ 为 $\ell^1(S,\omega)$ 中所有紧元的集合。我们的主要结果如下两条。

定理（B）： [53] 令 ω 为阿贝尔半群 S 上的一个权，且 $f\in\ell^1(S,\omega)$。考虑以下三个陈述:

(a) $\sum\{|f(s)|\omega_0(s): s\in S\}=0$; (b) $\lim_{s\to[\infty]}\delta_s * f=0$; (c) $f\in K(S,\omega)$。

Then

(1) $(a)\Longrightarrow(b)\Longrightarrow(c)$。(2) 若 S 是弱消去的，则$(c)\Longrightarrow(b)$。(3) 若 S 是消去的，则$(b)\Longrightarrow(a)$。

定理（C）： [53] 设 S 是消去且阿贝尔的， ω 是 S上的一个权。那么存在一个 S中的半群理想 T，使得 $K(S,\omega)=\{f\in\ell^1(S,\omega): \operatorname{supp} f\subseteq T\}$。

开放问题：以下是该领域的一些开放问题。

(1) 设 S 是一个无限半群。 S上是否总存在无界权? (2) 设 G 是一个离散群。 $\ell^1(G,\omega)$是否总是半单的? (3) 是否存在一个巴拿赫代数 A ，使得对于某个 $a\in A$， $V_A(a)$不是凸的? (4) 是否存在一个代数 A，它有有限个（但多于一个）不等价的巴拿赫代数范数? (5) 定理（C）的逆命题在何种情况下成立? 也就是说，若 T 是 S中的一个半群理想，那么是否存在一个 S上的权 ω，使得 $K(S,\omega)=\ell^1_T(S,\omega)$?

10. Cartan isometries and Cartan contractions

作者：来自印度理工学院马德拉斯分校的 *Surjit Kumar [surjit@iitm.ac.in]*；以及来自印度统计研究所加尔各答分校的 *Paramita Pramanick [parami- tapramanick@gmail.com]* 。

设 $\mathcal{H}$ 为一个复可分希尔伯特空间。若作用于 $\mathcal{H}$ 上的算子 T 满足$T^*T=I.$，则称其为等距算子。等距算子的一个典型例子是作用于 ℓ^2上的单边移位（$\mathbb{N}$）。所谓交换的

d元组 $\boldsymbol{T}$，是指在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中的算子元组 $T_1, \cdots, T_d$，其中任意两个算子彼此交换。球面等距算子是满足条件 $T_1^*T_1 +$ 的交换 d元组 $\boldsymbol{T}$。
$\cdots + T_d^*T_d = I$. Athavale 的一项重要结果表明，每个球面等距算子都是次正规的，且其正规谱包含于单位球面 $\partial\mathbb{B}$ （见 [31]）。因此，可以为球代数构造一种自然的函数演算。由此，球面等距算子可视为与单位球相关的等距算子的多变量类比。本文探讨由经典 Cartan 域导出的等距算子，称为 Cartan 等距算子，以及与之相关的压缩算子。

设 Ω 是秩为 r、位于 $\mathbb{C}^d$ 中且类型为（r, a, b）的经典 Cartan 域。设 S_Ω 为域 Ω 的 Shilov 边界。设 G 为 Aut(Ω) 的单位元所在连通分支，其中 Aut(Ω) 是 Ω 的双全纯自同构群。设 $\mathbb{K} = \{g \in G : g(0) = 0\}$ 是 G 的一个极大紧子群。注意， $\mathbb{K}$ 是 G. 中线性自同构构成的子群。群 $\mathbb{K}$ 通过复合在解析多项式空间 $\mathcal{P}$ 上作用。在此作用下， $\mathcal{P}$ 分解为不可约且两两 $\mathbb{K}$等价的子空间 $\mathcal{P}_s$ ，使得$\mathcal{P} = \sum \mathcal{P}_s$，其中求和遍及所有签名 $s = (s_1, ..., s_r) \in \mathbb{Z}_+^r, \quad s_1 \geq \ldots \geq s_r \geq 0$。设 $\{\psi_\alpha^s(z)\}_{\alpha=1}^{d_s}$ 是 $\mathcal{P}_s$ 的一组正交归一基，其内积取 Fischer-Fock 内积，其中 d_s 是 $\mathcal{P}_s$. 的维数。再生核 K_s 由$K_s(z, \bar{w}) = \sum_{\alpha=1}^{d_s} \psi_\alpha^s(z)\,\overline{\psi_\alpha^s(w)}$ 给出。

Cartan 等距算子是一个交换的次正规 d-元组 $\boldsymbol{T}$，其正规谱 $\sigma_n(\boldsymbol{T})$ 包含于 S_Ω （见 [34]）。Cartan 等距算子的一个众所周知的例子是 Hardy 空间 $H^2(S_\Omega)$ 上的 Szeg¨o 移位。事实上， d- 元组 $\boldsymbol{T} \in \mathcal{A}K(\Omega)$ 是 Cartan 等距算子，当且仅当 $\boldsymbol{T}$ 与 Szeg¨o 移位酉等价。关于 $\mathcal{A}K(\Omega)$，一类 $\mathbb{K}$-齐次算子元组的更多细节，请参见 [202]。在 [34], Athavale 针对每个经典 Cartan 域分别给出了 Cartan 等距算子的刻画。最近，在 [273], 我们刻画了所有类型的经典 Cartan 域上的 Cartan 等距算子，并将它们统一在一个框架下。

定理 10.1。 交换的 d-元组 $\boldsymbol{T}$ 是 *Cartan* 等距算子，当且仅当

$$\Delta^{(\ell)}(z, w)(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^*) = \binom{r}{\ell} I_{\mathcal{H}} \quad \textit{for all } 1 \leq \ell \leq r, \tag{10.1}$$

其中 (ℓ): $= (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ 表示签名，其前 ℓ 个分量为 *1*，并且

$$\Delta^{(\ell)}(z, w) = \prod_{j=1}^{\ell} (1 + \frac{a}{2}(j-1)) K_{(\ell)}(z, w). \tag{10.2}$$

因此，我们得到以下结果:

推论 10.2。 设 $\boldsymbol{T}$ 为 *Cartan* 等距算子。以下结论成立:

(i) *Taylor* 谱 $\sigma(\boldsymbol{T})$ 包含于Ω中。(ii) 对于每个 $g \in \overline{G}$, $g(\boldsymbol{T})$ 是 *Cartan* 等距算子。(iii) 每个 *Cartan* 等距算子都是自反的。

Wold–von Neumann 分解 [158, 第 14] 页断言，希尔伯特空间上的每个等距算子都酉等价于一个单边移位（重数可能可数）与一个酉算子的直和。该结果在 Beurling 对单位圆盘上的 Hardy 空间的 z-不变子空间的刻画中发挥着核心作用 [158, 第23]页。利用行 d-超压缩算子的模型理论，Athavale 证明了

球面等距算子 $\boldsymbol{T}$ 当且仅当 $\boldsymbol{T}^*$ 是一个d-超压缩算子时，才存在沃尔德型分解 [33, 定理 2.1]。这自然引出了对 Cartan 等距算子的沃尔德型分解的研究。

回忆一下，交换的 d-元组 $\boldsymbol{T}$是球面压缩算子，当且仅当 $T_1^*T_1 + \cdots + T_d^*T_d \leq I$.等价地，由 $D_{\boldsymbol{T}}h = (T_1h, \ldots, T_dh)$ 给出的算子 $D_{\boldsymbol{T}}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{(d)}$ 是一个压缩算子。类似地，我们可以为经典 Cartan 域定义压缩算子的概念。对于 $m \geq n \geq 1$，令 $\Omega_{n,m} = \{z \in \mathcal{M}_{n\times m} : \|z\| < 1\}$为 I 型嘉当域。令 $\boldsymbol{T} = (T_{11}, \ldots, T_{1m}, T_{21}, \ldots, T_{2m}, \ldots, T_{n1}, \ldots, T_{nm})$ 为作用在$\mathcal{H}$上的交换 mn-元算子组。考虑由 $D_{\boldsymbol{T}}(h_1, \ldots, h_n) = (\sum_{i=1}^n T_{i1}h_i, \ldots, \sum_{i=1}^n T_{im}h_i)$ 给出的 $D_{\boldsymbol{T}}\colon \mathcal{H}^{(n)} \to \mathcal{H}^{(m)}$，对所有 $h_i \in \mathcal{H}$ 以及 $i = 1, \ldots, n.$ 均成立。若 $\boldsymbol{T}$是一个 Cartan 压缩映射，则称 mn-元组 $\boldsymbol{T}$为 I 型嘉当压缩算子，当且仅当 $D_{\boldsymbol{T}}$是一个压缩算子。直接验证可知，$\boldsymbol{T}$是 Cartan 等距算子，当且仅当 $D_{\boldsymbol{T}}$ 是等距算子。以类似方式，可以为 II 型和 III 型嘉当域定义 Cartan 压缩映射。与这种（严格）压缩算子相关的舒尔-阿格勒类实现公式，已出现在 [54]的工作中。如果 $\boldsymbol{T}$ 是 I 型嘉当压缩算子，那么根据 [13, 引理 1]，$\sigma(\boldsymbol{T}) \subseteq \Omega_{n,m}$. 此处，对于所有 $g \in G$，$g(\boldsymbol{T})$ 都是 I 型嘉当压缩算子。

考虑加权伯格曼空间 $\mathcal{H}^{(\nu)}$ 上定义在 Ω_n 上的全纯函数的乘法算子 $M_{ij}(f)(z) = z_{ij}f(z)$ 所构成的 mn 元组 $\boldsymbol{M}_{(\nu)}$。那么，对于任意 $\nu \in \{m, \ldots, m+n-1\} \cup (m+n-1, \infty)$ $\boldsymbol{M}^{(\nu)}$，它都是次正规 d 元组，因此是 I 型嘉当压缩算子。此外，对于 $\nu < m$，$\boldsymbol{M}^{(\nu)}$ 不是 I 型嘉当压缩算子。

冯·诺依曼的一项基本结果 [440] 指出，若 T 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的压缩算子，则对每个多项式 p，都有 $\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}} := \sup\{|p(z)| : |z| < 1\}$。换言之，只要 T 是压缩算子，诱导同态 $\rho_T(p) = p(T)$ 就是收缩的。Sz.-Nagy 的膨胀定理 [416] 表明，ρ_T 不仅是收缩的，而且是完全收缩的；也就是说，T 存在酉（幂）膨胀。等价地，对任意 $n \times n$ 矩阵值多项式 $P(z) = (p_{i,j}(z))$，都有 $\|P(T)\| \leq \|P\|_{\infty,\mathbb{D}}$。Ando 的膨胀定理 [15] 将这一结果推广到一对可交换压缩算子。Parrott [321] 构造了一个由三个可交换压缩算子组成的例子，该例满足冯·诺依曼不等式，却不存在交换酉膨胀。若存在希尔伯特空间 $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ 及其中的球面等距算子 $\boldsymbol{S} = (S_1, \ldots, S_d) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$，使得对所有 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ 都有 $\boldsymbol{T}^\alpha = P_{\mathcal{H}}\boldsymbol{S}^\alpha|\mathcal{H}$，其中 $P_{\mathcal{H}}$ 表示从 $\mathcal{K}$ 到 $\mathcal{H}$ 的正交投影，则称可交换 d 元组 $\boldsymbol{T}$ 存在球面膨胀（按 Arveson 的术语，即正规 $\partial\mathbb{B}$ 膨胀）。根据 Arveson 的一项深刻结果 [24]，$\boldsymbol{T}$ 存在正规 $\partial\mathbb{B}$ 膨胀，当且仅当诱导同态 $\rho_{\boldsymbol{T}}$ 是完全收缩的。

在 [32], Athavale 证明了，每个 d-超压缩算子都存在球面膨胀（另见 [307]）。在嘉当域的背景下，找出适当的 d-超压缩算子的类似概念，从而有望得到嘉当等距膨胀，似乎是一项颇具挑战的问题。另一方面，对于再生核希尔伯特空间上由坐标函数诱导的任意球面压缩 d-元组 $\boldsymbol{M}$，若其核具有 $\mathcal{U}(d)$-不变性，则诱导同态 $\rho_{\boldsymbol{M}}$ 是压缩的，即$\|P(\boldsymbol{M})\| \leq \|P\|_{\infty,\ \mathbb{B}}$（参见 [272, 命题 2.5]）。事实上，运用切片表示技巧（见 [150, 定理 1.10]），可以为这类算子元组得到球面膨胀。展望未来，人们自然会期待，用于 $\mathbb{K}$-不变核的“切片表示”技术最终能够为嘉当

压缩乘法元组带来嘉当等距膨胀。等价地，这将证明，对于 $\mathcal{AK}(\Omega)$，中的任意嘉当压缩 d-元组，其诱导同态都是完全收缩的。

11. Norms on operator space tensor products and C^*-envelopes of operator systems

作者：*Ajay Kumar [ak7028581@gmail.com]*，来自德里大学；以及 *Preeti Luthra[preeti@ms.du.ac.in]*，来自德里大学 *Mata Sundri* 女子学院。

冯·诺依曼与 Murray 合作，启动了一项数学量子化计划。其核心思想是用希尔伯特空间上有界算子的 $*$代数取代函数空间。算子空间 是具有额外矩阵范数结构的巴拿赫空间 X 。对于 $M_n(X)$，我们可以定义其上由来自 X的元素构成的 $n \times n$ 矩阵的范数，这些范数必须满足一定的相容性要求。算子空间的系统研究主要由 Effros 和 Ruan [194, 195], Blecher 和 Paulsen [121],Blecher 和 Smith [122] 以及 Haagerup 和 Musat [224]完成。

Grothendeick 在其著名论文 [216], 中考察了定义在两个赋范空间张量积上的 14 种自然范数。[194, 121]为对 C^*-代数子空间的张量积进行系统研究奠定了基础。文中定义了多种算子空间张量范数，即 Haagerup 范数、算子空间射影范数和注入范数。

两个 C^*-代数 A 和 B 的代数张量积 $A \otimes B$ 上，Haagerup 范数 $\|\cdot\|_h$与巴拿赫空间射影范数 $\|\cdot\|_\gamma$等价，当且仅当 A 或 B是有限维的，或者 A 和 B 都是无限维且次齐性的。若将巴拿赫空间射影范数替换为算子空间射影范数，同样的结论也成立。巴拿赫空间射影范数与算子空间射影范数 $\|\cdot\|_\wedge$ 等价，当且仅当 A 或 B 是次齐性的 [268]。对于一个非次齐性的无限维算子三元环与一个非次齐性的无限维 C^*-代数，Haagerup 范数与巴拿赫空间射影范数可能等价。对于一般的算子空间，目前尚无明确的判据。此外，即使对于 C^*-代数 [360, 269]，Schur 范数 $\|\cdot\|_s$ 与 $\|\cdot\|_\wedge$ 等价与否仍未可知。所涉及的基本工具包括 Grothendieck 不等式 [223, 224, 345], 、将映射提升到二次对偶以及提升到二次对偶的张量积。

如果 A 和 B 是 C^*-代数，且 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是定义在 $A \otimes B$ 上的张量范数，并且满足 $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta$，那么将初等张量映射到其自身的恒等映射 $i\colon A \otimes_\beta B \to A \otimes_\alpha B$ 是连续的，因此可以唯一延拓为 $i\colon A \otimes^\beta B \to A \otimes^\alpha B$。当 $\beta = \gamma$ 和 $\alpha = \lambda$ （巴拿赫空间内射张量范数）以及 $\beta = \wedge$ 和 $\alpha = \lambda$时的内射性已在 [223, 236]中得到证明。对于 $\beta = s$ 的情形，或当 A 和B 是算子空间 [360]时，我们仍不知道其内射性。Haagerup 张量积 $M \otimes^h B$也已得到研究，其中 M 是算子三元环（TRO），而 B 是一个 C^*-代数。与C^*-代数不同，可以通过归纳极限 [16, 250]得到一个反例，表明即使 M 和 B 都是无限维的，Haagerup 张量范数与最大张量范数仍可能是等价的。我们还建立了将 $M^{**} \otimes^h B^{**}$等距嵌入到 $(M \otimes^h B)^{**}$中的结果。尽管 $M \otimes^h B$ 不具有自然的 C^*-代数结构或算子三元环结构，但事实上我们证明了： $A \otimes^h B$ 是 C^*-tring，当且仅当 $A = \mathbb{C}$ 或 $B = \mathbb{C}$，从而阐明了即使对于 C^*-代数，这种结构得以保留的边界。尽管如此，我们还是构建了一个理想论框架，直接对极大理想、素理想和

本原理想进行分类，并以 M 和 B的理想为依据。这些结果表明， $M \otimes^h B$ 的理想结构保留了 C^*-代数语境中所体现的许多代数清晰性 [250, 251]。

近年来，除了 C^*-代数和算子空间之外，算子系统也受到了算子代数学家的广泛关注。算子系统是复希尔伯特空间 H [330] 上的 $B(H)$ 的自伴单位子空间。自然地，正如 C^*-代数一样，它们是矩阵有序的矩阵赋范空间。Arveson 在 [23] 中指出，可以从算子系统生成依赖于表示的非 $*$-同构 C^*-代数，这些代数被称为 S 的 C^*-覆盖。Hamana [225] 证明了，在算子系统 S 的所有这些 C^*-覆盖中存在最小者，称为 S 的 C^*- 包络，并记作 $C_e^*(S)$。

2011年， [252] 提出了一种研究算子系统张量积的新方法，并给出了 6 个算子系统张量积的格结构。后来， C^*-包络相关的 ess 张量积通过嵌入 $S \otimes_{\mathrm{ess}} T \subset C_e^*(S) \otimes_{\max} C_e^*(T)$ 在 [196], 中被引入。张量积的整个理论，即使是最新的理论，也围绕着 Lance [275] 的工作展开。众所周知，即使对于有限维矩阵代数，算子空间的最小（内射）张量积与最大（射影）张量积也不一致，例如 $\|E_{1j} \otimes E_{jj}\|_\vee = 1 \neq \sqrt{n} = \|E_{1j} \otimes E_{jj}\|_\wedge$ （见 [268]），因此核性这一术语无法推广到算子空间。不过，由于算子系统范畴中引入了若干种张量积，核性的概念在 [252] 中从 C^*-代数推广到了算子系统。

算子系统的核性与其 C^*-包络的核性之间的关系在 [221] 中得到了探讨。研究表明，算子系统的 C^*-包络具有核性，当且仅当该算子系统具有 (min,ess)-核性。此外，酉 C^*-代数作为算子系统具有 (min,ess)-核性，当且仅当它作为 C^*-代数具有核性 [221]。与群 C^*-代数相关联的是称为群算子系统 [196]的有限生成算子系统。文献 [221]给出了与有限生成群的极小生成集相关联的核群算子系统的完整列表。与 C^*-代数不同，可分精确算子系统未必能嵌入 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_2$ [255, 284]。使算子系统能够嵌入 $\mathcal{O}_2$ [285] 的是 C^*-包络的精确性，而不是算子系统本身的精确性。对于可分算子系统 S， C^*-包络 $C_e^*(S)$ 是精确的，当且仅当存在一个酉完全序嵌入，将 S 嵌入 $\mathcal{O}_2$。文献 [270] 研究了归纳极限与 C^*-包络的交换性。

算子空间中多项式的定量理论研究始于[179]。基于齐次多项式所获得的张量范数，λ理论在 [286]中被扩展到矩阵序空间和 Banach $*$-代数。

Dosiev 在 [183] 中利用多范数 C^*-代数 $C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D})$提出了局部算子系统的一种具体结构。局部算子系统范畴中的张量积结构在 [78] 中被引入，并在 [80]中讨论了该范畴中的核性。此外，Arveson 关于算子系统超刚性的概念在 [79]中被扩展到局部算子系统。

最后需要指出的是，近期的一些研究（例如 [156, 256, 253]）将算子代数的理论框架与量子信息论的实践探索相结合，从而凸显了二者之间深刻而广泛的相互联系的重要性。

12. Bohr's Inequality and the Gleason–Kahane–Zelazko Theorem

作者：*Sneh Lata* *[sneh.lata@snu.edu.in]*，来自 *Shiv Nadar* 卓越学府；以及 *Di- nesh Singh* *[dineshsingh1@gmail.com]*，来自 *O. P. Jindal* 全球大学。

