Borcherds-Cartan 数据的箭图赫克代数 III：量子 Borcherds 超代数的范畴化

WAN WU

arXiv:2512.21073v1 [math.QA] 24 Dec 2025

Abstract. 我们引入一族箭图 Hecke 超代数，它们实现了量子 Borcherds 超代数的范畴化。

Contents

引言 1
1.**预备知识** 3 1.1. 分次超代数 3 1.2. 量子 Borcherds（超）代数 5 1.3. 覆盖代数 7 2. **Borcherds-Cartan 超数据的箭图 Hecke 超代数** 8 2.1. 箭图 Hecke 超代数 8 2.2. 多项式表示 9 2.3. 代数 $R(ni)$ 11 2.4. $R(\nu)$ 的基与中心 13 3. **量子 Borcherds 超代数的范畴化** 13 3.1. 分次 $R(\nu)$-超模的 Grothendieck 群 13 3.2. 量子 Serre 关系与双线性型的范畴化 15 3.3. 范畴化定理 16 4.**附录** 16 致谢 21 参考文献 21

引言

箭图 Hecke 超代数是 Khovanov-Lauda-Rouquier（KLR）代数（又称箭图 Hecke 代数）的超代数对应物 [15, 16, 21]。它最早由 Kang、Kashiwara 和 Tsuchioka 在 [12], 中提出，旨在严格地建立仿射赫克-克利福德超代数与仿射 Sergeev 超代数之间的联系。这一扩展进一步为研究自旋对称群的模表示理论提供了深刻的理论框架 [17, 14]。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 17B37, 17B67, 16G20, 20C08.*Key words and phrases.* 范畴化，箭图 Hecke 超代数，量子 Borcherds 超代数。1

对于单顶点箭图，箭图 Hecke 超代数约化为奇幂零 Hecke 代数 ONH_n——即幂零 Hecke 代数的奇类似物，最早由 Ellis、Kho- vanov 和 Lauda 在 [4]中提出。具体而言，这个代数可以实现为$O\Lambda_n$（奇对称多项式代数）上的矩阵代数。 $O\Lambda_n$ 及其直接极限 $O\Lambda$（奇对称函数的环）都具有基础性意义，因为它们是对称函数的奇类似物。正如对称函数在几何学和组合学中发挥着不可或缺的作用，这些奇对称代数对象在相同领域也有重要应用 [2, 3, 5]。

与 KLR 代数范畴化量子群（的半部）这一广为确立的结果不同，Hill 和 Wang [7] 利用箭图 Hecke 超代数，将量子群的半部与量子超代数的半部都范畴化为一个覆盖代数。该覆盖代数定义为一个 $\mathbb{Q}(q)^\pi$-代数；当 $\pi = 1$ 时，它特化为量子 Kac-Moody 代数；当 $\pi = -1$ 时，则特化为量子 Kac-Moody 超代数。其最显著的创新在于，在范畴化过程中，将参数 π 与超代数及超模上的奇偶移位作用对应起来。具体而言，他们证明，箭图 Hecke 超代数上的射影分次超模范畴的 Grothendieck 群，同构于上述覆盖代数，作为 $\mathbb{Q}(q)^\pi$-代数而言亦然。特别地，特化 $\pi = -1$ 给出了量子 Kac-Moody 超代数的一种范畴化。

Kang、Kashiwara 和 Oh [10, 11], 建立了一个平行结果，他们运用这一代数框架对量子群进行超范畴化，并进一步实现了不可约最高权模的范畴化。在这两种情形下，他们的方法都依赖于利用分圆箭图 Hecke 超代数对不可约最高权模进行范畴化，遵循 [9] 中建立的理论框架。

Hill 和 Wang [7] 提出，他们的方法框架适用于量子 Borcherds 代数情形。这意味着有可能构造与 Borcherds-Cartan 数据相关联的箭图 Hecke 超代数，从而对量子 Borcherds 代数的覆盖代数（如第 1.3 节所定义）以及量子 Borcherds 超代数（如 [1]中所定义）进行范畴化。

值得注意的是，构造这类箭图 Hecke 超代数，须先建立相应的箭图 Hecke 代数；而上述覆盖代数的范畴化则依赖于经典量子群的范畴化。在此前的工作中，Tong 和 Wu [22, 23]实现了与任意 Borcherds-Cartan 数据相关联的量子 Borcherds 代数（亦称量子广义 Kac–Moody 代数）的范畴化。这一突破为构造其超代数对应物（即箭图 Hecke 超代数）提供了便利，进而使量子 Borcherds 超代数及其覆盖代数的范畴化成为可能。

本文将 [22] 中提出的构造推广到 Borcherds–Cartan 超数据的情形，并应用 [7] 中建立的方法，对量子 Borcherds 代数和量子 Borcherds 超代数的覆盖代数进行范畴化。给定任意一个 Borcherds–Cartan 超数据，它由一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次的指标化 $I = I_0 \sqcup \widetilde{I_1}$ 以及一个由 I 参数化的矩阵 A 组成，且其对角元可以是 ≤ 0，我们定义与之相应的

覆盖量子 Borcherds 代数$\mathbf{H}$，它是一个 $\mathbb{Q}(q)^\pi$ 扭双代数。$\mathbf{H}$ 在 $\pi=1$ 和 $\pi=-1$ 处的特化分别与量子 Borcherds 代数$\mathbf{X}$ 的负部分和量子 Borcherds 超代数$\mathbf{Y}$的负部分一致。此外，我们证明$\mathbf{H}$ 可以实现为商代数$\mathscr{H}/\mathrm{rad}\{\,,\,\}_\pi$，其中 $\mathrm{rad}\{\,,\,\}_\pi$ 表示自由代数 $\mathscr{H}$上的 Lusztig 形式 $\{\,,\,\}_\pi$ 的根基。

接下来，我们基于 [22]和 [23] 的奠基性工作，构造箭图 Hecke 超代数 $R(\nu)$($\nu\in\mathbb{N}[I]$)，并通过类辫平面图导出其多项式表示。我们进一步考察固定 $i\in I$时的退化情形 $\nu=ni$，其中只有子情形 $i\in I^{\mathrm{im}}\cap I_1$ 需要新的分析。对于 $i\in I^{\mathrm{re}}$， $R(ni)$ 化为（奇）幂零 Hecke 代数，而情形 $\bar{i}\in I^{\mathrm{im}}\cap I_0$ 已在 [22] 中得到处理。

最后，我们通过 [23], 中的 Kashiwara 算子构造，着手刻画 $R(\nu)$ 的 M 型现象；这是范畴化及相关课题中的一项基石性结果。令 $K_0(R(\nu))$ 为有限生成投射分次 $R(\nu)$-超模的 Grothendieck 群。总 Grothendieck 群 $K_0(R)=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}[I]}K_0(R(\nu))$ 带有由模诱导和限制所诱导的扭双代数结构。我们证明 $K_0(R)$ 与 ${}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H}$（$\mathbf{H}$ 的 $\mathcal{A}^\pi$ 形式）之间存在扭 $\mathbb{Z}^\pi[q,q^{-1}]$-双代数同构。将 π 特化为 -1，由此便得到量子 Borcherds 超代数的范畴化，见定理 3.5。

1. 预备知识

令 π 为一个不定元。对于任意环 R，定义 $R^\pi=R[\pi]/(\pi^2-1)$。

1.1. 分次超代数。

分次超代数 ${}_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2}A_n^\varepsilon$ 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的 $(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$-分次代数。对于一个双齐次元素 $a\in A_n^\varepsilon$，记其次数为 $|a|=n$，并设

$$p(a)=\begin{cases}0 & \text{if } \varepsilon=\bar{0},\\ 1 & \text{if } \varepsilon=\bar{1}.\end{cases}$$

给定两个分次超代数 A 和 B，它们的张量积 $A\otimes B$ 是一个分次超代数，其乘法定义为

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=(-1)^{p(b)p(a')}aa'\otimes bb'.$$

设 A,B 为分次超代数。分次 A-B-双超模 $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z},\varepsilon\in\mathbb{Z}_2}M_n^\varepsilon$ 是一个 $(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$-分次 A-B-双模。对于两个这样的双超模 M 和 N，设

$$\mathrm{HOM}_{A\text{-}B}(M,N)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z},\varepsilon\in\mathbb{Z}_2}\mathrm{HOM}_{A\text{-}B}(M,N)_n^\varepsilon,$$

其中 $\mathrm{HOM}_{A\text{-}B}(M,N)_n^\varepsilon$ 由所有双次数为（n, ε）的线性映射 $f\colon M\to N$组成，且满足

$$f(amb)=(-1)^{p(f)p(a)}af(m)b\quad\text{for } a\in A,b\in B \text{ and } m\in M.$$

省略 B 或 A 即可得到左分次超模或右分次超模及其态射的概念。除非另有说明，所有分次超模均假定为左模。

对于分次超空间 V，即一个 $(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$-分次向量空间，我们将其底层 $\mathbb{Z}$-分次向量空间（忽略奇偶性）记为 $|V|$。对于分次 A-超模 M 和 N，若 $\mathrm{HOM}_A(M,N)_0^{\bar{0}}$ 中存在一个同构，我们记作 $M\simeq N$；若 $\mathrm{HOM}_A(M,N)_{\bar{0}}$ 中存在一个同构，我们记作 $M\cong N$；也就是说，$|M|$ 和 $|N|$ 作为分次 $|A|$-模是同构的。

设 M 是一个分次 A-超模，q 是一个不定元。若对于 $n\ll 0$，有 $M_n^{\bar{0}}=M_n^{\bar{1}}=M_n^0\oplus M_n^1=0$，则我们定义

$$\dim_q^\pi M:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\dim M_n^{\bar{0}}+\pi\dim M_n^{\bar{1}}\right)q^n\in\mathbb{Z}^\pi((q)).$$

对于 $k\in\mathbb{Z}$，次数平移 $M\{k\}$ 是由 M 得到的分次超模，其定义为 $(M\{k\})_n^{\bar{\varepsilon}}=M_{n-k}^{\bar{\varepsilon}}$。奇偶平移 ΠM 则由 $(\Pi M)_n^{\bar{\varepsilon}}=M_n^{\bar{\varepsilon}+\bar{1}}$ 定义，并赋予新的作用 $a\circ m=(-1)^{p(a)}am$。我们有

$$\mathrm{HOM}_A(\Pi^r M\{k\},N)\simeq\Pi^r\mathrm{HOM}_A(M,N)\{-k\}$$

作为 $(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$-分次向量空间。

对于 $f(q,\pi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(a_n+\pi b_n)q^n\in\mathbb{N}^\pi[q,q^{-1}]$，定义一个分次超模

$$f(q,\pi)M:=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left((M\{n\})^{\oplus a_n}\oplus(\Pi M\{n\})^{\oplus b_n}\right),$$

