arXiv:2512.21168v1 [math.AC] 24 Dec 2025

# 准希尔伯特环与 Ratliff–Rush 滤过

TONY J. PUTHENPURAKAL 与 SAMARENDRA SAHOO

ABSTRACT. 设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 的非 Gorenstein Cohen-Macaulay 环， $I$ 是$A$的一个理想，并设 $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。令

$$r(I, \omega_A) = \bigcup_{n \geq 0} (I^{n+1}\omega_A : I^n \omega_A) \subseteq A.$$

我们证明理想 $r(I, -)$ 是 $\omega_A$-不变量。受此性质启发，我们引入一类新的环，称为 *quasi-Hilbert rings*。我们给出若干准希尔伯特环的例子，并讨论它们的一些应用。设 $A$ 是一个极大理想为 $\mathfrak{m}$的局部环。我们证明， $A$ 是准希尔伯特环当且仅当 $\widehat{A}$是准希尔伯特环，其中 $\widehat{A}$是 $A$ 关于 $\mathfrak{m}$.的完备化。如果 $d \geq 2$ 且 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 是一个$A \bigoplus \omega_A$-约化元，我们证明，若 $A$ 是准希尔伯特环，则 $A/(x)$ 也是准希尔伯特环。记 $I$ 为理想 $I$的 Ratliff–Rush 闭包，我们还给出充分的条件，以确保对所有 $n \geq 1$.， $r(I^n, \omega_A)/I^n$ 消失

## 1. INTRODUCTION

设 $A$ 是一个含幺交换诺特环， $I$ 是 $A$ 的一个理想，且 $M$ 是有限生成的 $A$-模。对于每个 $n \geq 0$，定义

$$r(I^n, M) := \bigcup_{k \geq 0} (I^{n+k+1}M : I^k M) \subseteq A.$$

理想 $r(I^n, M)$ 称为 $I^n$ 关于 $M$ 的 ***Ratliff-Rush*** 理想；特别地，若$\sim M = A$，则记作 $I^n := r(I^n, A)$，它是 $I^n$ 的 ***Ratliff-Rush*** 闭包。Ratliff–Rush 理想具有若干重要性质：族

$$\mathcal{F}_M^I := \{r(I^n, M)\}_{n \geq 0}$$

构成一个 $I$-滤过 （关于 $I$-滤过的定义见 2.2）。若 $I$ 含有非零因子，且 ann$(M) = 0$, 则 $\mathcal{F}_M^I$ 是一个 $I$-稳定滤过（见 [10], 定理 5.9）。此外，若 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个解析非分歧局部环，且 $I$ 含有非零因子，则存在一个秩一模 $M$，使得

$$r(I^n, M) = \overline{I^n} \quad \text{for all } n \geq 1,$$

其中 $\overline{I^n}$表示 $I^n$ 的 整闭包（参见 [9], 引理 3.6）。

*Date*: 2025年12月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号13A30、13C14；次分类号13A02、13D40、13D45。*Key words and phrases.* 伴随分次环、等维环与无混合环、Hilbert 环。

现在，设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d$ 的局部环，且 $I$ 是一个 $\mathfrak{m}$-主理想。记 $G_I(A):=\bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ 为 $A$ 关于 $I$ 的伴随分次环，并令 $\ell(M)$ 表示 $A$-模 $M$ 的长度。 $M$ 关于 $I$ 的希尔伯特 - 塞缪尔函数定义为

$$H_{M,I}(n) := \ell(M/I^nM),$$

众所周知，存在一个次数为 $d$ 的多项式 $P_{M,I}(n)$，使得对于所有充分大的 $n$，都有 $H_{M,I}(n) = P_{M,I}(n)$。Ratliff–Rush 理想 $K:=r(I,M)$ 的一个重要性质是，它是包含 $I$ 且保持希尔伯特-塞缪尔多项式不变的唯一最大理想，也就是说，

$$P_{M,K}(n) = P_{M,I}(n) \quad \text{for all large } n.$$

回顾一下，若诺特环的雅各布森理想（即所有极大理想的交）是幂零的，则称该环为 Hilbert 环。

设 $A$ 是一个 Cohen-Macaulay 环， $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。本文研究典范 $A$-模的一个不变量，并证明 $r(I,-)$ 是一个 $\omega_A$-不变量（见命题 3.1）。随后我们证明:

**定理 1.1** (定理 3.2)。 设 $A$ 是一个 *Cohen-Macaulay* 环， $J$ 是 $A$ 的雅各布森理想，且 $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。则以下命题等价:

*(1)* $A$是一个 *Hilbert* 环。*(2)* $r(J,\omega_A)=A$。*(3)* $r(J^n,\omega_A)=A$ 对所有 $n\geq 1$.

特别地，Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A}) = \bigoplus_{n\geq 0} r(J^n,\omega_A)t^n = A[t]$ 是一个诺特环，但不是有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模。令 $\widetilde{\mathcal{R}}^J = \bigoplus_{n\geq 0}\widetilde{J^n}$ 为关于 Ratliff-Rush 滤过 $\{\widetilde{J^n}\}_{n\geq 0}$. 的 Rees 代数。若 $J$ 是正则理想（包含一个非零因子），则 $\widetilde{\mathcal{R}}^J$和 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})$是有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模（见注 2.6(1)、3.4(3)）。因此， $\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})/\widetilde{\mathcal{R}}^J$是有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模，且其维数为 $\leq \dim(A)$（见引理 3.5）。还需注意，若 $A$ 是 Gorenstein，则 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})/\widetilde{\mathcal{R}}^J = 0$ （见注 3.4(d)）。

受此启发，我们如下定义准 *Hilbert* 环：设 $A$ 是维数为 $d\geq 1$ 的 Cohen-Macaulay 环， $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。设 $J\neq 0$ 是 $A$ 的雅各布森根理想，且包含一个非零因子。若$\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})/\widetilde{\mathcal{R}}^J$ 的克鲁尔维数等于 $\dim(A)$，则称 $A$ 为准 *Hilbert* 环。特别地，准 Hilbert 环不是 Gorenstein 环。

注意，分次环 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})/\widetilde{\mathcal{R}}^J$的克鲁尔维数越大，环$A$的表现就越接近 Hilbert 环。

我们证明:

**定理 1.2** (定理 3.7)。 设 $A$ 是一个维数为 $d\geq 1$的半局部科恩–麦考利环，既非 *Gorenstein* 环，也非 *Hilbert* 环。假设 $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。设 $J$ 是 $A$的雅各布森理想。令 $E=\mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A})/\widetilde{\mathcal{R}}^J$。则以下结论成立。

(a) 如果 $J$ 是正则的，那么函数 $n\mapsto \ell(E_n)$ 是多项式型的。

(b) 如果 $A$ 是一个局部环，且 $G_J(A)$ 无混合，那么 $E = 0$ 或者函数 $n \mapsto \ell(E_n)$与一个次数为 $d-1$的多项式重合。特别地，如果 $E \neq 0$，那么 $A$ 是一个准 *Hilbert* 环。

我们还给出一个例子，说明定理 1.2 中$G_I(A)$的无混合条件是必要的（见例 4.4）。作为拟希尔伯特环的一个应用，我们证明：

**定理 1.3** (推论 5.3)。 设$(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为$d \geq 1$的 *Cohen-Macaulay* 局部整环。设 $\omega_A$ 是 $A.$ 的典范模。令 $M$ 为一个极大 *Cohen-Macaulay* $A$-模，并令 $N_i = \mathrm{Syz}_i^A(M)$ 为 $M$的第 $i$ 个 *syzygy*（叠）。若 $A$是一个拟希尔伯特环，则函数 $n \mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n, N_i^\dagger)/\widetilde{\mathfrak{m}^n})$ 对所有 $i \geq 1$均与一个次数为 $d-1$ 的多项式相同，其中$N_i^\dagger = \mathrm{Hom}(N_i, \omega_A)$。

我们还证明， $A$ 的拟希尔伯特性质在完备化 $A$ 时以及对约化元取模后均保持不变（约化元的定义见 2.1）。

**定理 1.4** (定理 5.6, 5.5)。 设$(A, \mathfrak{m})$ 是维数为$d \geq 1$的 *Cohen-Macaulay* 局部环。假设 $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。

*(1)* $A$ 是准 *Hilbert* 的，当且仅当 $A$ 是准 *Hilbert* 的，其中 $A$ 是 $A$ 关于 $\mathfrak{m}$的完备化。*(2)* 设 $d \geq 2$。假设 $A$ 的剩余域是无限域。设 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 是一个 $A \bigoplus \omega_A$-约化元。若 $A$ 是准 *Hilbert* 的，则 $A/(x)$也是准 *Hilbert* 的。

对于正则理想 $I$ 和极大 Cohen-Macaulay $A$-模 $M$，我们考察 $r(I^n, M)$与Ratliff-Rush闭包 $I^n$之间的关系。特别地，我们给出充分条件，以保证对所有 $n \geq 1$， $r(I^n, M) = I^n$，如下所示：

