Prepared for submission to JCAP

原初曲率扰动产生的声学引力波

Zhuan Ning,[a,b,c] **Zi-Yan Yuwen,**[f] **Xiang-Xi Zeng,**[b,d] **Rong-Gen Cai,**[e] **Shao-Jiang Wang**[b,f]

[a]基础物理与数学科学学院，中国科学院大学（UCAS）杭州高等研究院（HIAS），中国杭州 310024[b]中国科学院理论物理研究所（CAS），中国北京 100190[c]中国科学院大学（UCAS），中国北京 100049[d]中国科学院物理科学学院，中国科学院大学（UCAS），中国北京 100049[e]基础物理与量子技术研究所 & 宁波大学物理科学与技术学院，中国宁波 315211[f]亚太理论物理中心（APCTP），韩国浦项 37673

电子邮箱：ningzhuan17@mails.ucas.ac.cn，ziyan.yuwen@apctp.org，zengxiangxi@itp.ac.cn，caironggen@nbu.edu.cn，schwang@itp.ac.cn

摘要。 标量诱导引力波（SIGW）的标准微扰计算忽略了大振幅区域中的非微扰效应。我们构建了一个混合数值框架，用于揭示原初曲率扰动产生的随机引力波（GW）背景中的非微扰效应，重点关注声学通道（流体运动）。我们采用完全广义相对论的球对称模拟，从孤立的曲率峰中提取非微扰声壳剖面；随后将这些剖面嵌入相对论流体动力学与横向无迹度规扰动耦合的三维格点演化中，以计算声学引力波谱。声学信号的峰值频率由共动壳层厚度决定，其振幅对曲率峰的平均共动间距极为敏感，近似按 R_{*c}^{-7} 缩放。我们发现，因果低频尾部 $\propto k^3$ 十分稳健，而非线性流体动力学相互作用能够增强紫外功率。通过与基于相同实空间构型进行微扰计算得到的标量诱导引力波进行比较，我们表明，在大振幅区域，声学引力波的振幅可增强一个数量级，且峰值会移向较低频率。这些结果凸显了非微扰效应对于准确预测原初曲率扰动诱导的随机引力波信号的重要性。

arXiv:2512.21151v1 [gr-qc] 24 Dec 2025

目录

1 引言 **1**

2 曲率扰动峰坍缩产生的声波 **3**2.1 完整广义相对论模拟 32.2 与线性演化的比较 4

3 声学引力波的半解析计算 **8**
3.1 引力波能谱 83.2 流体速度场与速度功率谱 93.3 声波产生的引力波能谱 11

4 三　维声学引力波模拟 **12**

5 数值结果 **15**
5.1 声学引力波能谱的形状 155.2 声壳平均共动间距的影响 185.3 扰动振幅分布的影响 195.4 与标量诱导引力波的比较 21

6 结论与讨论 **22**

1 引言

暴胀范式 [1–4] 为产生原初曲率扰动提供了一种极具说服力的机制，这些扰动为宇宙中的辐射遗迹和结构形成提供种子。暴胀期间，暴胀子的量子涨落被拉伸至超哈勃尺度，并在视界穿越后转变为有效的经典曲率扰动。这些扰动随后在辐射主导时期和物质主导时期重新进入视界，并可成为多种可观测现象的源（参见例如综述 [5–7] 及其中的参考文献）。在大尺度上，曲率功率谱受到宇宙微波背景（CMB） [8–13] 和大尺度结构（LSS） [14–16]观测的严格约束。然而，在更小的尺度上，功率谱基本不受约束，并且在多种暴胀情景中甚至可能显著增强 [17–30]。增强的小尺度曲率扰动尤其值得关注，因为它们能够同时（i）通过罕见的大型超密度的引力坍缩产生原初黑洞（PBHs） [31–35], ，以及（ii）通过标量模与张量模之间的非线性耦合产生标量诱导引力波（SIGWs）的随机背景 [36–38]。因此，这些观测渠道为探测小尺度上的暴胀动力学提供了互补手段。

标量诱导引力波的标准计算采用宇宙学扰动理论框架：一阶标量扰动会产生二阶张量扰动，其中标量度规扰动以及背景流体所诱导的速度扰动都会对引力波（GW）源作出贡献。对于高斯统计，所得引力波能谱与原初曲率功率谱的平方成正比。只要相关扰动保持

较小。然而，如果扰动以足以触发非微扰动力学的振幅重新进入视界，其非线性演化可能与微扰理论的预期大相径庭。自引力效应能够使扰动区域脱离背景，并经历显著的非线性演化：罕见但振幅足够大的峰可能坍缩形成原初黑洞[1]，，而数量更多但处于亚临界状态的峰则会经历收缩、转向和反弹的动力学过程。这些高度非线性过程通常会产生标准二阶引力波框架未能涵盖的额外引力辐射源；要完整刻画与大振幅曲率扰动相关的引力波信号，就必须考虑这些过程。特别是，非微扰效应会改变根据引力波观测推断出的原初黑洞丰度约束 [40, 41]。

已有多项研究探讨了超越微扰标量诱导引力波计算的引力波产生。文献 [42]研究了亚临界曲率峰发生非球对称引力坍缩时产生的引力波，不过由此产生的引力波信号振幅通常较小，仅勉强可测。对于早期物质主导时期的引力波产生，研究表明，次哈勃尺度上密度扰动的非线性动力学——例如物质晕的形成、相互作用和蒸发——可将引力波信号增强至潜在可观测的水平 [43–46]。在文献 [46], 中，作者采用 N 体与格点模拟相结合的方法研究了这些非线性效应，并报告称，在大振幅区域，引力波信号显著增强。在辐射主导时期，压力梯度与自引力之间的竞争使非线性动力学变得复杂。在我们此前的工作 [47], 中，我们对单个曲率峰的坍缩进行了全广义相对论（广义相对论）、球对称（一维，1D）模拟。我们发现，在亚临界、近临界和超临界情形下，都会激发强烈的向外传播声波（“声壳”）。这些声壳携带的能量取决于扰动振幅与原初黑洞形成临界阈值之间差值的指数函数，这意味着非微扰效应可显著增强流体运动。尽管单个球对称声壳不会辐射引力波，但来自多个峰的声波叠加与碰撞能够产生声学引力波随机背景。因此，流体运动的非线性／非微扰增强可能会放大与原初曲率扰动相关的引力波信号。

开展能够解析原初黑洞形成、流体动力学响应和引力波辐射的三维（3D）完整广义相对论模拟，在数值上颇具挑战。然而，如果曲率扰动可以建模为一组稀疏且离散的峰 [48], ，那么各个峰产生的声波会在碰撞前进入自由传播阶段。在这种情况下，可以从一维广义相对论模拟中提取声壳剖面，然后使用声壳模型 [49–51] 计算声波碰撞产生的引力波信号。我们在文献 [52]中应用了这一方法，对GW谱进行了半解析估算，发现对于与原初黑洞形成相关的部分参数空间，声学引力波可能可以观测到；不过，这一结果基于简化假设，即曲率峰在空间中均匀分布且振幅相同。要放宽这些假设并获得更稳健的预测，需要进行格点模拟，这也是本文的主要目标。此外，由于我们在计算声学引力波时忽略了度规扰动，因此有必要将声学引力波的振幅与同一曲率扰动产生的标量诱导引力波的振幅进行比较，以评估这一近似的有效性。为此，

[1]最近，文献 [39] 指出，大的负曲率扰动也可以形成原初黑洞。本文不考虑这一情形。

我们开展了混合模拟，将一维完整广义相对论模拟（用于非微扰地提取声壳剖面）与相对论流体动力学和张量扰动的三维格点演化（用于计算曲率峰系综产生的引力波信号）相结合。随后，我们将得到的声学引力波谱与标量诱导引力波预测进行比较，发现我们的声学引力波本质上就是标量诱导引力波，只是体现出了非微扰效应。

本文安排如下：第2节简要回顾文献 [47] 中的一维全广义相对论模拟结果，并将非微扰声壳剖面与线性微扰理论进行比较，以突出非微扰效应。第3节介绍自由传播声波产生引力波的一般形式，推导声壳模型中的流体速度场及其功率谱，并阐明这些量与GW谱之间的关系。第4 节介绍三维格点模拟的设置，包括运动方程和数值方法。第5节展示数值结果，并将其与半解析估算 [52] 以及标量诱导引力波预测进行比较。最后，第6 节总结结论并讨论其意义。本文始终采用自然单位制，其中 $c = \hbar = 8\pi G = 1$，因此约化普朗克质量为 $M_{\rm Pl} = 1/\sqrt{8\pi G} = 1$。

2 曲率扰动中塌缩峰产生的声波

本节首先将在第 2.1 节中，使用 Misner-Sharp形式下的完整广义相对论模拟，非微扰地提取曲率扰动塌缩峰周围的声波密度和速度剖面。作为对比，我们随后将在第2.2 节中使用传统的线性微扰理论计算相同的声波剖面。小扰动情形可用于交叉检验我们的 Misner-Sharp模拟。然而，Misner-Sharp模拟的大扰动情形呈现出显著的非微扰效应，这是传统线性微扰处理无法捕捉到的；在将声学引力波与传统微扰处理下的标量诱导引力波进行比较时，这一效应对于理解声学引力波至关重要。所得声波剖面将作为后续半解析声壳计算（第3节）和实空间格点模拟（第4节）中诱导声学引力波（第5节）的输入。

2.1 完整的广义相对论模拟

如参考文献 [47], 所述，我们使用 Misner-Sharp形式 [53]对曲率扰动峰值的单独塌缩进行完整的广义相对论球对称模拟，然后提取由此得到的声壳剖面。在这种形式中，度规设定为

$$\mathrm{d}s^2 = -A(t,r)^2\mathrm{d}t^2 + B(t,r)^2\mathrm{d}r^2 + R(t,r)^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{2.1}$$

其中，度规分量 A、 B和 R 是宇宙时间 t （在没有扰动时）与共动径向坐标 r的函数，而 $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$ 是单位球面线元。宇宙流体被视为状态方程为 $p = \omega\rho$ 的理想流体，其中 p 和 ρ 分别表示压强和能量密度。

在初始时刻，扰动长度尺度远大于哈勃半径；因此，我们采用长波近似 [54–57]来设定初始条件。为便于与宇宙学微扰理论进行比较，我们将曲率扰动直接编码为尺度因子中的乘性扰动，而不是在弗里德曼–勒梅特–罗伯逊–沃克（FLRW）度规的空间部分引入非均匀曲率 $K(r)$。因此，初始曲率扰动的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 e^{2\zeta(r)}\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2\right), \tag{2.2}$$

其中 a（t）为尺度因子，而 ζ（r）为超视界共动曲率扰动 [58]。在本研究中，我们采用高斯曲率剖面，

$$\zeta(r) = \mu e^{-(r/r_m)^2}, \tag{2.3}$$

其中， r_m 是初始扰动长度尺度， μ 是振幅参数。为简单起见，我们假设所有曲率峰具有相同的尺度 r_m，对应于峰状功率谱。具体而言，我们选取 $r_m = 10r_H$ 进行演示，其中 r_H 是一维模拟初始时刻的共动哈勃半径。采用这一选择后，扰动会在辐射主导时期的 $t_m = 50r_H$ 穿越视界（$\omega = 1/3$）。

对于这一高斯剖面，原初黑洞形成的临界振幅可通过数值方法确定为 $\mu_c \approx 0.79579 \pm 1 \times 10^{-5}$。由此产生的声壳形状对扰动振幅 μ十分敏感。图1 左列展示了若干时间切片下四种代表性情形（从上到下：亚临界（$\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$ 相对于$\bar{\rho}$ 背景能量密度）的密度对比度，右列展示径向速度（u ≡相对于$r/d\eta$ 共形时间）的变化）：亚临界（$\mu = 0.4$）、负振幅（$\mu = -0.4$）、近临界（$\mu = 0.8$）和超临界（$\mu = 0.9$）。如参考文献$u = U - U$ 所述，速度由 Misner-Sharp变量 [47]提取。对于亚临界和近临界振幅，压力梯度足以驱动流体向外运动，从而产生超密壳层和欠密壳层。负振幅扰动会形成外侧超密壳层和内侧欠密壳层，而超临界情形则只出现欠密壳层。壳层的振幅和厚度对 μ十分敏感：亚临界和负振幅情形产生的壳层较小且较薄；近临界扰动产生最强的壳层；超临界情形则形成最宽的壳层。这些声壳剖面将作为声壳模型以及后续三维格点模拟研究声学引力波产生的初始条件。

2.2 与线性演化的比较

在传统的宇宙学微扰理论中，如果我们只考虑一阶标量扰动，度规可写为 [59–61]

$$\mathrm{d}s^2 = a(\eta)^2 \left[-(1+2\phi)\mathrm{d}\eta^2 + 2\partial_i\beta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x^i + [(1-2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E]\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right], \tag{2.4}$$