使得 $\dim_q^\pi f(q,\pi)M=f(q,\pi)\cdot\dim_q^\pi M$。

给定分次 A-超模 M 和分次 B-超模 N，它们的张量积是一个分次 $A\otimes B$-超模，其作用为

$$a\otimes b\cdot(m\otimes n)=(-1)^{p(b)p(m)}am\otimes bn.$$

若 $f\in\mathrm{HOM}_A(M,M')$ 且 $g\in\mathrm{HOM}_B(N,N')$，则 $f\otimes g\in\mathrm{HOM}_{A\otimes B}(M\otimes N,M'\otimes N')$ 的作用为

$$f\otimes g(m\otimes n)=(-1)^{p(g)p(m)}f(m)\otimes g(n).$$

若不可约分次 A-超模 V 满足 $|V|$ 是不可约分次 $|A|$-模，则称其为M 型；否则称 V 为Q 型。若分次超代数 $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}A_n$ 满足每个 A_n 都是有限维的，且 $A_n=0$ 对于 $n\ll 0$ 成立，则称其为劳伦特型。

引理 1.1。假设 A是劳伦特型的。

(1) 忽略次数平移和奇偶平移后，不可约分次 A- 超模只有有限多个，且它们都是有限维的。(2) 设 V 是一个不可约分次 A-超模。那么，V 是 Q 型当且仅当$\Pi V\simeq V$。此外，若 V是 Q 型，则对于某个满足 $N\ncong N^\varsigma$的不可约分次 $|A|$-模 N，有 $|V|\cong N\oplus N^\varsigma$。这里，$N^\varsigma$ 是通过经由$a*n=(-1)^{p(a)}an$扭曲作用而从 N 得到的分次 $|A|$-模。我们将 N称为 V^+，将 N^ς称为 V^-。

(3) $|A|$ 的分次 *Jacoboson* 根 $J^{gr}(|A|)$ 与 A的分次超 *Jacoboson* 根一致:

$$J^{gr\text{-}super}(A) = \bigcap\{ann(V) \mid V \ irreducible \ graded \ A\text{-}supermodule\}.$$

(4) 假设除次数平移和奇偶平移外， V_1..... V_r 中属于 M 型以及 V_{r+1}..... V_t中属于Q 型的是不可约分次 A-超模的一个非冗余集合，则

(i) 除次数平移外， V_1..... V_r、 ΠV_1..... ΠV_r、 V_{r+1}..... V_t 是不可约分次 A-超模的一个非冗余集合；(ii) 除次数平移外， V_1..... V_r、 $V_{r+1}^{\pm}$..... $V_t^{\pm}$是不可约分次 $|A|$-模的一个非冗余集合。

证明。 第 (1) 部分直接由 [20, 定理 2.72] 得出。(2)–(4) 中的陈述由 [13, 第 12 节2] 中的相应结果推出。□

1.2. **量子 Borcherds（超）代数**。

~令 $I = I_0 \sqcup I_1$ 为一个 $\mathbb{Z}_2$分次指标集。一个 *Borcherds-Cartan* 超数据（I， A， $\cdot$）由以下部分组成:

~ （1）一个整值矩阵 $A = (a_{ij})_{i,\ j\in I}$ 满足（i） $a_{ii} = 2$，0， -2， -4，.....，（ii） $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 对 $i \neq j$成立，（iii）当且仅当 $a_{ji} = 0$时 $a_{ij} = 0$ ，（iv） $a_{ij} \in 2\mathbb{Z}$ 对 $i \in I_1$， $j \in I$， ~成立，（v）存在一个对角矩阵 $D = \text{diag}(r_i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid i \in I)$，使得 DA 为对称矩阵。

–

（2） ν， $\nu' \mapsto \nu \cdot \nu'$ 上的一个对称双线性形式，取值于 $\mathbb{Z}$，满足

$$i \cdot j = r_i a_{ij} = r_j a_{ji} \quad \text{for all } i, j \in I.$$

令 $I^{\text{re}} = \{i \in I \mid a_{ii} = 2\}$ 和 $I^{\text{im}} = \{i \in I \mid a_{ii} \leq 0\}$。对于每个 $i \in I$，定义 $q_i = q^{r_i}$。对于 $i \in I^{\text{re}}$， $n \in \mathbb{N}$，令

$$[n]_i^{\pi} = \frac{(\pi^{p(i)} q_i)^n - q_i^{-n}}{\pi^{p(i)} q_i - q_i^{-1}}, \quad [n]_i^{\pi}! = [n]_i^{\pi}[n-1]_i^{\pi} \cdots [1]_i^{\pi}.$$

特别地，我们记作

$$[n]_i^{+} = [n]_i^{\pi}|_{\pi=1}, \quad [n]_i^{-} = [n]_i^{\pi}|_{\pi=-1}.$$

~**定义 1.2.** 与 $(I, A, \cdot)$ 相关联的（半部）量子 *Borcherds* 代数**X** 是由 f_i $(i \in I)$ 生成的 $\mathbb{Q}(q)$-代数，并满足

$$\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^a f_i^{(a)} f_j f_i^{(b)} = 0 \quad \text{for } i \in I^{\text{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,$$

$$f_i f_j - f_j f_i = 0 \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } i \cdot j = 0.$$

这里 $f_{(i}^{\ a} = f_i^a/[a]_i^{+})$ ！ 代数 **X** 按赋值 $|f_i| = i$ 分为 $\mathbb{N}[I]$-分次。

根据 [19, 第 1] 章和 [8, 第 3], 节, $\mathbf{X}$ 具有余乘法

$$\rho_+ : \mathbf{X} \to \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}, \quad f_i \mapsto f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i \quad \text{for } i \in I,$$

其中$\mathbf{X}$ $\otimes\mathbf{X}$ 赋有扭曲乘法

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = q^{-|x_2|\cdot|y_1|} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2.$$

存在一个非退化对称双线性形式 $\{\ ,\ \}_+ :\ \mathbf{X} \times \mathbf{X}\ \to \mathbb{Q}(q)$, 满足

(i) $\{x, y\}_+ = 0$ 若 $|x| \neq |y|$, (ii) $\{1, 1\}_+ = 1$, (iii) 对所有 $i \in I$, $\{f_i, f_i\}_+ = (1 - q_i^2)^{-1}$, (iv) 对于 $x, y, z \in \mathbf{X}$, $\{x, yz\}_+ = \{\rho_+(x)\ y \otimes z\}_+$。

令 $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 为劳朗多项式环。 $\mathcal{A}$-形式 ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{X}$ 是由 $i \in I^{\mathrm{re}}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 对应的 $f_i^{(n)}$ 以及 $i \in I^{\mathrm{im}}$对应的 f_i 生成的$\mathbf{X}$ 的 $\mathcal{A}$-子代数。

定义 1.3. [1, 定义 2.7] 与 $(I, A, \cdot)$ 相关联的（半部）量子 *Borcherds* 超代数 $\tilde{\mathbf{Y}}$是由 f_i $(i \in I)$ 生成的 $\mathbb{Q}(q)$-代数, 并满足以下关系

$$\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} f_i^{(a)} f_j f_i^{(b)} = 0 \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,$$

$$f_i f_j - (-1)^{p(i)p(j)} f_j f_i = 0 \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } i \cdot j = 0.$$

这里 $p(a;\ i,\ j) = ap(i)p(j) + \frac{1}{2}a(a-1)p(i)$, 且 $f^{(a)}{}_i = f_i^a/[a]_i^-!$ 代数 $\mathbf{Y}$通过赋予 $|f_i| = i$ 和 $p(f_i) = p(i)$, 成为一个 $(\mathbb{N}[I],\ \mathbb{Z}_2)$-分次代数。

同样, 根据 [19, 第 1] 章和 [8,第 3], 节, $\mathbf{Y}$ 具有余乘法

$$\rho_- : \mathbf{Y} \to \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y},\ f_i \mapsto f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i \quad \text{for } i \in I,$$

其中 $\mathbf{Y}$ $\otimes\mathbf{Y}$ 赋有扭曲乘法

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (-1)^{p(x_2)p(y_1)} q^{-|x_2|\cdot|y_1|} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2.$$

还可以证明存在一个非退化对称双线性形式 $\{\ ,\ \}_- : \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}\ \to \mathbb{Q}(q)$, 满足

(i) $\{x, y\}_- = 0$ 当 $|x| \neq |y|$时, (ii) $\{1, 1\}_- = 1$, (iii) $\{f_i, f_i\}_- = (1 - (-1)^{p(i)} q_i^2)^{-1}$ 对所有 $i \in I$ 都成立, (iv) $\{x, yz\}_- = \{\rho_-(x)\ y \otimes z\}_-$ 对于 $x,\ y,\ z \in \mathbf{Y}$。

附录中详细展示了这些结果, 其中相同的论证也适用于量子 Borcherds 代数。

类似地, $\mathcal{A}$形式 ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{Y}$ 是由 $f_i^{(n)}$ （当 $i \in I^{\mathrm{re}}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 时）以及 f_i （当 $i \in I^{\mathrm{im}}$时）生成的$\mathbf{Y}$ 的子代数。

1.3. **覆盖代数**。

~给定一个 Borcherds-Cartan 超数据 $(I, A, \cdot)$，我们定义与$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$对应的覆盖代数 $\mathbf{H}$。这一构造最早见于 [7]。

令 $\mathscr{H}$ 为由 $\theta_i\ (i \in I)$ 生成的自由 $\mathbb{Q}(q)^\pi$-代数，其中 $|\theta_i| = i$ 和 $p(\theta_i) = p(i)$。我们有余乘法 $\rho_\pi\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$，由 $\rho_\pi(\theta_i) = \theta_i \otimes 1 + 1 \otimes \theta_i\ (i \in I)$ 给出。此处 $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ 配备了扭曲乘法

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = \pi^{p(x_2)p(y_1)} q^{-|x_2|\cdot|y_1|} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2.$$

与 [19, 1.2.3], 中一样，存在一个对称双线性形式 $\{\ ,\ \}_\pi\colon \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{Q}(q)^\pi$，满足

(i) 若 $|x| \neq |y|$，则 $\{x, y\}_\pi = 0$；(ii) $\{1, 1\}_\pi = 1$；(iii) 对所有 $i \in I$，$\{\theta_i, \theta_i\}_\pi = (1 - \pi^{p(i)} q_i^2)^{-1}$；(iv) 当 x，y，$z \in \mathscr{H}$ 时，$\{x, yz\}_\pi = \{\rho_\pi(x)\ y \otimes z\}_\pi$。

与 [19, 1.4.5], 类似，以下元素属于双线性型 $\{\ ,\ \}_\pi$ 的根基

$$\begin{aligned} &\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^a \pi^{p(a;i,j)} \theta_i^{(a)} \theta_j \theta_i^{(b)} \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j, \\ &\theta_i \theta_j - \pi^{p(i)p(j)} \theta_j \theta_i \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } i \cdot j = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里 $\theta_i^{(a)} = \theta_i^a / [a]_i^\pi!$ 更一般地，根基还包含以下元素

$$\sum_{a+b=1-na_{ij}} (-1)^a \pi^{p(a;i,j;n)} \theta_i^{(a)} \theta_j^n \theta_i^{(b)} \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I, n \geq 1 \text{ and } i \neq j,$$

其中 $p(a;\ i,\ j;\ n) = anp(i)p(j) + \frac{1}{2}a(a-1)p(i)$（例如参见 [6, 定理 1.4] ）.