**定理 1.5** (定理 6.2)。 （具有与定理 *6.1* 相同的假设）若 $G_I(A)$ 是无混合的，则以下结论成立。

*(1)* $E = \bigoplus_{n\geq 1} r(I^n, M)/\widetilde{I^n}$作为 $\mathcal{R}^I$-模的维数等于 $d$ 或 $E = 0$。 *(2)* 假设 $E \neq 0.$。令 $\mathfrak{q}$ 为包含 $I.$ 的 $A$ 的一个素理想。那么，$\dim(E_\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$ 作为 $\widetilde{\ }$ 上的模，其中 $I_\mathfrak{q}^n = A_\mathfrak{q}$ 对所有 $n \leq 0.$ 均成立。*(3)* 若对于某个包含 $I$ 的素理想 $\mathfrak{q}$， $M_\mathfrak{q}$ 是自由的，则对所有 $n \geq 1.$， $r(I^n, M) = I^n$

现在我们概述本文的结构和主要结果。在第2节中，我们介绍必要的预备知识。在第3节中，我们首先证明，对于 Cohen-Macaulay 环上的典范模， $r(I, -)$ 是一个不变量，然后概述定理 1.1 和定理 1.2 的证明。在第4节中，我们给出一个例子，说明定理 1.2 中对 $G_I(A)$ 的无混合条件是必要的。在第5节中，我们证明定理 1.3 和定理 1.4。最后，在第6节中，我们证明定理 1.5。

## 2. Preliminaries

本文中所考虑的所有环均为诺特环，除非另有说明，所有模均为有限生成模。我们将以 [1] 作为一般参考文献。此外， $\ell(M)$ 表示一个 $A$- 模的长度。

**2.1.** 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个局部环。若存在 $c\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geq c$，$x\in I$ 关于 $I$ 是 $A$-表层的，则称 $x\in I$ 为 $A$-表层元素，

$$(I^{n+1}:x)\cap I^c=I^n.$$

如果深度$(I,\ A)>0$，那么可以证明，$A$-约化元是 $A$-正则的。此外，在这种情况下

$$(I^{n+1}:x)=I^n \text{ for all } n\gg 0.$$

当剩余域为无限域时，约化元存在，参见 [7, 第 86]页。

**2.2.** 理想滤过 $\mathcal{F}=\{I_n\}_{n\geq 0}$ 称为 $I$-滤过，如果它满足以下条件：

(1) $I_0=A$ 且对所有 $n\geq 0$. $I_{n+1}\subseteq I_n$
(2) $I\subseteq I_1$ 且 $I_1\neq A$.(3) $I_nI_m\subseteq I_{n+m}$
对所有 $n,\ m\geq 0$。

此外，如果对所有 $n\gg 0$ 都有 $II_n=I_{n+1}$，那么 $I$-滤过 $\mathcal{F}$ 称为 $I$-稳定滤过。众所周知，如果 $\mathcal{F}$ 是一个 $I$-稳定滤过，那么 Rees 代数 $\mathcal{R}(\mathcal{F})=\bigoplus_{n\geq 0}I_nt^n$ 是 $\mathcal{R}=A[It]=\bigoplus_{n\geq 0}I^nt^n$ 上的有限模。

**2.3.** 设 $(A,\ \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。设 $\mathcal{F}=\{I_n\}_{n\geq 0}$ 是 $A$ 的一个 $I$-稳定滤过。令 $L^{\mathcal{F}}=\bigoplus_{n\geq 0}A/I_{n+1}$。设 $\mathcal{R}(\mathcal{F})=\bigoplus_{n\geq 0}I_nt^n$ 是关于滤过 $\{I_n\}_{n\geq 0}$ 的 Rees 环。由于 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ 是 $A[t]$ 的子环，因此 $A[t]$ 是一个 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-模。注意，我们有一个 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-模的正合列

$$0\to\mathcal{R}(\mathcal{F})\to A[t]\to L^{\mathcal{F}}(-1)\to 0.$$

由此可得，$L^{\mathcal{F}}(-1)$ 是一个 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-模。因此，$L^{\mathcal{F}}$ 是一个 $\mathcal{R}$-模，详情请参见（[8],4.2）。注意，$L^{\mathcal{F}}$ 不是一个有限生成的 $\mathcal{R}(\mathcal{F})$-模。

**2.4.** 设 $A$ 是一个环，$A$ 的一个理想为 $I$。设 $M$ 是一个 $R$-模。考虑 $A$ 中如下的递增理想链

$$I\subseteq(IM:M)\subseteq(I^2M:IM)\subseteq(I^3M:I^2M)\subseteq\cdots\subseteq(I^{n+1}M:I^nM)\cdots.$$

由于 $R$ 是诺特的，该子模链稳定下来。其稳定值记为 $r(I,\ M)$。容易证明，理想滤过 $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{M}}=\{r(I^n,\ M)\}_{n\geq 0}$ 构成一个 $I$-滤过，参见（[10],定理 2.1）。定义

$$s(r(I^t,M))=\min\{n\,|\,r(I^t,M)=(I^{n+t}M:_A I^nM)\}\text{ for all } t\geq 1.$$

**2.5.** 考虑 M 的以下子模链：

$$IM\subseteq(I^2M:_M I)\subseteq(I^3M:_M I^2)\subseteq\cdots\subseteq(I^{n+1}M:_M I^n)\cdots.$$

$\widetilde{\ }$由于 M 是诺特的，这条子模链会稳定下来。其稳定值记作 $IM$。$\widetilde{\ \ }$注意，滤过 $\{I^nM\}_{n\geq 1}$ 是一个 $I$-滤过。令

$$\rho(I^t,M)=\min\{n\,|\,\widetilde{I^tM}=(I^{n+t}M:_M I^n)\}\text{ for all } t\geq 1.$$

**注记 2.6.** (1) 若 $\operatorname{grade}(I, M) > 0$，则对所有 $n \gg 0$, $I^n M = I^n M$. 特别地，$\{I^n M\}_{n\geq 1}$ 是一个 $I$-稳定滤过（参见 [6, 2.2]）。令

$$s^*(I, M) = \min\{n \mid \widetilde{I^m M} = I^m M \text{ for all } m \geq n\}.$$

(2) 若 $\operatorname{grade}(G_I(A)+, G_I(M)) > 0$则 $I^n M = I^n M$对所有 $n \geq 1$，参见 [3,事实 9 ].

**引理 2.7** ([10],定理 5.9)。设 $I$是 $A$.的正则理想。若 $\operatorname{ann}(M) = 0$则 $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{M}} = \{r(I^n, M)\}_{n\geq 0}$ 是一个 $I$-稳定滤过。

设 $\mathcal{R}^I = A[It]$ 为 Rees 环。由注记 2.6 和引理 2.7，若 $I$ 正则且 $\operatorname{ann}(M) = 0$，则 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^I_M) = \bigoplus_{n\geq 0} r(I^n, M)t^n$和 $\widetilde{\mathcal{R}}^I = \bigoplus_{n\geq 0} \widetilde{I^n} t^n$是有限生成的 $\mathcal{R}$-模。因此，商模 $\frac{\mathcal{R}(\mathcal{F}^I_M)}{\widetilde{\mathcal{R}}^I} = \bigoplus_{n\geq 0} (I^n, M)\widetilde{I^n}$是有限生成的 $\mathcal{R}^I$-模。

**定义 2.8.** [11, 定理 1] 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 1$ 且剩余域无限的准无混合局部环。设 $I$ 是 $\mathfrak{m}$ 的主理想。则存在唯一的最大理想$I_{(k)}$，对 $1 \leq k \leq d$ 而言，包含 $I$，使得

(1) $e_i(I) = e_i(I_{(k)})$ 对于 $0 \leq i \leq k$，其中 $e_i(I)$ 是 $G_I(A)$ 的第 $i$ 个希尔伯特系数（希尔伯特系数的定义见 [7],）。(2) $I \subseteq I_{(d)} \subseteq \ldots \subseteq I_{(1)} \subseteq I = \overline{I}$.的整闭包

理想 $I_{(k)}$ 称为 $A$.的第 $k$ 个系数理想

我们将使用以下结果证明主要定理。该结果的证明见（[9],命题 2.9）。

**命题 2.9.** 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d$ 的诺特环，且 $A$.的一个理想为 $I$

(1)如果 $A$ 是等维且普遍串联的，那么 $G_I(A)$和 $G_I(A)$都是等维的。(2) 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个局部环。若 $A$ 是拟无混合的，且剩余域无限，并且 $I$ 是 $\mathfrak{m}$-主理想，那么 $G_I(A)$ 是无混合的，当且仅当对每个 $n$，都有 $I^n = I^n_{(1)}$；其中 $I^n_{(1)}$ 是 $I^n$的第一系数理想。