其中，标量度规扰动 ϕ、 β、 ψ和 E 是 η 和空间坐标 $\vec{x}$ 的函数。流体的共动三速度可用速度势 v 表示为 $v^i = \delta^{ij}\partial_j v$。一阶爱因斯坦方程和能量动量守恒方程给出

$$3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) - \nabla^2[\psi + \mathcal{H}\sigma] = -\frac{a^2\delta\rho}{2M_{\mathrm{Pl}}^2}, \tag{2.5a}$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi = -\frac{1}{2M_{\mathrm{Pl}}^2}a^2(\bar{\rho} + \bar{p})(v + \beta), \tag{2.5b}$$

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) - 3(\bar{\rho} + \bar{p})\psi' + (\bar{\rho} + \bar{p})\nabla^2(v + \beta + \sigma) = 0, \tag{2.5c}$$

$$v' + \beta' + (1 - 3c_s^2)\mathcal{H}(v + \beta) + \phi + \frac{\delta p}{\bar{\rho} + \bar{p}} = 0, \tag{2.5d}$$

其中， $\mathcal{H} \equiv a'/a$ 是共形哈勃参数，撇号表示对共形时间求导， $\bar{\rho}$ 和 $\bar{p}$ 分别为背景能量密度和压强， $c_s^2 \equiv \mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = \omega$ 为声速，且 $\sigma \equiv E' - \beta$。

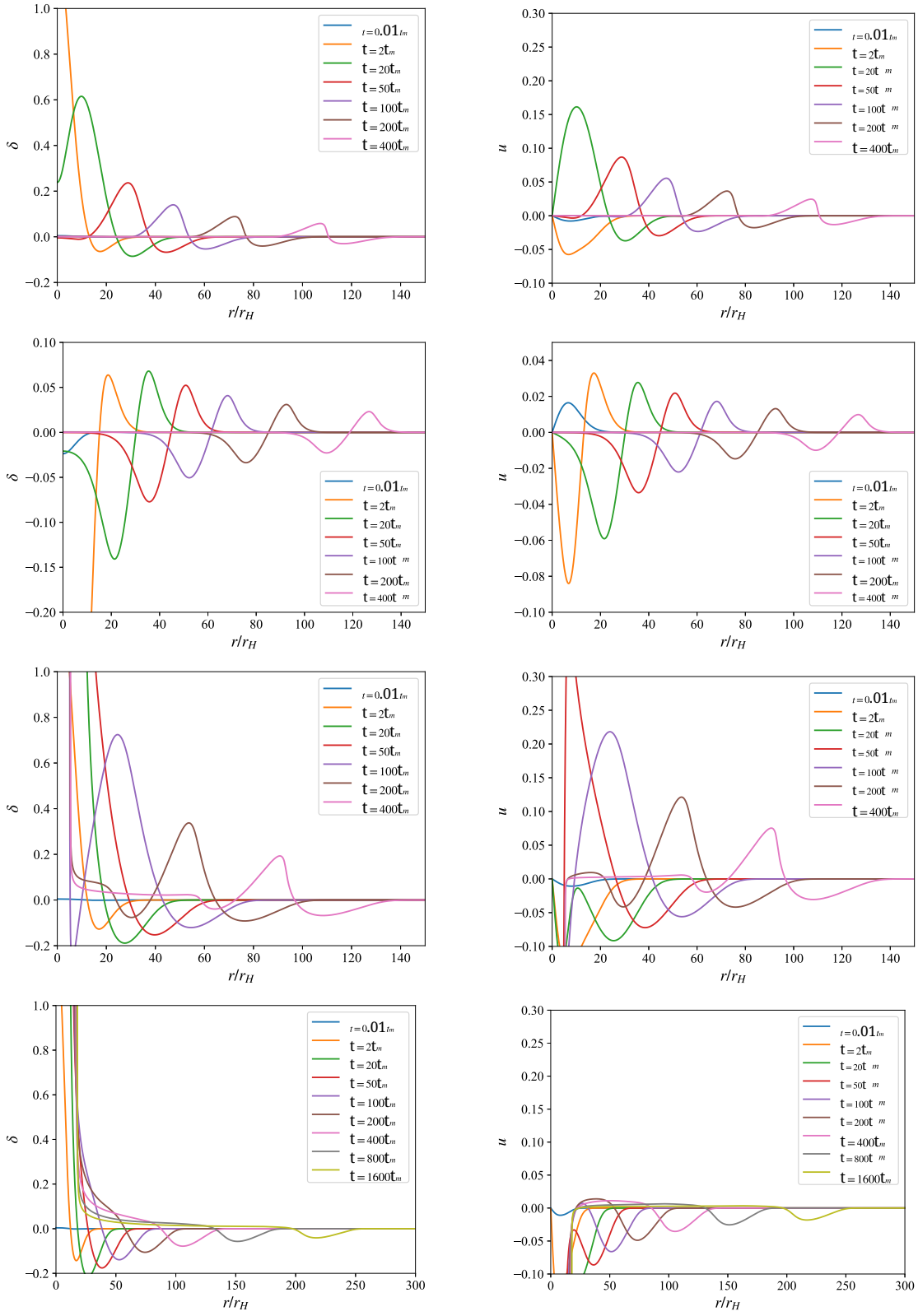


图 1：亚临界（$\mu = 0.4$）、负振幅（$\mu = -0.4$）、近临界（$\mu = 0.8$）和超临界（$\mu = 0.9$）扰动在若干时间切片上的密度对比度（左列）和径向速度（右列）（从上到下）。

为与 Misner-Sharp形式进行比较，我们采用共动正交规范（$\beta = v = 0$）并施加球对称性（因此拉普拉斯算子可化为 $\nabla^2 = r^{-2}\partial_r(r^2\partial_r)$）。于是，可以推导出 ψ 的演化方程：

$$\psi'' + \left(\frac{5+3\omega}{2}\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}}\right)\psi' - \omega\nabla^2\psi = 0. \tag{2.6}$$

此外，ϕ 和 $\delta\rho$ 可以表示为 ψ 的形式：

$$\phi = -\frac{\psi'}{\mathcal{H}}, \quad \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = -\frac{1+\omega}{\omega}\phi. \tag{2.7}$$

通过关系 $\mathrm{d}t = a\mathrm{d}\eta$ 转换到宇宙时间 t 后，这些关系变为

$$\ddot{\psi} + \left(\frac{3(3+\omega)}{2}H + \frac{\dot{H}}{H}\right)\dot{\psi} - \frac{\omega}{a^2}\nabla^2\psi = 0, \tag{2.8}$$

$$\phi = -\frac{\dot{\psi}}{H}, \quad \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = -\frac{1+\omega}{\omega}\phi, \tag{2.9}$$

其中，$H \equiv \dot{a}/a$ 是哈勃参数，点表示对宇宙时间求导。ψ 的初始条件由共动曲率扰动 ζ 设定为

$$\zeta \equiv -\psi + \mathcal{H}(v+\beta) = -\psi, \tag{2.10}$$

. .和 ψ 由 $\psi = -H\phi$推导得到。初始时刻的度规扰动 ϕ 可通过以下关系与 Misner-Sharp变量相关联：

$$\phi = (A^2 - 1)/2. \tag{2.11}$$

当扰动较小时，完全非微扰的 Misner-Sharp形式应当重现线性微扰演化的结果，这可用于验证 Misner-Sharp模拟中的（A，ζ）与线性微扰演化中的（ϕ，ψ）之间的物理量对应关系。

图 2 比较了在多个时间切片下，Misner-Sharp非微扰模拟（实线）与线性微扰演化（虚线）得到的密度对比度剖面，分别对应 $\mu = 0.001$ (a)、0。4 (b)、 -0.4 (c)、0。8 (d) 和 0。9 (e)。对于小振幅情形（$\mu = 0.001$），两种解重合，曲线无法区分，这正如预期。对于$\mu = 0.4$，尽管该扰动对于原初黑洞形成仍处于亚临界状态，两种结果却明显偏离：Misner-Sharp解产生的声波比线性预测更强，表明存在非线性增强。对于负振幅情形（$\mu = -0.4$），线性演化基本上会使 $\mu = 0.4$ 结果的符号反转，而Misner-Sharp解产生的声波则较弱。对于近临界情形（$\mu = 0.8$），非线性结果的振幅增强更为显著，且形状比线性解更宽。对于超临界情形（$\mu = 0.9$），Misner-Sharp模拟中超密壳层的缺失，导致其剖面与线性理论显著不同。尽管振幅增强小于近临界情形，但声壳的厚度更大。总的来说，对于较大的 μ，非线性/非微扰动力学会显著影响声壳的振幅和形状，而这些差异将直接影响最终的引力波信号，后续章节将对此进行分析。

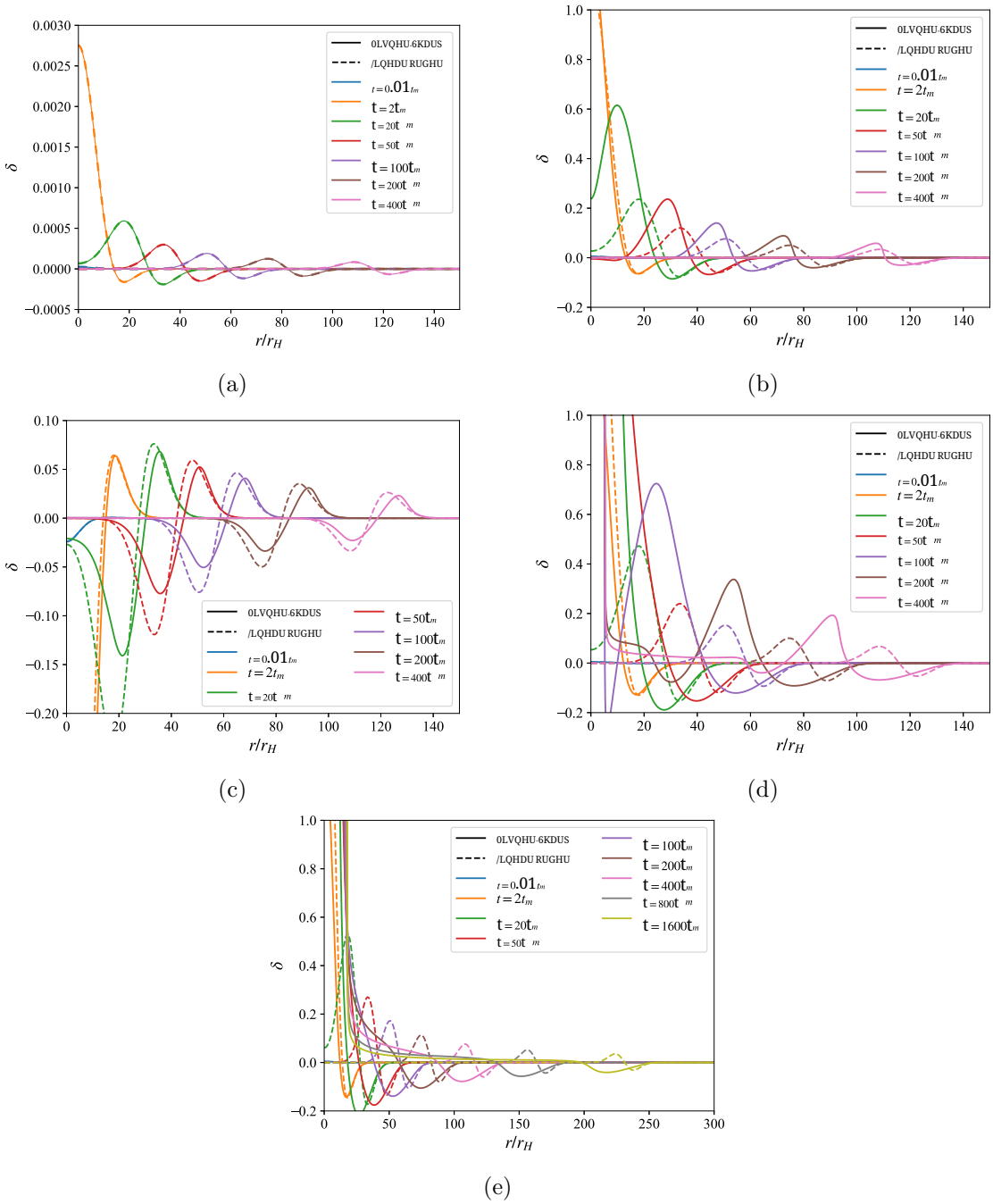


图2：在多个时间切片下，$\mu = 0.001$ (a)、0.4 (b)、-0.4 (c)、0.8 (d) 和 0.9 (e) 中 Misner-Sharp 模拟（实线）与线性演化（虚线）的密度对比度剖面比较。请注意，在面板 (a) 中，实线与虚线重合。