Sneh Lata 和 Dinesh Singh 及其合作者在复分析和泛函分析领域做出了许多贡献，这些贡献被许多人视为意义重大，尤其是在两个重要领域：Bohr不等式和 Gleason–Kahane–Zelazko (GKZ) 定理。他们的工作将对现代分析学具有深远影响的重要经典结果推广到了更一般的情形，包括非交换空间和新型函数空间。

Bohr不等式

由 Harald Bohr 在数论中建立的经典波尔不等式指出，对于 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H^\infty(\mathbb{D})$，不等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq \|f\|_\infty, \quad 0 \leq r \leq \tfrac{1}{3},$$

成立。界 $r_0 = 1/3$ 是最优的，也就是说，当 $r > 1/3$时，该不等式对某些函数不成立。Bohr 最初证明了它对 $r \leq 1/6$成立，后来 Riesz [182], 、Schur [182],、Sidon [402], 、Wiener [123], 和 Tomic [420] 将其推广到 $r = 1/3$。最近，Lata 和 Singh 在与半有限冯·诺伊曼代数相关的非交换 Hardy 空间中建立了类似结果，从而得到了适用于 von Neumann–Schatten 类算子 $\mathcal{C}_1$ 和有限矩阵的版本。此前，Singh 与 Paulsen [334] 为与一致代数相关的 Hardy 空间获得了一般形式，表明该不等式独立于傅里叶系数，且对更一般的系数也成立。另见 [332, 333]。后来，Lata 和 Singh [276]将这一类似结果推广到配备正规半有限忠实迹 τ的冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 所关联的非交换 Hardy 空间。

定理 12.1。 [276, 定理 4。7]（非交换 *Hardy* 空间的 *Bohr*不等式）设 $x \in H^1(\mathcal{M})$ 满足 $\tau(x) \geq 0$ 且 $Re(x) \leq y$，其中某个自伴 $y \in H^1(\mathcal{M})$ 具有有限迹。对于满足 $||x_m||_\infty \leq 1$ 的序列 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$，其中 $H_0^\infty(\mathcal{M})$，令 $\alpha_0 = \tau(x)$ 和 $\alpha_m = \tau(xx_m^*)$ 满足 $m \geq 1$。则：

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\alpha_m| r^m \leq \tau(y) \tag{12.1}$$

每当 $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$. -

当 $\mathcal{M} = L^\infty(\mathbb{T})$ 时，这个推广定理给出了经典波尔不等式。该定理还针对 r 提供了具体的最优界，具体取决于冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$. 。当 $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{C})$ 时，对于任意一般的 n， r 的最优界至多为 $\frac{n}{3n-2}$；对于 $n = 2$，至多为 $1/2$；对于 $n = 3.$，至多为 $\sqrt{2} - 1$。当 $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$，且希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 为无限维时，或当其为交换 von Neumann 代数时，最优界为 $1/3$。

Lata 和 Singh 的工作还在更宽松的假设下给出了 Bohr不等式 的若干形式。对于 $\mathcal{C}_1$ 类，他们证明，对于更大范围的算子，可以得到类似于 (12.1) 的不等式。此外，对于 $M_n(\mathbb{C})$ 中的有限矩阵，他们表明，对于所有 $n \geq 2$， r 的最优界为 $1/3$，这不同于上文所述的定理 12.1 给出的特定界

。这是通过构造导致 $r > 1/3$ 下不等式失效的特定非平凡矩阵实现的。

格利森–卡哈内–泽拉兹科（GKZ）定理

GKZ 定理 [213, 249, 447] 刻画了巴拿赫代数上的乘法线性泛函。Lata 和 Singh 与 Jaikishan 一同，沿着 Mashreghi 和 Ransford [294], 所探索的方向，采用不同的新方法，为函数空间发展了新的类比结果。在 [234], 中，他们在复多项式向量空间上建立了一个一般性的 GKZ 定理，证明乘法线性泛函——即满足 $F(1) = 1$ 且对固定开圆盘之外的所有 n 和 α，都有 $F((z-\alpha)^n) \neq 0$——恰好是点求值。《数学评论》称这是一项意义深远的推广。他们的工作还进一步推广到具有不依赖于代数结构的拓扑的向量空间。

定理 12.2。 [234, 定理 B] 设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}(r, \mathbb{C})$ 是一个带有满足以下性质的拓扑的复向量空间：

(1) 对每个 $w \in D(0, r)$，映射 $f \mapsto f(w)$ 连续；(2) $\mathcal{X}$ 包含复多项式集作为稠密子集。

设 $\mathcal{Y} = \{(z-\lambda)^n : n \geq 0, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \geq r\}$。若 $F : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ 是连续线性泛函，且 $F(1) = 1$，并且对所有 $g \in \mathcal{Y}$，都有 $F(g) \neq 0$，则存在 $w \in D(0, r)$使得

$$F(f) = f(w)$$

对所有 $f \in \mathcal{X}$。

作者指出，尽管他们的定理与 Mashreghi 和 Ransford 的结果相似，但它仅依赖一类狭窄的外函数——线性外多项式的幂——而且不同于他们的证明，该定理不使用 GKZ 定理。

Lata 和 Singh 与 Jaikishan 将 Kowalski–S-lodkowski（KS）定理——GKZ 定理的一种推广——扩展到了更广泛的拓扑空间中 [235]。他们证明，满足 KS 型条件、取值于巴拿赫代数的非零连续函数，可以表示为点求值与乘法线性泛函的复合。他们对 KS 定理的类比结果有别于 Sampat [393] 和 Sebastian–Daniel [397]的相关研究。他们的结果为向量值函数给出了 KS 定理的多变量类比，而 Sampat 的结果给出了 GKZ 版本，Sebastian–Daniel 的结果则局限于单位圆盘上的 Hardy 空间。 [235] 中的证明是初等的，与 [393] 的函数论方法和 [397]的 Hardy 空间方法形成对比。他们只要求映射在某些多项式上非零，引入了一个本质连续性条件，并将结果推广到解析函数空间之外。

我们未来计划的重点将放在以下方面：除了发展 Bohr不等式和 GKZ 定理的新应用与推广之外，还将研究 BMO 和 VMO 空间以及与紧阿贝尔群和群代数相关的抽象函数空间上的算子不变子空间。

13. von Neumann Algebras

作者：*Kunal Krishna Mukherjee* *[kunal@iitm.ac.in]*，来自印度理工学院马德拉斯分校。

在印度，从事冯·诺伊曼代数研究的学术群体由作者与 P. Bikram、I. Patri、K. Bakshi、V. Gupta、V. Kodiyalam、S. Ghosh 及其学生和博士后合作者共同引领。概括而言，前三位——Mukherjee、Bikram 和 Patri——推动了冯·诺伊曼代数的分析、代数和动力学方面的发展；而后几位——Bakshi、Gupta、Kodiyalam 和 Ghosh——则主要致力于 II_1 因子和子因子理论。值得强调的是，印度冯·诺伊曼代数的发展体现了明显的代际跨越：这一领域已从早期几乎专注于 II_1 因子和子因子理论，发展到如今广泛研究各种类型的因子。这一转变是印度算子代数界的一项重要成就，使其得以为全球研究趋势作出实质性贡献。本文尤其关注冯·诺伊曼代数的分析、代数和动力学方面，不局限于任何特定类型的因子，从而体现了这一更广阔、更成熟的研究格局。在此，我们重点介绍过去十年取得的若干重要成果，它们共同展现了这些研究的深度与广度。

近期论文 [64] 研究了离散群 G 在冯·诺伊曼代数 M上的作用 α的动力学，与相关交叉积包含 $L(G) \subseteq M \rtimes_\alpha G$的结构性质及其中间子代数之间的关系。底层群仅假设为离散的，不论其基数如何；环境冯·诺伊曼代数则仅假设为 σ-有限。在非交换动力系统中，一个关键工具是冯·诺伊曼代数包含的拟正规化子 集合。研究表明，由拟正规化子生成的冯·诺伊曼代数能够捕捉包含 $L(G) \subseteq M \rtimes_\alpha G$的解析性质，例如Haagerup逼近性质；它对于捕捉动力系统中的几乎周期行为也至关重要。这为概率空间上的遍历作用给出了Furstenberg-Zimmer相对塔的新描述。研究还为一般的带迹 W^*-动力系统得到了新版的Furstenberg-Zimmer结构定理。这项工作建立在算子代数理论八十余年来深刻发展的基础上；Dixmier在20世纪50年代的开创性贡献（尤其是Dixmier, 1954年）标志着对冯·诺伊曼代数结构进行系统研究的开端。特别是，对拟正规化子的研究揭示了其极其丰富而复杂的结构，也持续带来颇具挑战性的未解问题。我们认为，尽管迄今已取得长足进展，但要全面理解这些对象，仍有很长的路要走。

一篇长篇论文 [DM] （五篇系列论文之一）在忠实正规态和$f.n.s.$ 权的框架下，对无限维冯·诺伊曼代数的 GNS空间中的一致左有界（分别为左、右有界）正交归一基进行了全面研究。论文给出了 GNS空间闭子空间满足的充要条件，以确保存在由一致左有界（分别为左、右有界）向量组成的正交归一基。在态的情形下，前一种基存在于所有 GNS空间中，而后一种基则不适用于$\mathbf{B}(\ell^2)$（以及一般的纯原子代数）。然而，在权的情形下，并不存在上述

障碍。在权的情形下，每个无限维冯·诺伊曼代数的 GNS空间都存在一个一致左、右有界的正交归一基，且上述界可以任意小。

若 M 是无限维因子，且 φ 是 M 上的忠实正规态，那么给定 $\epsilon > 0$，相应的 GNS 空间存在一个一致左有界的正交归一基 $\mathcal{O}$，使得 $\sup_{\xi\in\mathcal{O}} \|L_\xi\| \leqslant (1+\sqrt{2}) + \epsilon$。当 M 为 II 型或 III_λ 且具有 $\lambda \in [0,1$ 时，也得到了关于左右有界基的类似结论。由此可知，对于任意 II_1 因子，其迹态所对应的 GNS 空间都存在一个正交归一基，该基由半径为 $(1+\sqrt{2}) +\epsilon$ 的球内自伴算子的像组成，对每个 $\epsilon > 0$ 都成立。关于正交酉基的相关问题仍未解决，自 1967年巴吞鲁日会议以来也未曾有人涉足。

自 2001 年以来一直悬而未决的 q-变形 Araki-Woods 代数（与变形谐振子相关的代数）的因子性问题，在该领域杰出研究者屡次尝试未果后，除 [107] 和 [108] 中的一种情形外，均已得到解决。这激励了其他研究者，因为最近最后一种情形也已由他人解决。构造这类代数的想法最早于 1974 年提出，旨在建立允许对泡利不相容原理有“小幅违反”的场论。由于这类代数属于 III 型，且其生成元生成的阿贝尔代数通常缺乏适当的条件期望，因此几乎无法进行计算。后来，通过选取适当的生成元，生成一个具有条件期望的极大阿贝尔子代数，并使其与其他生成元相互作用，从而能够计算相关的双模，绕过了这一困难。这是在 III 型情形下首次计算极大阿贝尔子代数双模；Connes 的 S-不变量也成功得以计算，并证明在该因子属于 III_1，型的情形下，它们满足 Connes 双中心化子猜想。此后，印度及国际上的多篇论文都继续研究变形 Araki–Woods 冯·诺伊曼代数。然而，这是一个值得注意的例子：研究方向并非追随既有趋势，而是我们的工作开创了先河，后来其他人也沿着这一方向开展研究。

一系列三篇论文 [65, 67, 66] 对非交换动力系统的联结进行了系统而全面的研究。对非交换群在冯·诺伊曼代数上的作用的研究取得了重大进展，并强化了 Hoegh-Khron、Landstad 和 Størmer 关于紧群在冯·诺伊曼代数上作用的著名结果。该结果发表于 1982 年的《数学年刊》。结果如下：如果局部紧群 G 在具有可分前对偶的冯·诺伊曼代数 M 上遍历作用，并保持忠实正规态 φ，那么相应的 GNS 希尔伯特空间中，Koopman 表示的任何有限维不变子空间都包含在中心化子 M^φ 的像内。因此，如果 $M^\varphi = \mathbb{C}1$，即 M 是 III_1 因子，那么任何此类遍历作用都是弱混合的。这基本上意味着，非交换动力学在相空间的大范围区域内是混沌的。

在 [FMP] 中对紧双交叉积进行了全面研究。紧双交叉积是量子群理论中的一种构造；同时还展示了一个具有 Khazdan 和 Margulis 的性质（T）的离散量子群无穷族，而在当时，这类量子群甚至连单个例子都尚未知晓。

[MP] 中的论文开启了对如下形式的非交换动力系统的研究：$(\mathbb{G},\ \Gamma)$，其中离散群通过量子自同构作用于紧致量子群（CQG）。人们获得了这类动力系统具有遍历性、

混合性、紧性等性质的组合条件，并提供了大量示例来说明这些条件。Halmos 的一个著名定理被推广，以展示与该语境相关的遍历层级中的“箭头反转”。此外，还研究了（非交换）群的作用的谱测度。人们研究了这类动力系统的结构，并在一定限制条件下，确立了此类系统的极大遍历不变正规子群的存在性与唯一性。作为应用，研究了冯诺依曼代数型紧量子群中由群产生的极大阿贝尔自伴子代数的正规化代数的规模，并证明此类极大阿贝尔自伴子代数的正规化代数就是由余交换紧量子群生成的冯·诺伊曼代数。

14. Applications of Birkhoff-James orthogonality in studying the geometry of operators between Banach spaces

作者：*Kallol Paul* *[kalloldada@gmail.com]*，来自贾达普尔大学；*Debmalya Sain[saindebmalya@gmail.com]*，来自卡纳塔克邦的 *IIITRaichur*

Birkhoff-James 正交性可以说是巴拿赫空间背景下最自然、研究最深入的正交性概念。它由 Birkhoff [109]提出，随后由 James [237], 发展，为我们理解巴拿赫空间的结构提供了关键见解，也许更重要的是，帮助我们理解这些空间之间的有界线性算子。对于巴拿赫空间 $\mathbb{X}$, x 中的元素x, y，若对所有标量 λ. 均有$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$，则称 x 与 y Birkhoff-James 正交（记作 $x \perp_B y$）。过去二十年里，我们的研究很大一部分致力于运用正交性方法探索有界线性算子。用字母 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 表示巴拿赫空间，用 $\mathbb{H}$ 表示希尔伯特空间。$\mathbb{X}$ 的对偶空间记作 $\mathbb{X}^*$。 $\mathbb{X}$的单位球和单位球面分别记作 $B_{\mathbb{X}}$ 和 $S_{\mathbb{X}}$。设 $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$（分别为 $\mathbb{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$）表示 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$. 之间所有有界（分别为紧）线性算子构成的空间。 $\mathbb{X}$ 上所有有界（分别为紧）线性算子构成的空间记作 $\mathbb{L}(\mathbb{X})$（分别为 $\mathbb{K}(\mathbb{X})$）。给定 $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$，其范数取到集记作 M_T，定义为 $M_T = \{x \in S_{\mathbb{X}} : \|Tx\| = \|T\|\}$.。文献[96, 327]给出了 $\mathbb{L}(\mathbb{H})$中 Birkhoff-James 正交性的一个有用刻画，其中 $\mathbb{H}$是欧几里得空间。值得一提的是， [96] 中的以下猜想是促使我们沿此方向开展研究的关键动因之一：

“若 $T, A \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$，其中 $\mathbb{X}$ 是有限维巴拿赫空间，且满足 $T \perp_B A$，则存在 $x \in M_T$ 使得 $Tx \perp_B Ax$.”

在此背景下，我们在 [387] 中的主要贡献是阐明范数取到集 M_T 在整个问题体系中的重要性。更确切地说，我们证明，对于实巴拿赫空间，只要 $M_T = \pm D$，上述猜想便成立，其中 D 是一个连通集。另一方面，只需考虑不属于这种形式的 M_T，就可以构造出上述猜想的简单反例。这一见解也使我们得以刻画欧几里得空间：“有限维实巴拿赫空间 $\mathbb{X}$ 是希尔伯特空间，当且仅当对于任意 $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X})$， M_T 都是 $\mathbb{X}$.的某个子空间的单位球面。”此外，在 [388], 中，我们将这一刻画推广到了紧算子 $T \in \mathbb{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$，其中 $\mathbb{X}$ 是一个自反巴拿赫空间。在 $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$的最一般情形下，范数取到并无先验保证；关于 Birkhoff-James 正交性的完整刻画已经

在 [289] 和 [388], 中得以建立，并在算子空间中 Gateaux 可微性（几何学中也称为光滑性）的研究方面具有重要应用。

回顾一下，元素 $x \in \mathbb{X}$ 称为光滑元素，当且仅当 $\{f \in S_{\mathbb{X}^*} : f(x) = \|x\|\}$是单例集。元素的光滑性与正交性有着根本联系，具体如下：非零向量 $x \in \mathbb{X}$ 是光滑的，当且仅当 ***Birkhoff-James*** 正交性在 x 处具有右可加性，即 $x \perp_B y$ 且 $x \perp_B z \implies x \perp_B (y + z)$。利用前面提到的 Birkhoff-James 正交性的刻画，我们研究了有界线性算子的光滑性。在 [328], 中，已获得 $\mathbb{L}(\mathbb{H})$ 以及 $\mathbb{K}(\mathbb{X})$ 中光滑算子的完整刻画，其中 $\mathbb{X}$.为自反实巴拿赫空间。这些结果在 [389], 中得到了进一步推广，其中刻画了 $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 中的光滑算子。我们还研究了光滑性的一种推广概念，即 k-光滑性。若元素 $x \in S_{\mathbb{X}}$ 满足 k-光滑性，则称其为 k-光滑，即$dim\ span\{f \in S_{\mathbb{X}^*} : f(x) = \|x\|\} = k$. 已在 [287] 中获得了 $\mathbb{L}(\mathbb{H})$ 中 k- 光滑算子的完整刻画。对于作用于 ℓ_1^n 和 ℓ_∞^n. 上的算子，也给出了一些相关结果。我们在 [392], 中进一步拓展了这项研究，解决了多面体巴拿赫空间之间算子的 k-光滑性问题。

我们还研究了有界线性算子空间中的另一个基本几何概念，即极端压缩算子。我们回顾一下，极端压缩算子就是所有有界线性算子空间的单位球的极点。尽管 $\mathbb{L}(\mathbb{H})$ 中的极端压缩算子早在近七十年前就已得到刻画，但在一般巴拿赫空间框架下，即使是在有限维情形，仍然难以获得一个易于处理的解。在 [386], 中，我们完全刻画了 $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, 中的这些特殊点，其中 $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ 是二维严格凸且光滑的巴拿赫空间。我们进一步在 [390], 中研究了有限维多面体空间中的这一问题，其中证明了：若 $\mathbb{X}$ 是一个 n维多面体巴拿赫空间，且 $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ 是一个极端压缩算子，则 M_T 包含 n 个线性无关的极点，且这些极点属于 $B_{\mathbb{X}}$.在上述研究中，Birkhoff-James 正交性发挥了核心作用。

最近，我们将关于 Birkhoff-James 正交性的研究应用于巴拿赫空间中的逼近理论优化，重点关注经典的最佳逼近和最佳余逼近问题。在 [385], 中，我们从 Birkhoff-James 正交性的角度研究了巴拿赫空间与希尔伯特空间之间的紧算子的最佳逼近。作为应用，我们在紧算子空间中给出了一些距离公式。随后，这项工作在 [288], 中得到进一步拓展和推广，我们获得了紧算子到一个子空间的若干距离公式。最佳余逼近问题是经典最佳逼近问题的一个较少被研究但同样自然的对应问题，我们在 [391] 中对其进行了研究。我们完整刻画了从一个 $n \times n$矩阵到对角矩阵子空间的最佳余逼近点，并且确定了这一情形中的余逼近子空间和余切比雪夫子空间；这些子空间对于许多实际应用而言都十分重要。