注意，对于第一部分，我们不需要 $A$ 是局部的（参见 [1], 引理 4.5.5）。同样的证明也适用于 $G_I$（$A$）的等维性质。

**2.10.** 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个局部环，$I$ 是 $A$. 的一个理想。$I$ 的约化是满足 $KI^n = I^{n+1}$ 的理想 $K \subseteq I$，其中某个 $n \in N$。如果 $K$ 是 $I$ 的约化，则 $I$ 关于 $K$ 的约化数定义为:

$$\mathrm{r}_K(I) = \min\{n \mid KI^n = I^{n+1}\}.$$

如果一个约化关于包含关系是极小的，则称其为极小约化。$I$ 的约化数定义为 $\mathrm{r}(I) = \min\{\mathrm{r}_K(I) \mid K$是 $I\}$的一个极小约化。

## 3. Invariant of canonical modules over Cohen-Macaulay rings

在本小节中，我们引入拟希尔伯特环的概念，并给出半局部 Cohen–Macaulay 整环上这类环的刻画。

设 $A$ 是一个具有典范模的 Cohen-Macaulay 环。众所周知，Cohen-Macaulay 环的典范模在与一个秩一局部自由模作张量积的意义下唯一（见备注 3.3.17）。

**命题 3.1.** 设 $A$ 是一个 *Cohen-Macaulay* 环，$I$ 是 $A$ 的一个理想。则理想 $r(I,\ -)$ 是典范模上的一个不变量。

证明。 设 $w_A^1$ 和 $w_A^2$ 是任意两个典范模。由于 $A$ 的典范模在与一个秩一局部自由模作张量积的意义下唯一，因此有 $w_A^1 \cong w_A^2 \otimes M$，其中 $M$ 是一个秩一局部自由 $A$ 模。由（[10], 命题 1.4(c) ）可得

$$r(I, w_A^1) \cong r(I, w_A^2 \otimes M) \supseteq r(I, w_A^2) + r(I, M).$$

由 [10], 的推论 1.6 可得 $r(I,\ w_A^1) \supseteq r(I,\ w_A^2) + \widetilde{I} = r(I,\ w_A^2)$。类似地，利用某个秩一局部自由 $A$ 模 $w_A^2 \cong w_A^1 \otimes N$，可以证明另一个包含关系。□

回忆一下，若环 $A$ 的 Jacobson 根理想是幂零的，则称其为 Hilbert 环。从现在起，我们用 $J$ 表示 $A$.的 Jacobson 根理想

**定理 3.2**。 设 $A$ 是一个 *Cohen-Macaulay* 环，$\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。则以下命题等价:

*(1)* $A$是 *Hilbert* 环。*(2)* $r(J, \omega_A) = A$。*(3)* $r(J^n, \omega_A) = A$ 对所有 $n \geq 1$. 成立

证明。 (1) $\Longrightarrow$ (2), (3)。 设 $A$ 是一个 Hilbert 环。则对于某个 $n \geq 1$. 有 $J^n = 0$ 由于对于所有 $n \gg 0$ 和 $i \geq 1$.， $r(J^i,\ \omega_A) = (J^{i+n}\omega_A :\ J^n\omega_A)$，因此结论成立

(2), (3) $\Longrightarrow$ (1)。 只需证明 (2) $\Longrightarrow$ (1)。设 $r(J,\ \omega_A) = A$。令 $r(J,\ \omega_A) = (J^{k+1}\omega_A :\ J^k\omega_A)$，其中 $k \geq 1$.根据假设，我们有 $J^{k+1}\omega_A = J^k\omega_A$。这意味着存在 $\alpha \in J$使得 $(1+\alpha)J^k\omega_A = 0$。因此， $J^k\omega_A = 0$.由于 $\omega_A$是一个忠实的$A$-模（见 [1], 定理 3.3.13），我们有 $J^k = 0$. 证明完毕。□

一般而言，我们知道，对于任意理想 $I$，都有 $I \subseteq r(I, \omega_A)$。但下一个结果表明，半局部 Cohen-Macaulay 环的 Jacobson 根理想关于典范模是 Ratliff-Rush 闭的。

**命题 3.3.** 设 $A$ 是一个半局部 *Cohen-Macaulay* 环，$\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。那么 $r(J, \omega_A) = J$。

证明。 设 $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ 是 $A$的极大理想。因此 $J = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n$. 对于 $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} J_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i} \subseteq & r(J,\omega_A)_{\mathfrak{m}_i} \\ = & r(J_{\mathfrak{m}_i}, w_{A_{\mathfrak{m}_i}}) \\ = & r(\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}, w_{A_{\mathfrak{m}_i}}) \\ \subseteq & \overline{\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}} \\ = & \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}, \end{aligned}$$

其中 $\overline{\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}}$是 $\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$的整闭包。最后一个等式是因为局部环中的极大理想是整闭的。这意味着，对于所有$1 \leq i \leq n.$， $r(J, \omega_A)_{\mathfrak{m}_i} = J_{\mathfrak{m}_i}$。这就证明了该结果。□

**注记 3.4.** 设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$的 Cohen-Macaulay 环。假设 $\omega_A$ 是一个典范$A$-模。

(1) 设 $I$ 是 $A$的一个正则理想。由于 $\omega_A$ 是一个忠实的 $A$-模（见 [1], 定理 3.3.13），可知湮灭子 ann($\omega_A$) $= 0$. 根据 [10], 的定理 5.3，滤过 $\mathcal{F}^I_{\omega_A}$ 是 $I$-稳定的。因此，Rees 模 $\mathcal{R}$($\mathcal{F}^I_{\omega_A}$) 是有限生成的 $\mathcal{R}^I$-模。(2) 令 $S = \mathcal{R}(\mathcal{F}^J_{\omega_A}) = \bigoplus_{n\geq 0} r(J^n, \omega_A)t^n$。注意， $S$是一个 $\mathcal{R}^J$-模。如果 $A$是 Hilbert 环，那么 $S = A[t]$ 是一个诺特环，但不是有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模。(3) 如果 $J$ 是一个正则理想，那么根据 [10]的定理 5.3， $S$ 是有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模。例如，若 $A$ 是一个整环且 $J \neq 0$，那么 $J$ 是正则的。(4) 如果 $A$ 是一个 Gorenstein 环，那么对所有 $\mathfrak{p} \in Spec(A)$，都有 $w_{A_\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$。这意味着，对所有 $n \geq 1$ 以及任意理想 $I.$， $r(I^n, \omega_A) = \sim I^n$

**引理 3.5.** 设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 的 *Cohen-Macaulay* 环， $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。设 $J \neq 0$ 是 $A$ 的 *Jacobson* 根理想，且其中包含一个非零因子。那么 $S/\widetilde{\mathcal{R}}^J \leq d.$的克鲁尔维数

证明。 由正合列

$$0 \to S/\widetilde{\mathcal{R}}^J = \bigoplus_{n\geq 0} r(J^n, \omega_A)/\widetilde{J^n} \to \bigoplus_{n\geq 0} A/J^n,$$

我们得到 Ass$_{\mathcal{R}^J}$($S/\widetilde{\mathcal{R}}^J$) $\subseteq$Ass$_{\mathcal{R}^J}$($\widetilde{L}^J(A)$)。 由 [9],的引理 3.3， Ass$_{\mathcal{R}^J}$($\widetilde{L}^J(A)$) $=$Ass$_{\mathcal{R}^J}$( $\widetilde{G}_J(A)$)。根据（[1], 定理 4.5.6），可得

$$\dim_{\mathcal{R}^J}(S/\widetilde{\mathcal{R}}^J) \leq \dim_{\mathcal{R}^J}(\widetilde{G}_J(A)) = d.$$

□

现在我们定义拟希尔伯特环。

**定义 3.6.** 设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 的 *Cohen-Macaulay* 环， $\omega_A$ 是一个典范$A$-模。设 $J \neq 0$ 是 $A$ 的 *Jacobson* 根理想，且其中包含一个非零因子。若 $S/\widetilde{\mathcal{R}}^J$ 的克鲁尔维数等于 $d$, 则称$A$ 为拟希尔伯特环。

T下一个定理给出了使 $A$ 成为准 Hilbert 环的充分条件 .