3 声学引力波的半解析计算

本节将采用原始声壳模型 [49–51]，概述一种半解析方法，用于计算由自由传播声波系综产生的引力波能谱。与原模型不同的是，这些声波在我们的情形中由坍缩的曲率扰动产生，而非膨胀的泡壁；因此，这里不考虑声壳模型 [62–64] 的近期改进进展（当泡壁的寿命与声波的寿命相当时），因为我们的情形中根本不存在泡壁。

3.1 引力波能谱

忽略次要的标量和矢量度规扰动[2]，后，具有张量扰动的空间平直 FLRW 时空的度规可写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\left[\delta_{ij} + h_{ij}(t,\vec{x})\right]\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{3.1}$$

其中，h_{ij} 表示横向无迹（TT）张量扰动。在共动傅里叶空间中，张量扰动由能量-动量张量$T_{ij}^{\mathrm{TT}} \equiv a^2\pi_{ij}^{\mathrm{TT}}$的 TT 部分作为源，通过受扰爱因斯坦方程

$$h_{ij}''(t,\vec{k}) + 2\mathcal{H}h_{ij}'(t,\vec{k}) + k^2 h_{ij}(t,\vec{k}) = \frac{2}{M_{\mathrm{Pl}}^2}a^2\pi_{ij}^{\mathrm{TT}}(t,\vec{k}). \tag{3.2}$$

横向无迹投影由算子 $\Lambda_{ijlm} \equiv \frac{1}{2}\left(P_{il}P_{jm} + P_{im}P_{jl} - P_{ij}P_{lm}\right)$ 执行，其中 $P_{ij}(k) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j$ 和 $k_i \equiv k_i/k$。引力波能量密度 ρ_{GW} 定义为

$$\rho_{\mathrm{GW}}(t) = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{4}\langle\dot{h}_{ij}(t,\vec{x})\dot{h}_{ij}(t,\vec{x})\rangle. \tag{3.3}$$

˙可以将 h_{ij} 的功率谱定义为

$$\langle\dot{h}_{ij}(t,\vec{k})\dot{h}_{ij}(t,\vec{q})\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{q})P_{\dot{h}}(t,k). \tag{3.4}$$

在宇宙学中，通常将引力波的无量纲能量密度分数定义为

$$\Omega_{\mathrm{GW}}(t) \equiv \frac{\rho_{\mathrm{GW}}(t)}{\rho_c(t)}, \tag{3.5}$$

其中，$\rho_c(t) = 3M_{\mathrm{Pl}}^2H^2$ 是时刻 t的临界能量密度，由此得到无量纲引力波能谱

$$\mathcal{P}_{\mathrm{GW}}(t,k) \equiv \frac{\mathrm{d}\Omega_{\mathrm{GW}}(t)}{\mathrm{d}\ln k} = \frac{1}{\rho_c(t)}\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{GW}}(t)}{\mathrm{d}\ln k} = \frac{k^3}{24\pi^2H^2}P_{\dot{h}}(t,k) = \frac{k^3}{24\pi^2H^2a^2}P_{h'}(\eta,k), \tag{3.6}$$

其中 $P_{h'}$ 是 h_{ij}'的功率谱。为求解方程（3.2），通常采用格林函数法。引入满足以下边界条件的格林函数 $G(x,\ x_0)$:

$$G(x \le x_0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0^+} = 1, \tag{3.7}$$

[2]文献 [65] 研究了宇宙学一级相变背景下标量扰动对GW谱的影响。

h_{ij} 的形式解为

$$h_{ij}(t,\vec{k}) = \frac{2}{M_{\rm Pl}^2}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x_1 G(x,x_1)\frac{a^2(\eta_1)\pi_{ij}^{\rm TT}(\eta_1,\vec{k})}{k^2}, \tag{3.8}$$

其中，$x = k\eta$ 和 x_0 是声波开始自由传播的时刻。根据上述解，可以得到h'_{ij} 的二点关联函数，它以源的不等时关联器（UETC）表示，

$$\begin{aligned}\langle h'_{ij}(\eta,\vec{k})h'_{ij}(\eta,\vec{q})\rangle = &\left(\frac{2}{M_{\rm Pl}^2}\right)^2\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x_1\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x_2\frac{\partial G(x,x_1)}{\partial x}\frac{\partial G(x,x_2)}{\partial x}\\ &\times\frac{a^2(\eta_1)a^2(\eta_2)}{q^2}\langle\pi_{ij}^{\rm TT}(\eta_1,\vec{k})\pi_{ij}^{\rm TT}(\eta_2,\vec{q})\rangle.\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，关键步骤是计算 $\pi_{ij}^{\rm TT}$的UETC。假设宇宙具有空间均匀性，UETC可参数化为 [66]

$$\langle\pi_{ij}^{\rm TT}(\eta_1,\vec{k})\pi_{ij}^{\rm TT}(\eta_2,\vec{q})\rangle = \Pi^2(k,\eta_1,\eta_2)(2\pi)^2\delta^3(\vec{k}+\vec{q}). \tag{3.10}$$

在当前情景中，$\pi_{ij}^{\rm TT}$的主要贡献来自流体动能项，

$$\pi_{ij}^{\rm TT} = (p+\rho)\gamma^2 v^i v^j, \tag{3.11}$$

其中，v^i 是由 $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\eta$定义的速度，而 γ 是洛伦兹因子，在非相对论区域可取为**1**。我们用 $\tilde{v}^i_{\vec{k}}$ 表示 $v^i(\vec{x})$的傅里叶变换。将其代入UETC后，可以得到 $\tilde{v}^i_{\vec{k}}$的四点关联函数。忽略可能存在的非高斯性后，它可化为 $\tilde{v}^i_{\vec{k}}$的二点关联函数的某种组合。忽略 $v^i(\vec{x})$的旋转分量后，[50], 的二点关联函数可表示为

$$\langle\tilde{v}^i_{\vec{k}}(\eta_1)\tilde{v}^{j*}_{\vec{q}}(\eta_2)\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{k})\hat{q}^i\hat{k}^j B(q,\eta_1,\eta_2). \tag{3.12}$$

这里假设速度场为纵向场，这是数值模拟结果所支持的 [66–68]。将其代入式（3.10）后，可以得到

$$\Pi^2(k,\eta_1,\eta_2) = \bar{\omega}^2\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}B(q,\eta_1,\eta_2)B(\tilde{q},\eta_1,\eta_2)\frac{q^2}{\tilde{q}^2}(1-\mu^2)^2, \tag{3.13}$$

其中，$\bar{\omega} = \bar{\rho}+\bar{p}$ 表示背景的均匀值，$\tilde{q} = |\vec{q}-\vec{k}|$ 和 $\mu = \hat{}q\cdot\hat{}k$。接下来，需要推导 B(*q*, η_1, η_2)的表达式，这正是下一小节的任务。

3.2 流体速度场与速度功率谱

一方面，速度场可以作傅里叶分解:

$$v^i(\eta,\vec{x}) = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3}[\tilde{v}^i_{\vec{q}}(\eta)e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} + \tilde{v}^{i*}_{\vec{q}}(\eta)e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}], \tag{3.14}$$

其中 $\vec{x}$ 和 $\vec{q}$ 均为共动量。另一方面，如果声波在某个初始时刻 η_i之后自由传播，速度场也存在平面波解：

$$v^i(\eta > \eta_i, \vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} [v^i_{\vec{q}} e^{-i\omega\eta + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + v^{i*}_{\vec{q}} e^{i\omega\eta - i\vec{q}\cdot\vec{x}}], \tag{3.15}$$

其中 $\omega = c_s q$。对于纵向平面波，有 $v^i_{\vec{q}} = v_{\vec{q}} \hat{q}^i$。注意， $v^i_{\vec{q}}$是平面波解的振幅，这与$\tilde{v}^i_{\vec{q}}$不同。在稳态情形下[3],，可以用$B(q, \eta_1, \eta_2$表示为 $v_{\vec{q}}$ [50, 63]的两点函数，

$$B(q, \eta_1, \eta_2) = 2P_v(q) \cos[\omega(\eta_1 - \eta_2)], \tag{3.16}$$

其中 $\langle v_{\vec{q}} v^*_{\vec{k}} \rangle \equiv P_v(q)(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{q})$。定义能量涨落后

$$\lambda(x) = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\omega}}, \tag{3.17}$$

便可得到傅里叶空间中声波的线性化运动方程 ，

$$\tilde{\lambda}'_{\vec{q}} + i q^j \tilde{v}^j_{\vec{q}} = 0, \tag{3.18}$$

$$\tilde{v}'_j + c_s i q^j \tilde{\lambda}_{\vec{q}} = 0. \tag{3.19}$$

结合其平面波解，可以发现，在某个初始时刻 η_i，平面波振幅为[4] [50]

$$v_{\vec{q}} = \frac{1}{2} \left(\hat{q}^i \tilde{v}^i_{\vec{q}}(\eta_i) - c_s \tilde{\lambda}_{\vec{q}}(\eta_i) \right) e^{i\omega\eta_i}. \tag{3.20}$$

因此，要推导 $P_v(q)$，应先求出 $\tilde{v}^i_{\vec{q}}(\eta_i)$ 和 $\tilde{\lambda}_{\vec{q}}(\eta_i)$ 的初始剖面。假设单个声壳呈球形，且在碰撞前与其他壳层互不作用，则可以通过叠加 n 个声壳，得到坐标空间中的初始剖面。第 n 个声壳的速度剖面可写为

$$v^{(n)}_i(\eta, \vec{x}) = \frac{R^{(n)}_i}{R^{(n)}} u(\eta, R^{(n)}), \tag{3.21}$$

其中 $\vec{R}^{(n)} = \vec{x} - \vec{x}^{(n)}$， $\vec{x}^{(n)}$ 是第 n 个声壳的中心，而 $u(\eta,\ r)$ 是速度场的径向剖面。假设 $\bar{\omega} = \Gamma \bar{\rho}$，则第 n 个声壳的能量涨落可写为

$$\lambda^{(n)}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\Gamma} \delta^{(n)}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{\Gamma} \delta(\eta, R^{(n)}), \tag{3.22}$$

其中， $\delta(\eta, R^{(n)})$ 表示密度对比度的分布。进行傅里叶变换后，可以得到

$$\tilde{v}^{i(n)}_{\vec{q}}(\eta) = e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}^{(n)}} i\hat{q}^i f'(\eta, q), \tag{3.23}$$

$$\tilde{\lambda}^{(n)}_{\vec{q}}(\eta) = e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}^{(n)}} l(\eta, q), \tag{3.24}$$

[3]稳态情形意味着这一物理过程的持续时间很长。对于非稳态情形，读者可参阅文献 [63]。[4]更精确的解可见文献 [63]；然而，在稳态情形下，最终结果几乎相同，红外（IR）行为除外。

函数 $f(\eta,q)$、 $l(\eta,q)$ 的表达式为

$$f(\eta,q)=\frac{4\pi}{q}\int_0^\infty \mathrm{d}r u(\eta,r)\sin(qr), \tag{3.25}$$

$$l(\eta,q)=\frac{4\pi}{\Gamma q}\int_0^\infty \mathrm{d}r \delta(\eta,r) r\sin(qr). \tag{3.26}$$

定义函数 $A(\eta,\ r)\equiv(f'(\eta,\ r)+ic_s l(\eta,\ r))/2$ 后，我们得到

$$v_{\vec{q}}^{(n)}=ie^{i\omega\eta_i-i\vec{q}\cdot\vec{x}^{(n)}}A(\eta_i,q). \tag{3.27}$$

假设所有声壳都在大致相同的时刻 η_i 自由传播，则速度振幅的二点相关函数可表示为

$$\langle v_{\vec{q}}^i v_{\vec{k}}^{j*}\rangle=\sum_{m=1}^{N_s}\sum_{n=1}^{N_s}\hat{q}^i\hat{k}^j A(q)A^*(k)\langle e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}^{(m)}+i\vec{k}\cdot\vec{x}^{(n)}}\rangle e^{i(\omega_q-\omega_k)\eta_i}, \tag{3.28}$$

w这里， N_s 表示声壳的数量。于是，系综平均得到 to

$$\sum_{m=1}^{N_s}\sum_{n=1}^{N_s}\langle e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}^{(m)}+i\vec{k}\cdot\vec{x}^{(n)}}\rangle=(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{k})\frac{N_s}{V_c}, \tag{3.29}$$

其中， V_c 是空间的共动体积。接下来，我们将声壳的平均共动间距定义为 $R_{*c}\equiv(V_c/N_s)^{1/3}$。最后得到

$$\langle v_{\vec{q}}^i v_{\vec{k}}^{j*}\rangle=\hat{q}^i\hat{q}^j|A(q)|^2(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{k})\frac{N_s}{V_c}. \tag{3.30}$$