简而言之，我们对 Birkhoff-James 正交性及其在巴拿赫空间等距理论中的各种应用所进行的研究，说明了正交性对于理解巴拿赫空间的解析性质和几何性质，以及

它们之间的有界线性算子的重要性。过去十年间，已有多个巴拿赫空间理论学家群体开始关注在算子空间中应用正交性方法。我们充分相信，这一趋势会因其充分的理由而继续发展；我们也打算在更一般的拓扑向量空间框架中进一步探索与正交性相关的主题。

15. Commutators and Lie algebras of compact operators

作者：*Sasmita Patnaik [sasmita@iitk.ac.in]*，来自坎普尔印度理工学院。[谨以此文纪念 Gary Weiss]

本文围绕两个历经四十多年、长期悬而未决的问题展开：Pearcy–Topping紧交换子问题 [337, 第 2 节，问题 1]以及 Wojty´nski 的李代数简单性问题 [446, 问题 3]。我们简要概述相关研究进展，并着重介绍解决这些问题的方法。

交换子是形如 $AB-BA$ 的算子，其中 A 和 B 是复希尔伯特空间上的有界算子。当希尔伯特空间是有限维时，一个矩阵是交换子，当且仅当其迹为零 [409]。在无限维希尔伯特空间中，情况则有所不同。1965 年，Brown–Pearcy 刻画了所有有界算子的交换子：一个有界算子是交换子，当且仅当它不是紧算子的非零标量扰动 [127, 定理 3]。后来，Pearcy–Topping 开始研究紧算子的交换子，并提出了四个关于其结构的开创性问题。其中，以下问题至今仍未解决 [337, 第 2 节，问题 1] （1971）：每个紧算子都是两个紧算子的交换子吗？在这方面，Anderson 构造了无限分块矩阵，其交换子是一个秩一投影算子（核为无限维） [14, 定理 1], ，从而对 Pearcy–Topping 提出的关键测试问题 [337]作出了肯定回答。这是 Anderson 的一项开创性工作，也是我们开始研究这一主题的起点。通过对 Anderson 的矩阵模型稍作修改，我们（与 Gary Weiss 合作）回答了 Gary Weiss 提出的一个 35 年前的测试问题 [76, 定理 3.1]：存在一大类具有重复特征值的严格正（核为零）紧算子，它们是紧算子的交换子。

本段提及的工作是与 Jireh Loreaux、John Petro- vic 和 Gary Weiss 合作完成的。在我们先前关于交换子的工作基础上，通过对 Anderson 的矩阵进行受控扰动，并拓展 Anderson 矩阵模型的技术，我们进一步扩大了已知类别，构造出一族具有互异 特征值的严格正紧算子 [280, 定理 2.10]。成功实施 Anderson 矩阵模型的若干变体后，我们在使用 Anderson 矩阵模型时遇到了障碍，这些障碍与其分块矩阵的算术增长规模有关 [280, 定理 3.4，推论 3.5]。对 Anderson 矩阵模型更深入的分析，为我们研究交换子开辟了新的方向——通用分块三对角矩阵形式中矩阵的稀疏化 [326, 定理 20.4, 定理 20.7-20.8], ；这项工作是与 John Petrovic 和 Gary Weiss 合作完成的。我们提醒读者，迄今为止，这个问题上的所有进展都涉及对 Anderson 矩阵模型的改动——这是一种非常注重矩阵的研究方法。在一段时间沉浸于矩阵构造之后，我们转而从不同于矩阵表示的角度看待这个问题。我们为 Pearcy-Topping 提出了一个全新的视角

问题，提出了关于所讨论的交换子方程 $CZ - ZC = T$ 解的更一般约束。这些约束分为两种类型：以 s-数表示的定量约束 [280, 命题 4.1] ，以及关于由算子生成的主理想的定性约束 T, C和 Z [280, 推论 4.8]。由此引出了若干问题，可在 [280, 第 4] 节中进一步探讨。

我们十多年来对紧算子交换子的研究衍生出多个分支，为若干方向提供了新的视角。例如，Jireh Loreaux 和 Gary Weiss 发现，我们对紧算子单个交换子的研究与算子理想上的广义迹（超越谱迹）概念之间存在联系[281, 定理 9]之后的段落；也与紧算子的无限矩阵表示的分解及其各部分属于算子理想这一问题有关 [281,段落 6]。我们为紧算子构造的通用分块三对角矩阵形式，使我们得以将一个等价的 Pearcy–Topping 问题改述如下：一个紧算子是紧算子交换子，当且仅当某个有限矩阵方程构成的特定无限方程组有解。求解一个由尺寸各异的有限矩阵组成的无限方程组本身就颇具挑战，但这一等价关系从整体上将初等算子的研究与有限矩阵理论联系起来。

有界线性算子空间上的交换子运算 $AB - BA$ 赋予其一种非结合结构，称为李代数 [325, 定义 2.5]。李代数中兼具代数性质和拓扑性质的一个概念是李代数的拓扑简单性（即不存在非平凡的闭李理想）。有界算子的李代数并非拓扑简单的，因为紧算子构成的闭李理想是一个非平凡的李理想。1976年，Wojty´nski 证明，如果紧拟幂零算子的巴拿赫-李代数包含一个非零有限秩算子，那么该李代数就不是拓扑简单的 [446, 定理 6]。本着这一精神，他提出了问题 [446, 问题 3]: 巴拿赫空间上每个由紧拟幂零算子构成的巴拿赫-李代数是否都包含一个非平凡的闭李理想？Bre˘sar、Shulman 和 Turovskii 在 [128]中围绕这一问题获得了一些部分结果。据我们所知，在迄今为止针对这一问题所取得的各种进展中，研究李代数简单性时考虑李代数的伴随表示似乎是不可避免的。

2022年，本文作者提出了一种全新且直接、注重实践的方法，用于研究作用于无限维可分复希尔伯特空间上的紧算子李代数的简单性，并避开了伴随表示技术。我们首先聚焦于紧算子李代数的代数简单性，通过探讨以下问题来实现这一目标 [325, 第 1节，第 2]段：希尔伯特空间上哪些无限维紧算子李代数在代数意义下是简单的？通过在算子理想理论中采用软边理想的概念，我们获得了一个充分条件，可保证紧算子李代数并非简单 [325, 定理3.5和推论3.8]。软边理想最早由Kaftal和Weiss提出，这些理想在算子理想理论的诸多方面发挥了重要作用，参见 [247]-[248] 及其中的参考文献。这一方法在纯代数问题（简单性）与某些算子理想的分析行为（理想软性）之间建立了联系。我们还强调，对有限秩算子李代数简单性的研究需要单独处理 [325, 问题]。最终，我们计划在

希尔伯特空间框架下处理Wojty{v9}nski问题，并希望算子理想技术能够为该问题带来一些启示，而不像在更一般的巴拿赫空间中那样难以处理。

16. On subclasses of norm attaining operators on Hilbert spaces

作者：*G. Ramesh [rameshg@math.iith.ac.in]*，来自印度理工学院海得拉巴分校

数十年来，人们一直广泛研究巴拿赫空间上的范数达到算子。在希尔伯特空间上考察时，这些算子呈现出更丰富的结构性质和几何性质。近年来，人们对范数达到算子及其子类，以及最小值达到算子及其子类，都给予了极大关注。特别是，这两类算子在 $\mathcal{B}(H)$ 中都构成稠密子集；H 是希尔伯特空间上所有有界线性算子组成的巴拿赫空间， H 配备算子范数。

本文聚焦于算子理论中的两个核心主题：某些范数达到算子和最小值达到算子的子类所具有的范数达到性质 和不变子空间性质 。下面将具体阐述。

回顾一下， H 的闭子空间 M 称为 T 的**不变子空间**，或称在 T 下**不变**，如果 $T(M) \subseteq M$；也就是说，只要 $x \in M$，就有 $Tx \in M$。此外，若 M 及其在 H 中的正交补 $M^{\perp}$ 都在 T 下不变，则称 M 对 T 是**约化的**。如果 M 对所有与 T 可交换的 $S \in \mathcal{B}(H)$ 都不变，那么称 M 在 T 下是**超不变的**。不变子空间问题（分别为超不变子空间问题）可表述如下：

问题 16.1. 设 H 为可分的无限维希尔伯特空间。每个$T \in \mathcal{B}(H) \setminus \mathbb{C}I$ 是否都存在非平凡的不变子空间（分别为超不变子空间）？

绝对范数达到算子：若存在$x \in H$满足 $\|x\| = 1$，使得 $\|Tx\| = \|T\|$，则称 $T \in \mathcal{B}(H)$ 为范数达到算子；若对 H的每个非零闭子空间 M，限制算子$T|_M$： $M \to H$ 都是范数达到算子，则称其为绝对范数达到算子（简称 $\mathcal{AN}$-算子）。我们用 $\mathcal{AN}(H)$表示 H 上所有绝对范数达到算子的集合。

绝对范数达到算子这一类算子基于紧算子和等距算子的性质，于 [130] 中引入，旨在研究不变子空间问题。它包括紧算子、等距算子，以及核为有限维的偏等距算子。

[319, 369, 366, 436],中给出了正 $\mathcal{AN}$算子的若干刻画，而正规 $\mathcal{AN}$算子的刻画见于 [50, 369, 436]。自伴情形则在 [50, 436]中进行了讨论。

研究这一类算子的一个核心动机在于其与不变子空间问题的联系，而该问题可以通过这类算子的各种表示来研究。例如， [50, 369], 讨论了绝对范数达到正规算子的谱分解，而 [50]研究了次正规情形。这里的一个关键问题是：次正规算子何时会变成正规算子？众所周知，紧次正规算子都是正规算子。在 [50], 中证明了，若一个 Weyl 谱与其本质谱重合的次正规 $\mathcal{AN}$-算子必为正规算子。这一结果

已推广到 [362]中 $\mathcal{AN}$-算子的算子范数闭包。关于 $\mathcal{AN}$-算子的函数演算进展，我们请参阅 [364], ；关于 $\mathcal{AN}$-算子在诱导的 Aluthge 变换下的稳定性结果，我们请参阅 [363]。

另一个值得关注的子类，是在每个非零约化子空间上都能达到其范数的有界算子集合。该类既不包含 $\mathcal{AN}$-类的算子范数闭包，也不包含 $\mathcal{AN}(H)$ 的算子范数闭包。不过，相对于算子范数，它在 $\mathcal{B}(H)$ 中稠密。特别地，每个有界算子都可以用该类中具有非平凡不变子空间的算子来逼近（详情见[361]）。

绝对最小值算子：与 $\mathcal{AN}$-算子类自然对应的是绝对最小值算子类。回顾一下，如果存在 $x \in H$ 满足 $\|x\| = 1$ ，使得 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是最小值达到的，那么 $\|Tx\| = m(T)$，即 T 的最小模，其中

$$m(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$

已有研究表明，最小值达到算子集合在 $\mathcal{B}(H)$ 中关于算子范数 [266], 稠密；此外，该类还满足一种 Bishop–Phelps–Bollob´as 型定理 [51]。若对于 H 的每个非零闭子空间 M ，限制算子$T|_M$: $M \to H$ 都是最小值达到算子，则称 $T \in \mathcal{B}(H)$ 为绝对最小值达到算子（简称$\mathcal{AM}$）。所有此类算子构成的集合记为$\mathcal{AM}(H)$，该类最早由 [131]引入。

$\mathcal{AM}$-算子的行为与 $\mathcal{AN}$-算子的行为形成鲜明对比。例如，每个 $\mathcal{AM}$-算子都有闭值域，而一个无穷秩紧算子可能在没有闭值域的情况下是 $\mathcal{AN}$ 。正$\mathcal{AM}$-算子的刻画和性质见 [200], ，若干谱刻画见 [49]。

Toeplitz 算子和 Hankel 算子在$\mathcal{AN}$ 类和 $\mathcal{AM}$ 类中存在超不变子空间的问题已在 [367, 365]中得到研究。有趣的是， $\mathcal{AN}(H)$与 $\mathcal{AM}(H)$的算子范数闭包相同。具体而言，

$$\overline{\mathcal{AN}(H)} = \overline{\mathcal{AM}(H)} = \{K + \alpha V :\ K \text{紧}\ \ V \text{部分等距算子，且，} \dim(\ker(V)) < \infty,\ \alpha \geq 0\}.$$

详情请参见 [366]。该类包括酉算子的紧扰动，这是算子理论中的一个重要算子类。该类的不变（超不变）子空间的存在性仍是一个未解决问题。在这一方向上，近期进展[52] 表明：如果 $T \in \mathcal{B}(H)$满足 $\sigma_{\text{ess}}(T^*T) = \{\alpha\}$，其中某个 $\alpha \geq 0$满足，并且序列$(\alpha - \lambda_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$对某个 $1 < p < \infty$成立，其中 $\lambda_n \in \sigma_d(T^*T)$，那么 T具有一个非平凡的超不变子空间。这里，$\sigma_{\text{ess}}(A)$和 $\sigma_d(A)$分别表示自伴算子 $A \in \mathcal{B}(H)$的本质谱和离散谱。作为推论，我们可以很容易地得到一个众所周知的结果：如果 $T \in \mathcal{B}(H)$且 $I - T^*T \in \mathcal{K}_p(H)$（Schatten-$p$ 类）对某个$1 < p < \infty$成立，那么 T 具有一个非平凡的超不变子空间。

关于无界绝对最小值可达算子的谱理论综述，请参阅 [267]。

将 $\mathcal{AN}$-算子推广到巴拿赫空间算子的第一步，是获得巴拿赫空间上紧算子的表示，如 [370] 中所确立的。

17. Generalized Parrott homomorphisms and Banach space geometry

作者为 *Samya Kumar Ray* *[samyaray7777@gmail.com]*，来自金奈的数学科学研究所（*HBNI*）；*Rajeev Gupta* *[rajeev@iitgoa.ac.in]*，来自 *IITGoa*；以及 *Arpita Mal* *[arpita malju@gmail.com]*，来自 *Dhirubhai Ambani University*。

对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}_n$ 表示由可交换压缩算子组成的 n 元组的集合，令 $\mathbb{C}_k[z]$ 表示次数至多为 k 的多项式集合。定义

$$\mathcal{C}_k(n) := \sup\left\{\|p(T)\| : \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leqslant 1,\, p \in \mathbb{C}_k[z],\, T \in \mathcal{C}_n\right\}, \qquad \mathcal{C}(n) := \lim_{k\to\infty} \mathcal{C}_k(n).$$

根据 Sz.-Nagy 膨胀定理，我们分别有 $\mathcal{C}(1) = \mathcal{C}(2) = 1$ [418] 和 And¨o [15] 。对于 $n \geqslant 3$， $\mathcal{C}(n)$ 的增长速度快于 n [199] 的任何幂，但尚不清楚 $\mathcal{C}(3)$（或任何 $\mathcal{C}(n)$， $n \geqslant 3$）是否有限 [343]。Varopoulos–Kaijser 的 [434] 构造表明 $\mathcal{C}_2(3) > 1$，从而提出了 $(\mathcal{C}_2(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是否有界这一问题。Varopoulos [435] 证明了 $K_G^{\mathbb{C}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_2(n) \leqslant 2K_G^{\mathbb{C}}$，其中 $K_G^{\mathbb{C}}$ 是复 Grothendieck 常数。由于 $K_G^{\mathbb{C}} > 1$，这一 Varopoulos 不等式表明，冯·诺依曼不等式最终会在高维中失效。他问极限是否等于 $K_G^{\mathbb{C}}$? 在 [219] ，这一问题通过证明 $\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_2(n) \geqslant 1.118\, K_G^{\mathbb{C}}$. 得到了否定回答。Arveson [30] 提出了一个关于 $\partial\mathbb{D}^3$-正规膨胀的卓越等价判据，该判据以压缩性与完全压缩性之间的关系为表述。Parrott 例子 [321] 表明，定义在 $\mathcal{O}(\mathbb{D}^3)$ 上的单位压缩同态不一定具有 $\partial\mathbb{D}^3$-正规膨胀，这揭示了完全压缩性在高维中可能失效。在这里， $\mathcal{O}(\mathbb{D}^n)$ 是 $C(\mathbb{D}^n)$ 中所有关于 n 个变量的复多项式的闭包。Misra 及其合作者 [300, 301, 298, 38, 295] 进一步详细研究了这些例子，并将其推广到 $\mathbb{C}^n$ 中任意 $n \geqslant 2$ 的欧氏球。这些例子表明，研究下文所述的广义 Parrott 同态是很自然的。

固定 $\ell,\ m \in \mathbb{N}$. 我们将 $(X)_1$, 记作一个 d 维复巴拿赫空间 X. 的开单位球。令 J_ℓ 表示大小为 $\ell \in \mathbb{N}$的标准 Jordan 块。并且 $\mathcal{C}(\ell,\ m)$ 表示所有形如 $\boldsymbol{T_V}$:=($V_1 \otimes J_{\ell+1}$，.....，($V_d \otimes J_{\ell+1}$)，的大小为 $m(\ell+1)$ 的方阵的 d元组，其中 $\mathbf{V}$:=(V_1，..... V_d) 是一个由大小为 m. 的交换矩阵组成的 d元组。考虑代数同态：$\Phi_{\ell,\ \mathbf{v}}$: $f \mapsto f(\boldsymbol{T_V})$，它从 $\mathcal{O}((X)_1)$ 映射到$M_{m(l+1)}$. 定义

$$\alpha(\ell, X) := \sup\{\|\Phi_{\ell,\mathbf{V}}\|_{cb} : \|\Phi_{\ell,\mathbf{V}}\| \leq 1, \mathbf{V} \in \mathcal{C}(\ell, m), m \in \mathbb{N}\}. \tag{17.1}$$

问题 17.1。 对于固定的 $\ell \geq 2$，何时 $\alpha(\ell,\ X) = 1$?