令 $\mathbf{H}$ 为 $\mathscr{H}$ 对由 (1.1) 生成的双边理想取商所得的商代数。

命题 1.4. $\mathbf{H} \cong \mathscr{H}/$根基$\{\ ,\ \}_\pi$.

证明。 存在典范的 $\mathbb{Q}(q)$-代数同构，由 $\theta_i \mapsto f_i\ (i \in I)$ 给出：

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\big/(\pi - 1) &\cong \mathbb{Q}(q) \otimes_{\pi=1} \mathbf{H} \cong \mathbf{X}, \\ \mathbf{H}\big/(\pi + 1) &\cong \mathbb{Q}(q) \otimes_{\pi=-1} \mathbf{H} \cong \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

此处的张量积均取在 $\mathbb{Q}(q)^\pi$ 上，其中 $\mathbb{Q}(q)$ 通过特化 $\pi \mapsto 1$（分别为 $\pi \mapsto -1$）视为一个 $\mathbb{Q}(q)^\pi$-模。在该同构下，$\mathbf{H}/(\pi - 1)$（分别为 $\mathbf{H}/(\pi + 1)$）上在 $\pi = 1$（分别为 $\pi = -1$）处特化的双线性型 $\{\ ,\ \}_\pi$ 与 $\{\ ,\ \}_+$（分别为 $\{\ ,\ \}_-$）一致，因此在两种情况下均为非退化。现在，设 x 属于$\mathbf{H}$上 $\{\ ,\ \}_\pi$ 的根基。于是 $x \in (\pi - 1) \cap (\pi + 1) = (\pi^2 - 1) = 0$, 这意味着 $\{\ ,\ \}_\pi$ 在$\mathbf{H}$上非退化。因此，我们有 $\mathbf{H} \cong \mathscr{H}/\mathrm{rad}\{\ ,\ \}_\pi$。 □

$\mathcal{A}^\pi$ ${}_{\mathcal{A}^\pi}$形式的$\mathbf{H}$是由 $\theta_i^{(n)}$ 生成的$\mathbf{H}$ 的 $\mathcal{A}^\pi$子代数，其中 $i \in I^{\mathrm{re}}, n \in \mathbb{Z}_{>0}$且 θ_i，其中 $i \in I^{\mathrm{im}}$。注意

$${}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H}\big/(\pi - 1) \cong {}_{\mathcal{A}}\mathbf{X}, \quad {}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H}\big/(\pi + 1) \cong {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Y}. \tag{1.2}$$

2. **Borcherds-Cartan 超数据的箭图 Hecke 超代数**

~给定一个 Borcherds-Cartan 超数据（$I, A, \cdot$），对于 $i, j \in I$ 且 $i \neq j$，我们定义

$$T_{ij} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid r_i a + r_j b = -i \cdot j;\ a \in 2\mathbb{Z} \text{ if } i \in I_{\bar{1}};\ b \in 2\mathbb{Z} \text{ if } j \in I_{\bar{1}}\}.$$

选取一族整数 $\{t_{i,j;a,b}\}_{i \neq j, (a,b) \in T_{ij}}$，使得 $t_{i,j;a,b} = t_{j,i;b,a}$ 且 $t_{i,j;-a_{ij},0} \neq 0$。对于每一对 $i \neq j$，定义多项式

$$Q_{ij}(u, v) = \sum_{(a,b) \in T_{ij}} t_{i,j;a,b}\ u^a v^b \in \mathbb{Z}\langle u, v\rangle / \langle uv - (-1)^{p(i)p(j)} vu \rangle.$$

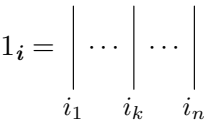
这可以明确地写成

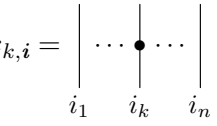
$$Q_{ij}(u, v) = t_{i,j;-a_{ij},0} u^{-a_{ij}} + \sum_{a < -a_{ij}, b < -a_{ji}} t_{i,j;a,b}\ u^a v^b + t_{i,j;0,-a_{ji}} v^{-a_{ji}}.$$

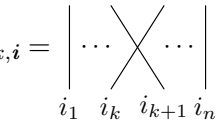
根据构造，我们有 $Q_{ij}(u, v) = Q_{ji}(v, u)$。假设 $|u| = 2r_i, p(u) = p(i)$ 且 $|v| = 2r_j, p(v) = p(j)$。那么 $Q_{ij}(u, v)$ 是次数为 $-2i \cdot j$ 的齐次多项式，且为偶宇称。若 $i \cdot j = 0$，为简便起见，我们取 $Q_{ij}(u, v) = 1$。

2.1. **箭图 Hecke 超代数**。

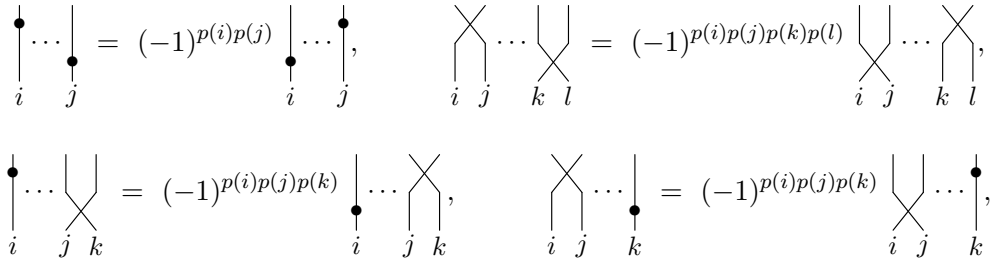
固定满足 $\mathrm{ht}(\nu) := \sum_{i \in I} \nu_i = n$ 的 $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i i \in \mathbb{N}[I]$。令 $\mathrm{Seq}(\nu)$ 为所有满足 $\nu = i_1 + i_2 \cdots + i_n$ 的序列 $\boldsymbol{i} = i_1 i_2 \ldots i_n$ 的集合，其中 I。对于 $\boldsymbol{i} \in \mathrm{Seq}(\nu)$，与 $(A, I, \cdot)$ 相关联的分次~超代数 $R(\nu)$ 由以下双齐次平面图生成：

$1_{\boldsymbol{i}} =$  with $|1_{\boldsymbol{i}}| = 0,\ p(1_{\boldsymbol{i}}) = 0,$

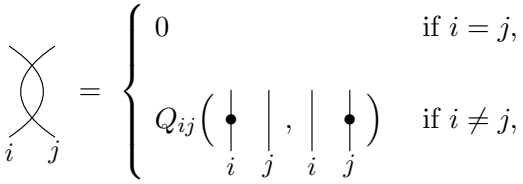
$x_{k,\boldsymbol{i}} =$  $1 \leq k \leq n,$ with $|x_{k,\boldsymbol{i}}| = 2r_{i_k},\ p(x_{k,\boldsymbol{i}}) = p(i_k),$

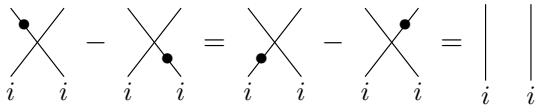
$\tau_{k,\boldsymbol{i}} =$  $1 \leq k \leq n-1,$ with $|\tau_{k,\boldsymbol{i}}| = -i_k \cdot i_{k+1},\ p(\tau_{k,\boldsymbol{i}}) = p(i_k)p(i_{k+1}).$

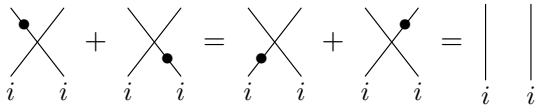
满足如下关系，与超代数的张量积中的局部关系相同

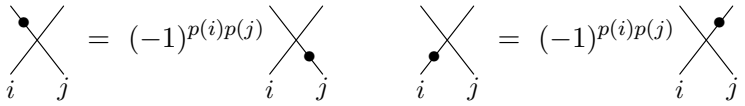


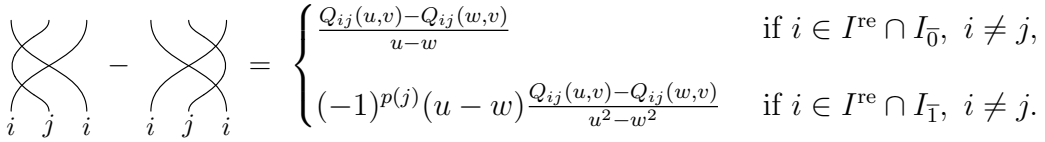
以及局部关系

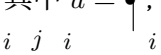
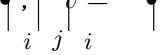
(2.1) 

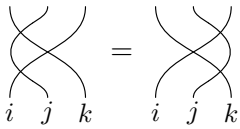
(2.2) 

(2.3) 

(2.4) 

(2.5) 

其中 $u =$ , $v =$ , $w =$ 

(2.6) 

关于类辫平面图及其乘法的详细说明，请参见 [15]。对于 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j} \in \mathsf{Seq}(\nu)$，令 ${}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}} = 1_{\boldsymbol{j}}R(\nu)1_{\boldsymbol{i}}$。于是，$R(\nu)$分解为

$$R(\nu) = \bigoplus_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in \mathrm{Seq}(\nu)} {}_{\boldsymbol{j}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}.$$

2.2. **多项式表示**。

令 $\mathscr{P}$ 为由偶生成元 $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ 和奇生成元 $c_1, \dots, c_n$ 生成的超代数，并满足以下关系：

(i) $y_i y_j = y_j y_i, \quad z_i z_j = z_j z_i, \quad y_i z_j = z_j y_i$ $(1 \le i, j \le n)$, (ii) $c_i^2 = 1$, $c_i c_j = -c_j c_i$ $(1 \le i \ne j \le n)$, (iii) $c_i y_j = (-1)^{\delta_{ij}} y_j c_i, \quad c_i z_j = (-1)^{\delta_{ij}} z_j c_i$ $(1 \le i, \ j \le n)$。