因此，得到 $P_v(q)=|A(q)|^2/R_{*c}^3$。无量纲速度功率谱定义为

$$\mathcal{P}_v(q)\equiv\frac{q^3}{2\pi^2}[2P_v(q)]=\frac{q^3}{\pi^2R_{*c}^3}|A(q)|^2, \tag{3.31}$$

其中，因子 2 源自式（3.16）。

3.3 声波产生的引力波能谱

辐射主导时期的格林函数[5] 为 [51]

$$G(x,x_0)=\frac{x_0\sin(x-x_0)}{x}. \tag{3.32}$$

然后，可以推导出最终的无量纲引力波能谱，

$$\mathcal{P}_{\rm GW}(y,kr_H)=3\Gamma^2(H_s a_s r_H)\frac{(kr_H)^3}{2\pi^2}\tilde{P}_{\rm GW}(kr_H)\Upsilon(y), \tag{3.33}$$

其中， $y\equiv a/a_s$ 是时间变量，下标 s 表示声波开始产生引力波的时间，大致对应于声壳碰撞发生的时间； r_H 是特征长度尺度（在我们的情形中为初始共动哈勃半径）， Υ 是通常的抑制因子

[5]关于一般解，可参见文献 [51]。

由哈勃膨胀引起的 [51] 在辐射主导时期近似为 1，而 2/3 在长持续时间极限下的物质主导时期为 $P_{\rm GW}$ 定义为

$$\tilde{P}_{\rm GW}(kr_H) = \frac{1}{4\pi c_s kr_H}\left(\frac{1-c_s^2}{c_s^2}\right)^2 \int_{z_-}^{z_+} \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}{z_+ + z_- - z} \bar{P}_v(z)\bar{P}_v(z_+ + z_- - z), \quad (3.34)$$

其中 $z = qr_H$、$z_\pm = \frac{kr_H}{2c_s}(1 \pm c_s)$ 和 $\bar{P}(z) = \frac{\pi^2 \mathcal{P}_v(z)}{z^3}$。若以 R_{*c} 作为特征长度尺度，我们便可得到

$$\mathcal{P}_{\rm GW}(y, kr_H) = 3\Gamma^2(H_s a_s R_{*c})\left(\frac{r_H}{R_{*c}}\right)^7 \frac{(kr_H)^3}{2\pi^2}\tilde{P}_{\rm GW}(kr_H)\Upsilon(y). \quad (3.35)$$

这一半解析流程将声学引力波计算简化为：（i）提取声壳剖面 $\delta(r)$ 和 $u(r)$（例如从一维广义相对论模拟中提取）；（ii）计算 $f(k)$，$\mathcal{I}(k)$、$A(k)$ 和 $\mathcal{P}_v(k)$；（iii）计算 $P_{\rm GW}(k)$ 的卷积积分；以及（iv）应用乘法因子以得到 $\mathcal{P}_{\rm GW}(k)$。数值结果以及与三维格点演化的比较将在第5节讨论。

4 声学引力波的三维模拟

本节介绍用于研究由曲率峰系综产生声学引力波的数值设置。我们的引力波生成流程分为两个阶段。第一阶段是单个曲率峰的引力坍缩及随之而来的声波激发，这一过程本质上涉及强引力，因此需要进行完整广义相对论模拟。第二阶段是自由传播的声壳在叠加态中的碰撞及由此产生的引力波辐射，这一过程可在固定的 FLRW 背景上用微扰方法处理。能够解析这两个阶段的端到端完整广义相对论模拟，在数值上难以实现。

因此，作为初步步骤，我们采用与文献 [69]类似的策略：首先（i）在广义相对论下进行球对称塌缩模拟，以提取非微扰声壳剖面；然后（ii）将这些球形剖面嵌入三维共动晶格中，并在忽略其他度规扰动以及任何已形成原初黑洞的直接影响的情况下，使相对论流体与引力波 h_{ij} 共同演化。由于声波携带的能量密度相对于总背景能量密度可以忽略不计，并且已形成的原初黑洞足够稀少且质量足够小，其引力场在碰撞阶段不会显著改变大尺度声壳动力学，因此这一近似是合理的。

宇宙学一级相变背景下的近期研究也表明，与流体运动本身相比，由声波产生的标量度规扰动通常对引力波产生的贡献可以忽略不计 [65]。在小节5.4中，我们将展示，对于我们的设置，引力波辐射主要由流体运动主导，而不是由直接的引力扰动主导。声壳与原初黑洞之间的碰撞可能产生额外的引力波（类似于文献 [70]中研究的泡沫—原初黑洞相互作用）；这些效应超出了本文的研究范围。

我们假设，与后续的壳层相互作用相比，坍缩和壳层形成过程发生得很快，因此声壳在碰撞前可自由传播。由于所有曲率峰都被设定为具有相同的特征尺度，声壳基本上同时形成。我们在形成后选定的某一时刻提取声壳剖面

作为三维格点模拟的初始条件。具体而言，我们将 N_s 个互不重叠的该球形剖面副本随机放置在共动边长为 L 的立方体盒内。壳层的平均共动间距为

$$R_{*c} = \frac{L}{N_s^{1/3}}. \tag{4.1}$$

我们使用公开可用的格点代码 CosmoLattice [71,72] ，并通过扩展加入相对论流体动力学。按照参考文献 [73, 74],中的记号，背景 FLRW度规写作

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -a(\eta)^{2\alpha}\mathrm{d}\eta^2 + a(\eta)^2\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \tag{4.2}$$

其中， η 是与宇宙时间 t 相关的时间坐标，满足 $\mathrm{d}\eta = a^{-\alpha}\mathrm{d}t$，其中参数$\alpha$ 为常数（因此， $\alpha = 0$ 对应宇宙时间，而 $\alpha = 1$ 对应共形时间）。本文取 $\alpha = 1$ ，使得 η 为共形时间。相对论流体的能量-动量张量为

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \tag{4.3}$$

其中， u^μ 是四速度，其分量为

$$u^0 = \gamma/a^\alpha, \quad u^i = \gamma v^i/a, \tag{4.4}$$

而共动三速度（相对于 η）为 $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\eta$，对应的洛伦兹因子为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{ij}v^iv^j}}. \tag{4.5}$$

这种参数化确保归一化条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$。利用这些定义， $T^{\mu\nu}$ 的分量为

$$T^{00} = (\rho + p)\gamma^2/a^{2\alpha} - p/a^{2\alpha}, \tag{4.6a}$$
$$T^{0i} = (\rho + p)\gamma^2 v^i/a^{\alpha+1}, \tag{4.6b}$$
$$T^{ij} = (\rho + p)\gamma^2 v^i v^j/a^2 + p\delta^{ij}/a^2. \tag{4.6c}$$

能量-动量守恒 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$给出流体演化方程。为提高数值稳定性并便于计算，我们演化经过重标度的分量 [73],

$$\hat{T}^{00} = a^{2\alpha+4}T^{00}, \tag{4.7a}$$
$$\hat{T}^{0i} = a^{\alpha+5}T^{0i}, \tag{4.7b}$$
$$\hat{T}^{ij} = a^6 T^{ij}. \tag{4.7c}$$

此时，连续性方程和动量方程变为

$$\partial_\eta \hat{T}^{00} + a^{\alpha-1}\partial_i \hat{T}^{0i} + a^4\mathcal{H}(3p - \rho) = 0, \tag{4.8a}$$
$$\partial_\eta \hat{T}^{0i} + a^{\alpha-1}\partial_j \hat{T}^{ij} = 0. \tag{4.8b}$$

为闭合该方程组，我们将 $\hat{}T^{ij}$ 表示为 $\hat{}T^{00}$ 和 $\hat{}T^{0i}$ 的形式:

$$\hat{T}^{ij} = \frac{\hat{T}^{0i}\hat{T}^{0j}}{\hat{T}^{00} + a^4 p} + a^4 p\delta^{ij}. \tag{4.9}$$

由公式（4.6）还可以得到代数关系

$$\hat{T}^{00^2} - \sum_i \hat{T}^{0i^2} - a^4(\rho - p)\hat{T}^{00} = a^8 \rho p, \tag{4.10}$$

w它与状态方程 $p = \omega\rho$ 一起，可显式求解 $a^4 p$ ，

$$a^4 p = \frac{(\omega-1)\hat{T}^{00} + \sqrt{(\omega-1)^2\hat{T}^{00^2} - 4\omega(\sum_i \hat{T}^{0i^2} - \hat{T}^{00^2})}}{2}. \tag{4.11}$$

给定 $a^4 p$ 的代数解后，方程（4.8a）和（4.8b）给出了关于 $\hat{T}^{00}$ 和 $\hat{T}^{0i}$ 的封闭演化方程。

背景 FLRW 动力学通过弗里德曼方程进行自洽演化，

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{a^{2\alpha}}{3M_{\rm Pl}^2}\langle E\rangle, \tag{4.12a}$$

$$\frac{a''}{a} = \frac{a^{2\alpha}}{6M_{\rm Pl}^2}\langle(2\alpha-1)E - 3P\rangle, \tag{4.12b}$$

其中尖括号表示空间体积平均，有效能量密度和压强为

$$E = a^{2\alpha}T^{00} = \hat{T}^{00}/a^4, \tag{4.13a}$$

$$P = a^2\sum_i T^{ii}/3 = \sum_i \hat{T}^{ii}/(3a^4). \tag{4.13b}$$

随后，依据微扰爱因斯坦方程可得引力波的动力学，

$$h_{ij}'' + (3-\alpha)\mathcal{H}h_{ij}' - a^{2\alpha-2}\nabla^2 h_{ij} = 2a^{2\alpha-2}\Pi_{ij}^{\rm TT}, \tag{4.14}$$

其中 $\Pi_{ij}^{\rm TT}$ 是各向异性张量 $\Pi_{ij} = T_{ij} - pg_{ij} = T_{ij} - pa^2\delta_{ij}$ 的横向无迹部分。无量纲引力波能谱的定义与方程（3.6）相同。由于横向无迹投影在坐标空间中具有非局域性且计算代价高昂，我们在实空间中演化未经投影的辅助张量 u_{ij} ，并在需要时于傅里叶空间中进行横向无迹投影。辅助场满足

$$u_{ij}'' + (3-\alpha)\mathcal{H}u_{ij}' - a^{2\alpha-2}\nabla^2 u_{ij} = 2a^{2\alpha-2}\Pi_{ij}^{\rm eff}, \tag{4.15}$$

其中，有效各向异性张量 $\Pi_{ij}^{\rm eff}$ 仅保留 Π_{ij} 中横向无迹投影非零的分量；对于相对论流体，这可简化为

$$\Pi_{ij}^{\rm eff} = a^2(\rho+p)\gamma^2 v_i v_j = a^2(\rho+p)\gamma^2 v^i v^j = (\hat{T}^{ij} - a^4 p\delta^{ij})/a^2. \tag{4.16}$$

在 $\mathcal{C}$osmo$\mathcal{L}$attice中，二阶方程（4.15）通过引入共轭动量张量 $\pi_{ij} = a^{3-\alpha}u_{ij}'$，改写为一阶方程组，得到

$$u_{ij}' = a^{\alpha-3}\pi_{ij}, \tag{4.17a}$$

$$\pi_{ij}' = a^{1+\alpha}\nabla^2 u_{ij} + 2a^{1+\alpha}\Pi_{ij}^{\rm eff}. \tag{4.17b}$$

对于此处展示的模拟，我们采用辐射主导（$\omega = 1/3$）。为在数值上实现该方程组，我们将物理变量重新缩放为无量纲程序变量，

$$\tilde{\eta} = \omega_* \eta, \quad \tilde{x} = \omega_* x, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{\hat{T}_{\mu\nu}}{f_*^2 \omega_*^2}, \quad \tilde{u}_{ij} = \left(\frac{M_{\rm Pl}}{f_*}\right)^2 u_{ij}, \tag{4.18}$$

其中，ω_* 和 f_* 是自由缩放参数。在本文中，我们取 $\omega_* = 1/(a_1 r_H)$ 和$f_* = 1$，其中 a_1 是提取一维声壳剖面时的尺度因子。耦合流体-GW系统在具有周期性边界条件的三维共动晶格上演化。流体动力学方程采用四阶龙格-库塔格式积分，GW方程采用二阶蛙跳积分器积分，空间导数则使用四阶中心有限差分离散。

5 数值结果

本节给出声壳碰撞产生的引力波能谱的三维格点数值模拟结果。除非另有说明，我们的模拟采用大小为 $N^3 = 512^3$的立方网格、无量纲空间间隔$\mathrm{d}\tilde{x} = \tilde{L}/N$以及时间步长$\mathrm{d}\tilde{\eta} = 0.2\mathrm{d}\tilde{x}$。初始尺度因子设为 $a(\tilde{\eta}_i) = 1$，初始共形哈勃参数 $\mathcal{H}_i$ 取自提取声壳剖面时的一维模拟；因此，初始共形时间为 $\tilde{\eta}_i = 1/\mathcal{H}_i$。每次模拟均演化至 $\tilde{\eta}_{\max} = L$，这足以使GW谱收敛，同时保持共动哈勃半径小于盒子尺寸。每种情形的共动盒长 L 和嵌入式声壳数量 N_s 将在下文给出。