注意， $\alpha(1,\ X)$不过是 Paulsen [331]早先研究过的常数 $\alpha(X)$。他指出，如果由 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{V}}^{(0)}$ 诱导的每个收缩同态都是完全收缩的，那么 $\alpha(X) = 1$ ，反之亦然。已知 $\alpha(\ell_\infty(2)) = \alpha(\ell_1(2)) = 1$，而当 $\dim(X) \geqslant 3$时，$\alpha(X) > 1$ ，见 [342, 331]。此外， $\alpha(X) = 1$ 当且仅当 X具有唯一算子空间结构 [331]。这些结果凸显了收缩性与完全收缩性之间的差距，并将膨胀理论与定义域及算子空间的几何联系起来。 [39]进一步揭示了这些联系：其中证明了某类 Parrott 类同态（称为小 Parrott 同态 [218]）的收缩性与完全收缩性等价于所谓的 2-可和性质或性质 P。我们进一步展开说明。对于 $E \otimes E$中的元素，我们采用自然的正性概念：元素 $A \in E \otimes E$ 是正的（记作

$A \geqslant 0$），当且仅当它属于对称张量集合 $x \otimes x$, $x \in E$的凸包。给定一个有限维复巴拿赫空间 E, 令

$$\gamma(E) := \sup\Big\{\langle A, B\rangle_{\mathrm{HS}} : \|A\|_{E\to E^*} \leqslant 1,\, \|B\|_{E^*\to E} \leqslant 1,\, A \geqslant 0,\, B \geqslant 0\Big\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{HS}}$ 表示希尔伯特–施密特内积。按照[39]的术语，若 $\gamma(E) \leqslant 1$，则称 E 具有性质 P。具有 2-可和性质的实巴拿赫空间已由 [17]完全刻画。在 [296] 中，作者证明了一个显著结果：$(M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{op})$的二维子空间具有性质 P，当且仅当它等距同构于 ℓ_∞^2。此后，自然会问，这类例子是否涵盖其他熟悉的复巴拿赫空间，例如 $1 \leqslant p \neq 2 < \infty$ 的 ℓ_p^2，其性质 P 已得到充分研究 [39]。Gupta 和 Reza [220] 利用压缩算子的酉膨胀证明，对于所有 $n \geqslant 2$.， ℓ_1^n都不能嵌入$(M_k(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{op})$。然而，Pisier（参见 [220]）提出了一个问题：这一结果能否推广到紧算子？G. Misra 则询问 ℓ_p^n能否等距嵌入 $M_k(\mathbb{C})$。这一系列论文解决了所有这些问题 [376], [138], [139]；在此过程中，这些论文建立了有限维 ℓ_p空间之间等距嵌入的一些著名结果的非交换类比。关于 Schatten-p 类或一般非交换 L_p空间的等距嵌入问题非常有用（参见 [228, 227], [451]）。或许可以运用 [376], [138], [139] 中发展的工具来解决 [246]中提到的一些问题。此外， [376] 构造了许多不具有性质 P、且不属于 [296]和 [39]研究范围的二维巴拿赫空间。然而，尽管已有这些研究，我们仍不知道是否存在一个具有性质 P 的二维复巴拿赫空间 X，但 $\alpha(X) > 1$.。在 $\mathbb{C}^3$中，令 $x = (1, 0, a)$和 $y = (0, 1, b)$，其中 $|a+b| \vee |a-b| < 1$但 $|a| + |b| > 1$，并令 $X =$张成空间$\{x, y\}$.。众所周知 [17]， X具有 2-可和性质。值得探究的是， $\alpha(X) = 1$ 吗？这将解答一个长期未解问题 [342]。

如果一个空间 E 不具有 2-可和性质，那么自然要找出 $\gamma(E)$ 的确切值。由于 $\{A \in E \otimes E :\ \|A\|_{E\to E^*} \leqslant 1,\ A \geqslant 0\}$ 和 $\{B \in E \otimes E :\|B\|_{E^*\to E} \leqslant 1,\ B \geqslant 0\}$ 是凸集， $\gamma(E)$ 中的上确界就在这些集合的极点处取得。利用这些结果，可以证明 $\gamma(\ell_1^{\mathbb{R}}(3)) = 1.125$ [217]。另一个可追溯至 [39] 的有趣发现是，$\sup\{\gamma(\ell_1(n)) : n \in \mathbb{N}\}$ 恰好就是正格罗滕迪克常数。受此启发，并结合近期的一些工作（如[35], [377] 和 [218] ），我们引入了巴拿赫空间对的格罗滕迪克常数。我们证明，对于一个巴拿赫空间 F 和一个巴拿赫空间序列 $(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$，若 $\dim E_n = n$， 且存在一个 $C > 0$ 使得

$$\|A \otimes \mathrm{id}_F\|_{E_m \hat{\otimes} F \to E_n^* \hat{\otimes} F} \leqslant C\|A\|_{E_m \to E_n^*} \qquad (*)$$

对所有 $m,\ n \in \mathbb{N}$，那么 F 和 F^* 都必须具有有限余型。此外，假设 F 具有有界逼近性质，且 [344]中的猜想得到肯定回答，我们证明（E_n^*）$_{n\geqslant 1}$ 在 [218] 上一致满足 G.T.。对于压缩的小 Parrott 同态 $\Phi_{\ell,\ \mathbf{v}} :\ \mathcal{O}(\Omega) \to M_n$，其中 Ω 是有限维巴拿赫空间（$E,\ \|\cdot\|$）的对偶单位球，我们证明了锐估计 $\|\Phi_{\ell,\ \mathbf{v}}\|_{\mathrm{cb}} \leqslant \sqrt{\gamma(E)}$。这为 [155, 定理 2.1] 提供了一种新的证明，该证明使用了同一篇论文中得到的 4×4 正矩阵的复正 Grothendieck 常数的下界 $K_G^+(\ell_\infty^4, \ell_2^2) \geqslant 1.1658$。对满足（$*$）的巴拿赫空间进行分类将会很有意义。

固定 d, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. 接下来，对于任意行向量 x_1, ..., $x_d \in \mathbb{C}^n$，定义算子

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x_1} \otimes I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, V_d = \begin{pmatrix} 0 & x_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{x_d} \otimes I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_d^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17.2)$$

其中，对每个 $j = 1, \ldots, d$, D_{x_j} 表示对角线为 x_j. 的对角算子。注意，$\mathbf{V} := (V_1, \ldots, V_d)$ 是一个交换算子组，并且 V_j 是压缩算子，当且仅当 $\|x_j\|_2 \leq 1$。令 $\mathcal{V}_{d,n}$ 表示由所有按 (17.2) 定义、且对每个 $j = 1, \ldots, d.$, V_j 都是压缩算子的元组$\mathbf{V}$ 构成的集合。令 $C^\sharp(d, n)$ 表示满足下述条件的最小常数 C

$$\|p(\mathbf{V})\| = \Big| \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha [x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}] \Big| \leqslant C \|p\|_{\infty, \mathbb{D}^d},$$

其中，对所有$\mathbf{V} \in \mathcal{V}_{\mathbb{D}^d,n}$ 以及任意多项式 $p(z_1, \ldots, z_d)$, $[x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}] = \sum_{j=1}^n x_{\alpha_1}^{(j)} \cdots x_{\alpha_n}^{(j)}$, $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$。常数 $C^\sharp(d, n)$ 与高维格罗滕迪克常数密切相关（参见 [421]）。

问题 17.2。lim 是什么$_{d,\ n\to\infty} C^\sharp(d,\ n)$?

By [226] $C^\sharp(d, n) \lesssim_d (\log(n+1))^{d-3}$.

18. Large time behaviour of operator semigroups

作者：*Sachi Srivastava [ssrivastava@maths.du.ac.in]*，德里大学。

巴拿赫空间 X 上的强连续算子半群（或 C_0-半群）是由 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 构成的单参数族，其中每个算子都是作用于 X 上的有界线性算子，并满足 (i) $T_0 = I_X$，(ii) $T_t T_s = T_{t+s}$, $t, s \geq 0$ (iii) 对每个 $x \in X.$, $t \mapsto T_t x$ 都是连续的。强连续半群对于求解如下形式的抽象柯西问题至关重要： $u'(t) = Au(t)$ $u(0) = x_0$，其中 A 是巴拿赫空间X上的闭且稠密定义的线性算子。事实上，该问题适定，即对每个 $x_0 \in X$，当且仅当 A是一个 C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$的生成元时，它才有温和解（由 $u(t) = T_t x_0$ 给出）；也就是说， $D(A) = \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} {}^{T_t(x)_t - x}$ 在 $\overline{X}\}$ 中存在，且 $Ax = \lim_{t\to 0} {}^{T_t(x)_t - x}, \overline{x \in D(A)}$。然而，困难在于，在大多数应用中，算子 A 是已知的，但半群的显式形式并不清楚。

受演化方程、控制理论和数学物理中的应用驱动，过去几十年来，对 C_0-半群渐近行为的研究日益受到关注，尤其是在稳定性、非一致稳定性和衰减率 [125, 72, 73, 152, 153, 154] 的背景下。若半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 满足一致指数稳定，则 $\|T_t\| \leq Me^{-wt}$ 对所有 $t > 0$ 均成立，其中 $M \geq 1$, $w > 0$（即该半群以指数率衰减至零）；若对于每个 $x \in X$, $\|T_t x\| \to 0$ 当 $t \to \infty$ 时成立，则称其为强稳定；如果 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 一致有界，则称其为多项式稳定（阶数为 α），即存在常数 $M > 0$ 使得 $\|T_t A^{-1}\| \leq \frac{M}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \forall t > 0.$。基于

Borichev 和 Tomilov [125]的研究通过希尔伯特空间情形下的预解算子估计刻画了半群的多项式衰减。这些卓越成果产生了深远影响，尤其是在研究偏微分方程解的衰减速率方面，例如阻尼波动方程。指数稳定性在半群生成元受到扰动时表现符合预期，而

在强稳定性和多项式稳定性背景下，相关扰动结果却寥寥无几，Paunnonen 的研究 [335, 336]中发表的结果除外。有趣的是，Rastogi 和 Srivastava 在 [375] 中证明了以下扰动结果：

如果 $(B,\ D(B))$ 是希尔伯特空间 H 上具有阶数$\alpha > 0$ 的多项式稳定 C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的生成元，且 C 是 H 上的闭线性算子，并且 $D(B) \subset D(C)$，那么，只要存在 $M_0 \in [0,1)$ 使得 (a) $\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0} \|CR(\lambda,\ B)\| \leq M_0$，且 (b) $\sup_{\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0} \|R(\lambda,\ B)Cy\| \leq M_0 \|y\|,\ \ \forall\, y \in D(C)$。，则 $(B+C,\ D(B))$ 将生成希尔伯特空间 H 上具有阶数 $\alpha > 0$ 的多项式稳定扰动 C_0-半群 $\{T_{B+C}(t)\}_{t\geq 0}$。

此外，他们将这些结果及类似结果应用于深入分析一类特定半群——时滞半群的强稳定性和多项式稳定性。时滞半群是由具有形式 $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B & \Phi \\ 0 & \frac{d}{d\sigma} \end{pmatrix}$ 的算子矩阵生成的 C_0-半群，该矩阵与具有以下形式的抽象微分方程相关联：

$$\begin{cases} u'(t) = Bu(t) + \Phi u_t, \quad t > 0, \\ u(0) = x, \\ u_0 = f, \end{cases}$$

其中，$\Phi:\ W^{1,\,p}([-1,0],\ X) \to X$ 是一个有界线性算子，称为时滞算子$A:\ D(A) \subseteq X \to X$ 是巴拿赫空间 X上的 C_0-半群的生成元 $\{T_t\}_{t\geq 0}$；$f \in L^p([-1,0],\ X)$，$1 \leq p < \infty$且 $u:\ [-1,\infty) \to X$，而 $u_t:\ [-1,0] \to X$由 $u_t(\sigma) := u(t+\sigma)$，$\sigma \in [-1,0],\ \ t \geq 0$定义。此类方程出现在对这样一类系统的研究中：系统的当前状态取决于过去状态，例如种群动力学和控制系统。Rastogi 和 Srivastava 还在 [374] 中研究了时滞半群的非解析增长界（最早由 [74] 引入并加以研究）。在上述各个实例中，所考虑的时滞算子始终是线性且有界的。针对这类问题，利用半群理论建立一个综合框架，以处理时滞项不一定是线性的、底层半群也不一定具有线性的情形，目前尚未完成。这是正在进行的工作的一部分。

研究 C_0-半群渐近性时，一个重要但基础的问题是，半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ 的指数增长界 $w_0(T)$ 是否与生成元 A的谱界 $s(A)$重合。这一等式通常称为李雅普诺夫性质。在 [444] 中，Weis证明了：若 $X = L^p(\mu)$，其中$(\Omega\ \mu)$是一个测度空间，且 $1 < p < \infty$ 和 $T_t \geq 0 \forall\ t \geq 0$，那么确实有 $w_0(T) = s(A)$。在 [437], 中，Vogt为这一结果给出了一个初等证明，并在此过程中证明，在Weis的结果中，半群的正性可以由（统一）最终正性取代。Prajapati、Sinha和Srivastava研究了定义在非交换 L^p 空间上的 C_0-半群的这一问题，其中 $1 \leq p < \infty$ 属于 [359]。他们直接证明了该性质在$p = 1,\ 2$的情形下成立，也证明了在附加条件下，该性质适用于 C_0-半群的相容族。对于非交换情形，Weis结果的完整类比仍是一个未解问题。此外，在非交换空间的背景下，Arora、Chill和Srivastava在 [22]中，针对作用于非交换空间的 C_0-半群，得到了关于生成形式的特征刻画的非交换版本；这些刻画涉及一个 C_0-半群被另一个 C_0-半群支配的情形，其中两个半群都作用于经典 L^2 空间。这些经典结果分别由Ouhabaaz [316] 和Barth´elemy[71], 提出。

作用于非交换 L^2-空间上。另一个将渐近性与定义在非交换空间上的半群联系起来的研究方向，是对量子动力半群稳定性的研究：Bhat和Srivastava [94] （针对有界生成元）以及Kumar、Sinha和Srivastava [271]（针对一般情形）对此进行了研究。这里，若一个单参数族 $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_t\}_{t\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{B}(H)$上的量子动力半群（QDS）：(a) 对每个$t \geq 0$，$\mathcal{T}_t : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$都是完全正的、次马尔可夫的正规映射；(b)$\mathcal{T}_0(x) = x$，$\mathcal{T}_{s+t} = \mathcal{T}_s\mathcal{T}_t$对所有 $s, t \geq 0$，$x \in \mathcal{B}(H)$均成立；以及(c) 对每个 $x \in \mathcal{B}(H)$，映射$t \to \mathcal{T}_t(x)$关于 $\mathcal{B}(H)$的 $weak^*$ 拓扑连续。

正 C_0 -半群的渐近分析（即 T_t 将底层空间的正锥映入正锥）如今已是半群理论中一个近乎经典的领域。近年来，Daners、Gluck 和 Kennedy 的研究使这一领域焕发了新的活力。他们从[165, 166, 167]开始发表的一系列论文中，引入并发展了 Banach 格上最终正 C_0-半群的抽象理论。若存在 $t_0 > 0$ ，使得对所有 $t \geq t_0.$ ， C_0-半群都被称为（一致）最终正。相关概念还包括逐点最终正性、渐近正性和局部最终正性（见 [21]）。在 [168], 中，Daners 和 Gl¨uck 研究了生成元受到有界扰动时半群的最终正性，并具体表明，最终正半群的扰动理论与正半群的扰动理论大不相同。Pappu、Rastogi 和 Srivastava 在 [320]中探讨了这一背景下生成元受到无界扰动的情形。随后，作者利用他们的结果，在某些条件下推出了时滞半群的最终正性。最终正 C_0-半群是一个内容丰富且活跃的研究领域，其中仍有若干开放问题。

19. Recent developments in E_0-semigroups and product systems

作者：*S. Sundar [ssundar@imsc.res.in, sundarsobers@gmail.com]*，来自金奈数学科学研究所（*HBNI*）。

广义而言， E_0半群和乘积系统属于非交换动力系统这一广泛框架。 E_0半群理论研究冯·诺伊曼代数上的自同态半群，由 Powers（[356]）引入。Arveson 在其具有开创性的论文（[25], [27], [26], [28]）中通过引入乘积系统，为理解它们提供了另一种方式。20 世纪 80 年代、90 年代以及 21 世纪初发表的大多数论文都专注于单参数情形（这是理所当然的）。 E_0半群和乘积系统这两个概念都很容易推广到更一般的半群，因而有必要在更一般的情形下对它们进行研究。

我们简要总结在这方面取得的成果。大部分工作由作者在过去十年间与在金奈（CMI/IMSc）工作过或正在工作的数学家（Anbu Arjunan、S.P. Murugan、R. Srinivasan、Piyasa Sarkar 和 C.H. Namitha）合作完成。

主要结果

设 P 是一个可测半群， H 是一个可分希尔伯特空间。由 $B(H)$上的酉元正规 *-端同态组成的半群$\alpha = \{\alpha_x\}_{x\in P}$ 称为 $B(H)$上的 E_0-半群。若存在酉算子族 $\{U_x\}_{x\in P}$ ，使得对于某个$\alpha_x(.) = U_x\beta_x(\cdot)U_x^*$ ， $U_x\alpha_x(U_y) = U_{xy}$ ，则称 $B(H)$上的两个 E_0-半群 α 和 β 余循环共轭；其中

每个 x，$y \in P$。P上的乘积系统是一个半群 E，连同一个满射半群同态 $p : E \to P$，使得纤维 $E(x) := p^{-1}(x)$是可分希尔伯特空间，并且映射 $E(x) \otimes E(y) \ni u \otimes v \to uv$ 对每个x，$y \in P$都是酉算子。本报告不考虑其中涉及的可测结构。

给定一个 E_0-半群 α，我们可以将希尔伯特空间族 $E_\alpha := \{E(x)\}_{x\in P}$附加如下：令

$$E(x) := \{T \in B(H) : \alpha_x(A)T = TA \ \forall A \in B(H)\}.$$

那么，$E_\alpha := \{E(x)\}_{x\in P}$ 是定义在 P 上的乘积系统，其乘积规则由复合给出，且 $E(x)$上的内积由 $\langle S|T\rangle = S^*T$给出。

首先需要解决的问题是，是否每个乘积系统都以这种方式产生；若答案是肯定的，那么对 E_0-半群的研究便可归结为对乘积系统的研究。关于这一问题目前的进展，我们有如下说明。

定理 19.1 ([411])。设 G 是一个局部紧群，且 $P \subset G$ 是一个内部非空的子半群。假设以下条件之一成立：

(1) G 是离散的，且 P 是 G中的正规子群，即对所有 $g \in G$都有 $gPg^{-1} = P$。(2) 群 G是阿贝尔的。(3) 存在 $a \in P$使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} Pa^{-n} = G$。

那么，映射 $\alpha \to E_\alpha$ 是 E_0-半群（按余循环共轭分类）与 P 上的乘积系统（按同构分类）之间的双射。

上述结果最初由 Arveson 在 $P = (0, \infty)$ 的情形下证明；对于 $\mathbb{R}^d$ 中的高维锥情形，则由作者和 Murugan（[306]）证明。我们将用乘积系统的语言阐述其余结果。这样，依据定理 19.1，我们便可以将它们转化为 E_0-半群。

设 $P \subset \mathbb{R}^d$ 是 $\mathbb{R}^d$中的一个闭凸锥。对于 P的一个等距表示 V，令 $E^V(x)$ 和 $F^V(x)$ 分别表示 $Ker(V_x^*)$ 的对称 Fock 空间和反对称 Fock 空间。那么，$E^V := \{E^V(x)\}_{x\in P}$ 是一个乘积系统，其中指数向量上的乘法规则由 $e(\xi) \cdot e(\eta) := e(\xi + V_x\eta)$ 给出，这里 $\xi \in Ker(V_x^*)$ $\eta \in Ker(V_y^*)$。我们可以通过如下方式定义乘法，从而使F^V 成为一个乘积系统：

$$(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_m) \odot (\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \cdots \wedge \eta_n) = V_x\eta_1 \wedge V_x\eta_2 \wedge \cdots \wedge V_x\eta_n \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_m.$$

乘积系统 E^V 和 F^V 是最简单的乘积系统示例，分别称为 CCR（正则对易关系）流和 CAR （典范反对易关系）流。

Arveson（[29]）在单参数情形下的一项深刻分类结果指出，可分解的乘积系统[1] 恰好是 CCR 流的乘积系统。在高维情形下，这一结论并不成立，因此我们有如下结构定理。

定理 19.2 ([308], [412])。设 $\Gamma : P \times P \to H$ 是一个弱可测映射，满足对于每个 x、$y \in P$，都有 $\Gamma(x、y) \in Ker(V_y^*)$。假设存在一个可测映射

[1]这意味着每个纤维 E（x）都包含足够多的可分解向量。若向量 $u \in E$（x）满足 $x = y + z$，则存在 $v \in E$（y）和 $w \in E$（z），使得 $u = vw$。

α： $P \times P \to \mathbb{T}$，使得对于 x、y、$z \in P$,

$$\Gamma(x, y+z) + V_y\Gamma(y,z) = \Gamma(x,y) + V_y\Gamma(x+y,z), \ and$$
$$\frac{\alpha(x,y)\alpha(x+y,z)}{\alpha(x,y+z)\alpha(y,z)} = e^{iIm\langle\Gamma(x,y+z)|V_y\Gamma(y,z)\rangle}.$$

在 E^V 上定义一个新的乘积 $\boxdot$ $u \boxdot v = \alpha\,(x,y)\ W\,(V_x\Gamma\,(x,y)\,)\ (u \cdot v)$，其中 $W\,(\cdot)$ 是 *Weyl*算子。于是，$(E^V, \boxdot)$ 是一个可分解乘积系统，并且每个可分解乘积系统（在同构意义下）都具有这种形式。如果一个可分解乘积系统有单位[2]，，那么它同构于一个 *CCR*流的乘积系统。

在单参数情形下，在同构意义下，我们可以取 $\Gamma = 0$。在高维情形下，这一点并不成立，正如 [308] 中所示：通过对一类例子的 2-余循环空间 Γ （模去余边界）进行显式计算得出了这一结论。

多参数理论中，与定理 19.2 同等重要的其他结果列举如下；其中有些与单参数情形截然相反。

(1) “映射” $V \to E^V$ 是单射（[412], [395]），“映射” $V \to F^V$ 也是如此（[309]）。

（2）存在不可数多个彼此不等价的 V 等距表示P，使得

- E^V 不是第一类[3]（[19], [20]），
- E^V 是第一类、素的，并且对于任意给定的 $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$，其指标为 k （[395][396]），
- F^V 与 E^V 不同构（[18], [309], [410]），并且
- F^V 的规范群不在单位集合上传递作用。

（3）具有交换值域投影的 P 等距表示中，满足F^V 为第一类的，恰好是标准移位半群 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 在 L^2上的拉回的直和（$[0, \infty)$）。特别地，与CCR流相比，如果我们将注意力限制在具有交换值域投影的等距算子半群上（[309]），那么只有移位半群的拉回才能产生第一类、指标一的CAR流。

未来研究

上述结果表明，多参数理论与单参数情形的理论大相径庭。这使其成为未来研究的沃土。作者希望就此提出几个具体问题。

(1) 定理 19.1 的结论是否对局部紧群的每个子半群 P 都成立? (2) 是否存在锥 P（例如 $\mathbb{R}^2_+$）的等距表示 V，使得 V 不是移位半群的拉回，但 F^V 是第一类且具有指标一?