对称群 S_n 通过置换符号 $y_i,\ z_j$，并独立地作用于 $\mathscr{P}$。对于 $1 \le k \le n-1$，在 $\mathscr{P}$ 上定义线性算子 σ_k：

$$\sigma_k(y_k) = -1 - c_k c_{k+1},\ \sigma_k(y_{k+1}) = 1 - c_k c_{k+1},\ \sigma_k(y_j) = 0 \text{ for } j \ne k, k+1,$$
$$\sigma_k(z_j) = \sigma_k(c_j) = 0 \ \text{ for all } j,$$

以及莱布尼茨法则

$$\sigma_k(fg) = \sigma_k(f)g + s_k(f)\sigma_k(g) \quad \text{for all } f, g \in \mathscr{P}.$$

根据 [18, 引理 3, 6], 这些算子满足 nilCoxeter 关系

$$\sigma_k^2 = 0,\ \sigma_k\sigma_l = \sigma_l\sigma_k\ (|k-l|>1),\ \sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_k = \sigma_{k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}.$$

类似地，我们定义 σ_k' 为在σ_k的定义中将y_j 与z_j 互换后得到的算子。

注 2.1。 根据定义，对于 $f = f(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] \subset \mathscr{P}$，我们有

$$\sigma_k(f) = \frac{s_k f - f}{y_k - y_{k+1}} + c_k c_{k+1}\frac{\overline{s}_k f - f}{y_k + y_{k+1}},$$

其中 $s_k f = f$（y_1、……、y_{k-1}、$-y_{k+1}$、$-y_k$、$y_{k+2}\ldots$、y_n）。

对于每个$\boldsymbol{i} \in$序列集(ν)，我们定义一个超代数 $\mathscr{P}_{\boldsymbol{i}}$，其具有偶生成元 $y_1(\boldsymbol{i})$……、$y_n(\boldsymbol{i})$、$z_1(\boldsymbol{i})$……、$z_n(\boldsymbol{i})$以及奇生成元 $c_1(\boldsymbol{i})$……、$c_n(\boldsymbol{i})$，满足

(i) $y_i(\boldsymbol{i})y_j(\boldsymbol{i}) = y_j(\boldsymbol{i})y_i(\boldsymbol{i}),\ z_i(\boldsymbol{i})z_j(\boldsymbol{i}) = z_j(\boldsymbol{i})z_i(\boldsymbol{i}),\ y_i(\boldsymbol{i})z_j(\boldsymbol{i}) = z_j(\boldsymbol{i})y_i(\boldsymbol{i})\ (1 \le i, j \le n)$,

(ii) $c_i(\boldsymbol{i})^2 = 1,\ c_i(\boldsymbol{i})c_j(\boldsymbol{i}) = -c_j(\boldsymbol{i})c_i(\boldsymbol{i})\ (1 \le i \ne j \le n)$,

(iii) $c_k(\boldsymbol{i})y_l(\boldsymbol{i}) = (-1)^{\delta_{kl}p(i_k)}y_l(\boldsymbol{i})c_k(\boldsymbol{i}),\ c_k(\boldsymbol{i})z_l(\boldsymbol{i}) = (-1)^{\delta_{kl}p(i_k)}z_l(\boldsymbol{i})c_k(\boldsymbol{i})\ (1 \le k, l \le n)$.

并构成 $\mathbb{C}$-向量空间 $\mathscr{P}_\nu = \bigoplus_{\boldsymbol{i}\in \mathrm{Seq}(\nu)} \mathscr{P}_{\boldsymbol{i}}$。令 s_k 作用于 $\mathscr{P}_\nu$，其作用为

$$y_j(\boldsymbol{i}) \mapsto y_{s_k(j)}(s_k\boldsymbol{i}),\ z_j(\boldsymbol{i}) \mapsto z_{s_k(j)}(s_k\boldsymbol{i}),\ c_j(\boldsymbol{i}) \mapsto c_{s_k(j)}(s_k\boldsymbol{i}) \quad \text{for } 1 \le j \le n.$$

若 $i_k = i_{k+1} \in I_{\overline{0}}$，我们在 $\mathscr{P}_{\boldsymbol{i}}$ 上定义代数算子 $\widetilde{s}_k$ 和 $\widetilde{\widetilde{s}}_k$，其定义为

$$\widetilde{s}_k:\ y_j(\boldsymbol{i}) \mapsto y_{s_k(j)}(\boldsymbol{i}),\ z_j(\boldsymbol{i}) \mapsto z_j(\boldsymbol{i}),\ c_j(\boldsymbol{i}) \mapsto c_j(\boldsymbol{i}) \quad \text{for } 1 \le j \le n,$$

$$\widetilde{\widetilde{s}}_k:\ y_j(\boldsymbol{i}) \mapsto y_{s_k(j)}(\boldsymbol{i}),\ z_j(\boldsymbol{i}) \mapsto z_{s_k(j)}(\boldsymbol{i}),\ c_j(\boldsymbol{i}) \mapsto c_j(\boldsymbol{i}) \quad \text{for } 1 \le j \le n.$$

令 Λ 为一个图，其顶点集为 I；当且仅当 $i \ne j$ 时，顶点 i和 j 之间存在一条有向边。选取一个集合 $\{\gamma_{ij}\}_{i\ne j\in I} \subset \mathbb{C}$，使得

$$\gamma_{ij}\gamma_{ji} = -1/2 \ \text{ if } i, j \in I_{\overline{1}};\ \ \gamma_{ij} = 1 \ \text{ if } i \in I_{\overline{0}} \text{ or } j \in I_{\overline{0}}.$$

定义 2.2。 我们定义 $R(\nu)$ 在 $\mathscr{P}_\nu$ 上的作用如下:

(i) 若 $\boldsymbol{i} \ne \boldsymbol{k}$，${}_{\boldsymbol{i}}R(\nu)_{\boldsymbol{i}}$ 在 $\mathscr{P}_{\boldsymbol{k}}$ 上的作用为 0。(ii) 对于 $f \in \mathscr{P}_{\boldsymbol{i}}$, $1_{\boldsymbol{i}} \cdot f = f$, $x_{k,\,\boldsymbol{i}} \cdot f = c_k(\boldsymbol{i})^{p(i_k)}y_k(\boldsymbol{i})f$.(iii) 假设 $\boldsymbol{i} = i_1 \ldots i_n$ 且 $i_k = i$, $i_{k+1} = j$。对于 $f \in \mathscr{P}_{\boldsymbol{i}}$,

$$\tau_{k,\boldsymbol{i}\cdot}f = \begin{cases} \frac{f - \widetilde{s}_k f}{y_k(\boldsymbol{i}) - y_{k+1}(\boldsymbol{i})} & \text{if } i = j \in I^{\mathrm{re}} \cap I_{\overline{0}}, \\ \frac{\widetilde{s}_k f - \widetilde{\widetilde{s}}_k f}{z_k(\boldsymbol{i}) - z_{k+1}(\boldsymbol{i})} & \text{if } i = j \in I^{\mathrm{im}} \cap I_{\overline{0}}, \\ \frac{1}{2}(c_k(\boldsymbol{i}) - c_{k+1}(\boldsymbol{i}))\sigma_k f & \text{if } i = j \in I^{\mathrm{re}} \cap I_{\overline{1}}, \\ \frac{1}{2}(c_k(\boldsymbol{i}) - c_{k+1}(\boldsymbol{i}))\sigma_k' f & \text{if } i = j \in I^{\mathrm{im}} \cap I_{\overline{1}}, \\ \frac{1}{\gamma_{ij}}\left(\frac{1}{2}(c_k(s_k\boldsymbol{i}) - c_{k+1}(s_k\boldsymbol{i}))\right)^{p(i)p(j)} s_k f & \text{if } i \leftarrow j, \\ \frac{1}{\gamma_{ij}}(\frac{1}{2}\left(c_k(s_k\boldsymbol{i}) - c_{k+1}(s_k\boldsymbol{i})\right))^{p(i)p(j)}\left(Q_{ij}(x_{k+1,s_k\boldsymbol{i}}, x_{k,s_k\boldsymbol{i}}) \cdot s_k f\right) & \text{if } i \to j. \end{cases}$$

命题 2.3. $\mathscr{P}_\nu$ 是一个 $R(\nu)$-模，其作用如上定义。

证明。 我们检验 $R(\nu)$的定义关系。我们只检验 $i \in I^{\mathrm{re}} \cap I_1, j \in I_1$ 和 $i \to j$时的局部关系（2.5）。其余情形显然易于验证。为简便起见，我们省略标记$\boldsymbol{i}$，并取 $k = 1$。注意到

$$\begin{aligned}\tau_1\tau_2\tau_1 \cdot f &= \frac{1}{8\gamma_{ij}\gamma_{ji}}(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_2 - c_3)\ s_1\sigma_2\big(Q_{ij}(x_2, x_1)s_1 f\big) \\ &= \frac{1}{2}(c_3 - c_1)\Big[\big(s_1\sigma_2(Q_{ij}(x_2, x_1)\big)f + Q_{ij}(x_3, x_2)s_1\sigma_2 s_1 f\Big].\end{aligned}$$

根据注2.1,

$$\begin{aligned}s_1\sigma_2(Q_{ij}(x_2, x_1)) &= \frac{Q_{ij}(x_3, x_2) - Q_{ij}(x_1, x_2)}{y_1 - y_3} + c_1c_3\frac{Q_{ij}(x_3, x_2) - Q_{ij}(x_1, x_2)}{y_1 + y_3} \\ = (y_1 + y_3)\frac{Q_{ij}(x_3, x_2) - Q_{ij}(x_1, x_2)}{x_3^2 - x_1^2} &+ c_1c_3(y_1 - y_3)\frac{Q_{ij}(x_3, x_2) - Q_{ij}(x_1, x_2)}{x_3^2 - x_1^2}.\end{aligned}$$

因此,

$$\tau_1\tau_2\tau_1 \cdot f = (x_3 - x_1)\frac{Q_{ij}(x_3, x_2) - Q_{ij}(x_1, x_2)}{x_3^2 - x_1^2}f + \frac{1}{2}(c_3 - c_1)Q_{ij}(x_3, x_2)s_1\sigma_2 s_1 f.$$

另一方面，我们有

$$\tau_2\tau_1\tau_2 \cdot f = \frac{1}{2}(c_3 - c_1)Q_{ij}(x_3, x_2)s_2\sigma_1 s_2 f.$$

只需验证 $s_1\sigma_2 s_1 f = s_2\sigma_1 s_2 f$，这可通过归纳法证明。 □

2.3. **代数** $R(ni)$。

令 $\nu = ni$，其中 $i \in I$。我们将 $R(ni)$ 的生成元简记为 $x_1, \ldots, x_n$ 和 $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$。对于每个 $\omega \in S_n$，固定一个约化表达式 $\omega = s_{k_1} \cdots s_{k_t}$，并定义$\tau_\omega = \tau_{k_1} \cdots \tau_{k_t} \in R(ni)$。注意，当 i 为奇数时， τ_ω 除相差一个符号 ± 1 外，与约化表达式的选择无关。