图 3 展示了代表性切片 $\tilde{T}^{00}$ 来自一次典型的模拟。在此示例中，三维初始条件通过将带有 $\mu = 0.4$、位于 $t_i = 50 t_m$ 处的一维声壳剖面嵌入长度为 $L = 1200$ 、含有 $N_s = 400$个壳层的盒子中构造而成。对应的初始共形时间为$\tilde{\eta}_i = 50\sqrt{2} \approx 70.71$。四个面板分别对应 $\tilde{\eta} = 70.71$ (a)、$\tilde{\eta} = 190.71$ (b)、 $\tilde{\eta} = 310.71$ (c)和 $\tilde{\eta} = 550.71$ (d)。

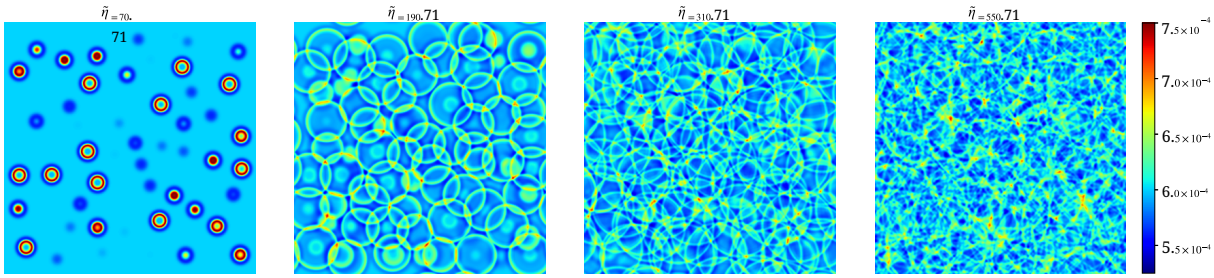


图 3：来自一次代表性模拟的 $\tilde{T}^{00}$ 切片。初始条件通过将带有 $\mu = 0.4$、位于 $t_i = 50 t_m$ 处的一维声壳剖面嵌入盒子中构造而成；盒子长度为$L = 1200$，声壳数量为 $N_s = 400$。四个快照分别对应$\tilde{\eta} = 70.71$ (a)、 $\tilde{\eta} = 190.71$ (b)、 $\tilde{\eta} = 310.71$ (c)和 $\tilde{\eta} = 550.71$ (d)。

5.1 声学引力波能谱的形状

我们首先考虑一个简化情景，其中每个曲率峰都具有相同的振幅 μ，以便直接与声壳模型的半解析结果进行比较

模型 [52]。我们选取四种具有代表性的振幅：亚临界（$\mu = 0.4$）、负值（$\mu = -0.4$）、近临界（$\mu = 0.8$）和超临界（$\mu = 0.9$）。

我们首先讨论亚临界情形，该情形不会产生原初黑洞，因此可以直接将一维声壳剖面用作三维初始条件。一个具有代表性的运行采用了如下的一维~剖面，其参数为 $t_i = 50t_m$、盒子长度 $L = 600$以及 $N_s = 50$ 个声壳层。图 4左上面板展示了若干时间切片上的引力波能谱，以及声壳模型的半解析结果（红色点划线）。为便于比较，半解析曲线已归一化，使其与数值峰值吻合；归一化因子约为$0.7 \sim 0.8$，这可能是半解析估算中的前因子（例如 $H_s a_s$）存在不确定性所致。尽管半解析计算假设声壳均匀分布于空间中，而模拟中的壳层是随机放置的，但两者在谱峰附近吻合良好。这表明，当采用并匹配平均间距 R_{*c} 时，声壳分布对引力波能谱的影响相对较小。虚线标示频率 $k = 4/d$，其中 d 为壳层的共动厚度（超密壳层与欠密壳层的厚度几乎相等）；这一长度尺度与谱峰的位置密切相关。不过，在红外（IR）和紫外（UV）区域都出现了系统性差异，我们将在下文简要解释。

在红外区，数值能谱呈现出与 k^3成正比的因果尾部，而非半解析估算得到的更陡的 k^5 标度。我们将这一差异归因于引力波源的有限寿命，因为半解析推导已假设处于长持续时间极限。参考文献 [63, 75] 表明，纳入有限源持续时间会使红外标度改变为因果 k^3 行为，这与我们的数值结果一致。我们将有限持续时间效应的详细半解析研究留待未来工作。我们通过在图 k^3 4 左下方面板中使用更大的盒子（$\tilde{L} = 2400$）和更多的壳层（$N_s = 3200$）重复模拟，确认了红外尾部的稳健性。该面板显示出相同的 行为 k^3 。

在紫外区，我们的引力波能谱高于半解析预测，并在峰值之后紧邻处呈现明显的隆起。我们将这一增强归因于非线性流体动力学相互作用；声壳模型所假设的线性叠加并未包含这些相互作用。为检验这一解释，我们通过从方程（4.8）中删去非线性相互作用，使用线性化流体动力学方程进行了配套模拟，

$$3\delta' + 4\partial_i v^i = 0, \tag{5.1a}$$

$$4v^{i\prime} + \partial_i \delta = 0, \tag{5.1b}$$

在相同的初始条件和参数下。图 4 的右上方面板显示，线性运行结果再现了半解析计算的紫外行为（在我们的分辨率限制内），而峰值振幅、峰值位置和红外 k^3 标度基本保持不变。这一比较清楚地表明，主要是非线性流体动力学增强了引力波能谱的紫外区域，而红外行为则由因果效应控制，并且对非线性具有稳健性，如右下方面板所示。

图 5 左上图展示了负振幅情形（$\mu = -0.4$），其中~我们取 $t_i = 50t_m$， $L = 600$ 和 $N_s = 50$。对于近临界和超临界扰动，原初黑洞会在中心形成，同时声壳向外传播。由于原初黑洞周围的高密度引力束缚区域不会参与向外传播，因此在将一维剖面嵌入三维格点之前，我们会切除其中心部分。

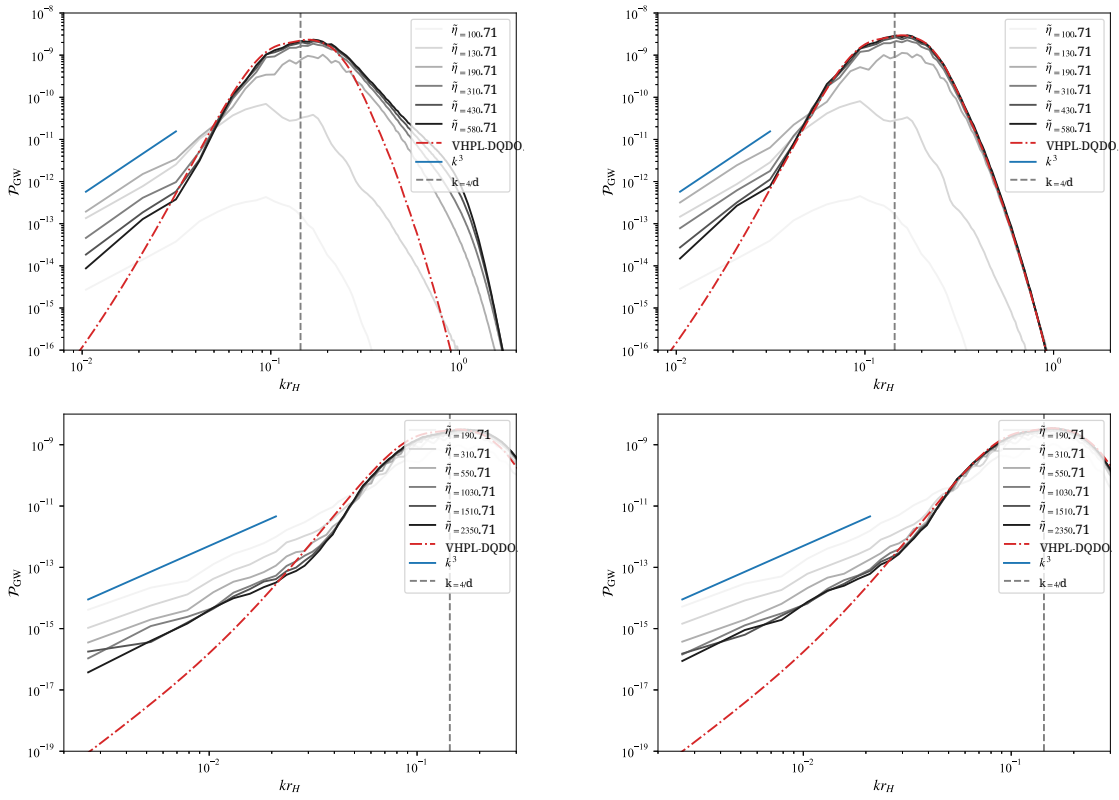


图 4：亚临界情形（$\mu = 0.4$）在多个时间切片下的引力波能谱。顶部行：$L = 600$、$N_s = 50$。底部一行：$L = 2400$、$N_s = 3200$。左侧图使用非线性流体力学方程，右侧图使用线性化流体力学。初始条件由 $t_i = 50t_m$处的一维声壳剖面构造。红色点划线表示来自声壳模型的半解析结果，并经过归一化以匹配数值能谱的峰值。竖直虚线标记 $k = 4/d$，其中 d 是声壳的共动厚度。蓝色参考线表示红外区中的因果 k^3 标度。

我们已验证，截断半径的适度变化只会使引力波能谱略有变化；在以下结果中，切除半径取为密度对比度首次为零的位置，切除区域则由均匀背景替代。近临界情形的初始剖面取自 $t_i = 200t_m$，超临界情形则取自 $t_i = 400t_m$。这些超临界情形的模拟采用 $L = 1000$ 和 $L = 1300$，分别使用 $N_s = 50$ 层壳。图 5 顶排中间和右侧的面板展示了这些谱及半解析预测。底排给出了相应的、更大计算盒且更高N_s 的模拟，用于验证红外行为的稳健性（$L = 2400$，$N_s = 3200$ 对应负振幅情形；$L = 2000$，$N_s = 400$ 对应近临界情形；$L = 5200$，$N_s = 3200$ 对应超临界情形）。所有情况下，半解析曲线均经过归一化，以匹配数值峰值。

回顾一下，负振幅情形相较于亚临界情形颠倒了超密壳层与欠密壳层的径向排列，但其整体能谱形状仍然相似。由于声壳层结构相似，近临界谱也与亚临界结果相仿。数值谱与半解析谱在谱峰附近吻合良好，但在红外区和紫外区存在偏差。在超临界模拟中，剖面仅包含一个欠密

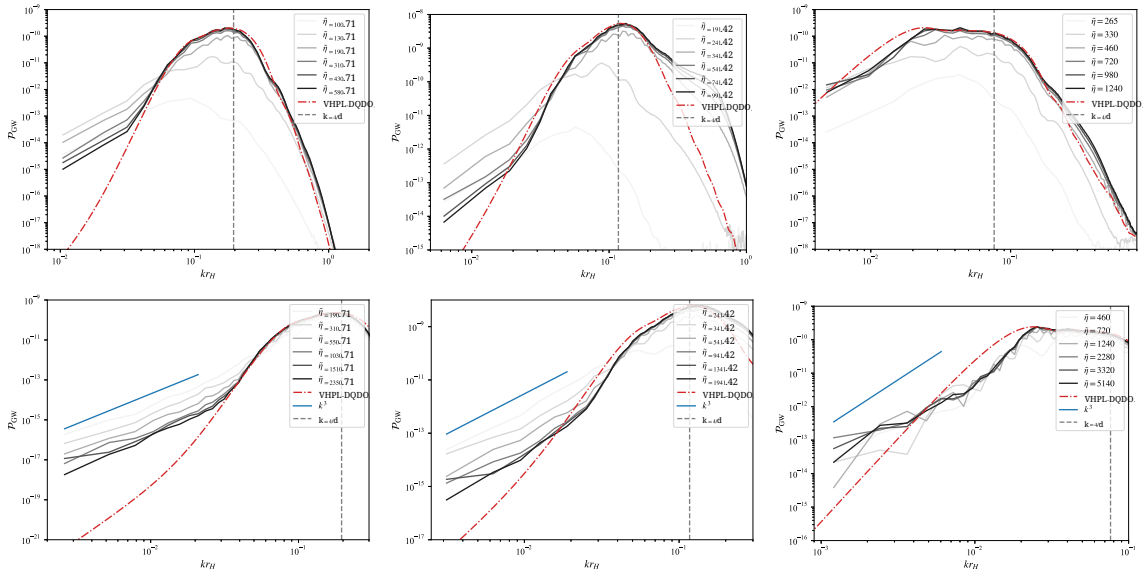


图 5：负振幅（$\mu = -0.4$，左）、近临界（$\mu = 0.8$，中）和超临界（$\mu = 0.9$，右）扰动在若干时间切片上的引力波能谱。红色点划线表示采用声壳模型得到的半解析结果。上排：具有 $N_s = 50$ 声壳层的代表性小盒子模拟：$L = 600$、1000 和 1300，分别对应。下排：用于确认红外标度的大盒子、高N_s 模拟（负振幅：$L =$ 2400；近临界：$L = 2000$、$N_s = 400$；超临界：$L = 5200$、$N_s = 3200$）。