Power 关于 E_0 半群的研究方法（[355], [356], [357], [358]），以及 Tsireslon 通过随机集、随机过程、点过程等研究乘积系统的概率方法（ [423], [424], [425]），在高维情形下仍未得到探索。作者颇有信心，认为对由此产生的 E_0 半群和乘积系统模型的分析，将带来深刻而有趣的数学成果。

[2]单位是一个非零且具有乘性的截面。[3]这意味着 E^V 没有足够多的单位。

20. C^*-algebras, K-theory and Dynamics

作者：*Prahlad Vaidyanathan [prahlad@iiserb.ac.in]*，来自 *IISER Bhopal*。

C^* 代数是复希尔伯特空间上有界线性算子空间的一个范数闭自伴子代数。这类代数由冯·诺依曼、盖尔范德等人于 20 世纪 30 年代引入。20 世纪 70 年代，Brown-Douglas-Fillmore、Elliott、Kasparov 等人的工作使这一领域焕发新生。具体而言，K 理论及代数拓扑中的相关工具的引入，拉近了两个原本迥异的领域，也加深了我们对二者的理解。接下来，我们将介绍近期我们与合作者在这一领域所做的工作。

非稳定 K理论： K-理论是与一个 C^*-代数相关联的一对阿贝尔群。这些函子是不变量中的有力工具，也是分类纲领的核心。然而，在构造这些群的过程中，不可避免地会丢失大量信息。具体而言，K-群是与 C^*-代数 [419]相关的某些同伦群的归纳极限。非稳定 K-理论所研究的分支，旨在独立理解这些同伦群，以及它们在取极限之前的行为。

这一领域始于20世纪80年代，当时 Rieffel [379] 引入了连通稳定秩和一般稳定秩的概念，它们控制着上述归纳极限中映射的行为。Nica [312] 进一步发展了这两个稳定秩的理论，并证明它们是同伦不变量。在 [430], 中，我们确定了这些稳定秩相对于一些自然构造（尤其是拉回）的行为。因此，我们得以计算出各种 C^*-代数类的这些稳定秩。在 [313], 中，我们估计了 $C(X)$-代数，以及多类群 C^*-代数和交叉积的这些稳定秩。

虽然计算这些秩有助于我们理解非稳定 K-群的行为，但我们没有多少工具可以显式计算这些群。因此，我们开始研究 K-稳定性；这是许多无限维 C^*-代数所呈现的一种现象，在这种现象中，非稳定 K-群自然与稳定 K-群重合。

在 [399], 中，我们证明了具有 K 稳定纤维的连续 $C(X)$-代数本身必定是 K 稳定的。在 [398], 中，我们证明了只要 AF代数具有缓慢维数增长，它们就是 K 稳定的。我们还能够计算有限维代数的酉群的有理同伦群。利用这一结果，我们证明了一个 AF代数是 K-稳定的，当且仅当它是有理K稳定的；后者是一个更容易验证的条件。在 [401], 中，我们证明了 A$\mathbb{T}$-代数也呈现出相同的现象，这引出了一个关于 AH代数的一般情形的有趣问题。为了进一步理解这一点，我们在 [400] 中证明，有理 K-稳定性与 K-稳定性的概念一般而言确实不同，而且 [399] 的结果对于有理 K-稳定性也成立。

目前，这一领域仍有许多未解问题。我们尚未对非稳定的 K-群进行明确计算，也不知道这些群在自然构造下如何变化。此外，我们不知道所有简单、实秩零C^*-代数是否都是 K-稳定的。这是 Zhang [452] 长期以来提出的一个猜想。

Rokhlin 维数： 群在 C^*-代数上的作用研究是算子代数理论的重要组成部分。给定群在一个 C^*-代数上的作用，人们通常会关注相关交叉积 C^*-代数的结构，而一个重要问题是

在此背景下，确定某些“正则性”性质何时会从底层代数传递到交叉积。这些性质包括许多从分类纲领角度来看颇有用处的性质，例如核维数有限、简单性、 $\mathcal{Z}$-稳定性等。Rokhlin 维数由 [229], 引入，是群作用的一种类似于覆盖维数的概念，已被证明在此背景下颇有用处。

关于有限群和整数的作用 [229], 紧群[201] 以及剩余有限群的作用 [415]，已有相关研究。在每种情况下，研究都证明，有限 Rokhlin 维数的作用使我们能够从底层代数的性质推导出交叉积 C^*-代数的多种正则性性质（尤其是在紧群情形下，以及满足“交换塔”假设时）。

在 [431], 中，我们证明了紧群对 $C(X)$-代数的 $C(X)$-线性作用，只要其在纤维上的诱导作用具有有限 Rokhlin 维数，自身就具有有限 Rokhlin 维数。这使我们得以构造出与等变向量丛相关的新类别的可分类 C^*-代数。在 [413], 中，我们在 [415]的工作基础上，研究了剩余有限群作用的 Rokhlin 维数。我们证明了若干有用的保持性质，并描述了相应交叉积的理想结构。在 [414], 中，我们研究了 AF-代数的自同构，并证明在某些条件下，相应的交叉积是一个 $\mathbb{AT}$-代数。

再一次，这一领域仍有许多有趣的研究方向。即使是在研究充分的整数作用情形下，Rokhlin 维数可以取哪些值也尚不明确。这主要是因为我们还没有可计算的障碍，能够为 Rokhlin 维数提供下界。研究特定类别的 C^*-代数上的某些自然作用，并计算其 Rokhlin 维数，也会很有意思。最后，我们尚未为局部紧群的作用给出恰当的 Rokhlin 维数定义。这些都是我们计划在未来继续探究的问题。

总之，上述项目综合了拓扑学、代数和分析学中的思想，因此具有广泛的吸引力。过去十年间，这些领域中出现了许多新工具，从而使人们重新关注这些问题。非稳定 K 理论已发展成熟，而这些开放问题需要真正新颖的想法。另一方面，Rokhlin 维数相对年轻，令人振奋。希望许多悬而未决的问题能在未来几年得到解决。

References

[1] J. Agler、Z. Lykova 和 N. J. Young，有理 Γ内函数的代数与几何方面，《数学进展》328（2018年），133–159。[2] J. Agler、Z. Lykova 和 N. J. Young，对称双圆盘中的 *Nicholas*测地线、收缩与保范数延拓性质，Mem. Amer. Math. Soc. 258（2019），第1242号，vii+108页。[3] J. Agler 和 J. McCarthy，特征簇，Acta. Math. 194（2005），133–153。[4] J. Agler 和 N. J.Young，域中的交换子提升定理 $\mathbb{C}^2$及谱插值。《泛函分析杂志》161（1999），第2期，452–477。[5] J. Agler 和 N. J. Young，关于 Γ压缩算子的模型理论，《算子理论杂志》49（2003年），第1期，45–60。[6] J. Agler 和 N. J. Young，域的魔术函数与自同构，Complex Anal. Oper. Theory 2（2008），第3期，383–404。[7] A. B. Aleksandrov，单位球中内函数的存在性，Mat. Sb. 118（1982年），第160号，N2(6)，147–163。

[8] A. B. Aleksandrov 和 V. V. Peller， S_m类扰动的迹公式，《谱理论杂志》1（2011年），第1期，1–26。[9] A. B. Aleksandrov 和 V. V. Peller，酉算子和算子 Lipschitz 函数的克莱因迹公式（俄文），《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》50（2016年），第3期，1–11。英文译本：《Funct. Anal. Appl.》50（2016年），第3期，167–175。[10] A. B. Aleksandrov 和 V. V. Peller，相对有界扰动及相对迹类扰动下自伴算子的函数，《Math. Nachr.》（2025年），1–22。[11] A. B. Aleksandrov、V. V. Peller 和 D. S. Potapov，关于非交换算子函数的迹公式（俄文），《Mat. Zametki》106（2019年），第4期，483–490。英文译本：《Math Notes》106（2019年），第3–4期，481–487。[12] D. Alpay、T. Bhattacharyya、A. Jindal 和 P. Kumar，利用膨胀理论方法逼近内函数，《Bull. Lond. Math. Soc.》55（2023年），2840–2855。[13] C. Ambrozie 和 D. Timotin， $\mathbb{C}^n$中某些域上的冯·诺依曼型不等式，《美国数学会会刊》131（2003年），第3期，859–869。[14] J. Anderson，紧算子的交换子，《纯粹与应用数学杂志》291（1977），128–132。[15] T. Ando，关于一对交换压缩算子，《Acta Sci. Math. (Szeged)》24（1963），88–90。[16] J. Antony、A. Kumar 和 P. Luthra，算子空间张量积与归纳极限，《数学分析及其应用杂志》470（2019），第1期，235–250。[17] A. Arias、T. Figiel、W. B. Johnson 和 G. Schechtman，具有2-可和性质的巴拿赫空间。《美国数学会汇刊》347（1995），第10期，3835–3857。[18] A. Arjunan，多参数 CAR 流的可分解性，《Proc. Edinb. Math. Soc.》（2）66（2023年），第1期，1–22。[19] A. Arjunan、R. Srinivasan 和 S. Sundar，闭凸锥上的 E半群，《算子理论杂志》84（2020年），第2期，289–322。[20] A. Arjunan 和 S. Sundar，与闭凸锥相关的 CCR 流，《M¨unster J. of Math.》13（2020年），115–143。[21] S. Arora，局部最终正算子半群，《算子理论杂志》88（2022年），第1期，203–242。[22] S. Arora、R. Chill 和 S. Srivastava，冯·诺依曼代数标准形上的半群支配，《Arch. Math.》121（2023年），715–729。[23] W. Arveson， C^*代数的子代数，《Acta Math.》123（1969），141–224。[24] W. Arveson， C^*代数的子代数 II，《Acta Math.》128（1972），271–308。[25] W. Arveson，福克空间的连续类比 I，Mem. Amer. Math. Soc. 80（1989年），第409号。[26] W. Arveson，福克空间的连续类比 III：奇异态，《算子理论杂志》22（1989年），第1期，165–205。[27] W. Arveson，福克空间的连续类比 II：谱 C^*代数，《泛函分析杂志》90（1990年），第1期，138–205。[28] W. Arveson，福克空间的连续类比 IV：本质态，《Acta Math.》164（1990年），第3–4期，265–300。[29] W. Arveson，路径空间、连续张量积与 E_0半群，载于《算子代数及其应用》（萨莫斯，1996年），《NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.》，第495卷，1997年，第1–111页。[30] W. Arveson， C^*代数的子代数 III：多变量算子理论。《Acta Math.》181（1998年），第2期，159–228。[31] A. Athavale，关于联合等距算子的交织，《算子理论杂志》23（1990），339–350。[32] A. Athavale， $\mathbb{C}^n$中单位球上的模型理论，《算子理论杂志》27（1992），347–358。[33] A. Athavale，冯·诺依曼-沃尔德分解的多变量推广，《纽约数学杂志》24（2018年），43–51。[34] A. Athavale，关于 Cartan 等距算子的一则注记，《纽约数学杂志》25（2019年），934–948。[35] G. Aubrun、G.、L. Lami、C. Palazuelos、S. Szarek 和 A. Winter，基于张量范数比估计的 XOR 博弈普适间隙。《数学物理通讯》375（2020年），第1期，679–724。[36] N. A. Azamov、A. L. Carey、P. G. Dodds 和 F. Sukochev，算子积分、谱移与谱流，《加拿大数学杂志》61（2009年），第2期，241–263。

[37] N. A. Azamov、A. L. Carey 和 F. Sukochev，谱移位函数与谱流，《数学物理通讯》276（2007年），第1期，51–91页。[38] B. Bagchi、T. Bhattacharyya 和 G. Misra，关于 Ando 定理与 Parrott 例子的一些想法。《线性代数及其应用》341（2002），357–367页。[39] B. Bagchi 和 G. Misra，压缩同态与张量积范数。《积分方程与算子理论》21（1995），第3期，255–269页。[40] K. C. Bakshi 和 R. Bhat，有限维包含的酉正交基，《国际数学研究通知》（IMRN）（即将出版）。预印本见 https://arxiv.org/pdf/2502.11821。[41] K. C. Bakshi、S. Das、Z. Liu 和 Y. Ren，中间子因子之间的夹角及其刚性，《美国数学会汇刊》371（2019），第8期，5973–5991页。[42]K. C. Bakshi、S. Guin、B. Pal 和 Shruthymurali，有限 Watatani 指数的 C^*代数包含的高阶反射与熵，预印本见 https://arxiv.org/pdf/2506.16130。[43] K.C. Bakshi、S. Guin 和 Sruthymurali，简单 C^*代数包含的傅里叶理论不等式，《纽约数学杂志》29（2023），335–362页。[44] K. C. Bakshi 和 V.P. Gupta，关于 II_1因子的不可约四边形的一则注记，《国际数学杂志》30（2019），第12期，1950061（22页）。[45] K. C. Bakshi 和 V.P. Gupta，关于正交系统、双侧基与正则子因子，《纽约数学杂志》26（2020），817–835页。[46] K. C. Bakshi 和 V.P. Gupta，中间子代数格，《伦敦数学会杂志》104（2021），第5期，2082–2127页。[47] K. C. Bakshi 和 V.P. Gupta，关于 Pimsner–Popa 基与深度 2 正则子因子的几点评论，《格拉斯哥数学杂志》64（2022），第3期，586–602页。[48] K. C. Bakshi 和 V.P. Gupta，简单幺正 C^*代数的正则包含，《明斯特数学杂志》（即将出版）。预印本见 https://arxiv.org/abs/2404.06959。[49] N. Bala 和 G. Ramesh，绝对最小值算子的谱性质，《巴拿赫数学分析杂志》14（2020），第3期，630–649页。[50] N. Bala 和 G. Ramesh，次正规绝对范数达到算子的表示，《数学科学通报》171（2021），论文编号 103020，共15页。[51] N. Bala 和 G. Ramesh，最小值达到算子的 Bishop-Phelps-Bollob ´as 型性质，《算子与矩阵》15（2021），第2期，497–513页。[52] N. Bala 和 G. Ramesh，正规型本质等距算子的超不变子空间，《数学分析及其应用杂志》543（2025年），第2期，论文编号 128998，共10页。[53] K. R. Baleviya 和 H. V. Dedania，加权离散阿贝尔半群代数中的紧元，《数学科学论文集》135（2025），文章编号13，https://doi.org/10.1007/s12044-025-00822-9。[54] J. A. Ball 和 V. Bolotnikov，$\mathbb{C}^n$中具有矩阵多项式定义函数的域上的 Schur-Agler 类函数的实现与插值，《泛函分析杂志》213（2004），第1期，45–87页。[55] P. Bandyopadhyay、S. Dutta 和 A. Sensarma，几乎等距理想与不可分 Gurariy 空间，《数学分析及其应用杂志》462（2018），第1期，279–284页。[56] P. Bandyopadhyay、S. Dutta 和 A. Sensarma，ℓ_1 的多面体前对偶及其表示矩阵，《数学分析及其应用杂志》468（2018），第2期，1082–1089页。[57] P. Bandyopadhyay、J. Ganesh 和 Deepak Gothwal，关于一致 Mazur 交性质，《数学研究》260（2021），第3期，273–283页。[58] P. Bandyopadhyay 和 Deepak Gothwal，广义（一致）Mazur 交性质，《数学分析及其应用杂志》523：论文编号 127001，共11页，2023年。[59] P. Bandyopadhyay 和 D. Gothwal，（渐近）一致光滑性、球分离与剩余性结果，arXiv 预印本，arXiv:2502.18217，2025年。[60] P. Bandyopadhyay 和 D. Gothwal，关于遗传 Mazur 交性质的一则简短注记，已投稿。[61] P. Bandyopadhyay 和 A. Sensarma，M前对偶空间中的表示图与 L_1理想，《凸分析杂志》29（2022），第2期，333–344页。[62] P. Bandyopadhyay 和 A. Sensarma，关于交换与非交换 Gurariy 空间的一则注记，《巴塞尔数学文献》118（2022），第1期，65–72页。

[63] T. Banerjee、B. V. R. Bhat 和 M. Kumar，正算子值测度与幺正完全正映射的 C^* 极点，《数学物理通讯》388（2021），第3期，1235–1280页。[64] J. Bannon、J. Cameron、I. Chifan、K. Mukherjee、R. Smith 和 A. Wiggins，冯·诺伊曼代数交叉积中的拟正规化子，《数学进展》第443卷，论文编号 109535，共59页（2024）。[65] J. Bannon、J. Cameron 和 K. Mukherjee，关于非交换结合，《国际数学研究通知》第15卷，4734–4779页（2018）。[66] J. Bannon、J. Cameron 和 K. Mukherjee，关于非交换结合 III，《算子与矩阵》第14卷（第2期），469–490页（2020）。[67] J. Bannon、J. Cameron 和 K. Mukherjee，非交换结合 II，《群、几何与动力系统》第15卷（第2期），553–575页（2021）。[68] S. Barik 和 B.K. Das，可交换压缩算子的等距扩张与 Brehmer 正性，《复分析与算子理论》16（2022），第5期，论文编号69。[69] S. Barik、B.K. Das、K.J. Haria 和 J. Sarkar，多圆盘中一类元组的等距扩张与冯·诺伊曼不等式，《美国数学会汇刊》372（2019），第2期，1429–1450页。[70] S. Barik、B.K. Das 和 J. Sarkar，有限秩可交换压缩算子的等距扩张与冯·诺伊曼不等式，《数学科学通报》165（2020），102915。[71] L. Barth´elemy，由一个半群作用于非线性 ´形式所定义的凸集的 ´不变性，《抽象与应用分析》1（1996），237–262页。[72] C.J.K. Batty 和 T. Duyckaerts，巴拿赫空间上有界半群的非一致稳定性，《演化方程杂志》8（2008），第4期，765–780页。[73] C.J.K. Batty、R. Chill 和 Y. Tomilov，算子半群衰减的精细尺度，《欧洲数学会杂志》18（2016），第4期，853–929页。[74] C.J.K. Batty、M. D. Blake、S. Srivastava，拉普拉斯变换与算子半群的非解析增长界，《积分方程与算子理论》45（2003），125–154页。[75] S. R. Bell，伯格曼核函数与真全纯映射，《美国数学会汇刊》270（1982），第2期，685–691页。[76] D. Beltita、S. Patnaik 和 G. Weiss，B(H)-交换子：历史综述 II 及紧算子交换子的最新进展，载于《算子理论的多样图景》，Theta 数学进展系列第17卷，Theta，布加勒斯特，2014年。[77] C. Bender、D. Chakrabarti、L. Edholm 和 M. Mainkar，商域上 Bergman 投影的 L^p正则性，《加拿大数学杂志》74（2022），第3期，732–772页。[78] S. Beniwal、A. Kumar 和 P. Luthra，局部算子系统结构及其张量积，《算子理论进展》6（2021），第2期，论文编号39，共21页。[79] S. Beniwal、A. Kumar 和 P. Luthra，局部算子代数上的量子化希尔伯特模与局部算子系统的超刚性，《泛函分析年刊》13（2022），第1期，论文编号1，共11页。[80] S. Beniwal、A. Kumar 和 P. Luthra，逼近定理的局部版本与算子系统的 λ张量积，《算子理论进展》7（2022），第3期，论文编号35，共16页。[81] C. Berger、L. Coburn 和 A. Lebow，由可交换等距算子生成的 C^*代数的表示与指标理论，《泛函分析杂志》27（1978年），51–99页。[82] B. V. R. Bhat，量子动力半群的指标理论，《美国数学会汇刊》348，561–583页（1996）。[83] B. V. R. Bhat、P. Bikram、S. De 和 N. Rakshit，全福克空间上的泊松边界，《美国数学会汇刊》375（2022），第8期，5645–5668页。[84] B. V. R. Bhat、R. Devendra、N. Mallick 和 K. Sumesh，纠缠破坏映射的 C^*极点，《数学物理评论》35（2023），第3期，论文编号 2350005，共17页。[85] B. V. R. Bhat 和 C. Gopalakrishna，函数的迭代平方根，《遍历理论与动力系统》43（2023），第7期，2201–2227页。[86] B. V. R. Bhat 和 C. Gopalakrishna，非迭代在连续自映射空间中稠密，《非线性》36（2023），第6期，3419–3430页。[87] B. V. R. Bhat 和 C. Gopalakrishna，多值函数的迭代根，《数学基础》265（2024），第2期，141–163页。[88] B. V. R. Bhat、R. Hillier、N. Mallick 和 Vijaya Kumar U.，完全正映射的根，《线性代数及其应用》587（2020），143–165页。