情形 1：$i \in I_{\bar{0}}$。

当 $i \in I^{\mathrm{re}}$ 时，代数 $R(ni)$ 是幂零 Hecke 代数 NH_n （见 [15, 例 2.2]）；而当 $i \in I^{\mathrm{im}}$ 时，它是 [22, 第 2.2] 节中描述的代数。这些代数有一个基 $\{x_1^{u_1} \cdots x_n^{u_n}\tau_\omega \mid \omega \in S_n, u_1, \ldots, u_n \geq 0\}$。多项式代数 $P_n = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 可识别为 $R(ni)$ 中由 $x_1, \ldots, x_n$ 生成的子代数。中心 $Z(R(ni))$ 由 $x_1, \ldots, x_n$ 中的对称多项式构成。

若 $i \in I^{\mathrm{re}}$，则在同构和次数平移意义下， NH_n 有唯一的不可约分次模 $V(i^n)$，其分次维数可以是 $[n]_i^+!$ 。其分次投射覆叠为

$$P_{i^{(n)}} = NH_n e_{i,n}\left\{\binom{n}{2} \cdot r_i\right\}, \tag{2.7}$$

其中 $e_{i,\ n} = x_1^{n-1}x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}\tau_{\omega_0}$，且 ω_0 是 S_n中的最长元素。

若 $i \in I^{\mathrm{im}}$，则一维平凡模是唯一的不可约分次$R(ni)$-模。

情形 2：$i \in I^{\mathrm{re}} \cap I_{\bar{1}}$。

超代数 $R(ni)$ 是奇幂零 Hecke 代数 ONH_n，它在 [4]，中被考虑，并具有基 $\{x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n}\tau_\omega \mid \omega \in S_n, u_1,\ldots,u_n \geq 0\}$。奇多项式代数$OP_n = \mathbb{C}\langle x_1, \ldots\ldots, x_n\rangle / \langle x_i x_j = -x_j x_i,\ i \neq j\rangle$可识别为由 $x_1, \ldots\ldots, x_n$生成的ONH_n的子代数。对于 $n \geq 2$，中心 $Z(ONH_n)$ 由 $x_1^2, \ldots\ldots, x_n^2$ 中的对称多项式构成。

在同构以及次数/宇称移位意义下，ONH_n 有唯一的不可约分次超模 $V(i^n)$，其 (q, π)-维数可能为 $[n]_i^\pi!$。其射影覆盖为

$$P_{i^{(n)}} = ONH_n e_{i,n}\left\{\binom{n}{2}\cdot r_i\right\}, \tag{2.8}$$

其中，对于给定的约化表达式，$e_{i,\ n} = (-1)^{\binom{n}{3}} x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1}\tau_{\omega_0}$

$$\omega_0 = s_1(s_2 s_1)\cdots(s_{n-1}\cdots s_1). \tag{2.9}$$

由于 $e_{i,\ n}$ 在宇称上是齐次的，简单模 $V(i^n)$ 是 M 型。

注 2.4。注意，在此情形下有 $\mathscr{P}_{ni} = \mathscr{P}$。我们通过对应关系 $x_j \mapsto c_j y_j$，将 OP_n 视为由 $c_1 y_1, \ldots\ldots, c_n y_n$ 生成的 $\mathscr{P}$ 的子代数。在此认同下，ONH_n通过 $x_k \cdot f = x_k f$ 和 $\tau_k \cdot f = \frac{1}{2}(c_k - c_{k+1})\sigma_k f$ 作用于 OP_n。因此，

$$\begin{aligned}
&\tau_k(x_k) = \tau_k(x_{k+1}) = 1,\ \tau_k(x_j) = 0 \text{ for } j \neq k, k+1,\\
&\tau_k(fg) = 1/2(c_k - c_{k+1})\sigma_k(fg) = 1/2(c_k - c_{k+1})\big(\sigma_k(f)g + s_k(f)\sigma_k(g)\big)\\
&\qquad = \tau_k(f)g + s_k^-(f)\tau_k(g),
\end{aligned}$$

其中 $s_k^- f(x_1、\ldots\ldots、x_n) = f(-x_1、\ldots\ldots、-x_{k+1}、-x_k、\ldots\ldots、-x_n)$。因此，$ONH_n$ 通过 [4, 2.1.1] 中定义的奇除差算子作用于 OP_n。特别地，令 ω_0 如 (2.9) 所示，则根据 [4,命题 3.6]，有

$$\tau_{\omega_0}(x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-1}) = (-1)^{\binom{n}{3}}.$$

情形 3：$i \in I^{\mathrm{im}} \cap I_{\mathrm{I}^\circ}$。

命题 2.5。$R(ni)$ 的一个基为 $\{x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n}\tau_\omega \mid \omega \in S_n, u_1,\ldots,u_n \geq 0\}$。

证明。我们证明这些元素在线性意义下独立地作用于 $\mathscr{P}_{ni}$ $(= \mathscr{P})$。假设有一个非平凡线性组合 $\sum_{\omega;\ u_1、\ldots\ldots、u_n} k_{\omega;u_1、\ldots\ldots、u_n} x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n}\tau_\omega$ 作用于 $\mathscr{P}_{ni}$ 后为零。选取一个长度最小的元素 ω，使得对于某个 $u_1、\ldots\ldots、u_n$，有 $k_{\omega;u_1、\ldots\ldots、u_n} \neq 0$。记 $\omega_0 = \omega\omega'$，并将该线性组合作用于元素

$$\tau_{\omega'}\cdot\big((c_1 z_1)^{n-1}(c_2 z_2)^{n-2}\cdots(c_{n-1}z_{n-1})\big).$$

这就得到

$$\textstyle\sum_{u_1,\ldots,u_n} \pm k_{\omega;u_1,\ldots,u_n} x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n} = 0,$$

这意味着，对于所有 $u_1, \ldots\ldots, u_n \geq 0$，都有 $k_{\omega;u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n} = 0$，矛盾。 □

命题 2.6。对于 $n \geq 2$，中心 $Z(R(ni)) = \mathbb{C}[x_1^2, \ldots, x_n^2]^{S_n}$。

证明。 显然， $\mathbb{C}[x_1^2,\dots,x_n^2]^{S_n}\subset Z(R(ni))$。设 $z=\sum_{\omega\in S_n}f_\omega\tau_\omega$为一个中心元素。假设 $\omega\neq 1$ 满足 $f_\omega\neq 0$，则存在 $k\in\{1,\dots,n\}$ 使得 $\omega(k)\neq k$。但这意味着 $x_kz-zx_k=\sum_{\omega\in S_n}f_\omega(x_k-(-1)^{l(\omega)}x_{\omega(k)})\tau_\omega\neq 0$。因此$z\in OP_n$。由于 $Z(OP_n)=\mathbb{C}[x_1^2,\dots,x_n^2]$，我们将 $z=\sum_{a,\ b\geq 0}h_{ab}x_1^{2a}x_2^{2b}$写成某个 $h_{ab}\in\mathbb{C}[x_3^2,\dots,x_n^2]$的形式。现在， $\tau_1z=z\tau_1$意味着对于每个 a，b都有 $p_{ab}=p_{ba}$。因此， z关于 x_1和 x_2是对称的。类似地，可以证明对于所有 $1\leq k\leq n-1$， z关于 x_k 和 x_{k+1} 是对称的。□

若 $i\cdot i<0$，则 $R(ni)$ 有唯一的极大左分次超理想，即 $R(ni)_{>0}$。因此，它有唯一的不可约分次超模 $V(i^n)$，即一维平凡模。显然，作为超模， $V(i^n)$ 是 M 型。

若 $i\cdot i=0$，则 $R(ni)$ 的唯一极大左分次超理想由以下元素张成：

$$\{x_1^{u_1}\cdots x_n^{u_n}\tau_\omega\mid\omega\in S_n,u_1,\dots,u_n\geq 0\}\setminus\{1\}.$$

因此，一维平凡模仍是唯一的不可约分次超模；我们也将其记为 $V(i^n)$。

2.4. $R(\nu)$ 的基与中心。

令 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\in\nu$。利用 $R(\nu)$ 的多项式表示 $\mathscr{P}_\nu$ ，通过类似于 [15, 定理 2.5] 的论证，可以得到 $\mathscr{P}_\nu$ 是一个忠实的 $R(\nu)$-模，且 $\boldsymbol{i}R(\nu)\boldsymbol{j}$ 有一组基

$$\{x_{1,\boldsymbol{i}}^{u_1}\cdots x_{n,\boldsymbol{i}}^{u_n}\cdot\widehat{\omega}_{\boldsymbol{j}}\mid u_1,\dots,u_n\geq 0,\ \omega\in S_n\text{ such that }\omega(\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\},$$

其中 $\widehat{\omega}_{\boldsymbol{j}}\in\boldsymbol{i}R(\nu)\boldsymbol{j}$ 由 ω 的一个固定约化表达式唯一确定。若 ω 的约化表达式为 $s_{k_1}\cdots s_{k_r}$，则

$$\widehat{\omega}_{\boldsymbol{j}}=\tau_{k_1,s_{k_2}\cdots s_{k_r}(\boldsymbol{j})}\cdots\tau_{k_{r-1},s_{k_r}(\boldsymbol{j})}\tau_{k_r,\boldsymbol{j}}.$$

假设序列集(ν)包含一个序列${i_1}^{m_1}\cdots{i_t}^{m_t}$，使得 $i_1,\dots,i_t$ 彼此不同。类似于 [15, 定理 2，中心 $Z(R(\nu))$ 可描述为

$$Z(R(\nu))\cong\bigotimes_{k=1}^{t}\mathbb{C}[\chi_1^{1+p(i_k)},\dots,\chi_{m_k}^{1+p(i_k)}]^{S_{m_k}}.$$

3. 量子 Borcherds 超代数的范畴化

3.1. 分次 $R(\nu)$-超模的格罗滕迪克群。

令 $R(\nu)$-Mod表示由有限生成分次 $R(\nu)$-超模构成的范畴，其态射为次数零偶同态：

$$\mathrm{HOM}_{R(\nu)}(M,N)_{\overline{0}}^{\overline{0}}\ \text{ for }M,N\in R(\nu)\text{-Mod}.$$

令 $R(\nu)$-fMod（分别地， $R(\nu)$-pMod）为 $R(\nu)$-Mod的全子范畴，由有限维（分别地，有限生成投射）分次 $R(\nu)$-超模构成。

由于 $R(\nu)$ 是劳伦特型的，引理 1.1(1) 表明，除同构以及次数/宇称移位外，不可约分次 $R(\nu)$-超模只有有限多个。这些模都是有限维的；忘记 $\mathbb{Z}$-分次后，它们仍是不可约的 $R(\nu)$-超模。