壳层，形成了一个更宽、呈平台状的谱峰，其特征频率位于 $k = 4/d$ 附近，其中 d 是超临界情形下欠密壳层的共动厚度。值得注意的是，在负振幅和超临界模拟中，数值紫外区的增强并不明显，谱与半解析预测一致。这种一致性源于这些情形下较小的壳层振幅，它们抑制了非线性流体动力学效应。在所有情形中，红外区始终呈现因果 k^3 尾部。

5.2 声壳层平均共动间距的影响

在第 3 节中，我们已将引力波能谱估算为

$$\mathcal{P}_{\rm GW}(y, kr_H) = 3\Gamma^2(H_s a_s R_{*c}) \left(\frac{r_H}{R_{*c}}\right)^7 \frac{(kr_H)^3}{2\pi^2} \tilde{P}_{\rm GW}(kr_H)\Upsilon(y). \tag{5.2}$$

因子$\frac{(kr_H)^3}{2\pi^2}\tilde{P}_{\rm GW}(kr_H)$决定谱的形状，而其振幅基本不受碰撞时间 t_c 的影响（见参考文献 [52] 的图 3）。组合 $H_s a_s R_{*c}$ 也近似独立于 t_c，因为 $H_s a_s \sim 1/\sqrt{2 r_H t_c}$，而平均共动间隔则随壳层在碰撞前行进的共动距离 Δr_s 按 $R_{*c} \sim 2\Delta r_s \sim 2 c_s \Delta\eta \sim 2 c_s \sqrt{2 r_H t_c}$ 增长。因此，总体振幅预计实际上与碰撞时间无关，并按 R_{*c}^{-7}缩放。

我们通过在三维模拟中改变 R_{*c} 来对这一预测进行数值检验。具体而言，我们将盒子长度固定为 $L = 600$，并根据从一维声壳层中提取的

剖面 $\mu = 0.4$ 于 $t_i = 50t_m$，然后改变声壳的数量 N_s˜以调整 R_{*c}。每种配置都演化至 $\tilde{\eta}_{\max} = L$，最后测量引力波峰值振幅。测得的峰值振幅随 R_{*c} 的变化绘于图 6中。结果符合幂律，与 R_{*c}^{-7}标度关系一致（虚线为最佳拟合），证实了我们的解析预期。

由于这种陡峭的依赖关系，积分引力波振幅对声壳平均间距极其敏感：即使单个壳层的振幅不大，只要声壳间距足够小，也能产生强大的集体引力波信号。

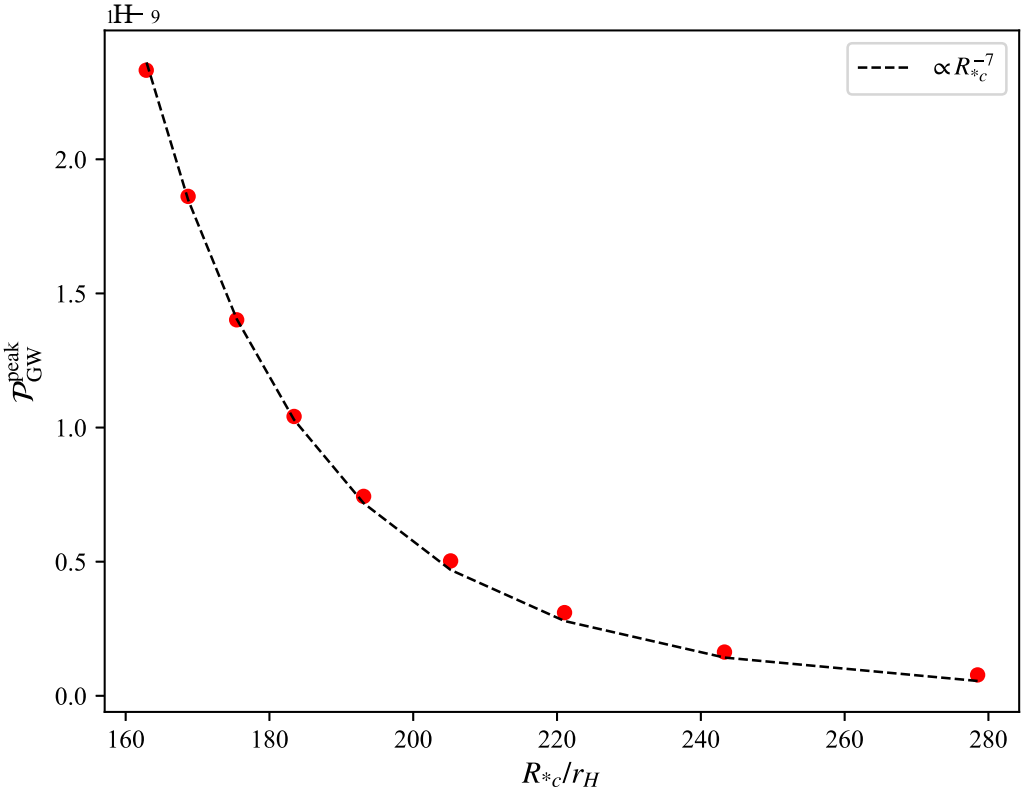


图 6：引力波能谱的峰值振幅随平均共动间距 R_{*c} 的变化。初始条件采用一维剖面，其中 $\mu = 0.4$ 在 $t_i = 50t_m$ 处。盒子˜长度为 $L = 600$；N_s 在 10,15, 20, 25,30, 35, 40,45, 50 之间取值，以改变 R_{*c}。虚线为幂律拟合 $\propto R_{*c}^{-7}$，与解析预期相符。

5.3 扰动振幅分布的影响

到目前为止，我们考虑的都是由振幅为单一值 μ 的扰动所产生的声壳碰撞。然而，实际上，曲率扰动振幅遵循某种分布，所产生的声壳剖面会随 μ 非线性变化：越接近临界阈值的扰动会产生振幅越大的壳层，而超临界扰动只会产生欠密壳层。因此，要进行现实的处理，就应考虑曲率扰动的振幅分布。

作为迈向更现实处理的第一步，我们用标准差为 σ 的零均值高斯分布对 μ 建模。从该分布中抽取 N_s 个 μ 样本，并

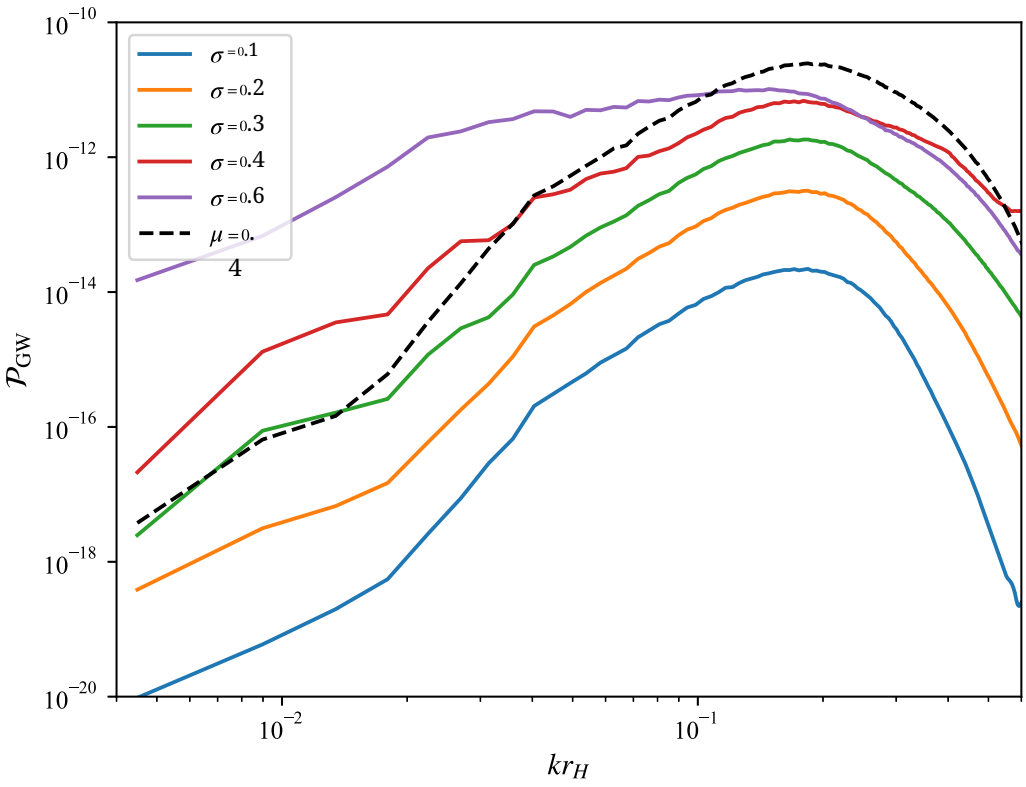


图7：振幅取自标准差为 $\sigma = 0.1$ 的零均值高斯分布时，曲率扰动的最终引力波能谱分别为 0。2（橙色）、0。3（绿色）、0。4（红色）和 0。6（紫色）。初始条件由 $t_i = 200t_m$ 处的一维声 -˜ 壳剖面构造。盒子长度为 $L = 1400$，声壳数量为 $N_s = 100$。黑色虚线显示了单振幅情形 $\mu = 0.4$ 下的谱，其他参数保持不变，以供比较。

随后舍弃满足 $|\mu| > 1.28$ 的数值，以将样本限制为 I 型扰动[6]。当 σ 较小时，II 型扰动较为罕见，为简便起见，此处忽略。对于每个抽取的μ，我们使用 $t_i = 200t_m$ 处对应的一维声壳剖面作为三维初始条件。˜下文报告的模拟采用 $L = 1400$ 和 $N_s = 100$，随后改变 σ 并计算由此得到的引力波能谱。

图 7展示了 $\sigma = 0.1$（蓝色）、0.2（橙色）、0.3（绿色）、0.4（红色）和0.6（紫色）对应的最终引力波能谱。作为参考，我们还绘制了单振幅情形 $\mu = 0.4$ 的能谱，其他参数保持不变（黑色虚线）。红外行为具有普适性，不受振幅分布影响，始终呈现因果 k^3标度。然而，峰结构和紫外行为会随 σ变化。对于较小的 σ，大多数样本处于亚临界状态，能谱与单振幅亚临界情形非常相似。随着 σ 增大，相对较大振幅的壳层所占比例上升，引力波的整体振幅增大，紫外尾部也略微变缓（例如 $\sigma = 0.4$，红色曲线）。这些趋势是可以预期的：较大的 σ 会增加较大壳层的贡献，从而增强非线性流体动力学相互作用，既放大紫外尾部，也提高

[6]关于 I 型和 II 型扰动的近期讨论，参见文献 · [76–78]·

积分引力波功率。当 σ 变得非常大（$\sigma = 0.6$，紫色曲线）时，相当一部分样本超过临界阈值，因此能谱更接近超临界单振幅情形：紫外增强减弱，峰部变得近似平台状，且由于壳层更宽，峰值频率向较低值移动。这些结果表明，大振幅壳层所占比例会显著影响引力波能谱。

5.4 与标量诱导引力波的比较

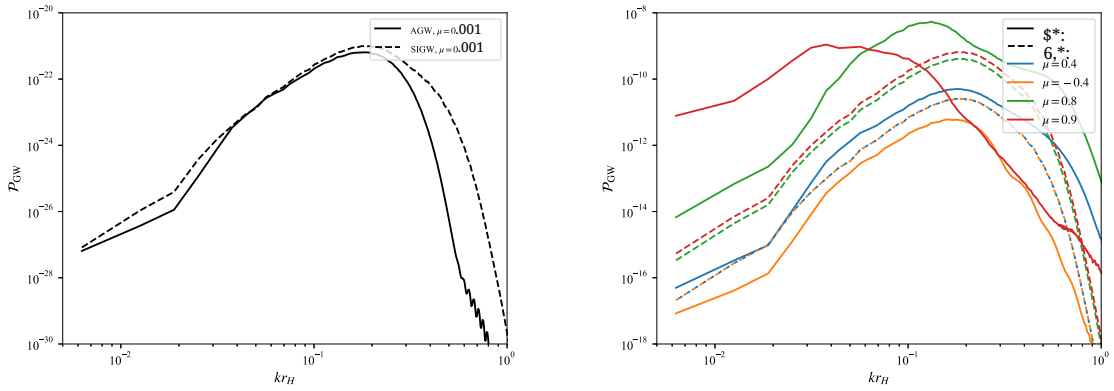


图 8：声学引力波（实线）与标量诱导引力波（虚线）的最终能量谱比较。左图：小扰动，$\mu = 0.001$。右图：不同振幅的曲率扰动：$\mu = 0.4$（蓝色）、$\mu = -0.4$（橙色）、$\mu = 0.8$（绿色）和 $\mu = 0.9$（红色）。右图中，蓝色和橙色虚线重合。