[89] B. V. R. Bhat、T. C. John 和 R. Srinivasan，《无限模量子高斯态》，《数学物理评论》31，1950030（2019）。[90] B. V. R. Bhat、S. Kar 和 B. Talwar，《外围泊松边界》，即将在《以色列数学杂志》发表（Arxiv: 2209.07731）。[91] B. V. R. Bhat 和 M. Kumar，C^*-极值映射与巢，《泛函分析杂志》282（2022），第 8 期，论文编号 109397，共 40 页。[92] B. V. R. Bhat 和 M. Kumar，对数模代数的格，《数学科学研究所出版物》60（2024），第 3 期，507–537。[93] B. V. R. Bhat、K. R. Parthasarathy 和 R. Sengupta，论量子态的可分性与可延拓性的等价性，《数学物理评论》29（2017），第 4 期，1750012，共 16 页。[94] B.V.R. Bhat 和 S. Srivastava，量子动力半群的稳定性，《算子半群与复分析、调和分析和数学物理相遇》，《算子理论：进展与应用》，第 250 卷，（2015）67-85，Birkhauser。[95] R. Bhatia、T. Jain 和 R. Sengupta，Szeg ´o 型定理与辛特征值的分布，《谱理论杂志》11（2021），第 3 期，1369–1389。[96] R. Bhatia 和 P. ˇSemrl，矩阵正交性与若干距离问题，《线性代数及其应用》287（1999）77-85。[97] T. Bhattacharyya、M. Bhowmik 和 P. Kumar，赫尔格洛茨表示与 Carath ´éodory 逼近，《Bull. Lond. Math. Soc.》56（2024），第 12 期，3752–3776。[98] T. Bhattacharyya、M. Bhowmik 和 H. Sau，有界对称域商域上的 Hankel 算子与射影希尔伯特模，arXiv:2409.04582。[99] T. Bhattacharyya、B. K. Das 和 H. Sau，对称双圆盘上的 Toeplitz 算子，《国际数学研究通知》IMRN 2021，第 11 期，8492–8520。[100] T. Bhattacharyya、P. Kumar 和 H. Sau，通过 Berger-Coburn-Lebow定理研究特征簇，《Anal. PDE》15（2022），第 2 期，477–506。[101] T. Bhattacharyya、S. Pal 和 S. Shyam Roy，通过求解算子方程对 Γ-压缩算子进行膨胀，《数学进展》230（2012），第 2 期，577–606。[102] T. Bhattacharyya 和 H. Sau，对称双圆盘上的全纯函数——实现、插值与延拓，《泛函分析杂志》274（2018），第 2 期，504–524。[103] T. Bhattacharyya、A. Chattopadhyay、S. Giri 和 C. Pradhan，利普希茨估计及其在迹公式中的应用，（2025），《Banach J. Math. Anal.》（即将发表），arXiv:2312.08706 [math.FA]。[104] M. Bhattacharjee 和 B.K. Das，超压缩算子的因子，《算子理论杂志》85（2021），443 - 462。[105] M. Bhattacharjee、B.K. Das、R. Debnath 和 S. Panja，$\mathcal{W}$-超压缩算子的膨胀与算子模型，《Complex Anal. Oper. Theory》17（2023），第 2 期，论文编号 22。[106] M. Bhowmik 和 P. Kumar，与多圆盘相关的商域上的函数论，《泛函分析杂志》289（2025），第 6 期，论文编号 110978，共 29 页。[107] P. Bikram 和 K. Mukherjee，q-变形 Araki-Woods 冯·诺伊曼代数中的生成元极大阿贝尔子代数与因子性，《泛函分析杂志》273(4)（2017），1443–1478。[108] P. Bikram、K. Mukherjee、E. Ricard 和 S. Wang，论 q-变形 Araki-Woods 冯·诺伊曼代数的因子性，《数学物理通讯》398(2)（2023），797–821。[109] G. Birkhoff，线性度量空间中的正交性，《Duke Math. J.》1（1935），169–172。[110] M. S. Birman 和 M. Z. Solomyak，双重斯蒂尔切斯算子积分，《数学物理问题》，列宁格勒大学出版社，（1966），33–67。[111] D. Bisch，双模、 高阶相对交换子与和子因子相关的融合代数，《Fields Institute Communications》，第 13 卷（1997），13–63。[112] S. Biswas、S. Datta、G. Ghosh 和 S. Shyam Roy，希尔伯特模的约化子模与 Chevalley-Shephard-Todd定理，《数学进展》403（2022），论文编号 108366，共 54 页。[113] S. Biswas、P. Deb、S. Hazra、D. K. Keshari 和 G. Misra，齐次解析希尔伯特模——非传递作用的情形，arXiv:2502.03883。[114] S. Biswas、G. Ghosh、G. Misra 和 S. Shyam Roy，论具有$\mathfrak{S}_n$-不变核的希尔伯特模的约化子模，《泛函分析杂志》276（2019），第 3 期，751–784。

[115] S. Biswas、G. Ghosh、E. K. Narayanan 和 S. Shyam Roy，商域上的压缩希尔伯特模，arXiv:2409.11101。[116] S. Biswas、D. K. Keshari 和 G. Misra，Cowen-Douglas 类中算子的无限可分度量与曲率不等式，《伦敦数学会杂志》88（2013），941 - 956。[117] S. Biswas、G. Misra 和 M. Putinar，有限秩希尔伯特模的酉不变量，《纯粹与应用数学杂志》662（2012），165 - 204。[118] S. Biswas 和 G. Misra，一类希尔伯特模的奇点消解，《印第安纳大学数学杂志》61（2012），1019 - 1050。[119] S. Biswas、G. Misra、S. Sen，通过层模型研究一类解析希尔伯特模子模的几何不变量，《Complex Anal. Oper. Theory》17（2023），论文编号 2，共 24 页。[120] S. Biswas、S. Shyam Roy，Γ-压缩算子的函数模型与 Γ_n-等距算子的刻画，《泛函分析杂志》266（2014），第 10 期，6224–6255。[121] D. P. Blecher 和 V. I. Paulsen，算子空间的张量积，《泛函分析杂志》99（1991），第 2 期，262–292。[122] D. P. Blecher 和 R. R. Smith，Haagerup 张量积的对偶，《伦敦数学会杂志》（2）45（1992），第 1 期，126–144。[123] H. Bohr，关于幂级数的一个定理，《伦敦数学会会刊》2（1914），1-5。[124] F. F. Bonsall 和 J. Duncan，赋范空间上算子的数值域与赋范代数元素的数值域，Cambrige University Press，伦敦，1971。[125] A. Borichev 和 Y. Tomilov，函数与算子半群的最优多项式衰减，《数学年刊》347（2010），第 2 期，455-478。[126] J. M. Borwein、M. Fabian，具有 Gateaux 可微点但不具有 Fr ´echet 可微点的凸函数，《加拿大数学杂志》45（1993），第 6 期，1121–1134。[127] A. Brown 和 C. Pearcy，算子交换子的结构，《数学年刊》第二辑，第 82 卷，1965。[128]M. Bre˘sar、Victor S. Shulman、Yuri V. Turovskii，非结合算子代数中的可处理性与理想问题，《积分方程与算子理论》67，2010。[129] C. Carath´eodory，复变量函数论，第二卷，Chelsea 出版公司，纽约，1954。[130] X. Carvajal 和 W. Neves，达到范数的算子，《积分方程与算子理论》72（2012），第 2 期，179–195。[131] X. Carvajal 和 W. Neves，达到最小值的算子，《巴西数学会通报》（新系列）45（2014），第 2 期，293–312。[132] A. Chattopadhyay、C. Coine、S. Giri 和 C. Pradhan，$\mathcal{S}^p$-扰动的迹公式与 Koplienko-Neidhardt 迹公式的延拓，（2024），预印本，arXiv:2411.16426 [math.FA]。[133] A. Chattopadhyay、C. Coine、S. Giri 和 C. Pradhan，高阶 S^p-可微性：酉情形，《谱理论杂志》15（2025），第 1 期，195–222。[134] A. Chattopadhyay、S. Das 和 C. Pradhan，酉算子的 Koplienko-Neidhardt 迹公式——一种新证明，《数学分析及其应用杂志》505（2022），第 1 期，论文编号 125467，共 21 页。[135] A. Chattopadhyay、S. Das 和 C. Pradhan，二阶迹公式，《Math. Nachr.》297（2024），第 7 期，2581–2608。[136] A. Chattopadhyay、S. Giri 和 C. Pradhan，多变量中的估计与高阶谱移测度，《线性代数及其应用》698（2024），102–134。[137] A. Chattopadhyay、S. Giri、C. Pradhan 和 A. Usachev，高维中的迹公式，（2023），预印本，arXiv:2303.13298 [math.FA]。[138] A. Chattopadhyay、G. Hong、A. Pal、C. Pradhan 和 S. K. Ray，S_q^m到 S_p^n的等距嵌入性，《泛函分析杂志》282（2022），第 1 期，论文编号 109281，共 29 页。[139] A. Chattopadhyay、G. Hong、C. Pradhan 和 S. K. Ray，关于将 S_q^m 作为非交换拟巴拿赫空间等距嵌入S_p^n，《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》154（2024），第 4 期，1180–1203。[140] A. Chattopadhyay、T. D. H. van Nuland 和 C. Pradhan，关于相对有界扰动的微分、泰勒级数及任意阶谱移位函数，（2024），预印本，arXiv:2404.18422[math

.FA].

[141] A. Chattopadhyay 和 C. Pradhan，《通过乘法路径研究压缩算子对的高阶谱移位》，《纽约数学杂志》29（2023年），261–285。[142] A. Chattopadhyay、C. Pradhan 和 A. Skripka，《 τ紧预解式情形下谱作用泛函的逼近》，《积分方程与算子理论》95（2023年），第3期，论文编号20，15页。[143] A. Chattopadhyay、C. Pradhan 和 A. Skripka，《压缩算子与耗散算子的高阶迹公式》，《加拿大数学杂志》（2025年），doi：https://doi.org/10.4153/S0008414X25101296。[144] A. Chattopadhyay 和 K. B. Sinha，《Koplienko迹公式》，《积分方程与算子理论》73（2012年），第4期，573–587。[145] A. Chattopadhyay 和 K. B. Sinha，《三阶迹公式》，《印度科学院数学科学论文集》123（2013年），第4期，547–575。[146]A. Chattopadhyay 和 K. B. Sinha，《二变量迹公式》，预印本，（2014年），arXiv:1402。0792 [math.FA]。[147] A. Chattopadhyay 和 K. B. Sinha，《关于Carey-Helton-Howe-Pincus迹公式》，《泛函分析杂志》274（2018年），第8期，2265–2290。[148] A. Chattopadhyay 和 K. B. Sinha，《压缩算子的迹公式及其在 $\mathbb{D}$中的表示》，《算子理论杂志》88（2022年），第2期，275–288。[149] A. Chattopadhyay 和 A. Skripka，《相对 Schatten 类扰动的迹公式》，《泛函分析杂志》274（2018年），第12期，3377–3410。[150] S. Chavan 和 S. Kumar，《多个变量形式幂级数的球面对称希尔伯特空间-I》，《算子理论杂志》72（2014年），405-428。[151] Dongjian Chen，Bor-Luh Lin，《巴拿赫空间的 B-凸性与Mazur集》，《波兰科学院数学通报》43（1995年），191-198。[152] R. Chill，Y. Tomilov，《算子半群的稳定性：思想与结果》，《算子理论展望》，Banach中心出版物，第75卷，（2007年），波兰科学院数学研究所，华沙，71-109。[153] R. Chill，D. Seifert，Y. Tomilov，《算子半群的半一致稳定性与阻尼波的能量衰减》，《皇家学会哲学汇刊A辑》378（2020年），第2185期，20190614，24页。[154] R. Chill，L. Paunonen，D. Seifert，R. Stahn，Y. Tomilov，《阻尼压缩半群的非一致稳定性》，分析与偏微分方程，16(5)，（2023年），1089-1132。[155] M.D. Choi 和 K. R. Davidson，《一个 3×3 膨胀反例》，《Bull. Lond. Math. Soc.》45（2013年），第3期，511–519。[156] R. Cleve，L. Liu 和 V. I. Paulsen，《纠缠的完美窃取》，数学物理杂志58（2017年），第1期，012204，18页。[157] C. Coine，C. Le Merdy 和 F. Sukochev，《三重算子积分何时取值于迹类？》，格勒诺布尔傅里叶研究所年刊71（2021年），第4期，1393–1448。[158] J. Conway，《次正规算子理论》，数学调查专著，第36卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991年。[159] M. J. Cowen 和 R. G. Douglas，《复几何与算子理论》，《Acta Math.》141（1978年），第3-4期，187–261。[160] J. Crann，D. W. Kribs 和 R. J. Pereira，《正交酉基与子因子猜想》，《美国数学会会刊》151（2023年），第9期，3793–3799。[161] R. E. Curto 和 N. Salinas，《广义Bergman核与Cowen-Douglas理论》，《美国数学杂志》106（1984年），第2期，447–488。[162] M. Dadarlat 和 P. Vaidyanathan，《具有有限个奇异点的 $C[0,1]$-代数的E-理论》，《K-理论杂志》13（2014年），249-274。[163] H. G. Dales，《巴拿赫代数与自动连续性》，伦敦数学会专著，第24卷，克拉伦登出版社，牛津，2000年。[164] H. G. Dales 和 H. V. Dedania，《实轴子半群上的加权卷积代数》，《数学论文集》，波兰科学院数学研究所，第459卷，2009年。[165] D. Daners，J. Gl¨uck，J.B. Kennedy，《线性算子最终正半群》，《数学分析及其应用杂志》433，（2016年），1561-1593。[166] D. Daners，J. Gl¨uck，J.B. Kennedy，《Banach格上的最终正半群与渐近正半群》，《微分方程杂志》261，（2016年），2607–2649。

[167] D. Daners，J. Gl¨uck，《支配与平滑条件在最终正半群理论中的作用》，《澳大利亚数学会通报》96，（2017年），286–298。[168] D. Daners，J. Gl¨uck，《迈向最终正半群的扰动理论》，《算子理论杂志》79，（2018年），345–372。[169] D. Daners，J. Gl¨uck，《算子半群一致最终正性的一个判据》，《积分方程与算子理论》90，46（2018年）。[170] B.K. Das 和 J. Sarkar，《安藤膨胀、冯·诺伊曼不等式与特征簇》，《泛函分析杂志》272（2017年），2114-2131。[171] B.K. Das，S. Sarkar 和 J. Sarkar，《压缩算子的分解》，《数学进展》322（2017年），186-200。[172] B.K. Das 和 H. Sau，《纯内函数、特征簇与环面代数交换压缩对》，《美国数学会会刊》152（2024年），第3期，1067–1081。[173] B.K. Das 和 H. Sau，《代数簇作为完全谱集》，预印本。[174] B. K. Das 和 H. Sau，《对称化多圆盘上Toeplitz算子的代数性质》，Complex Anal. Oper. Theory 15（2021年），第3期，论文编号60，28页。[DM] D. De 和 K. Mukherjee，《GNS空间中的有界坐标》，《数学论文集》583（2023年），1–106。[175] H. V. Dedania，《关于加权离散阿贝尔半群代数的盖尔范德空间》，《今日数学》19(2)（2001年）15-24。[176] H. V. Dedania 和 A. B. Patel，《非幺范数代数及其幺化中的空间数值域》，《萨拉热窝数学杂志》20(33)卷，第2期，（2024年）255-262。[177] H. V. Dedania 和 A. B. Patel，《范数代数中空间数值域的凸性》，《印度纯粹与应用数学杂志》，（2024年），https://doi.org/10.1007/s13226-024-00720-2。[178] H. V. Dedania 和 J. G. Patel，《加权离散半群代数上的算子范数》$\ell^1(S,\ \omega)$，《美国数学会会刊》149(12)（2021年）5313-5319。[179] A. Defant 和 D. Wiesner，《算子空间理论中的多项式》，《泛函分析杂志》266（2014年），第9期，5493–5525。[180] R. Devendra、T.C. John 和 K. Sumesh，《什么是高斯信道？何时可通过多端口干涉仪实现？》，arXiv:2505.02834。[181] B. Dickinson、Ph. Delsarte、Y. Genin 和 Y. Kamp，《伪正与伪有理矩阵的最小实现》，《IEEE电路与系统汇刊》32（1985年），第6期，603–605。[182] P. G. Dixon，《满足非幺冯·诺伊曼不等式的巴拿赫代数》，《伦敦数学会通报》27（1995年），359-362。[183] A. A. Dosiev，《局部算子空间、无界算子与多范数 C^*-代数》，《泛函分析杂志》255（2008年），第7期，1724–1760。[184] R. G. Douglas，G. Misra 和 C. Varughese，《关于商模——任意重数的情形》，《泛函分析杂志》174（2000年），364-398。[185] R. G. Douglas，G. Misra 和 C. Varughese，《由希尔伯特模的分解得到的商模几何不变量》，载于《算子理论：进展与应用》129（2001年），241-270。[186] R. G. Douglas，M. Putinar 和 K. Wang，《伯格曼空间解析乘子的约化子空间》，《泛函分析杂志》263（2012年），第6期，1744–1765。[187] S. Drury，《关于von Neumann不等式的评述》，《巴拿赫空间、调和分析与概率论》，会议论文集（R. Blei 和 S. Syd-ney 编），斯托尔斯80/81。施普林格讲义995，14-32。[188] Y. Duan 和 K. Guo，《希尔伯特模局部化的维数公式》，《算子理论杂志》62（2009年），第2期，439-452。[189] S. Dutta，D. Khurana 和 A. Sensarma，《表示矩阵、 M-理想与L_1-预对偶空间的张量积》，Extracta Math. 33（2018年），第1期，33–50。[190] S. Dutta 和 Bor-Luh Lin，《局部U-凸性》，《凸分析杂志》18（2011年），第3期，811–821。[191] K. Dykema 和 A. Skripka，《高阶谱移》，《泛函分析杂志》257（2009年），第4期，1092–1132。