**定理 3.7.** 设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 的非 *Gorenstein* 半局部 *Cohen–Macaulay* 环，且 $J$ 是 $A$ 的雅各布森理想。假设 $\omega_A$ 是一个典范 $A$-模。令 $E = S/\widetilde{\mathcal{R}}^J$。则有以下结论。

(a) 若 $J$ 是正则理想，则函数 $n \mapsto \ell(E_n)$ 是多项式型。(b) 若 $A$ 是一个具有 $G_J(A)$ 无混合性质的局部环，则 $E = 0$ 或函数 $n \mapsto \ell(E_n)$与一个次数为 $d-1$的多项式相同。特别地，若 $E \neq 0$，则 $A$ 是准 *Hilbert* 环。

证明。(a) 由注 3.4(3)， $E$是一个有限生成的 $\mathcal{R}^J$-模。注意，对每个 $n \geq 0$，都有 $E_n = r(J^n, \omega_A)/\widetilde{J^n}$。设 $\mathfrak{p}$ 是一个不属于 $\mathfrak{m}Spec(A)$ 的 $A$ 的素理想。现在，

$$(E_n)_{\mathfrak{p}} = (r(J^n, \omega_A)/\widetilde{J^n})_{\mathfrak{p}} = r(J^n_{\mathfrak{p}}, w_{A_{\mathfrak{p}}})/\widetilde{J^n_{\mathfrak{p}}} = 0.$$

因此，对所有 $n \geq 0.$，都有 $\ell(E_n) < \infty$。由此可得，函数 $n \mapsto \ell(E_n)$ 是多项式型。

(b) 由于 $A$ 是局部环， $J = \mathfrak{m}$ 包含一个非零因子。若 $E = 0$，则无需证明。设 $E \neq 0$。由命题 2.9， $G_J(A)$ 是无混合且等维的。$\widetilde{\ }$由于 $A$ 的维数为正，因此 $G_J(A)$ 的深度 $> 0$。由注 2.6(2)，对所有 $n \geq 0$，都有 $J^n = J^n$ （$\sim$）。由此可得 $\mathcal{R}^J = \mathcal{R}^J$。根据 [9] 的定理 3.4，结论成立。□

下一个结果表明，在对环施加一些额外条件时，定理 3.7 对任意理想成立。

**定理 3.8.** 设 $A$ 是一个非 *Gorenstein* 半局部 *Cohen-Macaulay* 环，其维数为 $d \geq 1$，且对所有 $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{m}Spec(A)$， $A_{\mathfrak{p}}$ 都是 *Gorenstein*。设 $I$ 是 $A$ 的正则理想， $\omega_A$ 是一个典范$A$-模。令 $E = \mathcal{R}(\mathcal{F}^I_M)/\widetilde{\mathcal{R}}^I$。则有以下结论。

(a) 函数 $n \mapsto \ell(E_n)$ 是多项式型的。(b) 若 $A$ 是一个满足 $G_I(A)$ 无混合的局部环，则要么 $E = 0$，要么函数 $n \mapsto \ell(E_n)$与一个次数为 $d-1$的多项式一致。

证明. (a) 根据注记 3.4(1)， $E$是一个有限生成的 $\mathcal{R}^I$-模。注意，对每个 $n \geq 0$，都有 $E_n = r(I^n, w)/\widetilde{I^n}$。设 $\mathfrak{p}$ 是 $A$ 中一个不属于 $\mathfrak{m}$-Spec$A$的素理想。由于 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 Gorenstein，我们有

$$(E_n)_{\mathfrak{p}} = (r(I^n, \omega_A)/\widetilde{I^n})_{\mathfrak{p}} = r(I^n_{\mathfrak{p}}, w_{A_{\mathfrak{p}}})/\widetilde{I^n_{\mathfrak{p}}} = r(I^n_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}})/\widetilde{I^n_{\mathfrak{p}}} = 0.$$

因此，对于所有 $n \geq 0.$， $\ell(E_n) < \infty$。由此可知，函数 $n \mapsto \ell(E_n)$ 是多项式型的。

(b) 如果 $E = 0$，则无需证明。假设 $E \neq 0$。根据命题 2.9，我们$\sim$有 $G_I(A)$ 是无混合且等维的。由此可得 $\mathcal{R}^I = \mathcal{R}^I$。根据 [9] 的定理 3.4，结论成立。□

现在我们给出一些满足定理 3.7 和 3.8 假设的例子。我们使用了 Singular 和 Macaulay 2 来验证这些例子。

**注 3.9** ([1], 定理 3.3.7(b))。 设 $R$ 是一个拥有典范模（记为 $w_R$）的 ***Cohen-Macaulay*** 局部环，且 $I$ 是 $R$的一个理想。设 $A = R/I$ 是一个 ***Cohen-Macaulay*** 环。那么$\omega_A \cong \mathrm{Ext}^t_R(A, R)$，其中 $t =$维$(R)\ -$维$(A)$。

**例 3.10**。 设 $A = k[[t^{11}, t^{17}, t^{18}]]$ 是 $k[t]$的一个子环，其中 $k$ 是一个域。使用 Singular 可以验证， $A \cong k[[x, y, z]]/I$，其中 $I =(x^3z - y^3,\ x^5y - z^4,\ x^8 - y^2z^3)$。注意，$(A,\ \mathfrak{m})$ 是一个 Cohen-Macaulay 局部整环，并且 $A/x \cong k[[y, z]]/(y^3,\ z^4,\ y^2z^3)$。 $A/x$ 的希尔伯特级数为

$$H_{A/x}(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 3z^3 + 2z^4,$$

它不是对称的。根据 [1]的推论 4.4.6(a)， $A$ 不是 Gorenstein 环。注意， $A$ 的典范模 $(\omega_A)$ 同构于 $A^2$ 的一个子模，并由 $\big((y,\ z),\ (x^3,\ y^2),\ (z^3,\ x^5)\big)$. 生成。使用 Singular，我们还可以验证

$$(\mathfrak{m}^{65}\omega_A : \mathfrak{m}^{59}\omega_A) = (z^4, y^2z^3, xyz^3, y^3z^2, y^4z, xy^3z, y^5, xy^4, x^2y^3, x^2y^2z^2, x^4y^2, x^6)$$

and

$$\mathfrak{m}^6 = (z^4, y^3z^2, y^4z, xy^3z, y^5, xy^4, x^2y^3, xy^2z^3, x^2yz^3, x^2y^2z^2, x^4y^2, x^6).$$

使用 Macaulay 2 可以验证， $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 是无混合的，并且 $xyz^3 \notin \mathfrak{m}^6$。因此， $r(\mathfrak{m}^6,\ \omega_A) \neq \mathfrak{m}^6$。这满足定理 3.7 的假设。

**例 3.11**。 令 $A = k[[x, y, z]]/I$，其中 $I =(x^3z-y^3,\ x^5y-z^4,\ x^8-y^2z^3)$。 由前例可知， $A$ 是一个非 Gorenstein 局部 Cohen–Macaulay 整环。 $A$ 的素理想只有 $(0)$ 和 $\mathfrak{m}$。由于 $A$ 是整环，局部化 $A_{(0)}$ 是一个域，因此是 Gorenstein 环。

令 $K = (x,\ y)$。显然， $K \neq \mathfrak{m}$。利用 SINGULAR，可以验证

$$(K^2\omega_A : K\omega_A) = (x, y, z^3) \neq K,$$

因此 $r(K,\ \omega_A) \neq K$。此外，通过在 MACAULAY2 中进行计算可知，伴随分次环 $G_K(A)$ 是无混合的。因此，定理 3.8 的假设均得到满足。

在 Singular 中，要计算 $A$的同构、典范模和冒号理想，我们使用以下命令。

```
ring R=0,(x,y,z),ds;
ideal m=x,y,z;
ring S=0,t,ds;
map g=R,t^11,t^17,t^18;
setring R;
ideal I=kernel(S,g);
I;
matrix m[1][5]=x^3z-y^3,x^2y^4-z^5,x^5y-z^4,y^7-xz^6,x^8-y^2z^3;
matrix N=m;
Ext_R(2,N);
module M1=Ext_R(2,N);
qring A=std(I);
```

设置环 A；模 w=理想映射(R,M1)；
理想 m=x,y,z；理想 D=商(m^65
*w,m^59*w)；D；

“$I$;” 将给出 $I = (x^3z - y^3, x^2y^4 - z^5, x^5y - z^4, y^7 - xz^6, x^8 - y^2z^3)$ 的生成元。“matrix N= m” 将给出映射 $\mathcal{R}^5 \xrightarrow{[m]} R$ 的余核，即 $R/I$. “Ext$_R$(2, $N$);” 将计算 Ext$^2_R(A/I, R) \cong \omega_A$。“ qring A=std(I);” 和 “setring A;” 将定义商环 $A = R/I$。“module w=imap(R,M1);” 将把 $w =$ Ext$_R$(2, $N$) 视为 $A$-模。最后，“ideal D=quotient($m^{65} * w, m^{59} * w$);” 将计算冒号理想 ( $\mathfrak{m}^{65}w : \mathfrak{m}^{59}w$).