我们的声学引力波计算将完全基于广义相对论的声壳剖面作为三维非线性流体动力学模拟的初始条件，同时忽略度规扰动。另一方面，标量诱导引力波采用微扰方法计算（通常在傅里叶空间中），并在给定的微扰阶数下纳入流体运动和标量度规扰动的贡献。在第 2.2 节中，我们验证了：对于足够小的扰动，完全基于广义相对论的计算与线性理论会得到相同的流体动力学演化；在这种情况下，标量诱导引力波预计会更大，因为按定义，它还包含度规贡献。然而，当扰动较大时，流体运动的非线性放大可能使声学引力波超过标量诱导引力波的结果。下文将展示基于相同实空间曲率扰动进行的直接比较。标量诱导引力波严格采用近期提出的实空间格点模拟方法计算 [79, 80]：给定实空间中的曲率扰动构型后，我们演化标量和张量扰动的运动方程，从而得到标量诱导引力波的能谱。

对于 SIGW 模拟中使用的初始条件，我们将 $N_s = 50$ 曲率$\tilde{}$高斯剖面的峰（2.3）嵌入尺寸为 $L = 1000$ 的盒子中。我们改变振幅参数 μ，以研究小振幅和大振幅区域。声学引力波使用相应的、从 $t_i = 200t_m$ 提取的完全符合广义相对论的声壳剖面作为三维初始数据。该流体构型实际上是同一曲率扰动在完全符合广义相对论的演化下的结果，从而确保声学引力波与标量诱导引力波之间的比较具有一致性。

图 8左图比较了小振幅情形 $\mu = 0.001$下声学引力波（实线）和标量诱导引力波（虚线）的最终能量谱。在这种情况下，完全广义相对论模拟与线性理论得到的流体动力学演化完全相同，这一点我们已经

在图 2的第一幅图中展示过。两种谱的峰值位置和整体形状相似，但标量诱导引力波的振幅略大，这与按定义其包含额外的度规贡献相一致。因此，对于小扰动情形，我们的声学引力波仅仅是标量诱导引力波中纯粹由流体运动产生的部分，故称为“声学”引力波。这也证实，流体运动是引力波的主导源，因为两者的振幅差异非常小。

右图展示了曲率扰动具有更大振幅时，声学引力波（实线）和标量诱导引力波（虚线）的最终能量谱： $\mu = 0.4$ （蓝色）、 $\mu = -0.4$（橙色）、 $\mu = 0.8$ （绿色）和 $\mu = 0.9$ （红色）。对于亚临界对（$\mu = 0.4$和 $\mu = -0.4$），标量诱导引力波谱完全相同（蓝色和橙色虚线重合）。然而， $\mu = 0.4$ （$\mu = -0.4$）的声学引力波谱大于（小于）标量诱导引力波，这是因为曲率扰动产生的声波由于非微扰效应，比线性理论所预测的更强（更弱）。在近临界情形（$\mu = 0.8$）下，声学引力波约比标量诱导引力波高一个数量级，且声学峰向较低频率移动；这与紫外区域的非线性放大以及峰值处声壳的展宽相一致。对于超临界情形（$\mu = 0.9$），声学峰进一步向较低频率移动，且其振幅相对于 $\mu = 0.8$ 有所降低，因为在该情形下只产生了一个欠密壳层，从而形成了更弱但更宽的声壳。尽管如此，在我们的设置中，声学引力波信号仍大于标量诱导引力波。因此，对于大扰动情形，尽管我们的声学引力波仍只计入流体运动的贡献，但由于我们在声壳初始剖面中考虑了额外的非微扰效应，它超越了标量诱导引力波的微扰理论预测。

这些比较表明，在大振幅情形下，相较于标量诱导引力波，非微扰效应可以显著增强声学引力波通道并改变峰值频率，而负曲率扰动则会抑制声学信号。对参数空间（包括现实的振幅分布）进行系统探索，将留待未来工作。

6 结论与讨论

本文结合先前的研究 [47, 52], , 考察了原初曲率扰动产生的随机引力波背景中的非微扰效应，尤其关注声学通道（流体运动）。我们将曲率扰动建模为一组峰，每个峰都经历非微扰演化，产生随后相互碰撞并生成引力波的声壳。我们开发了一套混合数值流程：（i）从针对单个曲率峰的一维 Misner-Sharp 模拟中提取完整的广义相对论球对称声壳剖面；（ii）将这些非线性剖面嵌入到与引力波耦合的相对论流体动力学三维格点演化中。该策略使我们能够在避免端到端三维广义相对论模拟高昂成本的同时，受控地探索引力波产生中的非微扰效应。

对于所有曲率峰具有相同振幅的简化情形，我们将数值引力波谱与声壳模型的半解析预测进行了比较。在谱峰附近，半解析模型对数值结果的再现效果非常好。峰值频率与共动壳层厚度 d密切相关，峰值位于 $k = 4/d$附近。这证实了文献 [47, 52]的主要发现。然而，在红外区和紫外区域都出现了显著差异。在红外区，所有数值能谱都呈现出因果 k^3 低频尾部；我们将这一差异归因于引力波源的有限寿命

——这一效应在半解析估算中未予考虑。在紫外区域，格点模拟中实现的非线性流体动力学会产生增强效应，相较之下，线性化半解析计算则没有这种增强。我们已经验证，若不考虑这种非线性流体动力学，数值引力波谱便能完美再现半解析预测。因此，尽管声壳模型能够捕捉主导峰的特征，若要准确预测红外区和紫外区域的情况，就必须考虑有限源持续时间和非线性流体动力学效应。亚临界、负振幅和近临界扰动的引力波能谱形状在定性上相似，而超临界扰动则因仅存在一个更宽的欠密壳层而产生类似平台的峰。峰值振幅对声壳的平均共动间距极为敏感 R_{*c}，其标度近似为 R_{*c}^{-7}，与解析预期 [52] 一致，并经数值模拟验证。

我们还通过从高斯分布中抽样μ ，研究了扰动振幅分布的影响。能谱形状取决于分布宽度 σ，它决定了大振幅壳层所占的比例。随着分布宽度增大，整体振幅也会增大，紫外尾部则略微变缓。 σ 取值很大时，会使相当一部分样本超过塌缩阈值，此时谱的形状便类似于超临界单振幅情形（紫外增强减弱、峰值呈平台状、峰值频率较低）。红外行为保持普适性，不受振幅分布影响。

最后，我们直接比较了由相同实空间曲率扰动计算得到的声学引力波和标量诱导引力波。对于小振幅扰动，完整广义相对论与线性理论给出的流体动力学演化完全相同；由于定义上标量诱导引力波包含额外的度规贡献，其振幅略高于声学引力波。然而，对于大振幅扰动，流体运动的非微扰放大可能使声学引力波超过标量诱导引力波，其中近临界扰动产生的增强最大（相较于标量诱导引力波可提高一个数量级）。声壳的非线性展宽还会使声学引力波的峰值频率向低频移动。负曲率扰动往往会抑制声学引力波信号。这些结果凸显了非线性/非微扰效应对于准确预测原初曲率扰动产生的随机引力波信号的重要性。

本研究存在若干局限，有待未来工作加以解决。首先，三维格点模拟忽略了引力扰动以及可能形成的原初黑洞。这是出于计算可行性的需要，但也因此遗漏了度规扰动和原初黑洞—壳层直接相互作用可能产生的引力波贡献。其次，有限的空间分辨率会在最高波数处引入数值伪影；需要进行更高分辨率模拟，以便进一步确认当前研究范围之外的紫外行为。第三，我们对分布式 μ 的处理采用了简单的高斯采样，并将其截断以保持为 I 型；未来应进一步考察更现实的原初统计性质（例如非高斯曲率扰动），并纳入 II 型扰动。最后，标准的标量诱导引力波计算从动量空间中的曲率扰动功率谱出发，而我们的方法则是在实空间中采样孤立峰。要基于原初宇宙学模型做出准确预测，需要更直接地建立这两种方法之间的联系。未来的工作需要通过端到端的三维广义相对论模拟来解决这一问题。

总之，我们开发了一种混合数值方法，用于研究原初曲率扰动产生引力波的声学通道。声学引力波的谱由两个物理长度尺度决定：共动壳层厚度 d 决定

特征频率，而声壳的平均共动间距 R_{*c} 控制整体振幅。红外和紫外渐近行为分别由因果性和非线性流体动力学决定。尽管我们忽略了度规扰动，但结果清楚地表明，在大振幅区域，非微扰效应能够显著增强声学引力波通道，并使峰值频率相对于标量诱导引力波发生偏移。本研究是迈向完全非微扰地计算原初曲率扰动产生的引力波的第一步；而要对现实的原初情景作出定量预测，还需要开展上述扩展数值与解析研究。

致谢

本研究得到中国国家重点研发计划项目（编号：2021YFC2203004、2021YFA0718304 和 2020YFC2201501）、国家自然科学基金项目（编号：12422502、12547110、12588101、12235019 和 12447101）以及中国载人航天工程空间应用系统科学研究资助项目（编号：CMSCSST-2021-B01）的支持。Z.-Y. Y. 获韩国政府科学技术促进基金和彩票基金资助，受聘参加亚太理论物理中心青年科学家培训（YST）计划。本研究还得到韩国地方政府——庆尚北道和浦项市的支持。

参考文献

[1] *A.A. Starobinsky*，《一种无奇点的新型各向同性宇宙学模型》，《物理学快报*B*》*91 (1980) 99*。[2] *A.H. Guth*，《暴胀宇宙：视界和平坦性问题的一种可能解》，《物理评论*D*》*23 (1981) 347*。[3] *A.D. Linde*，《一种新的暴胀宇宙情景：视界、平坦性、均匀性、各向同性和原初磁单极子问题的一种可能解》，《物理学快报*B*》*108 (1982) 389*。[4] *A. Albrecht*和*P.J. Steinhardt*，《具有辐射诱导对称性破缺的大统一理论宇宙学》，《物理评论快报》*48 (1982) 1220*。[5] *A. Ach´ucarro*等，《暴胀：理论与观测》，*2203.08128*。
[6] LISA Cosmology Working Group合作组，《利用激光干涉仪空间天线开展宇宙学研究》，《相对论生活评论》*26 (2023)* 5 [2204。05434]。[7] LISA Cosmology Working Group合作组，《原初黑洞及其引力波特征》，《相对论生活评论》*28 (2025)* 1 [2310。19857]。[8] *A. Lewis*、*A. Challinor*和*A. Lasenby*，《闭合*FRW*模型中宇宙微波背景各向异性的高效计算》，《天体物理学杂志》*538 (2000)* 473 [*astro-ph*/9911177]。[9] *V. Acquaviva*、*N. Bartolo*、*S. Matarrese*和*A. Riotto*，《来自暴胀的二阶宇宙学扰动》，《核物理*B*》*667 (2003)* 119 [*astro-ph*/0209156]。[10] *S. Mollerach*、*D. Harari*和*S. Matarrese*，《来自次级矢量模和张量模的宇宙微波背景偏振》，《物理评论*D*》*69 (2004)* 063002 [*astro-ph*/0310711]。[11] Planck合作组，《普朗克*2018*年结果。*X.* 对暴胀的约束》，《天文学与天体物理学》*641 (2020) A*10 [1807。06211]。