[192] K. Dykema 和 A. Skripka，赋范理想上迹的扰动公式，《数学物理通讯》325（2014年），第 3 期，1107–1138。[193] A. Edigarian 和 W. Zwonek，对称多圆盘的几何，《巴塞尔数学文献》84（2005年），第 4 期，364–374。[194] E. G. Effros 和 Z.-J. Ruan，Haagerup 张量积的自对偶性与希尔伯特空间分解，《泛函分析杂志》100（1991年），第 2 期，257–284。[195] E. G. Effros 和 Z.-J. Ruan，算子空间，伦敦数学会专著，新系列，第 23 卷，牛津大学出版社，纽约，2000年。[196] D. R. Farenick 等，离散群上的算子系统，《数学物理通讯》329（2014年），第 1 期，207–238。[FMP] P. Fima、K. Mukherjee 和 I. Patri，关于紧双交叉积，《非交换几何杂志》第 11 卷第 4 期，1521–1591（2017年）。[197]S. Fisher，有限 Blaschke 乘积的凸包，《美国数学会通报》74（1968年），1128–1129。[198] S. Fisher，关于 Schwarz 引理与内函数，《美国数学会汇刊》138（1969年），229–240。[199] D. Galicer、S. Muro 和 P. Sevilla-Peris，齐次多项式的冯·诺伊曼不等式的渐近估计。《纯粹与应用数学杂志》743（2018年），213–227。[200] J. Ganesh、G. Ramesh 和 D. Sukumar，绝对最小达到算子的刻画，《数学分析及其应用杂志》468（2018年），第 1 期，567–583。[201] E. Gardella，紧群作用的 Rokhlin 维数，《印第安纳大学数学杂志》66（2017年），659–703。[202] S. Ghara、S. Kumar 和 P. Pramanick，$\mathbb{K}$齐次的有界对称域上的算子元组，《以色列数学杂志》247（2022年），331–360。[203] S. Ghara 和 G. Misra，两个希尔伯特模张量积的分解，《算子理论、算子代数及其与几何和拓扑的相互作用》，Ronald G. Douglas 纪念文集，221–265，编者：R. Curto、W. Helton、W. Lin、X. Tang、R. Yang、G. Yu，Birkhauser，2020年。[204] S. Ghara 和 G. Misra，高斯曲率与 Cowen-Douglas 算子曲率的关系，《菲尔兹研究所通讯》87，施普林格，Cham，2023年，399–417。[205] S. Ghara、S. Kumar、G. Misra 和 P. Pramanick，在酉群下齐次的乘法算子交换元组，《伦敦数学会杂志》（第 2 辑）109（2024年），第 4 期，论文编号 e12890，共 37 页。[206] G. Ghosh，加权 Bergman 空间与复反射群，《数学分析及其应用杂志》548（2025年），第 2 期，论文编号 129366，共 24 页。[207] G. Ghosh，真全纯映射诱导的 Bergman 空间上的乘法算子，《数学分析及其应用杂志》510（2022年），第 2 期，论文编号 126026，共 12 页。[208] A. Ghosh 和 G. Ghosh，L^p 商域上 Szeg ¨o 投影的正则性，《纽约数学杂志》29（2023年），911–930。[209] G. Ghosh 和 S. Hazra，广义有向半树上加权移位算子的解析结构。《线性与多重线性代数》71（2023年），第 9 期，1545–1564。[210] G. Ghosh 和 E. K. Narayanan，商域的加权 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子，《数学科学通报》188（2023年），论文编号 103340，共 29 页。[211] G. Ghosh 和 S. Shya m Roy，有界对称域的适当像上的 Brown-Halmos 型定理，arXiv:2405.08002。[212] J. R. Giles、D. A. Gregory、Brailey Sims，具有 Mazur 交性质的赋范线性空间的刻画，《澳大利亚数学会通报》18（1978年），105–123。[213] A. M. Gleason，极大理想的刻画，《分析与数学杂志》19（1967年），171–172。[214] D. Gothwal，关于（一致）Mazur 交性质的更多结果，《数学研究》278（2024年），第 1 期，49–67。[215]H. Grunsky，多连通域函数论讲义，Vandenhoeck & Ruprecht，G¨ottingen，1978年，《数学研究》丛书，第 4 号。[216] A. Grothendieck，拓扑张量积的度量理论概述，Bol. Soc. Mat. S˜ao Paulo。8（1953年），1–79。

[217] R. Gupta、A. Mal、G. Misra 和 S. K. Ray，极点、多胞体与格罗滕迪克常数，预印本，2025年。[218] R. Gupta、G. Misra 和 S. K. Ray，关于 Grothendieck 不等式的一种变体及张量积范数的估计。arXiv:2305.13270v2[219] R. Gupta 和 S. K. Ray，关于 N. Th. Varopoulos 的一个问题及常数 $C_2(n)$。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》68（2018年），第 6 期，2613–2634。[220] R. Gupta 和 Md. Ramiz Reza， $\ell^1(n)$上的算子空间结构。《休斯敦数学杂志》44（2018年），第 4 期，1205–1212。[221] V. P. Gupta 和 P. Luthra，通过 C^*-包络研究算子系统核性，《澳大利亚数学会杂志》101（2016年），第 3 期，356–375。[222] V. P. Gupta 和 D. Sharma，关于中间子代数之间内角的可能取值，《澳大利亚数学会杂志》117（2024年），第 1 期，44–66。[223] U. Haagerup， C^*-代数上双线性形式的 Grothendieck 不等式，《数学进展》56（1985年），第 2 期，93–116。[224] U. Haagerup 和 M. Musat， C^*-代数上双线性形式的 Effros-Ruan猜想，《数学发明》174（2008年），第 1 期，139–163。[225] M. Hamana，算子系统的内射包络，Publ. Res. Inst. Math. Sci. 15（1979年），第 3 期，773–785。[226] M. Hartz，关于多圆盘上的 von Neumann 不等式，《数学年刊》391（2025年），第 4 期，5235–5264。[227] O. Hein¨avaara，迹联合谱测度。《数学发明》239（2025年），第 2 期，505–526。[228] O. Hein¨avaara，Schatten-3类中的平面。《泛函分析杂志》287（2024年），第 2 期，论文编号 110469，共 19 页。[229] I. Hirshberg、W. Winter 和 J. Zacharias，Rokhlin 维数与 C*-动力学。《数学物理通讯》335（2015年），637–670。[230] H. Huang 和 D. Zheng，有界域的 Bergman 空间上的乘法算子，《数学进展》461（2025年），论文编号 110045，共 35 页。[231] Y. Hou、K. Ji、S. Ji 和 J. Xu，全纯向量丛的几何与交换算子组的相似性，《算子理论杂志》91（2024年），169–202。[232] Z. Huo 和 B. D. Wick， L^p-正则性：对称多圆盘上的 Bergman 投影，arXiv:2303.10002。[233] S. Ino 和 Y. Watatani，简单 C^*-代数的中间 C^*-子代数的扰动，《Bull. Lond. Math. Soc.》46（2014年），469–480。[234] Jaiksihan、S. Lata 和 D. Singh，开圆盘上函数空间的线性泛函的乘法性，《数学文献》123（2024年），65–74。[235] Jaiksihan、S. Lata 和 D. Singh，拓扑空间上多个变量的 Kowalski-S-lodkowski 定理，arXiv 预印本 arXiv:2410.04131（2024年）。[236] R. Jain 和 A. Kumar， C^*-代数的算子空间张量积，《数学杂志》260（2008年），第 4 期，805–811。[237] R. C. James，赋范线性空间中的正交性与线性泛函，《美国数学会汇刊》 61（1947年），265–292。[238] K. Ji、C. Jiang、D. K. Keshari 和 G. Misra，一类 Cowen-Douglas 算子的旗结构刚性，《泛函分析杂志》272（2017年），2899–2932。[239] K. Ji、H-K Kwon、J. Sarkar 和 J. Xu，Cowen-Douglas 类的一个子类及其相似性，《 Math. Nachr. 》 295 （ 2022 年），2197–2222。[240] J. Jiang 和 Ji, Kui，全纯曲线的相似分类，《数学进展》215（2007年），446–468。[241] C. Jiang、K. Ji 和 G. Misra，Cowen-Douglas 类中拟齐次全纯曲线与算子的分类，《泛函分析杂志》273（2017年），2870–2915。[242] C. Jiang、K. Ji 和 D. Keshari，Cowen-Douglas 算子的几何相似不变量，《非交换几何杂志》17（2023年），573–608。[243] C. Jiang 和 Z. Wang，希尔伯特空间上的强不可约算子，《Pitman数学研究札记丛书》第 389 卷，Longman，Harlow，1998年。

[244] T. C. John 和 K. R. Parthasarathy，有限模高斯态、其对称性及相关压缩算子的统一参数化及其若干应用，《数学物理杂志》62，022102（2021年）。[245] V. Jones，子因子的指标，数学发明 72（1983），1–25。[246] M. Junge 和 J. Parcet，混合范数不等式与算子空间 L_p 嵌入理论。Mem. Amer. Math. Soc.，203（2010），vi+155 页。[247] V. Kaftal 和 G. Weiss，软理想与算术平均理想，《积分方程与算子理论》，第58卷，2007年。[248] V. Kaftal 和 G. Weiss，迹、理想与算术平均，美国国家科学院院刊，第99卷，2002年。[249] J. P. Kahane 和 W. Zelazko，交换巴拿赫代数中极大理想的刻画，《数学研究》29（1968），339-343。[250] A. Kansal 和 A. Kumar，三元环的 Haagerup 张量积，《数学分析及其应用杂志》528（2023年），第1期，论文编号127482，20页。 C^*A. Kansal 和 A. Kumar，三元环及算子三元环的 Haagerup 张量积中的理想，《算子与矩阵》17（2023年），第3期，731–748。[252] A. S.. Kavruk 等，算子系统的张量积，《泛函分析杂志》261（2011年），第2期，267–299。[253] M. Kennedy、N. A. Manor 和 V. I. Paulsen，PPT 映射的复合，《量子信息与计算》18（2018年），第5-6期，472–480。[254] V. B. Kiran Kumar 和 A. Tonny，关于无限维算子辛谱的逼近，《数学物理杂志》65（2024年），第4期，论文编号042201，19页。[255] E. Kirchberg 和 S. Wassermann，由算子系统生成的 C^*代数，《泛函分析杂志》155（1998年），第2期，324–351。[256] S.-J. Kim、V. I. Paulsen 和 C. P. Schafhauser，二元约束系统的同步游戏，《数学物理杂志》59（2018年），第3期，032201，17页。[257] A. Koranyi 和 G. Misra，有界对称域上齐性厄米全纯向量丛与 Cowen-Douglas 类，《数学进展》351（2019年），1105 - 1138。[258] A. Koranyi 和 G. Misra，Cowen-Douglas 类中齐性算子的分类，《数学进展》226（2011年），5338 - 5360。[259] G. Knese，Kummert 方法在双圆盘上的实现，《印第安纳大学数学杂志》70（2021年），第6期，2369-2403。[260] G. Knese，在双圆盘上没有零点的多项式，分析与偏微分方程，3（2020年），第2期，109-149。[261] L. S. Koplienko，非核型扰动的迹公式，西伯利亚数学杂志 25（1984），第5期，62–71（俄文）。英译：西伯利亚数学杂志 25（1984），735–743。[262] S. Kowalski 和 Z. Słodkowski，巴拿赫代数中乘法线性泛函的刻画，《数学研究》67（1980），215–223。[263] M. G. Krein，关于扰动理论中的迹公式，数学文集 N.S. 33（75）（1953年），597–626。[264] M. G. Krein，关于酉算子和自伴算子的扰动行列式及迹公式，Dokl. Akad. Nauk SSSR 144（1962），268–271。[265] M. G. Krein，若干类算子对的扰动行列式及迹公式，《算子理论杂志》17（1987年），第1期，129–187。[266] S. H. Kulkarni 和 G. Ramesh，关于最小值达到算子的稠密性，《算子与矩阵》12（2018年），第3期，699–709。[267] S. H. Kulkarni 和 G. Ramesh，绝对最小值可达闭算子：综述，载于《反问题、正则化方法及相关主题——纪念 Thamban Nair 文集》，273–302，工业与应用数学，施普林格，新加坡。[268] A. Kumar 和 A. M. Sinclair， C^*代数的算子空间张量积上的范数等价，《美国数学会汇刊》350（1998年），第5期，2033–2048。[269] A. Kumar， C^*代数的算子空间射影张量积，《数学杂志》237（2001年），第2期，211–217。[270] A. Kumar 和 P. Luthra，算子系统归纳极限的核性性质与 C^*包络，《韩国数学会杂志》55（2018年），第5期，1045–1061。

[271] D. Kumar、K. B. Sinha、S. Srivastava，量子动力半群与稳定性，《数学分析及其应用杂志》516，第1期，（2022年），126492，21页。[272] S. Kumar，多个变量中形式幂级数的球面对称Hilbert空间-II，Complex Anal. Oper. Theory，10（2016年），505-526。[273] S. Kumar、M. K. Mal 和 P. Pramanick，嘉当域上的 Cartan 等距算子与 Toeplitz 算子，https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.24325。[274] H-K. Kwon 和 S. Treil，非压缩算子的曲率条件并不意味着其与后向移位相似，《积分方程与算子理论》66（2010），529 - 538。[275] E.C. Lance，关于核 C^*代数，《泛函分析杂志》12（1973），157–176。[276] S. Lata 和 D. Singh，非交换 Hardy 空间中的 Bohr不等式，《美国数学会会刊》150（2022年），201-211。[277] E. Levy 和 O.R. Shalit，有限维中的膨胀理论：可能、不可能与未知，《落基山数学杂志》44（2014年），第1期，203–221。[278] I. M. Lifshitz，关于与量子统计有关的扰动理论问题，《数学科学进展》（N.S.）7（1952），第1期（47），171–180。[279] R. Longo，共形子网与中间子因子，Commun. Math. Phys. 237（2003年），7-30。[280] J. Loreaux、S. Patnaik、S. Petrovic、G. Weiss，关于紧算子的交换子：安德森方法的推广与局限，《积分方程与算子方程》，2024年。[281] J. Loreaux 和 G. Weiss，矩阵分裂与 $B(\mathcal{H})$中的理想，《算子与矩阵》，第16卷，2022年。[282] J. Loreaux 和 G. Weiss，理想上的迹与交换子性质，Theta Ser. Adv. Math.，第20卷，Theta，布加勒斯特，2018年。[283] S. Lord、F. Sukochev 和 D. Zanin，奇异迹。第1卷：理论，德古意特数学研究丛书，第46/1卷，德古意特，柏林，2021年。[284] M. Lupini，泛函分析中的 Fra¨ıss´e 极限，《数学进展》338（2018年），93–174。[285] P. Luthra 和 A. Kumar，精确算子系统的嵌入与 C^*包络，《澳大利亚数学会通报》96（2017年），第2期，274–285。[286] P. Luthra、A. Kumar 和 V. Rajpal，算子空间理论中的多项式：矩阵序与代数方面，《正性》22（2018年），第2期，629–652。[287] A. Mal、S. Dey 和 K. Paul，无限维空间之间算子光滑性的刻画，《线性与多重线性代数》70（2022年），3477-3489。 kA. Mal 和 K. Paul，紧算子空间中的距离公式与最佳逼近，《数学分析及其应用杂志》509（2022年），125952。[288] A. Mal、K. Paul 和 D. Sain，Birkhoff-James 正交性与算子空间几何，Infosys Science Foundation Series，施普林格新加坡（2024年），ISBN:978-981-99-7110-7。[289] M. M. Malamud 和 H. Neidhardt，可加扰动与非可加扰动的迹公式，《数学进展》274（2015年），736–832。[290] M. M. Malamud、H. Neidhardt 和 V. V. Peller，谱移的绝对连续性，《泛函分析杂志》276（2019年），第5期，1575–1621。[291] S. A. M. Marcantognini 和 M. D. Mor[292] an，压缩算子对及极大耗散算子对的 Koplienko-Neidhardt 迹公式，《Math. Nachr.》279（2006年），第7期，784–797。 J. Mashreghi 和 T. Ransford，闭单位球中的逼近，《逼近理论新趋势：纪念 Andre Boivin》（2018年），89–129。[293] J. Mashreghi 和 T. Ransford，适用于模的 Gleason–Kahane–Zelazko 定理及其在全纯函数空间中的应用，《伦敦数学会通报》47（2015年），1014-1020。[294] G. Misra，完全压缩希尔伯特模与 Parrott 例子。《匈牙利数学学报》63（1994年），第3期，291-303。[295] G. Misra、A. Pal 和 C. Varughese，有限维巴拿赫空间的压缩性与完全压缩性。《算子理论杂志》82（2019年），第1期，23–47。[296] G. Misra、S. Shyam Roy 和 G. Zhang，对称多圆盘上一类加权 Bergman 空间的再生核，《美国数学会会刊》141（2013年），第7期，2361–2370。

[298] G. Misra、G. 和 V. Pati，《压缩模与完全压缩模、矩阵切向量及距离递减度量》。《算子理论杂志》30（1993），第2期，353–380。[299] G. Misra 和 R. Md. Reza，《曲率不等式与极值算子》。《伊利诺伊数学杂志》63（2019），193–217。[300] G. Misra 和 N. N. Sastry，《有界模、极值问题与曲率不等式》。《泛函分析杂志》88（1990），第1期，118–134。[301] G. Misra 和 N. N. Sastry，《完全有界模及相关极值问题》。《泛函分析杂志》91（1990），第2期，213–220。[302] G. Misra 和 H. Upmeier，《Jordan-Kepler簇上的奇异希尔伯特模》，载于《算子理论、算子代数及其与几何和拓扑的相互作用：Ronald G. Douglas 纪念文集》，425–453，编者：R. Curto、W. Helton、W. Lin、X. Tang、R. Yang、G. Yu，Birkhauser，2020年。[303] G. Misra 和 H. Upmeier，《对称域上的齐性向量丛与交织算子》。《数学进展》303（2016），1077–1121。[304] A. N. Mohapatra 和 K. B. Sinha，《谱移位函数与迹公式》，载于《谱理论与逆谱理论》。《印度科学院数学科学论文集》104（1994），第4期，819–853。[305] A. N. Mohapatra 和 K. B. Sinha，《酉算子的谱移位函数与迹公式——一种新的证明》。《积分方程与算子理论》24（1996），第3期，285–297。[MP] K. Mukherjee 和 I. Patri，《紧量子群的自同构》。《伦敦数学会杂志》116(2)，330–377（2018年）。[306] S. P. Murugan 和 S. Sundar，《关于 E_0-半群——多参数情形》。《无穷维分析、量子概率及相关主题》21（2018），第2期，1850007，20页。[307] V. M¨uller 和 F. Vasilescu，《若干可交换多算子的标准模型》。《美国数学会会刊》117（1993），979–989。[308] C. H. Namitha 和 S. Sundar，《多参数可分解乘积系统》。《休斯敦数学杂志》50（2024），第1期，29–82。[309] C.H. Namitha 和 S. Sundar，《关于多参数 CAR（典范反对易关系）流》，即将在《加拿大数学杂志》发表，arxiv:2312.06433。[310] H. Neidhardt，《谱移位函数与希尔伯特–施密特扰动：对 L. S. Koplienko 若干工作的拓展》。《Math. Nachr.》138（1988），7–25。[311] O. Nevanlinna，《冯·诺依曼结果的矩阵值版本及其在时间离散化中的应用》。《计算与应用数学杂志》12 & 13（1985），475–489。[312] B. Nica，《巴拿赫代数的同伦稳定秩》。《泛函分析杂志》261（2011），803–830。[313] A. Nirbhay 和 P. Vaidyanathan，《与群相关的某些 C*-代数的同伦稳定秩》。《数学研究》261（2021），307–328。[314] D. Nikshych 和 L. Vainermann，《 II_1 因子的深度2子因子的刻画》。《泛函分析杂志》171（2000），278–307。[315] A. Olofsson，《伴随加权移位的部分》。《算子理论杂志》74，第2期（2015年秋），249–280。[316] E. M. Ouhabaz，《闭凸集的不变性与半群的支配判据》。《势分析》5(6)（1996），611–625。[317] A. Pal，《关于 Γ_n-压缩算子及其条件膨胀》。《数学分析及其应用杂志》510（2022），第2期，论文编号126016，36页。[318] S. Pal 和 O. Shalit，《对称双圆盘中的谱集与特征簇》。《泛函分析杂志》266（2014），第9期，5779–5800。[319] S. K. Pandey 和 V. I. Paulsen，《 $\mathcal{AN}$ 算子的谱刻画》。《澳大利亚数学会杂志》102（2017），第3期，369–391。[320] Pappu、S. Rastogi、S. Srivastava，《最终正性、扰动与时滞半群》。《正性》29（2025），第1期，12，24页。[321] S. Parrott，《可交换压缩算子的酉膨胀》。《太平洋数学杂志》34（1970），481–490。[322] K. R. Parthasarathy，《两个 n模高斯态的夹心相对 α-熵的计算》。《无穷维分析、量子概率及相关主题》25（2022），第2期，论文编号2250008，10页。[323] K

. R. Parthasarathy ，什么是高斯态? ，Commun . Stoch . Anal. 4, 143–160 (2010) .