为检查上述例子中 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 和 $G_K(A)$ 的无混合性，我们在 Macaulay 2 中使用了以下命令。

R=QQ [x,y,z]I=理想(x^3z-y^3,x^5y-z^4,x^8-
y^2z^3) A=R/I m=理想(x,y,z) 重数代数(
m) T=重数代数(m) mT=sub(m,T) W=
T/mT prune W 理想 oo 关联素理想 oo

“associatedPrimes oo”将给出 $W = G_{\mathfrak{m}}(A)$的关联素理想。将 $\mathfrak{m}$ 替换为 $K$，我们得到 $W = G_K(A)$的关联素理想。要计算一个理想的极小生成集，并检查环中的元素 $f$ 是否属于该理想，我们使用以下命令。

R=QQ [x,y,z]I=理想(x^3z-y^3,x^5y-z^4,x^8-
y^2z^3) A=R/I m=理想(x,y,z) mingens m^6
f=x*y*z^3member(f,m^6)

## 4. Some more analysis on $r(I^n, M)$ and $I^nM$

本小节讨论 $\rho(I^n, M)$、 $s^*(I^n, M)$ 与 $s(r(I^n, M))$。在本小节末尾，我们利用这些关系给出一个例子，说明不能从定理 3.7 的假设中去掉 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 上的无混合条件。

回顾（见 2.4、2.5、2.6），

$$s(r(I^t,M))=\min\{n\,|\,r(I^t,M)=(I^{n+t}M:_A I^nM)\}\text{ for all }t\geq 1,$$

$$\rho(I^t,M)=\min\{n\,|\,\widetilde{I^tM}=(I^{n+t}M:_M I^n)\}\text{ for all }t\geq 1,$$

and

$$s^*(I,M)=\min\{n\,|\,\widetilde{I^mM}=I^mM\text{ for all }m\geq n\}.$$

下面的结果比较了 $\rho(I^n,\ M)$ 与 $s^*(I^n,\ M)$ 之间的不等式。

**命题 4.1.** 设 $A$ 是一个环，$I$ 是 $A$ 的一个正则理想，且 $M$ 是一个 $A$-模。那么

(a) $\rho(I^n,\ M)\leq\rho(I^{n+1},\ M)+1$ 对所有 $n\geq 1$.(b) $\rho(I^n,\ M)\leq s^*(I,\ M)-n$ 对所有 $n<s^*(I,\ M)$。

证明。(a) 设 $\rho(I^{n+1},\ M)=t$。这意味着 $I^{n+1}M=I^{n+1+t}M:I^t$. 现在，我们有

$$\begin{aligned}(I^{n+1+t}M:I^{t+1})=&((I^{n+1+t}M:_M I^t):_A I)\\=&((I^{n+2+t}M:_M I^{t+1}):_A I)\\=&(I^{n+2+t}M:I^{t+2}).\end{aligned}$$

继续这一过程，我们得到 $\widetilde{I^nM}=(I^{n+1+t}M:_M I^{t+1})$。这就证明了(a)部分。

(b) 令 $s^*(I,M)=t$. 这意味着 $\widetilde{I^nM}=I^nM$ 对所有 $t$. 注意到 $\widetilde{I^nM}=I^nM$ 意味着 $\rho(I^n,\ M)=0$。由(a)部分，

$$\begin{aligned}\rho(I^n,M)&\leq\rho(I^{n+1},M)+1\\&\leq\cdots\\&\leq\rho(I^{n+t-n-1},M)+t-n-1\\&\leq\rho(I^t,M)+t-n\\&=t-n.\end{aligned}$$

这就证明了(b)部分。 □

**命题 4.2**。令 $A$ 为一个环，$I$ 为 $A$ 的正则理想，且 $M$ 为一个 $A$-模，并满足 $grade(I,M)>0$。则 $s(r(I^n,\ M))\leq\rho(I^n,\ M)\leq s^*(I,\ M)-n$ 对所有 $n\geq 1$.

证明。令 $\rho(I^n,\ M)=t$。这意味着 $\widetilde{I^nM}=I^{n+t}M:\ I^t$. 现在，我们有

$$\begin{aligned}(I^{n+t}M:I^tM)=&((I^{n+t}M:_M I^t):_A M)\\=&((I^{n+1+t}M:_M I^{t+1}):_A M)\\=&(I^{n+1+t}M:_A I^{t+1}M).\end{aligned}$$

继续执行相同的过程，我们得到 $r(I^n,\ M)=I^{n+t}M:\ I^tM$. 这就证明了第一个不等式。第二个不等式由命题 4.1(b)推出。□

下一个结果是 Rossi 和 Swanson 所得定理的模类比。尽管证明基本相同，但为清晰起见，我们仍在此给出证明。

**命题 4.3**。 设 $A$ 是一个局部环， $I$ 是 $A$ 的一个具有主约化的理想，且深度$(I, M) > 0$。则 $s^*(I, M) \leq r(I)$。

证明。 设 $(x)$ 是 $I$ 的极小约化，且 $r(I) = r$。我们有

$$\begin{aligned} I^r M \subseteq \widetilde{I^r M} =& (I^{r+n} M : I^n) \\ \subseteq& (I^{r+n} M : x^n) \\ =& (x^n I^r M : x^n) \\ =& I^r M \end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

现在讨论这个例子，它表明在定理 3.7 中，不能去掉假设 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 无混合这一条件。

**例 4.4**。 设 $A = k[[t^5, t^6, t^{13}]]$ 是 $k[t]$ 的子环，其中 $k$ 是一个域。利用 Singular，可以验证 $A \cong k[[x, y, z]]/I$，其中 $I = (xz - y^3,\ z^2 - x^4 y,\ y^2 z - x^5,\ y^5 - x^6)$。注意，$(A,\ \mathfrak{m})$ 是一个局部 Cohen-Macaulay 整环，且 $A/x \cong k[[y, z]]/(y^3,\ z^2,\ y^2 z)$。$A/x$ 的希尔伯特级数为

$$H_{A/x}(t) = 1 + 2t + 2t^2.$$

由于 $A/x$ 的底层维数大于或等于 2， $A/x$ 不是 Gorenstein，因此 $A$ 也不是 Gorenstein。设 $\omega_A$ 是 $A$. 的典范模。注意，理想 $J = (x)$ 是 $\mathfrak{m}$ 的极小约化，且 $r(\mathfrak{m}) = 4.$。由命题 4.3 和 4.2，对于所有 $i = 1,\ 2,\ 3$，我们有 $r(\mathfrak{m}^i,\ \omega_A) = (\mathfrak{m}^{i+3}\omega_A : \mathfrak{m}^3\omega_A)$；对于所有 $i \geq 4.$，有 $r(\mathfrak{m}^i,\ \omega_A) = (\mathfrak{m}^i\omega_A : \omega_A)$

利用 Macaulay 2，我们可以验证 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 不是无混合的。利用 Singular，可以验证 $A$ 的典范模同构于 $A^2$ 的一个子模，并由 $\big((x,\ -y^2),\ (y,\ -z),\ (z,\ -x^4)\big)$ 生成，其中

$$(\mathfrak{m}^5\omega_A : \mathfrak{m}^3\omega_A) = (z, x^2, xy, y^2) \neq \mathfrak{m}^2$$

and

$$(\mathfrak{m}^6\omega_A : \mathfrak{m}^3\omega_A) = (yz, x^3, x^2y, xy^2, y^3) \neq \mathfrak{m}^3.$$

我们还观察到 $r(\mathfrak{m}^4,\ \omega_A) = (x^4,\ x^3y,\ x^2y^2,\ xy^3,\ y^4) \subseteq \mathfrak{m}^4$。由于 $\mathfrak{m}^4 \subseteq r(\mathfrak{m}^4,\ \omega_A)$，我们有$r(\mathfrak{m}^4,\ \omega_A) = \mathfrak{m}^4$。

**断言：** $r(\mathfrak{m}^i,\ \omega_A) = \mathfrak{m}^i$ 对所有 $i \geq 4.$

固定 $i > 4$。令 $\alpha \in r(\mathfrak{m}^i,\ \omega_A) = (\mathfrak{m}^i\omega_A :\ \omega_A)$。这意味着 $\alpha\omega_A \subseteq \mathfrak{m}^i\omega_A$。由于 $r(\mathfrak{m}) = 4$, 我们有

$$\alpha\omega_A \subseteq x^{i-4}\mathfrak{m}^4\omega_A.$$

模去 $(x^{i-4})$，我们得到 $\bar{\alpha}\bar{\omega_A} = 0.$ 由于 $\bar{\omega_A} = w_{A/x^{i-4}}$ （见 [1], 定理 3.3.5），且$w_{A/x^{i-4}}$ 是一个忠实的 $A/(x^{i-4})$-模（见 [1], 定理 3.3.13），因此得到 $\alpha \in (x^{i-4})$。令$\alpha = x^{i-4}t$。由于 $x^{i-4}$ 是 $\omega_A$-正则的，且由包含关系 $\alpha\omega_A \subseteq x^{i-4}\mathfrak{m}^4\omega_A$，我们得到$t \in (x^{i-4}\mathfrak{m}^4\omega_A : x^{i-4}\omega_A) = (\mathfrak{m}^4\omega_A : \omega_A) = \mathfrak{m}^4$。因此 $\alpha \in \mathfrak{m}^i.$ 这就证明了该断言。

T这意味着 $E = 0$ 和 $A$ 都不是拟希尔伯特环（见定理 3.7）。

## 5. Applications of quasi-Hilbert ring

在本小节中，我们讨论拟希尔伯特环的一些应用。

**定理 5.1**。 设$(A,\mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d\geq 1$ 的 ***Cohen-Macaulay*** 局部环。假设 $\omega_A$ 是 $A.$ 的典范模。设 $L$ 是一个 $A$-模，使得 湮灭子$(L)=0$，且对于某个 $r\geq 1$，存在一个满射

$$\omega_A^r\to L.$$

若 $A$ 是准 ***Hilbert*** 环，则函数 $n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,L)/\mathfrak{m}^n)$ 与一个次数为 $d-1.$ 的多项式一致