[12] Planck合作组，《普朗克*2018*年结果。*IX.* 对原初非高斯性的约束》，《天文学与天体物理学》*641 (2020) A*9 [1905。05697]。[13] BICEP、 Keck合作组，《利用普朗克、威尔金森微波各向异性探测器和*BICEP/Keck*观测对截至*2018*年观测季的原初引力波进行改进约束》，《物理评论快报》*127 (2021)* 151301 [2110。00483]。[14] *K. Tomita*，《混沌早期宇宙中不规则性的演化》，《理论物理进展》*54 (1975) 730*。[15] *S. Matarrese*、*O. Pantano*和*D. Saez*，《无旋尘埃的广义相对论动力学：宇宙学影响》，《物理评论快报》*72 (1994)* 320 [*astro-ph*/9310036]。[16] *F. Bernardeau*、*S. Colombi*、*E. Gaztanaga*和*R. Scoccimarro*，《宇宙的大尺度结构与宇宙学微扰理论》，《物理报告》*367 (2002)* 1 [*astro-ph*/0112551]。[17] *P. Ivanov*、*P. Naselsky*和*I. Novikov*，《暴胀和原初黑洞作为暗物质》，《物理评论*D*》*50 (1994) 7173*。[18] *W.H. Kinney*，《非慢滚暴胀的哈密顿-雅可比方法》，《物理评论*D*》*56 (1997)*2002 [*hep-ph*/9702427]。[19] *S.M. Leach*、*I.J. Grivell*和*A.R. Liddle*，《跑动质量暴胀模型的黑洞约束》，《物理评论*D*》*62 (2000)* 043516 [*astro-ph*/0004296]。[20] *S. Inoue*和*J. Yokoyama*，《暴胀子势局部极值点处的曲率扰动》，《物理学快报*B*》*524 (2002)* 15 [*hep-ph*/0104083]。[21] *W.H. Kinney*，《视界穿越与大*η*暴胀》，《物理评论*D*》*72 (2005) 023515*[*gr-qc*/0503017]。[22] *J. Martin*、*H. Motohashi*和*T. Suyama*，《超慢滚暴胀与非高斯性一致性关系》，《物理评论*D*》*87 (2013)* 023514 [1211。0083]。[23] *L. Alabidi*、*K. Kohri*、*M. Sasaki*和*Y. Sendouda*，《暴胀产生的诱导引力波的可观测谱》，*JCAP 09 (2012)* 017 [1203。4663]。[24] *H. Motohashi*和*W. Hu*，《原初黑洞与慢滚违背》，《物理评论*D*》*96 (2017)* 063503 [1706。06784]。[25] *G. Ballesteros*和*M. Taoso*，《来自单场暴胀的原初黑洞暗物质》，《物理评论*D*》*97 (2018)* 023501 [1709。05565]。[26] *C. Germani*和*T. Prokopec*，《关于拐点产生的原初黑洞》，《物理暗宇宙》*18 (2017)* 6 [1706。04226]。[27] *J. Garcia-Bellido*和*E. Ruiz Morales*，《来自单场暴胀模型的原初黑洞》，《物理暗宇宙》*18 (2017)* 47 [1702。03901]。[28] *N. Bhaumik*和*R.K. Jain*，《来自暴胀拐点模型的原初黑洞暗物质及再加热的影响》，*JCAP 01 (2020)* 037 [1907。04125]。[29] *G. Ballesteros*、*J. Rey*、*M. Taoso*和*A. Urbano*，《作为暗物质的原初黑洞与来自单场多项式暴胀的引力波》，*JCAP 07 (2020)* 025 [2001。08220]。[30] *H.V. Ragavendra*、*P. Saha*、*L. Sriramkumar*和*J. Silk*，《来自超慢滚和间歇暴胀的原初黑洞与次级引力波》，《物理评论*D*》*103 (2021)*083510 [2008。12202]。[31] *Y.B. Zel'dovich*和*I.D. Novikov*，《膨胀过程中滞后的核心假说与热宇宙学模型》，《苏联天文学》*10 (1967) 602*。[32] *S. Hawking*，《极低质量的引力坍缩天体》，皇家天文学会月刊*152 (1971) 75*。

[33] *B.J. Carr* 和 *S.W. Hawking*，《早期宇宙中的黑洞》，皇家天文学会月刊 *168 (1974) 399*。[34] *B.J. Carr*，《原初黑洞质量谱》，《天体物理学杂志》*201 (1975) 1*。[35] *G.F. Chapline*，《原初黑洞的宇宙学效应》，《自然》*253 (1975) 251*。[36] *K.N. Ananda*、*C. Clarkson* 和 *D. Wands*，《原初密度扰动产生的宇宙学引力波背景》，《物理评论*D*》*75 (2007)* 123518 [*gr-qc*/0612013]。[37] *D. Baumann*、*P.J. Steinhardt*、*K. Takahashi* 和 *K. Ichiki*，《原初标量扰动诱导的引力波谱》，《物理评论*D*》*76 (2007)* 084019 [*hep-th*/0703290]。[38] *G. Dom`enech*，《标量诱导引力波综述》，宇宙 *7 (2021) 398*[2109。01398]。[39] *C. Joana* 和 *Z.-Y. Yuwen*，《原初空洞产生的原初黑洞》，*2510.11611*。[40] *R. Saito* 和 *J. Yokoyama*，《作为原初黑洞丰度探针的引力波背景》，《物理评论快报》*102 (2009)* 161101 [0812。4339]。[41] *R. Saito* 和 *J. Yokoyama*，《原初黑洞丰度的引力波限制》，《理论物理进展》*123 (2010)* 867 [0912。5317]。[42] *V. De Luca*、*V. Desjacques*、*G. Franciolini* 和 *A. Riotto*，《峰值产生的引力波》，*JCAP 09 (2019)* 059 [1905。13459]。[43] *H. Assadullahi* 和 *D. Wands*，《早期物质主导时期产生的引力波》，《物理评论*D*》*79 (2009)* 083511 [0901。0989]。[44] *K. Jedamzik*、*M. Lemoine* 和 *J. Martin*，《宇宙暴胀与再加热之间早期结构形成期间的引力波产生》，*JCAP 04 (2010)* 021 [1002。3278]。[45] *B. Eggemeier*、*J.C. Niemeyer*、*K. Jedamzik* 和 *R. Easther*，《暴胀后结构形成产生的随机引力波》，《物理评论*D*》*107 (2023)* 043503 [2212。00425]。[46] *N. Fernandez*、*J.W. Foster*、*B. Lillard* 和 *J. Shelton*，《早期结构形成产生的随机引力波》，《物理评论快报》*133 (2024)* 111002 [2312。12499]。[47] *Z. Ning*、*X.-X. Zeng*、*Z.-Y. Yuwen*、*S.-J. Wang*、*H. Deng* 和 *R.-G. Cai*，《原初黑洞形成产生的声波》，*2504.12243*。[48] *A.J. Iovino*、*G. Perna*、*D. Perrone*、*D. Racco* 和 *A. Riotto*，《理解标量诱导引力波的本质》，*2509.24774*。[49] *M. Hindmarsh*，《早期宇宙一级相变中声壳模型的声学引力波产生》，《物理评论快报》*120 (2018)* 071301 [1608。04735]。[50] *M. Hindmarsh* 和 *M. Hijazi*，《声壳模型中的宇宙学一级相变引力波》，*JCAP 12 (2019)* 062 [1909。10040]。[51] *H.-K. Guo*、*K. Sinha*、*D. Vagie* 和 *G. White*，《膨胀宇宙中的相变：标准与非标准宇宙演化史中的随机引力波》，*JCAP 01 (2021) 001*[2007。08537]。[52] *X.-X. Zeng*、*Z. Ning*、*Z.-Y. Yuwen*、*S.-J. Wang*、*H. Deng* 和 *R.-G. Cai*，《原初引力坍缩产生的遗迹引力波》，*2504.11275*。[53] *C.W. Misner* 和 *D.H. Sharp*，《绝热球对称引力坍缩的相对论方程》，《物理评论》*136 (1964) B571*。[54] *D.S. Salopek* 和 *J.R. Bond*，《暴胀模型中长波长度规涨落的非线性演化》，《物理评论*D*》*42 (1990) 3936*。[55] *A.G. Polnarev* 和 *I. Musco*，《作为原初黑洞形成初始条件的曲率剖面》，《经典与量子引力》*24 (2007)* 1405 [*gr-qc*/0605122]。

[56] *A.G. Polnarev*、*T. Nakama* 和 *J. Yokoyama*，《原初黑洞形成的自洽初始条件》，*JCAP 09 (2012)* 027 [1204。6601].[57] *T. Harada*、*C.-M. Yoo*、*T. Nakama* 和 *Y. Koga*，《宇宙学长波长解与原初黑洞形成》，《物理评论*D*》*91 (2015)* 084057 [1503。03934].[58] *I. Musco*，《原初黑洞阈值：对宇宙学扰动形状的依赖》，《物理评论*D*》*100 (2019)* 123524 [1809。02127].[59] *H. Kodama* 和 *M. Sasaki*，《宇宙学微扰理论》，《理论物理进展》增刊 *78 (1984) 1*。[60] *V.F. Mukhanov*、*H.A. Feldman* 和 *R.H. Brandenberger*，《宇宙学扰动理论。第*1*部分：经典扰动。第*2*部分：扰动量子理论。第*3*部分：扩展》，《物理报告》*215 (1992) 203*。[61] *K.A. Malik* 和 *D. Wands*，《宇宙学扰动》，《物理报告》*475 (2009)* 1 [0809。4944].[62] *R.-G. Cai*、*S.-J. Wang* 和 *Z.-Y. Yuwen*，《流体动力学声壳模型》，《物理评论*D*》*108 (2023) L*021502 [2305。00074].[63] *A. Roper Pol*、*S. Procacci* 和 *C. Caprini*，《声壳模型中声波引力波谱的表征》，《物理评论*D*》*109 (2024)* 063531 [2308。12943]

[64] *R. Sharma*、*J. Dahl*、*A. Brandenburg* 和 *M. Hindmarsh*，《具有声学峰的浅遗迹引力波谱》，*JCAP 12 (2023)* 042 [2308.12916].[65] *L. Giombi*、*J. Dahl* 和 *M. Hindmarsh*，《泡泡与哈勃半径之比超出领先阶时的声学引力波》，*2504.08037*.[66] *M. Hindmarsh*、*S.J. Huber*、*K. Rummukainen* 和 *D.J. Weir*，《一级相变中声学产生引力波的数值模拟》，《物理评论*D*》*92 (2015)* 123009 [1504.03291].[67] *M. Hindmarsh*、*S.J. Huber*、*K. Rummukainen* 和 *D.J. Weir*，《一级相变声波产生的引力波》，《物理评论快报》*112 (2014)* 041301 [1304.2433].[68] *M. Hindmarsh*、*S.J. Huber*、*K. Rummukainen* 和 *D.J. Weir*，《一级相变声学引力波功率谱的形状》，《物理评论*D*》*96 (2017)*103520 [1704.05871].[69] *R. Jinno*、*T. Konstandin* 和 *H. Rubira*，《一级相变中引力波产生的混合模拟》，*JCAP 04 (2021)* 014 [2010.00971].[70] *Z.-Y. Yuwen*、*C. Joana*、*S.-J. Wang* 和 *R.-G. Cai*，《泡泡推动原初黑洞形成更多双星系统》，*Phys. Rev. Res. 7 (2025)* 023180 [2406.05838].[71] *D.G. Figueroa*、*A. Florio*、*F. Torrenti* 和 *W. Valkenburg*，《*CosmoLattice*：用于膨胀宇宙中标量场和规范场动力学格点模拟的现代代码》，*Comput. Phys. Commun. 283 (2023)* 108586 [2102.01031].[72] *D.G. Figueroa*、*A. Florio*、*F. Torrenti* 和 *W. Valkenburg*，《模拟早期宇宙的艺术——第一部分》，*JCAP 04 (2021)* 035 [2006.15122].[73] *D.G. Figueroa*、*A. Florio* 和 *F. Torrenti*，《$\mathcal{C}$ *osmo* $\mathcal{L}$ *attice* 的现状与未来》，*Rept. Prog. Phys. 87 (2024)* 094901 [2312.15056].[74] *A. Roper Pol* 和 *A.S. Midiri*，《早期宇宙中的相对论磁流体力学》，*2501.05732*.[75] *R.-G. Cai*、*S. Pi* 和 *M. Sasaki*，《引力波背景谱的普适红外标度》，《物理评论*D*》*102 (2020)* 083528 [1909.13728].[76] *K. Uehara*、*A. Escriv`a*、*T. Harada*、*D. Saito* 和 *C.-M. Yoo*，《*II*型原初黑洞形成的数值模拟》，*JCAP 01 (2025)* 003 [2401.06329].

[77] T. Harada、H. Iizuka、Y. Koga 和 C.-M. Yoo，原初黑洞形成紧致度函数的几何起源，《物理评论*D*》**111** (2025) 023537 [2409。05544]。[78] A. Escriv`a，利用 *Misner-Sharp* 形式模拟一般曲率涨落所致原初黑洞形成的新方法，《物理暗宇宙》**50** (2025) 102177 [2504。05813]。[79] X.-X. Zeng、Z. Ning、R.-G. Cai 和 S.-J. Wang，包含所有阶非高斯性的标量诱导引力波，2508.10812。[80] X.-X. Zeng，包含等曲率扰动的标量诱导引力波格点模拟，2510.02106。