[324] A. B. Patel, 《Beurling代数 $L^1(G,\omega)$ 中空间数值域的凸性》, 《印度纯粹与应用数学杂志》, (2025年), https://doi.org/10.1007/s13226-025-00843-0.[325] S. Patnaik, 《紧算子李代数的简单性: 一种直接方法》, 《数学分析及其应用杂志》510, 2022年。[326] S. Patnaik、S. Petrovic、G. Weiss, 《 $B(\mathcal{H})$ 及更广范围内的通用块三对角化》, 《分析与几何进展》2, 德古意特, 柏林, 2020年。[327] K. Paul, 《沿另一算子方向的算子可平移半径》, 《科学数学》2（1999）119-122。[328] K. Paul、D. Sain 和 P. Ghosh, 《有界线性算子的 Birkhoff-James 正交性与光滑性》, 《线性代数及其应用》506（2016年）551-563。[329] K. Paul、D. Sain、A. Mal 和 K. Mandal, 《复Banach空间上有界线性算子的正交性》, 《算子理论进展》3（2018年）699-709。[330] V. Paulsen, 《完全有界映射与算子代数》, 《剑桥高等数学研究》78, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002年。[331] V. I. Paulsen, 《函数代数、抽象算子空间与 Banach 空间几何的表示》, 《泛函分析杂志》109（1992）, 第1期, 113–129。[332] V. Paulsen、G. Popescu 和 D. Singh, 《Bohr不等式》, 《伦敦数学会会刊》85（2002）, 493-512。[333] V. Paulsen 和 D. Singh, 《Bohr不等式的延拓》, 《伦敦数学会通报》38（2006）, 991-999。[334] V. Paulsen 和 D. Singh, 《一致代数的 Bohr不等式》, 《美国数学会会刊》132（2004）, 3577-3579。[335] L. Paunonen, 《无界扰动下多项式稳定性的鲁棒性》, 《系统与控制通讯》62（2013）, 第4期, 331-337。[336] L. Paunonen, 《算子矩阵生成的半群的多项式稳定性》, 《演化方程杂志》14（2014）, 第4-5期, 885-911。[337] Carl Pearcy 和 David Topping, 《紧算子理想中的交换子》, 《密歇根数学杂志》第18卷, 1971年。[338] V. V. Peller, 《Koplienko-Neidhardt迹公式的一个延拓》, 《泛函分析杂志》221（2005）, 第2期, 456–481。[339] V. V. Peller, 《多重算子积分与高阶算子导数》, 《泛函分析杂志》233（2006）, 第2期, 515–544。[340] V. V. Peller, 《Lifshitz-Krein迹公式与算子 Lipschitz 函数》, 《美国数学会会刊》144（2016）, 第12期, 5207–5215。[341] M. Pimsner 和 S. Popa, 《子因子的熵与指标》, 《高等师范学校科学年刊》19（1986）, 第4期, 57–106。[342] G. Pisier, 《算子空间理论导论》。伦敦数学会讲义系列294。剑桥大学出版社, 剑桥, 2003年, viii+478 页。[343] G. Pisier, 《相似问题与完全有界映射》。《数学讲义》1618, 施普林格, 第2版, 2001年, viii+198 页。[344] G. Pisier, 《型与余型之间的对偶性》。载于: Chao, JA., Woyczy´nski, W.A.（编）, 《调和分析与巴拿赫空间中的鞅理论》。《数学讲义》939, 施普林格, 柏林, 1982年, 131–144。[345] G. Pisier 和 D. Shlyakhtenko, 《算子空间的 Grothendieck定理》, 数学发明150（2002）, 第1期, 185–217。[346] S. Popa, 《 II_1-因子中子代数的渐近正交化》, 《京都大学数理科学研究所刊物》55（2019）, 795–809。[347] V. P. Potapov, 《J非扩张矩阵函数的乘法结构》, 《莫斯科数学会会刊》（1955）, 125-236（俄文）; 英文译本见: 《美国数学会译丛》（2）15（1960）, 131–243。[348] D. Potapov、A. Skripka 和 F. Sukochev, 《高阶谱移位函数》, 数学发明193（2013）, 第3期, 501–538。

[349] D. Potapov、A. Skripka 和 F. Sukochev，压缩算子的高阶谱移位，《伦敦数学会会刊》 (3) 108 (2014年)，第 2 期，327–349。[350] D. Potapov、A. Skripka 和 F. Sukochev，可与预解式比较的算子的迹公式，《数学进展》272 (2015年)，630–651。[351] D. Potapov、A. Skripka 和 F. Sukochev，酉算子的函数：导数与迹公式，《泛函分析杂志》270 (2016年)，第 6 期，2048–2072。[352] D. Potapov 和 F. Sukochev，单位圆上的 Koplienko 谱移位函数，《数学物理通讯》309 (2012)，第 3 期，693–702。[353] D. Potapov、F. Sukochev 和 D. Zanin，重访 Krein迹定理，《谱理论杂志》4 (2014年)，第 2 期，415–430。[354] M. Putinar 和 S. Sandberg，严格凸域上的特权，《Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.》15 (2004)，第 1 期，39–45。[355] Robert T. Powers， $*$(*H*) 的非空间连续半群 B-端同态，《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》23 (1987)，第 6 期，1053–1069。[356] Robert T. Powers， B(*H*) 的 $*$-端同态半群及 II_1 因子的指标理论，《加拿大数学杂志》40 (1988)，第 1 期，86–114。[357] Robert T. Powers， B(*H*) 的连续空间半群 $*$-端同态的新例子，《Internat. J. Math.》10 (1999)，第 2 期，215–288。[358] Robert T. Powers， B(*H*) 上完全正映射的连续空间半群，《纽约数学杂志》9 (2003)，165–269。[359] T. Prajapati、K.B. Sinha 和 S. Srivastava，非交换 Lp 空间上正 C_0 半群的李雅普诺夫性质，《算子与矩阵》，第 13 卷 (2019)，第 4 期，907–919。[360] V. Rajpal、A. Kumar 和 T. Itoh，算子空间的 Schur张量积，《数学论坛》27 (2015)，第 6 期，3635–3655。[361] G. Ramesh、H. Osaka 和 S. S. Sequeira，具有不变子空间的范数达到算子子类的稠密性，即将发表于《算子理论杂志》，12 页。[362] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，闭包中次正规算子的表示与正规性 $\mathcal{AN}$-算子，《匈牙利数学学报》174 (2024年)，第 2 期，341–359。[363] G. Ramesh；H. Osaka；Y. Udagawa；T. Yamazaki，诱导 Aluthge 变换的 $\mathcal{AN}$ 性质的稳定性，《线性代数及其应用》678 (2023年)，206–226。[364] G. Ramesh；H. Osaka；Y. Udagawa；T. Yamazaki， $\mathcal{A}N$-算子在函数演算下的稳定性，《数学分析》49 (2023年)，第 3 期，825–839。[365] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，绝对最小值达到的 Toeplitz 算子与绝对范数达到的 Hankel 算子，《巴黎科学院数学报告》361 (2023年)，973–977。[366] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，关于绝对范数达到算子的闭包，《线性与多重线性代数》71 (2023年)，第 18 期，2894–2914。[367] G. Ramesh 和 S. S. Sequeira，绝对范数达到的 Toeplitz 算子与绝对最小值达到的 Hankel 算子，《数学分析及其应用杂志》516 (2022年)，第 1 期，论文编号 126497，12 页。[368] G. Ramesh 和 H. Osaka，关于范数达到算子的一个子类，《Acta Sci. Math. (Szeged)》87 (2021年)，第 1–2 期，247–263。[369] G. Ramesh，绝对范数达到的拟正规算子，《数学分析及其应用杂志》465 (2018)，第 1 期，547–556。[370] G. Ramesh、M. Veena Sangeetha 和 Shanola S. Sequeira，巴拿赫空间之间紧算子的表示，《算子理论杂志》94 (2025年)，第 1 期，3–21。[371] T. S. S. R. K. Rao，巴拿赫空间中的几乎等距理想，《数学月刊》181 (2016年)，第 1 期，169–176。[372] T. S. S. R. K. Rao，保持值域有限维结构的映入等距算子，《算子理论中的问题与近期方法》，219–224，《当代数学》687，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017。[373] S. Rastogi，多项式稳定性与时滞半群，《非线性研究》25 (2018)，第 4 期，911–920。[374] S. Rastogi、S. Srivastava，非解析增长界与时滞半群，《半群论坛》99，第 3 期，788–813，2019。

[375] S. Rastogi 和 S. Srivastava，时滞半群的强稳定性与多项式稳定性，《演化方程杂志》21 (2021年)，第 1 期，441–472。[376] S. K. Ray，关于等距嵌入 $\ell_p^m \to S_\infty$ 与唯一算子空间结构，《Bull. Lond. Math. Soc.》52 (2020年)，第 3 期，437–447。[377] S. K. Ray，Grothendieck 不等式，学位论文，2016年。[378] R. Md. Reza，平面域 Cowen-Douglas 类算子的曲率不等式，《印第安纳大学数学杂志》67 (2018)，1255–1279。[379] M. Rieffel，C*-代数 K-理论中的维数与稳定秩，《伦敦数学会会刊》s3-46 (1983)，301–333。[380] M. Rieffel，非交换环面酉群的同伦群，《算子理论杂志》17 (1987)，237–254。[381] J. Rozendaal、D. Seifert 和 R. Stahn，希尔伯特空间上算子半群的最优衰减速率，《数学进展》346 (2019)，359–388。[382] W. Rudin，$\mathbb{C}^N$单位球中的内函数，《泛函分析杂志》50 (1983)，100–120。[383] W. Rudin，真全纯映射与有限反射群，《印第安纳大学数学杂志》31 (1982)，第 5 期，701–720。[384] W. Rudin，多圆盘上的函数论，W. A. Benjamin, Inc.，1969。[385]D. Sain，紧算子的最佳逼近，《美国数学会会刊》149 (2021)，4273–4286。[386] D. Sain、A. Mal 和 K. Paul，关于线性算子的 Birkhoff-James 正交性的一些评注，《数学展望》38 (2020)，138–147。[387] D. Sain 和 K. Paul，算子范数取到与内积空间，《线性代数及其应用》439 (2013)，2448–2452。[388] D. Sain、K. Paul 和 A. Mal，无限维赋范空间中 Birkhoff-James 正交性的完整刻画，《算子理论杂志》80 (2018)，399–413。[389] D. Sain、K. Paul、A. Mal 和 A. Ray，有界线性算子空间光滑性的完整刻画，《线性与多重线性代数》68 (2020)，2484–2494。[390] D. Sain、A. Ray 和 K. Paul，有限维多边形巴拿赫空间上的极端压缩算子，《凸分析杂志》26 (2019)，877–885。[391] D. Sain、S. Sohel、S. Ghosh 和 K. Paul，关于对角矩阵子空间中的最佳余逼近，《线性与多重线性代数》71 (2023)，47–62。[392] D. Sain、S. Sohel 和 K. Paul，巴拿赫空间之间算子的 k-光滑性，《数学科学通报》196 (2024)，103486。[393] J. Sampat，$\mathbb{C}^n$中解析函数空间上的循环性保持算子，《积分方程与算子理论》93 (2021)，1–20。[394] J. Sarkar，对称双圆盘上的算子理论，《印第安纳大学数学杂志》64 (2015)，第 3 期，847–873。[395] Piyasa Sarkar 和 S. Sundar，具有非平凡指标的多参数 CCR 流实例，《Proc. Edinb. Math. Soc.》(2) 65 (2022)，第 3 期，799–832。[396] Piyasa Sarkar 和 S. Sundar，诱导等距表示，《纽约数学杂志》30 (2024)，1534–1555。.[397] G. Sebastian 和 S. Daniel，适用于模的较弱 Gleason–Kahane–Zelazko 定理及其在 Hardy 空间中的应用，《数学讨论会》164 (2021)，273–282。[398] A. Seth 和 P. Vaidyanathan，AF代数与有理同伦论，《纽约数学杂志》26 (2020)，931–949。[399] A. Seth 和 P. Vaidyanathan，连续 $C(X)$-代数的 K-稳定性，《美国数学会会刊》148 (2020)，3897–3909。[400] A. Seth 和 P. Vaidyanathan，连续 $C(X)$-代数的有理 K-稳定性，《澳大利亚数学会杂志》115 (2023)，119–144。[401] A. Seth 和 P. Vaidyanathan，A$\mathbb{T}$-代数的 K-稳定性，《数学分析与应用杂志》522 (2023)，126957。.[402] S. Sidon，U关于玻尔先生的一个定理，《数学杂志》26 (1927)，731–732。[403] A. Skripka，高阶谱移，II。无界情形，《印第安纳大学数学杂志》59 (2010)，第 2 期

’ 691–706 ·

[404] A. Skripka，迹泛函的渐近展开，《泛函分析杂志》266（2014年），第5期，2845– 2866页。[405] A. Skripka，多变量算子函数的迹公式，《积分方程与算子理论》81（2015年），第4期，559–580页。[406] A. Skripka，酉算子与预解式可比扰动的估计和迹公式，《数学进展》311（2017年），481–509页。[407] A. Skripka，谱作用泛函的泰勒渐近展开，《算子理论杂志》80（2018年），第1期，113–124页。[408] A. Skripka 和 A. Tomskova，《多重线性算子积分：理论与应用》，《数学讲义》第2250卷，施普林格，Cham，2019年。[409] K. Shoda，《关于矩阵的若干定理》，《日本数学杂志》13，1936年。[410] R. Srinivasan，凸锥上的 CCR 流与 CAR 流，arxiv/math.OA:1908.00188v1。[411] S. Sundar，每个乘积系统都是具体的吗？，即将在《伦敦数学会汇刊》发表，arXiv:2402.07607v3。[412] S. Sundar，Arveson 对 CCR 流的刻画：多参数情形，《泛函分析杂志》280（2021年），第1期。[413] Sureshkumar M. 和 P. Vaidyanathan，Rokhlin 维数：保持性质与理想分离。《群、几何与动力系统》。（2024年）[414] Sureshkumar M. 和 P. Vaidyanathan，AF-代数上的 Rokhlin 维数与归纳极限作用。（arXiv，2024年）[415] G. Szab´o，J. Wu 和 J. Zacharias，剩余有限群作用的 Rokhlin 维数。《遍历理论与动力系统》39（2019年），2248-2304页。[416] B. Sz.-Nagy，希尔伯特空间上的压缩算子，《Acta Sci. Math. (Szeged)》15（1953年），87-92页。[417]B. Sz.-Nagy 和 C. Foias，希尔伯特空间上算子的调和分析。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-伦敦，1970年。[418] B. Sz.-Nagy，C. Foias，H. Bercovici 和 L. K´erchy，《希尔伯特空间上算子的调和分析》。施普林格，第2版，2010年，xiv+474页。[419] K. Thomsen，算子代数的非稳定K理论。《K-理论》4（1991年），245-267页。[420] M. Tomi´关于 H. Bohr 的一个定理，《斯堪的纳维亚数学》11（1962年），103-106页。[421] A. M. Tonge，多个希尔伯特–施密特算子上多项式的冯·诺伊曼不等式，《伦敦数学会杂志》（第2辑）18（1978年），第3期，519-526页。[422] M. Trybu-四叶域上的真全纯映射、贝尔公式与陆启铿问题，《巴塞尔数学文献》101（2013年），第6期，549–558页。[423] Boris Tsirelson，从随机集到连续张量积：对 W. Arveson 三个问题的回答，arxiv/math.FA:0001070。[424] Boris Tsirelson，非同构乘积系统，《量子动力学进展》，《当代数学》第335卷，2003年，第273–328页。[425] Boris Tsirelson，非同构乘积系统，《量子动力学进展》（马萨诸塞州南哈德利，2002年），《当代数学》第335卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003年，第273–328页。[426] M. Uchiyama，具有全纯特征向量的算子的曲率与相似性，《美国数学会汇刊》319（1990年），405–415页。[427] H. Upmeier，有界对称域上的分层希尔伯特模，《复分析与算子理论》17（2023年），第74号论文，33页。[428] H. Upmeier，有界对称域上的 K 不变希尔伯特模与奇异向量丛，《纯粹与应用数学杂志》799（2023年），155–187页。[429] H. Upmeier，希尔伯特模与 K ¨ahler 几何，《墨西哥数学会通报》（2025年）31:126。[430] P. Vaidyanathan，某些 C*-代数的同伦稳定秩。《数学研究》247（2019年），299-328页。[431] P. Vaidyanathan，Rokhlin 维数与等变丛。《算子理论杂志》87（2022年），487-509页。[432] T. D. H. van Nuland 和 A. Skripka，相对 Schatten 类扰动的谱移，《谱理论杂志》12（2022年），第4期，1347–1382页。

[433] T. D. H. van Nuland 和 A. Skripka，《可比预解式扰动的高阶谱移位函数》，《算子理论杂志》（即将出版），arXiv:2211.03330 [math.FA].[434] N. Th. Varopoulos，《关于冯·诺伊曼不等式及张量积度量理论在算子理论中的应用》，《泛函分析杂志》16（1974），83–100.[435] N. Th. Varopoulos，《关于希尔伯特空间上的交换压缩算子族》，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》21（1976），第9期，1283–1285.[436] D. Venku Naidu 和 G. Ramesh，《关于绝对范数达到算子》，《印度科学院数学科学论文集》129（2019），第4期，论文编号54，共17页.[437] H. Vogt，《Banach 格上均匀最终正半群的稳定性》，《美国数学会会刊》150（2022），第8期，3513–3515.[438] D. Voiculescu，《关于 M. G. Krein 的迹公式》，《算子理论进展与应用》第24卷，329–332页。Birkh¨auser，巴塞尔，1987年。[439] J. von Neumann，《酉空间上一般算子的谱理论》，《Math. Nachr.》4（1951），258–281.[440] J. von Neumann，《厄米泛函算子的一般特征值理论》，《数学年刊》102（1929），49–131.[441] K. Wang 和 G. Zhang，《Cowen-Douglas 类算子的曲率不等式》，《以色列数学杂志》222（2017），279–296.[442] K. Wang 和 S. Zhang，《有界对称域上矩阵值有理内函数的非切向边界行为》，《美国数学会会刊》151（2023），第4期，1539–1551.[443] Y. Watatani，C^*子代数的指标，《美国数学会回忆录》83（1990）。[444] L. Weis，《Banach 格 $L_p(\mu)$上正半群稳定性定理的简短证明》，《美国数学会会刊》第126卷（1998），第11期，3253–3256.[445] J. H. M. Whitfield、V. Zizler，《球的一致马祖尔交性质》，《加拿大数学通报》30（1987），455–460.[446] W. Wojty´nski，《紧算子李代数》，《数学研究》第59卷，1976年。[447] W. Zelazko，《复巴拿赫代数中乘法线性泛函的刻画》，《数学研究》30（1968），83–85.[448] Y. Xie 和 K. Ji，《具有强旗结构的 Cowen-Douglas 类算子》，《罗马尼亚科学院精确科学与自然科学评论 A 系数学版》（RACSAM）118（2024），论文编号132，共21页。[449] D. R. Yafaev，《狄拉克算子的迹公式》，《伦敦数学会通报》37（2005），第6期，908–918.[450] J. Yang 和 K. Ji，《关于具有旗结构的算子幂的相似性》，《美国数学会会刊》152（2024），第10期，4463–4477.[451]H. Zhang，（2020）。《Schatten 类最优二一致凸性的再探讨》。arXiv 预印本 arXiv:2011.00354。[452] S. Zhang，《实秩零单 C*-代数的矩阵结构与同伦类型》，《算子理论杂志》（1991）。[453] K. Zhu，《一类乘法算子的约化子空间》，《伦敦数学会杂志》（2）62（2000），第2期，553–568。I

ndian Statistical Institute, Statistics and Mathematics Unit, 8th Mile, Mysore Road, Bangalore, 560059, India
电子邮件地址：jaydeb@gmail.com, jay@isibang.ac.in