令 $\mathbb{B}_\nu$ 为不可约分次 $R(\nu)$-超模在同构及次数/字称移位意义下的等价类集合。为每个等价类选取一个代表元 S_b，并将 S_b 的射影覆盖记为 P_b。

Grothendieck 群 $G_0(R(\nu))$（分别为 $K_0(R(\nu))$） $R(\nu)$-fMod（分别为 $R(\nu)$-pMod）的 Grothendieck 群是自由的 $\mathbb{Z}^\pi[q,q^{-1}]$-模，其基为 $\{[S_b]\}_{b\in\mathbb{B}_\nu}$（分别为 $\{[P_b]\}_{b\in\mathbb{B}_\nu}$）（见下文注 3.1）。这里，$q$ 和 π 的作用定义如下：

$$q[M]=[M\{1\}],\quad \pi[M]=[\Pi M].$$

令 $R=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}[I]}R(\nu)$ 并构成

$$G_0(R)=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}[I]}G_0(R(\nu)),\quad K_0(R)=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}[I]}K_0(R(\nu)).$$

注 3.1。(M 型现象) 必须证明所有不可约分次 $R(\nu)$-超模都是 M 型。否则，格罗滕迪克群 $G_0(R)$ 和 $K_0(R)$ 就不是自由的 $\mathbb{Z}^\pi[q,q^{-1}]$-模；特别是，无法自然地将 $K_0(R\otimes R)$ 与 $K_0(R)\otimes K_0(R)$ 等同，也无法将 $G_0(R\otimes R)$ 与 $G_0(R)\otimes G_0(R)$ 等同（见 [13, 引理 12.2.13]）。

由引理 1.1(4)，只需证明每个不可约分次 $|R|$-模 V 都满足 $V\cong V^\varsigma$。[10, 定理 6.4]提供了一种有效的证明方法。利用 [23, 第 2], 节建立的框架，可以在不可约分次 $|R|$-模范畴上构造 Kashiwara 算子，再应用 [10, 定理 6.4]得出所述结论。

$\mathbb{Z}^\pi[q,q^{-1}]$-模 $K_0(R)$（分别为 $G_0(R)$）是一个扭双代数，其乘法和余乘法由诱导函子和限制函子导出：

$$\mathrm{Ind}_{\nu,\nu'}^{\nu+\nu'}\colon R(\nu)\otimes R(\nu')\text{-Mod}\to R(\nu+\nu')\text{-Mod},\ M\mapsto R(\nu+\nu')1_{\nu,\nu'}\otimes_{R(\nu)\otimes R(\nu')}M,$$

$$\mathrm{Res}_{\nu,\nu'}^{\nu+\nu'}\colon R(\nu+\nu')\text{-Mod}\to R(\nu)\otimes R(\nu')\text{-Mod},\ N\mapsto 1_{\nu,\nu'}N,$$

其中 $1_{\nu,\ \nu'}=1_\nu\otimes 1_{\nu'}$。

更准确地说，设 $\boldsymbol{i}=i_1\dots i_n\in\mathsf{Seq}(\nu)$。对于 $x\in R(\nu)$-模范畴，定义

$$|x|:=\nu\in\mathbb{N}[I],\quad p(x)=p(\nu):=p(i_1)+\cdots+p(i_n).$$

根据注 3.1，我们可以将 $K_0(R\otimes R)$（分别为 $G_0(R\otimes R)$）与 $K_0(R)\otimes K_0(R)$（分别为 $G_0(R)\otimes G_0(R)$）视为相同。我们在 $K_0(R)\otimes K_0(R)$（分别为 $G_0(R)\otimes G_0(R)$）上赋予如下扭代数结构：

$$(x_1\otimes x_2)(y_1\otimes y_2)=\pi^{p(x_2)p(y_1)}q^{-|x_2|\cdot|y_1|}x_1y_1\otimes x_2y_2,$$

在此结构下，由以下 Mackey 型定理可知，限制映射 Res 成为代数同态。

命题 3.2. [15, 命题 2.18], [7, 定理 6.3] 设 $\nu,\nu',\mu,\mu'\in\mathbb{N}[I]$ 满足 $\nu+\nu'=\mu+\mu'$。对于 $M\in R(\mu)$-模 $N\in R(\mu')$-模，我们有一个 $Res_{\nu,\nu'}Ind_{\mu,\mu'}M\otimes N$ 的滤过，其子商遍历所有满足 $\nu-\lambda,\mu'-\lambda,\nu'+\lambda-\mu'\in\mathbb{N}[I]$ 的 $\lambda\in\mathbb{N}[I]$，并且同构于

$$\Pi^{p(\lambda)p(\nu'+\lambda-\mu')}Ind_{\nu-\lambda,\lambda,\nu'+\lambda-\mu',\mu'-\lambda}^{\nu,\nu'}{}^{\diamond}(Res_{\nu-\lambda,\nu'+\lambda-\mu',\lambda,\mu'-\lambda}^{\mu,\mu'}M\otimes N)\{-\lambda\cdot(\nu'+\lambda-\mu')\}.$$

此处若 $Res M \otimes N = Q_1 \otimes Q_2 \otimes Q_3 \otimes Q_4$，则 $^{\diamond}(Res M \otimes N) = Q_1 \otimes Q_3 \otimes Q_2 \otimes Q_4$。

3.2. **量子 Serre 关系与双线性型的范畴化**。

对于 $i \in$序列集(ν)，我们定义

$$P_i = R(\nu)1_i,$$

这是一个射影分次 $R(\nu)$-超模。回顾一下，对于 $i \in I^{\mathrm{re}}$，我们在 (2.7) 和 (2.8) 中定义了射影分次超模

$$P_{i^{(n)}} = R(ni)e_{i,n}\left\{\binom{n}{2}\cdot r_i\right\}.$$

命题 3.3。假设 $i \in I^{re}$, $j \in I$ 和 $i \neq j$。令 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $m = 1 - na_{ij}$。我们有一个分次 $R(mi+nj)$- 超模的偶同构

$$\bigoplus_{c=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \Pi^{p(2c;i,j;n)} P_{i^{(2c)}j^n i^{(m-2c)}} \simeq \bigoplus_{c=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \Pi^{p(2c+1;i,j;n)} P_{i^{(2c+1)}j^n i^{(m-2c-1)}}.$$

这里，$P_{i^{(a)}j^n i^{(b)}} =$ 诱导$(P_{i^{(a)}} \otimes P_{j^n} \otimes P_{i^{(b)}})$。此外，对于 $i, j \in I$ 和 $i \cdot j = 0$，我们有一个偶同构

$$P_{ij} \simeq \Pi^{p(i)p(j)} P_{ji}.$$

证明。证明与 [16] 和 [7]中的“盒子”计算完全相同。细节留给读者。□

令 ψ： $R(\nu) \to R(\nu)$ 为 $R(\nu)$ 的反对合，其定义为将图形关于水平轴翻转。对于 $P \in R(\nu)$-pMod，定义 $P = \mathrm{HOM}^{R(\nu)}(P, R(\overline{\nu}))^{\psi}$ 为左分次$R(\nu)$-超模，其作用由 ψ 扭曲。对所有 $k, r \in \mathbb{Z}$，有如下同构:

$$\overline{\Pi^r P\{k\}} \simeq \Pi^r \overline{P}\{-k\}.$$

定义 $\mathbb{Z}^{\pi}[q, q^{-1}]$-双线性配对 $(\ ,\ ): K_0(R(\nu)) \times G_0(R(\nu)) \to \mathbb{Z}^{\pi}[q, q^{-1}]$，其定义为

$$([P], [M]) = \dim_q^{\pi}(P^{\psi} \otimes_{R(\nu)} M) = \dim_q^{\pi} \mathrm{HOM}_{R(\nu)}(\overline{P}, M).$$

由于所有不可约分次 $R(\nu)$-超模均为 M 型，群 $G_0(R(\nu))$ 和$K_0(R(\nu))$ 在此配对下是对偶的 $\mathbb{Z}^{\pi}[q, q^{-1}]$-模。

此外还有一个对称的 $\mathbb{Z}^{\pi}[q, q^{-1}]$-双线性型

$$(\ ,\ ): K_0(R(\nu)) \times K_0(R(\nu)) \to \mathbb{Z}^{\pi}((q))$$

以相同方式定义。与 [15, 命题 3.3], 类似，我们有如下命题。

命题 3.4. K_0（R）上的双线性型满足:

(1) $([P], [Q]) = 0$ 对于 $P \in R$（ν）-p模，$Q \in R$（μ）-p模，且 $\nu \neq \mu$ ，

(2) $(1,1) = 1$，其中 $1 = \mathbb{C}$ 作为 $R(0) = \mathbb{C}$上的模，

(3) $([P_i], [P_i]) = (1 - \pi^{p(i)} q_i^2)^{-1}$ 对所有 $i \in I$均成立，

(4) $(x, yz) = (Res(x)\ y \otimes z)$ 对于 $x, y, z \in K_0(R)$成立。

3.3. **范畴化定理**。

令 $K_0(R)_{\mathbb{Q}^\pi(q)} = \mathbb{Q}^\pi(q) \otimes_{\mathbb{Z}^\pi[q,q^{-1}]} K_0(R)$。由 (1.1) 和命题 3.3，我们得到一个良定义的双代数同态

$$\Gamma : \mathbf{H} \to K_0(R)_{\mathbb{Q}^\pi(q)}$$

由 $\Gamma(\theta_i) = [P_i]$ 给出，对所有 $i \in I$均成立。根据命题 3.4，$\mathbf{H}$ 上的双线性型 $\{\ ,\ \}_\pi$ 与 $K_0(R)_{\mathbb{Q}^\pi(q)}$ 上的型 $(,)$ 在 Γ 下取相同的值，即，

$$(\Gamma(x), \Gamma(y)) = \{x, y\}_\pi \quad \text{for } x, y \in \mathbf{H}.$$

因此，由 $\{\ ,\ \}_\pi$ 的非退化性可知 Γ 是单射（见命题 1.4）。它诱导出一个单射的 $\mathbb{Z}^\pi[q, q^{-1}]$-代数同态

$$\Gamma_{\mathcal{A}^\pi} : {}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H} \to K_0(R).$$

此外，$\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}$ 诱导出一个 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-代数同态

$$\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}|_{\pi=1} : {}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H}/(\pi - 1) \to K_0(R)/(\pi - 1) = K_0(R)/([\Pi P] - [P]),$$

其中，左边根据 (1.2) 等于 ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{X}$，而右边根据注 3.1 等于 $K_0(|R|)$。利用 [22], 中给出的类似论证，可以建立 ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{X}$ 与 $K_0(|R|)$ 之间的同构，而 $\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}|_{\pi=1}$ 正是由此得到的同一个映射。

因此，$\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}|_{\pi=1}$是一个同构，这意味着 $\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}$是满射。我们证明了以下结论:

定理 3.5. 我们有一个 $\mathbb{Z}^\pi[q, q^{-1}]$-双代数同构

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}^\pi} : {}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H} &\xrightarrow{\sim} K_0(R) \\ \theta_i^{(n)} &\mapsto [P_{i^{(n)}}] \qquad \textit{for } i \in I^{re}, n \in \mathbb{Z}_{>0}, \\ \theta_i \ &\mapsto [P_i] \qquad \textit{for } i \in I^{im}. \end{aligned}$$

此外，特化 $\pi \mapsto -1$ 诱导出一个同构

$$\Gamma_{\mathcal{A}^\pi}|_{\pi=-1} : {}_{\mathcal{A}}\mathbf{Y} \left(\cong {}_{\mathcal{A}^\pi}\mathbf{H}/(\pi + 1)\right) \xrightarrow{\sim} K_0(R)/(\pi + 1).$$

4. **附录**

以下内容与 [8, 节 3], 平行，该节在量子 Borcherds 超代数$\mathbf{Y}$上建立了余乘法ρ_- 和双线性型 $\{\ ,\ \}_-$ 的存在性。

对于 $i \in I^{\mathrm{re}}$，$n \geq k \geq 0$，定义

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_i^- = \frac{[n]_i^-!}{[k]_i^-![n-k]_i^-!}.$$

注意，

$$[n]_i^- = (-1)^{\frac{n-1}{2}p(i)}[n]_{(-1)^{p(i)/2}q_i}, \quad [n]_i^-! = (-1)^{\frac{n(n-1)}{4}p(i)}[n]_{(-1)^{p(i)/2}q_i}!.$$

这里我们使用记号 $[k]_v = \frac{v^k - v^{-k}}{v - v^{-1}}$ 表示任意整数 k。根据$[k]_v$的二项式公式，可得

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_i^- = q_i^{-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_i^- + (-1)^{(n-k+1)p(i)} q_i^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_i^-.$$

~给定一个 Borcherds–Cartan 超数据 $(I, A, \cdot)$，定义对偶权格

$$P^\vee = \Big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} h_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} d_i\Big)$$

以及 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} P^\vee$。权格定义为

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(P^\vee) \subset \mathbb{Z}\}.$$

对每个 $i \in I$，定义单根 $\alpha_i \in P$ 如下：$\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ 以及 $\alpha_j(d_i) = \delta_{ij}$。我们将$i \in I$ 与 α_i等同，从而正根格 $Q_+ = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{N}\alpha_i$ 与 $\mathbb{N}[I]$等同。主导权集合为

$$P^+ = \{\Lambda \in P \mid \Lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for } i \in I;\ \Lambda(h_i) \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for } i \in I^{\mathrm{re}} \cap I_{\bar{1}}\}.$$

定义 4.1。 [1, 定义 2.7]与 $(I, \widetilde{A}, \cdot)$ 相联系的量子 *Borcherds* 超代数 U 是由 $e_i, f_i (i \in I)$ 和 $q^h (h \in P^\vee)$ 生成的 $\mathbb{Q}(q)$-代数，满足以下关系

$$q^0 = 1, \quad q^h q^{h'} = q^{h+h'} \quad \text{for } h, h' \in P^\vee,$$

$$q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i, \quad q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i \quad \text{for } i \in I, h \in P^\vee,$$

$$\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ a \end{bmatrix}_i^- f_i^a f_j f_i^b = 0 \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,$$

$$\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ a \end{bmatrix}_i^- e_i^a e_j e_i^b = 0 \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,$$

$$f_i f_j - (-1)^{p(i)p(j)} f_j f_i = e_i e_j - (-1)^{p(i)p(j)} e_j e_i = 0 \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } a_{ij} = 0,$$

$$e_i f_j - (-1)^{p(i)p(j)} f_j e_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad \text{for } i, j \in I, \text{ where } K_i = q_i^{h_i}.$$

令 U^+（分别是 U^-、 U^0）为 U 中由 e_i（分别由 f_i、q^h）生成的子代数。由 [1,定理 2.23],可得三角分解 $U \cong U^+ \otimes U^0 \otimes U^-$。此外， U^- 与 $\mathbf{Y}$ 一致。

对于任意的 $i \in I, x \in U^-$，存在唯一的 $e_i'(x)$ $e_i''(x) \in U^-$ 使得

$$e_i x - (-1)^{p(i)p(x)} x e_i = \frac{K_i e_i''(x) - K_i^{-1} e_i'(x)}{q_i - q_i^{-1}}.$$

算子 e_i', e_i'', f_i（表示在 U^- 上的左乘）对所有 $i, j \in I$ 满足以下关系：

$$e_i' f_j = \delta_{ij} + (-1)^{p(i)p(j)} q_i^{-a_{ij}} f_j e_i', \tag{4.1}$$

$$e_i'' f_j = \delta_{ij} + (-1)^{p(i)p(j)} q_i^{a_{ij}} f_j e_i'', \tag{4.2}$$

$$e'_i e''_j = (-1)^{p(i)p(j)} q_i^{a_{ij}} e''_j e'_i. \tag{4.3}$$

定义 4.2。 与 $(I, A, \cdot)$ 相关联的量子玻色子超代数 $\mathscr{B}$ 是由 e'_i, f_i $(i \in I)$ 生成的 $\mathbb{Q}(q)$-代数，并满足

$$\begin{aligned}
&e'_i f_j = \delta_{ij} + (-1)^{p(i)p(j)} q_i^{-a_{ij}} f_j e'_i, \quad \text{for } i, j \in I,\\
&f_i f_j - (-1)^{p(i)p(j)} f_j f_i = e'_i e'_j - (-1)^{p(i)p(j)} e'_j e'_i = 0 \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } a_{ij} = 0,\\
&\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ a \end{bmatrix}_i^- f_i^a f_j f_i^b = 0 \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,\\
&\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ a \end{bmatrix}_i^- e_i'^a e'_j e_i'^b = 0 \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j.
\end{aligned}$$

引理 4.3。 [8, 引理 3.4.2, 3.4。3] U^- 是一个左 $\mathscr{B}$-模，并且我们有一个 $\mathscr{B}$-模的典范同构：

$$\mathscr{B} \Big/ \sum_{i \in I} \mathscr{B} e'_i \cong U^-.$$

证明。 我们检查 $\mathscr{B}$ 在 U^- 的自同态环中的定义关系。首先假设 $i, j \in I$ 且满足 $a_{ij} = 0$。由方程 (4.1)，对于任意 $k \in I$，我们有

$$\begin{aligned}
e'_i e'_j f_k &= \delta_{jk} e'_i + (-1)^{p(i)p(j)} \delta_{ik} e'_j + (-1)^{(p(i)+p(j))p(k)} q_k^{-a_{ki}-a_{kj}} f_k e'_i e'_j,\\
e'_j e'_i f_k &= (-1)^{p(i)p(j)} \delta_{jk} e'_i + \delta_{ik} e'_j + (-1)^{(p(i)+p(j))p(k)} q_k^{-a_{ki}-a_{kj}} f_k e'_j e'_i.
\end{aligned}$$

设 $S = e'_i e'_j - (-1)^{p(i)p(j)} e'_j e'_i$。那么对于每个 $k \in I$，

$$S f_k = (-1)^{(p(i)+p(j))p(k)} q_k^{-a_{ki}-a_{kj}} f_k S,$$

这意味着 S 在 U^- 上的作用为零。

接下来假设 $i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I$ 且满足 $j \neq i$，并令 $m = 1 - a_{ij}$。对于任意 $k \in I$，$n \in \mathbb{N}$，由 (4.1) 可得

$$e_i'^n f_k = (-1)^{(n-1)p(i)} q_i^{1-n} [n]_i^- \delta_{ik} e_i'^{n-1} + (-1)^{np(i)p(k)} q_i^{-na_{ik}} f_k e_i'^n.$$

因此，对于任意的 $a, b \in \mathbb{N}$ 且满足 $a + b = m$，我们有

$$\begin{aligned}
e_i'^a e'_j e_i'^b f_k = {} & (-1)^{(mp(i)+p(j))p(k)} q_k^{-ma_{ki}-a_{kj}} f_k e_i'^a e'_j e_i'^b\\
&+ (-1)^{bp(i)p(j)} q_i^{b(m-1)} \delta_{jk} e_i'^m\\
&+ (-1)^{(b-1)p(i)} q_i^{1-b} [b]_i^- \delta_{ik} e_i'^a e'_j e_i'^{b-1}\\
&+ (-1)^{(m-1)p(i)+p(i)p(j)} q_i^{-b} [a]_i^- \delta_{ik} e_i'^{a-1} e'_j e_i'^b.
\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{a+b=m} (-1)^a v^{b(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix}_v = 0,$$

通过令 $v = (-1)^{p(i)/2} q_i$，我们得到

$$\sum_{a+b=m} (-1)^{a+\frac{b(b-1)}{2}p(i)} q_i^{b(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix}_i^- = 0.$$

By 结合这一事实：当 i 为奇数时，$\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} \equiv \frac{m-1}{2}$（模 2），我们得到 et

$$\sum_{a+b=m} (-1)^{a+p(a;i,j)+bp(i)p(j)} q_i^{b(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix}_i^- = 0. \tag{4.4}$$

另请注意,

$$p(a;i,j) + (b-1)p(i) + p(a+1;i,j) + (m-1)p(i) + p(i)p(j) \equiv 0 \pmod 2. \tag{4.5}$$

现在，定义

$$S = \sum_{a+b=m} (-1)^{a+p(a;i,j)} \begin{bmatrix} m \\ a \end{bmatrix}_i^- e_i'^a e_j' e_i'^b.$$

利用恒等式 (4.4) 和 (4.5)，我们得到

$$S f_k = (-1)^{(mp(i)+p(j))p(k)} q_k^{-ma_{ki}-a_{kj}} f_k S,$$

这意味着 S 在 U^-上作用为零。

命题的第二部分由 [8, 引理 3.4.3] 立即得出。 □

Lemma 4.4. [8, 引理 3.4。7] 设 $x \in U^-$ 满足 $e_i'(x) = 0$ 对所有 $i \in I$均成立。那么 $x \in \mathbb{Q}(q \quad)$.