证明。 由 [10], 的命题 **1.4**$(a,b)$，可得对所有 $n\geq 1.$， $r(\mathfrak{m}^n,w_A^r)=r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)\subseteq r(\mathfrak{m}^n,L)$。由于 $\mathfrak{m}^n\subseteq r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)$，我们有以下单射

$$r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)/\widetilde{\mathfrak{m}^n}\to r(\mathfrak{m}^n,L)/\widetilde{\mathfrak{m}^n}$$

对所有 $n\geq 1.$ 均成立。因此，函数 $n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,L)/\mathfrak{m}^n)$ 的增长至少与函数 $n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)/\mathfrak{m}^n)$ 的增长一样快。由于 $A$ 是准 Hilbert 环，函数$\backsim n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)/\mathfrak{m}^n)$ 与一个次数为 $d-1.$ 的多项式一致。这意味着函数$\backsim n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,L)/\mathfrak{m}^n)$ 与一个次数为 $d-1.$ 的多项式一致 □

**推论 5.2.** 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d\geq 1$ 的 ***Cohen-Macaulay*** 局部环。假设 $\omega_A$ 是 $A.$ 的典范模。令 $L$ 为一个内射 $A$-模，且$\mathrm{ann}(L)=0.$。若 $A$是准 ***Hilbert*** 环，则函数 $n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,L)/\mathfrak{m}^n)$ 与一个次数为 $d-1.$ 的多项式一致。

证明。由于 $L$ 是内射 $A$-模，由（[1], 习题 3.3.28(b)），我们有一个满射

$$\omega_A^r\to L$$

对某个 $r>0.$ 成立。结论现由定理 5.1 得出。 □

**推论 5.3.** 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d\geq 1$ 的 ***Cohen-Macaulay*** 局部整环。假设 $\omega_A$ 是 $A.$ 的典范模。令 $M$ 为一个极大 ***Cohen-Macaulay*** $A$-模，且 $N_i=\mathrm{Syz}_i^A(M)$是 $M$的第 $i$ 个 ***syzygy***（叠）。若 $A$是拟希尔伯特环，则函数 $n\mapsto \ell(r(\mathfrak{m}^n,N_i^\dagger)/\widetilde{\mathfrak{m}^n})$对于所有 $i\geq 1$ 都与一个次数为 $d-1$ 的多项式一致，其中 $N_i^\dagger=\mathrm{Hom}(N_i,\omega_A)$。

证明。 注意，Cohen-Macaulay 整环上的极大 Cohen–Macaulay 模的湮灭子为零，因为 $M$ 的关联素理想集合是 $A.$ 的极小素理想集合的子集。令 $N_0=M.$。对于每个 $i\geq 0$，我们有以下短正合列

$$0\to N_{i+1}\to A^{\mu(N_i)}\to N_i\to 0.$$

应用函子 Hom(−，$\omega_A$)，并由（[1], 定理 3.3.10）可得， $N_{i+1}^\dagger$ 是一个极大 Cohen–Macaulay $A$-模，且

$$0\to N_i^\dagger\to \omega_A^{\mu(N_i)}\to N_{i+1}^\dagger\to 0.$$

该结果现由定理 5.1 得出。 □

**引理 5.4**。 设 $(A、\ \mathfrak{m})$ 是一个剩余域无限的局部环，且 $I$ 是 $A$的正则理想。设 $x \in I \setminus I^2$ 是一个 $M$-约化元。则

*(1)* 对所有 $n \geq 1$,

$$(r(I^n, M) + (x))/(x) \subseteq r(I^n, M/xM) = r((I^n + (x))/(x), M/xM).$$

*(2)* 对所有 $n \geq 1$,

$$\frac{(r(I^n, M) + (x))/(x)}{(\widetilde{I^n} + (x))/(x)} \cong \frac{r(I^n, M)}{\widetilde{I^n} + xr(I^{n-1}, M)}.$$

证明。 (1) 选取 $t \gg 0$使得 $r(I^n, M) = (I^{n+t}M :\ I^tM)$ 且 $r(I^n, M/xM) = (I^{n+t}(M/xM) : I^t(M/xM))$。 令 $a + (x) \in (r(I^n, M) + (x))/(x)$， 其中 $a \in r(I^n, M)$。

$$\begin{aligned}(a + (x))I^t(M/xM) &= aI^t(M/xM) + (x)I^t(M/xM)\\ &= aI^t(M/xM)\\ &= (aI^tM + xM)/xM\\ &\subseteq (I^{n+t}M + xM)/xM\\ &= I^{n+t}(M/xM).\end{aligned}$$

因此 $a + (x) \in r(I^n, M/xM)$。

接下来，选取 $t \gg 0$ 使得

$$r((I^n + (x))/(x), M/xM) = ((I^{n+t} + (x)/(x))M/xM : (I^t + (x)/(x))M/xM)$$

and

$$r(I^n, M/xM) = (I^{n+t}(M/xM) : I^t(M/xM)).$$

由此可得

$$\begin{aligned}r((I^n + (x))/(x), M/xM) &= ((I^{n+t} + (x)/(x))M/xM : (I^t + (x)/(x))M/xM)\\ &= ((I^{n+t}M + xM)/xM : (I^tM + xM)/xM)\\ &= (I^{n+t}(M/xM) : I^t(M/xM))\\ &= r(I^n, M/xM).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{(r(I^n, M) + (x))/(x)}{(\widetilde{I^n} + (x))/(x)} &\cong (r(I^n, M) + (x))/(\widetilde{I^n} + (x))\\ &\cong r(I^n, M)/(\widetilde{I^n} + (x)) \cap r(I^n, M)\\ &= r(I^n, M)/\widetilde{I^n} + ((x) \cap r(I^n, M))\\ &= r(I^n, M)/\widetilde{I^n} + xr(I^{n-1}, M).\end{aligned}$$

最后一个等式由（[10], 命题 8.2）得到。 □

**定理 5.5**。 设$(A, \mathfrak{m})$ 是一个维数为 $d \geq 2$ 、剩余域无限的 *Cohen-Macaulay* 局部环。假设 $\omega_A$是一个典范 $A$-模。设 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$是一个 $A \bigoplus \omega_A$-约化元。若 $A$ 是准 *Hilbert* 的，则 $A/(x)$也是如此。

证明。 注意，雅各布森理想 $J=\mathfrak{m}$ 和

$$E=\bigoplus_{n\geq 0}\frac{r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}}$$

是一个有限生成的 $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$-模。根据（[10], 命题 8.2），对每个 $n\geq 1$，我们都有一个短正合列

$$0\to\frac{r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}}\xrightarrow{x}\frac{r(\mathfrak{m}^{n+1},\omega_A)}{\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1}}}\to\frac{r(\mathfrak{m}^{n+1},\omega_A)}{xr(\mathfrak{m}^n,\omega_A)+\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1}}}\to 0.$$

对所有 $n\geq 0$ 取直和，可得一个 $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$-模的短正合列

$$0\to E\xrightarrow{xt}E(+1)\to C=\bigoplus_{n\geq 0}\frac{r(\mathfrak{m}^{n+1},\omega_A)}{xr(\mathfrak{m}^n,\omega_A)+\widetilde{\mathfrak{m}^{n+1}}}\to 0.$$

由于 $A$ 是一个准 Hilbert 环， $E$ 的维数为 $d$。此外， $xt$ 是 $E$ 上的非零因子，因此 $C$ 的维数为 $d-1.$。由引理 5.4，对于所有 $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}+xr(\mathfrak{m}^{n-1},\omega_A)}&=\frac{(r(\mathfrak{m}^n,\omega_A)+(x))/(x)}{(\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x))/(x)}\\&\subseteq\frac{r((\mathfrak{m}^n+(x))/(x),w_{A/x})}{(\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x))/(x)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Set

$$D=\bigoplus_{n\geq 0}\frac{r((\mathfrak{m}^n+(x))/(x),w_{A/x})}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x)/(x)}.$$

由于 $^{w_{A/x}}$ 是一个忠实的 $A/x$-模，且 $\mathfrak{m}/x$ 是一个正则理想，因此模 $D$ 是一个有限生成的 $\mathcal{R}^{\bar{\mathfrak{m}}}$-模，其中 $\bar{\mathfrak{m}}=(\mathfrak{m}+(x))/(x)$。由 1 可得， $\mathcal{R}^{\bar{\mathfrak{m}}}$-模 $D$ 的维数为 $d-1.$

接下来，注意到对所有 $n\geq 1$,

$$\frac{\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x)}{(x)}\subseteq\widetilde{\bar{\mathfrak{m}}^n}.$$