证明。 我们对 ht(ν) ≥ 1使用归纳法证明此引理。ht(ν) $= 1$ 的情形显然成立。现在假设 ht(ν) > 1。设 $x \in U_\nu^-$满足 $e_i'(x) = 0$ 对所有 $i \in I$均成立。

对于任意 $i, j \in I$，由方程 (4.2) 可得,

$$e_i' e_j''(x) = (-1)^{p(i)p(j)} q_i^{a_{ij}} e_j'' e_i'(x) = 0.$$

由归纳假设可知，这意味着对所有 $j \in I$均有 $e_j''(x) = 0$。因此，对于任意 $j \in I$，有交换关系

$$e_j x = (-1)^{p(i)p(j)} x e_j.$$

根据 [1, 推论 4.10], , 具有最高权$\Lambda \in P^+$ 和最高权向量 v_Λ 的不可约最高权模 $V(\Lambda)$ 为

$$V(\Lambda) \cong U^- \Big/ \Big(\sum_{i \in I^{\mathrm{re}}} U^- f_i^{\Lambda(h_i)+1} + \sum_{i \in I^{\mathrm{im}} \text{ with } \Lambda(h_i)=0} U^- f_i \Big).$$

选择 $\Lambda \in P^+$ 使得 $\Lambda \gg 0$。于是存在一个同构

$$U_\nu^- \xrightarrow{\sim} V(\Lambda)_{\Lambda-\nu},\ u \mapsto u v_\Lambda.$$

对于所有 $j \in I$，我们都有 $e_j x v_\Lambda = 0$，这意味着子模 Uxv_Λ of $V(\Lambda)$ 不包含 v_Λ。由于 $V(\Lambda)$ 不可约，因此必有 $xv_\Lambda = 0$，进而得到 $x = 0$。□

定理 4.5。 [8, 命题 3.4.4，推论 3.4.8。] 对于 $\mathbb{Q}(q)$ 中任意一族 $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ 非零元素，都存在一个非退化对称双线性形式 $\langle , \rangle : \ U^- \times U^- \to \mathbb{Q}(q)$ 使得 $\langle 1, 1\rangle = 1$ 并且

$$\langle f_i x, y\rangle = \kappa_i \langle x, e_i' y\rangle \quad for\ all\ i \in I.$$

证明。 映射 $f_i \mapsto \kappa_i e_i', e_i' \mapsto \kappa_i^{-1} f_i$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个 $\mathbb{Q}(q)$-代数反自同构。因此，$(U^-)^*$ 是一个左 $\mathscr{B}$-模，其作用如下

$$(f_i\varphi)(y) = \kappa_i \varphi(e_i' y),\ (e_i'\varphi)(y) = \kappa_i^{-1}\varphi(f_i y) \ \text{ for } \varphi \in (U^-)^*.$$

令 $\varphi_0 \in (U^-)^*$ 定义如下

$$\varphi_0(1) = 1,\ \varphi_0(\sum_i f_i U^-) = 0.$$

因此，对所有 $i \in I$，均有 $e_i'\varphi_0 = 0$。这便导出了一个 $\mathscr{B}$-线性映射

$$\mu : U^- \cong \mathscr{B}\Big/\sum_{i\in I}\mathscr{B}e_i' \to (U^-)^*,\ 1 \mapsto \varphi_0.$$

现在，定义双线性型 $\langle x, y\rangle := (\mu(x))(y)$。根据定义，我们有

$$\langle f_i x, y\rangle = \kappa_i\langle x, e_i' y\rangle, \quad \langle e_i' x, y\rangle = \kappa_i^{-1}\langle x, f_i y\rangle.$$

这样的双线性型是唯一的。由于 $\langle x, y\rangle' := \langle y, x\rangle$ 满足相同的性质，我们看到 $\langle\ ,\ \rangle$ 是对称的。

为证明 $\langle x$的 $y\rangle$ 的非退化性，我们对 $\mathrm{ht}(\nu) \geq 1$ 进行归纳。设 $x \in U_\nu^-$ 使得 $\langle x,\ U_\nu^-\rangle = 0$。那么，对于所有 $i \in I$，有 $\langle e_i' x,\ U_{\nu-i}^-\rangle = 0$。根据归纳假设，这意味着对于所有 $i \in I$，$e_i' x = 0$。由引理 4.4，我们得到$x = 0$。□

令 $\mathscr{Y}$ 为由 $\vartheta_i\ (i \in I)$ 生成的自由 $\mathbb{Q}(q)$-代数，其中具有 $|\vartheta_i| = i$ 和 $p(\vartheta_i) = p(i)$。我们定义余乘法 $\rho_- :\ \mathscr{Y} \to \mathscr{Y} \otimes \mathscr{Y}$，其定义为 $\rho_-(\vartheta_i) = \vartheta_i \otimes 1 + 1 \otimes \vartheta_i\ (i \in I)$。这里 $\mathscr{Y} \otimes \mathscr{Y}$ 赋予了扭曲乘法

$$(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) = (-1)^{p(x_2)p(y_1)} q^{-|x_2|\cdot|y_1|} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2.$$

A在 [19, 1.2.3], 中，存在一个对称双线性形式 $\{\ ,\ \}_- : \mathscr{Y} \times \mathscr{Y} \to \mathbb{Q}(q)$，满足 g

(i) $\{x, y\}_- = 0$ 若 $|x| \neq |y|$, (ii)
$\{1, 1\}_- = 1$, (iii) 对所有 $i \in I$,
$\{\vartheta_i, \vartheta_i\}_- = \kappa_i$, (iv) $\{x, yz\}_- = \{\rho_-(x)$
$y \otimes z\}_-$ 对于 $x,\ y,\ z \in \mathscr{Y}$。
设 $i \in I$。对于 $x \in \mathscr{Y}$，我们将 $\rho_-(x)$ 写成

$$\rho_-(x) = \vartheta_i \otimes \rho_-^i(x) + \text{ terms of bidegree not in } i \times \mathbb{N}[I].$$

那么，对于任意的 $x,\ y \in \mathscr{Y}$，根据定义有

$$\rho_-^i(xy) = \rho_-^i(x) + (-1)^{p(i)p(x)} q^{-i\cdot|x|} x\rho_-^i(y), \tag{4.6}$$

$$\{\vartheta_i x, y\}_- = \kappa_i \{x, \rho_-^i(y)\}_-. \tag{4.7}$$

由 [19, 1.4.5], 可知，$\mathrm{rad}\{\ ,\ \}_-$ 包含

$$\sum_{a+b=1-a_{ij}} (-1)^{a+p(a;i,j)} \vartheta_i^{(a)} \vartheta_j \vartheta_i^{(b)} \quad \text{for } i \in I^{\mathrm{re}}, j \in I \text{ and } i \neq j,$$

$$\vartheta_i \vartheta_j - (-1)^{p(i)p(j)} \vartheta_j \vartheta_i \quad \text{for } i, j \in I \text{ with } i \cdot j = 0.$$

因此，我们得到一个满同态

$$\Phi : U^- \twoheadrightarrow \mathscr{Y}/\mathrm{rad}\{\ ,\ \}_-,\ f_i \mapsto \vartheta_i \quad \text{for } i \in I.$$

注意， ρ_- 和 ρ_-^i 在 $\mathscr{Y}/\mathrm{rad}\{\ ,\ \}_-$上定义良好。由 (4.6)，可得

$$\Phi(e_i' x) = \rho_-^i \Phi(x) \quad \text{for all } i \in I,$$

继而由 (4.7)，可得

$$\{\Phi(x), \Phi(y)\}_- = \langle x, y \rangle \quad \text{for } x, y \in U^-.$$

因此，由于 $\langle x,\ y \rangle$ 的非退化性， Φ 是单射（见定理 4.5）。

我们得出 Φ 是一个同构，因此 $\mathbf{Y} \cong \mathscr{Y}/\mathrm{rad}\{\ ,\ \}_-$。于是， ρ_- 在$\mathbf{Y}$上定义了一个余乘法。

Acknowledgement

作者谨此感谢 Bolun Tong 对本文提出的宝贵建议。

References

1. G. Benkart、S.-J. Kang 和 D. Melville， *Quantized enveloping algebras for Borcherds superalgebras*, 《美国数学会汇刊》**350**(8) (1998), 3297-3319. 2. A. Ellis， *The odd Littlewood-Richardson rule*, 代数组合学杂志**37**(4) (2013), 777-799. 3. A. Ellis 和 M. Khovanov, *The Hopf algebra of odd symmetric functions*, 数学进展**231**(2) (2012), 965-999. 4. A. Ellis、M. Khovanov 和 A. Lauda， *The odd nilHecke algebra and its diagrammatics*, 国际数学研究通知 (2014), 991-1062. 5. A. Lauda 和 H. Russell， *Oddification of the cohomology of type A Springer varieties*, 国际数学研究通知 (2014), 4822–4854. 6. Z. Fan、S.-J. Kang、Y. R. Kim 和 B. Tong, *Global bases for quantum Borcherds-Bozec algebras*, 数学杂志**301**(2022), 3727-3753. 7. D. Hill 和 W. Wang， *Categorification of quantum Kac-Moody superalgebras*, 《美国数学会汇刊》**367**(2015), 1183-1216. 8. M. Kashiwara， *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, 杜克数学杂志**63**(2) (1991), 465-516. 9. S.-J. Kang 和 M. Kashiwara, *Categorification of highest weight modules via Khovanov-Lauda-Rouquieralgebras*, 数学创刊**190**(3) (2012), 699-742. 10. S.-J. Kang、M. Kashiwara 和 S-j. Oh, *Supercategorification of quantum Kac-Moody algebras*, 数学进展**242** (2013), 116-162. 11. S.-J. Kang、M. Kashiwara 和 S-j. Oh， *Supercategorification of quantum Kac-Moody algebras II*, 数学进展**265** (2014), 169-240.

12. S.-J. Kang、M. Kashiwara 和 S. Tsuchioka, *Quiver Hecke superalgebras*, 《纯粹与应用数学杂志》 **711**(2016), 1-54. 13. A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, 剑桥数学丛书第163卷。剑桥大学出版社，2005年。14. A. Kleshchev, *Imaginary Schur-Weyl duality for quiver Heckesuperalgebras*, arXiv:2411.02735. 15. M. Khovanov 和 A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups* I, 表示论**13**(14) (2009), 309-347. 16. M. Khovanov 和 A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups* II, 《美国数学会汇刊》**363**(5) (2011), 2685-2700. 17. A. Kleshchev 和 M. Livesey, *RoCK blocks for double covers of symmetric groups and quiver Heckesuperalgebras*, arXiv:2201.06870. 18. F. Lenzen, *Clifford-symmetric polynomials*, 《代数通讯》, **51**(9) (2023), 3981-4011. 19. G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Springer，纽约，2010年。20. C. N˘ast˘asescu 和 F. Van Oystaeyen, *Methods of graded rings*, Springer-Verlag，柏林，2004年。21. R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023. 22. B. Tong 和 W. Wu, *Quiver Hecke algebras for Borcherds-Cartan datum*, 《代数杂志》**630**(2023), 38-55. 23. B. Tong 和 W. Wu, *Quiver Hecke algebras for Borcherds-Cartan datum II*, 《纯粹与应用代数》**229**(6) (2025), 107977.

Harbin Engineering University, Harbin, China
Email address: wuwan1818@163.com