这一包含关系给出了一个 $\mathcal{R}^{\mathfrak{m}}$-模的短正合列。

$$0\to\bigoplus_{n\geq 0}\frac{\widetilde{\bar{\mathfrak{m}}^n}}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x)/(x)}\to\bigoplus_{n\geq 0}\frac{r(\bar{\mathfrak{m}}^n,w_{A/x})}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x)/(x)}\to\bigoplus_{n\geq 0}\frac{r(\bar{\mathfrak{m}}^n,w_{A/x})}{\widetilde{\bar{\mathfrak{m}}^n}}\to 0.$$

由于对于所有 $n\gg 0$， $d\geq 2$ 和 $\widetilde{\bar{\mathfrak{m}}^n}=\widetilde{\mathfrak{m}^n}+(x)/(x)$，我们得到 $\mathcal{R}^{\bar{\mathfrak{m}}}$-模$\bigoplus_{n\geq 0}{}^{r}(\bar{\mathfrak{m}}^n,{}^{w_{A/x}})$ $\widetilde{\bar{\mathfrak{m}}^n}$ 的维数为 $d-1$。因此， $A/(x)$ 是一个拟希尔伯特环。 □

**定理 5.6.** 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是维数为 $d\geq 1$ 的 *Cohen-Macaulay* 局部环。假设 $\omega_A$ 是$\hat{}$ $\hat{}$ 一个典范 $A$- 模。 $A$ 是准 *Hilbert* 环，当且仅当 $A$ 是准 *Hilbert* 环，其中 $A$ 是 $A$ 关于 $\mathfrak{m}$ 的完备化。

$\hat{}$证明。 注意，雅各布森理想 $J=\mathfrak{m}$。由于映射 $A\to A$ 是平坦局部同态 $\hat{}$ $\hat{}$，且 $\mathfrak{m}A$ 是 $A$的极大理想，因此由 [1] 的命题 3.3.14 可知

$$\omega_A \otimes_A \widehat{A}$$

^是一个典范 $A$-模。

此外，由 [10],命题 1.4(d)，我们有一个同构

$$r(\mathfrak{m}^n, \omega_A) \otimes_A \widehat{A} \;\cong\; r(\mathfrak{m}^n \widehat{A},\, \omega_A \otimes_A \widehat{A}).$$

^由 [1], 推论 2.1.8， $A$ 是维数为 $d \geq 1$ 的 Cohen-Macaulay 局部环，当且仅当 $A$ 是维数为 $d \geq 1$ 的 Cohen-Macaulay 局部环。因此，滤过 $\mathcal{F}^{\mathfrak{m}}_{\omega_A}$ 是 $\mathfrak{m}$-稳定的，当且仅当滤过

$$\mathcal{F}^{\mathfrak{m}\hat{A}}_{\omega_A \otimes \hat{A}} = \{\, r(\mathfrak{m}^n \widehat{A},\, \omega_A \otimes_A \widehat{A}) \,\}_{n \geq 0}$$

^构成一个 $\mathfrak{m}A$-稳定的滤过。

我们还注意到

$$\frac{r(\mathfrak{m}^n \widehat{A},\, \omega_A \otimes_A \widehat{A})}{\widetilde{\mathfrak{m}^n \widehat{A}}} \;\cong\; \frac{r(\mathfrak{m}^n, \omega_A)}{\widetilde{\mathfrak{m}^n}} \otimes_A \widehat{A}.$$

由于 $A$-模的长度在忠实平坦扩张下保持不变（见 [8], 1.4），因此可得， $A$ 是准 Hilbert 的，当且仅当 $A$ 是准 Hilbert 的

□

## 6. Vanishing of $r(I^n, M)/\widetilde{I^n}$ for all $n \geq 1$

~本节中，我们给出一些充分条件，在这些条件下，对于所有 $n \geq 1$，等式 $r(I^n, M) = I^n$ 成立，其中 $I$ 是正则理想， $M$ 是一个极大 Cohen–Macaulay $A$-模。

**定理 6.1.** 设$(A, \mathfrak{m})$ 是维数为 $d \geq 1$ 的 *Cohen-Macaulay* 局部环，且 $M$ 是一个极大 *Cohen-Macaulay* $A$-模，并且湮灭子$(M) = 0$。设 $I$ 是 $A$. 的正则根理想。若~$G_I(A)$ 是无混合的，则以下结论成立。

*(1)* $E = \bigoplus_{n \geq 1} r(I^n, M)/\widetilde{I^n}$的维数等于 $d$或 $E = 0$，作为 $\mathcal{R}^I$-模时亦如此。*(2)* 假设 $E \neq 0$. 。设 $\mathfrak{q}$ 是 $A$ 中包含 $I$. 的一个素理想。则维数$(E_{\mathfrak{q}}) =$ 高度$(\mathfrak{q})$ 作为 $\mathcal{R}^{I_{\mathfrak{q}}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I^n_{\mathfrak{q}} t^n$上的模，其中 $I^n_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$ 对所有 $n \leq 0$.~均成立。*(3)* 若对于某个包含 $I$ 的素理想 $\mathfrak{q}$， $M_{\mathfrak{q}}$ 是自由的，则对所有 $n \geq 1$., $r(I^n, M) = I^n$

证明。 (1) 由于 $I$ 是正则理想且 ann$(M) = 0$，滤过 $\mathcal{F}^I_M$ 和 $\{\widetilde{I^n}\}_{n \geq 0}$ 是 $I$-稳定的。因此， $E$ 是有限生成的 $\mathcal{R}^I$-模。注意， $\widetilde{G}_I(A)$ 是无混合且等维的（见 2.9）。由 [9], 中定理 3.5 的证明可知，dim$(E) = d$，视为一个 $\mathcal{R}^I$-模。此外，注意 $\mathcal{R}(\mathcal{F}^I_M)$ 是一个分次 $\widetilde{\mathcal{R}}^I = \bigoplus_{n \geq 0} \widetilde{I^n} t^n$-模。由以下包含关系

$$\mathcal{R}^I \subseteq \widetilde{\mathcal{R}}^I \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{F}^I_M),$$

由此可知， $E$ 是一个有限生成的 $\widetilde{\mathcal{R}}^I$-模。由于 $\widetilde{G}_I(A)$是无混合且等维的，根据 [9], 的引理 3.3 和定理 3.5 的证明，我们得到 $E$ 作为 $\widetilde{\mathcal{R}}^I$-模的维数为 $d$ 。

(2) 注意， $I^n \subseteq I^n \subseteq r(I^n, M) \subseteq I = I$， 其中 $I$ 是 $I$. 的整闭包。最后一个等式是因为 $I$ 是根理想，而倒数第二个不等式则根据[10]的命题 4.2 得出。因此，它们具有相同的极小素理想。设 $E \neq 0$. 这意味着，对于所有包含 $I$.的素理想 $\mathfrak{q}$ ，都有$E_{\mathfrak{q}} \neq 0$

设 $\mathfrak{q}$ 是一个包含 $I$的素理想。这意味着 $I_{\mathfrak{q}}$ 是 $A_{\mathfrak{q}}$的正则理想。我们还有 $\mathrm{ann}^{A_{\mathfrak{q}}}(M_{\mathfrak{q}}) = (\mathrm{ann}_A(M))_{\mathfrak{q}} = 0$. 因此，滤过 $\mathcal{F}^{I_{\mathfrak{q}}}_{M_{\mathfrak{q}}}$是 $I_{\mathfrak{q}}$-稳定的。由此可得， $E_{\mathfrak{q}}$是一个有限生成的 $\mathcal{R}(I_{\mathfrak{q}})$-模。

注意

$$\widetilde{I^n}\, r(I^m, M) \subseteq r(I^{n+m}, M) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z} \text{ and } m \geq 0.$$

由此可得， $E$ 是一个分次 $\mathcal{R}^I = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^n t^n$-模。

由于 $E$ 是有限生成的 $\mathcal{R}^I$-模，由此可知，对所有 $n \gg 0$，理想 $(t^{-n})$ 都包含于 $E$作为 $\mathcal{R}^I$-模时的湮灭子。因此，对所有 $n \gg 0$， $E$都是 $\widehat{\mathcal{R}^I}/(t^{-n})$上的模。

设 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ 是 $(t^{-1})$ 的极小素理想。对于 $n \gg 0$，令

$$(t^{-n}) = Q_{1,n} \cap \cdots \cap Q_{s,n} \cap L_{1,n} \cap \cdots \cap L_{t,n}$$

是 $(t^{-n})$ 的一个主分解，其中每个 $Q_{i,n}$ 都是 $\mathfrak{p}_i$-主的。

**断言。** 对于所有 $n \gg 0$，我们有 $Q_{i,n} \neq \mathfrak{p}_i$ 对每个 $i = 1, \ldots, s$均成立。

断言的证明。 假设对于某个 $i$ 以及 $n$ 的无穷多个取值，有 $Q_{i,n} = \mathfrak{p}_i$ 。令 $\Delta$ 为满足下述条件的指标集：

$$Q_{i,n} = \mathfrak{p}_i \quad \text{for all } n \in \Delta.$$

Then

$$\mathfrak{p}_i = Q_{i,n} = (t^{-n})(\widehat{\widetilde{\mathcal{R}}})_{\mathfrak{p}_i} \cap \widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}} \quad \text{for all } n \in \Delta.$$

在 $\mathfrak{p}_i$ 处局部化，得到

$$(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} = (t^{-n})(\widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}})_{\mathfrak{p}_i} \quad \text{for all } n \in \Delta.$$

因此，

$$(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} = \bigcap_{n\in\Delta} (t^{-n})(\widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}})_{\mathfrak{p}_i} = 0.$$

这意味着 t hat $\mathfrak{p}_i = 0$，这与 $\mathfrak{p}_i \neq 0$ 的事实矛盾。因此，结论成立。

由于 $G_I(A) \cong \widetilde{\mathcal{R}^I}/(t^{-1})$，并且由满射

$$\widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}}/(t^{-n}) \to \widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}}/(t^{-1}),$$

我们得到 $E$ 的维数在 $d = \dim(E)$ 使得 $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Supp}\, \widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}}(E)$。注意， $\mathfrak{p}_1$ 的高度为一。

**断言。** $\mathfrak{p}_{1\mathfrak{q}} \neq 0$。

若该断言成立，则由 [4, 引理 2（第 250], 页）的分次类比可得，$\mathrm{height}(\mathfrak{M}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}_{1\mathfrak{q}}) = \mathrm{height}\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{q}} - \mathrm{height}\ \mathfrak{p}_{1\mathfrak{q}} = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + 1 - 1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$，其中 $\mathfrak{M}_{\mathfrak{q}}$ 是 $\mathcal{R}(I_{\mathfrak{q}})$ 的分次极大理想。这意味着，作为 $\mathcal{R}(I_{\mathfrak{q}})$ 上的模，$\dim(E_{\mathfrak{q}}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$。

断言的证明。反设 $\bar{\mathfrak{p}_{1\mathfrak{p}}} = 0$。那么存在 $s \notin \mathfrak{p}$ 使得 $s\bar{\mathfrak{p}_1} = \bar{0} = (t^{-n}) = Q_{1,\ n} \cap \cdots \cap Q_{s,\ n} \cap L_{1,\ n} \cap \cdots \cap L_{t,\ n}$。注意，对于 $i \geq 2$，我们有$\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_{i,\ n}} \not\supseteq \mathfrak{p}_1$。由于 $Q_{i,\ n}$ 是 $\mathfrak{p}_i$-主的，因此对所有 $i \geq 2$都有 $s \in \mathfrak{p}_i$。

取 $\alpha \in \mathfrak{p}_1 \setminus Q_{1,n}$ 使得 $s\alpha \in Q_{1,n}$。由于 $Q_{1,n}$ 是 $\mathfrak{p}_1$-主的，我们得出 $s \in \mathfrak{p}_1$。因此，$s \in \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s = \sqrt{(t^{-1})}$。于是，存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $s^m \in (t^{-1})$。

现在我们有一个满同态

$$\widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}}/(s^m) \to \widehat{\widetilde{\mathcal{R}^I}}/(t^{-1}).$$

由于 $s$ 的次数为零，通过考察该同态的第 $n$ 个分量，我们得到

$$\widetilde{\ } \quad \widetilde{\ } \qquad \widetilde{\ } \quad \widetilde{\ } \quad \widetilde{\ } s^m I^n \subseteq I^{n+1}。因此，\ s^m \in (I^{n+1} :\ I^n) \subseteq I = I,$$

其中最后一个等式成立是因为 $I$ 是根理想。于是，$s^m \in I \subseteq \mathfrak{p}$，从而 $s \in \mathfrak{p}$，这就产生了矛盾。这证明了该断言。

(3) 假设 $E \neq 0$.根据第 (2) 部分，$E_q =$ 的维数 $\mathrm{ht}(q) \geq 1$.根据假设，$E_{\mathfrak{q}} = \widetilde{\ }\bigoplus_{n\geq 0} r(I_{\mathfrak{q}}^n, M_{\mathfrak{q}})/I^n{}_{\mathfrak{q}} = 0$。这与第 (2) 部分矛盾。由此得证。

□

**定理 6.2.** （具有定理 *6.1* 的相同假设）若 $G_I(A)$ 是无混合的，则下述结论成立。

*(1)* $E = \bigoplus_{n\geq 1} r(I^n, M)/\widetilde{I^n}$作为 $\mathcal{R}^I$-模的维数等于 $d$或 $E = 0$。*(2)* 假设 $E \neq 0$. 令 $\mathfrak{q}$ 为包含 $I$. 的 $A$ 的一个素理想。则 $E_{\mathfrak{q}}\dim() = \mathrm{ht}(\mathfrak{q})$ 作为$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$上模的维数，其中 $I_{\mathfrak{q}}^n = A_{\mathfrak{q}}$ 对所有 $n \leq 0.\widetilde{\ }$均成立。*(3)* 若对于某个包含 $I$的素理想 $\mathfrak{q}$，$M_{\mathfrak{q}}$是自由的，则对所有 $n \geq 1.$，$r(I^n, M) = I^n$

证明。该 论证与定理 6.1 的证明类似，因此省略细节。 . □

**推论 6.3**。设 $A$ 是一个维数为 $d \geq 1$ 且具有典范模 $\omega_A$. 的 *Cohen-Macaulay* 环。对所有极大理想 $\mathfrak{m}.$，设 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = d = \dim(A)$。设 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap q_s$ 是 $A$ 的一个正则根理想，使得 $1 \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_i) < d.$。那么，对于所有 $n \geq 1$，若满足以下条件，则 $r(I^n, \omega_A) = I^n$：

*(1)* 对所有 $i = 1,\ A_{q_i}$ 都是 *Gorenstein*;

*.....*, $s.$。*(2)* $G_I(A)$ 是无混合的。

$\widetilde{\ }$证明。设 $E = \bigoplus_{n\geq 1} r(I^n, \omega_A)/I^n.$。假设 $E \neq 0$。那么存在一个极大理想 $\widetilde{\ }\mathfrak{m}$，使得 $E_{\mathfrak{m}} = \bigoplus_{n\geq 1} r(I_{\mathfrak{m}}^n, (\omega_A)_{\mathfrak{m}})/I_{\mathfrak{m}}^n \neq 0.$。由于 $G_I(A)$ 是无混合且等维的（见命题 2.9(1)），因此对每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$G_{I_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}})$ 也无混合且等维。因此，由 $E_{\mathfrak{m}} \neq 0$ 可得，对于某个 $1 \leq i \leq s$，有 $E_{\mathfrak{q}_i} \neq 0$。

由定理 6.2 的第 (2) 部分可知，$\dim(E_{\mathfrak{q}_i}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}_i) \geq 1$. 因此，$\dim(E_{\mathfrak{q}_i}) > 0$ 作为扩张 Rees 代数 $\mathcal{R}(I_{\mathfrak{q}_i}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_{\mathfrak{q}_i}^n t^n$，上的模$\widetilde{\ }$，其中 $I_{\mathfrak{q}_i}^n = A_{\mathfrak{q}_i}$ 对所有 $n \leq 0$均成立。

另一方面，由于 $A_{\mathfrak{q}_i}$ 是 Gorenstein 的，我们有

$$E_{\mathfrak{q}_i} = \bigoplus_{n\geq 1} r(I_{\mathfrak{q}_i}^n, (\omega_A)_{\mathfrak{q}_i})/\widetilde{I_{\mathfrak{q}_i}^n} = \bigoplus_{n\geq 1} r(I_{\mathfrak{q}_i}^n, A_{\mathfrak{q}_i})/\widetilde{I_{\mathfrak{q}_i}^n} = 0,$$

这就产生了矛盾。因此，$E = 0$。

□

## References

[1] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, 剑桥高等数学研究丛书, 第39卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1993年。[2] David Eisenbud、Daniel R. Grayson、Michael Stillman 和 Bernd Sturmfels（编）, *Computations in algebraicgeometry with Macaulay 2*, 数学中的算法与计算, 第8卷, 施普林格出版社, 柏林, 2002年。[3] William Heinzer、Bernard Johnston、David Lantz 和 Kishor Shah, 诺特环中的 Ratliff-Rush 理想：综述, 《模理论方法》（科罗拉多斯普林斯, 科罗拉多州, 1991年）, 纯粹与应用数学讲义, 第140卷, Dekker出版社, 纽约, 1993年, 第149–159页。[4] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*, 第2版, 剑桥高等数学研究丛书, 第8卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1989年。M. Reid 从日文译出。[5] Masayoshi Nagata, *Local rings*, Interscience纯粹与应用数学专论, 第13卷, Interscience出版社（John Wiley & Sons, Inc. 旗下）, 纽约—伦敦, 1962年。[6] Reza Naghipour, *Ratliff-Rush closures of ideals with respect to a Noetherian module*, 《纯粹与应用代数杂志》195（2005）, 第2期, 167–172。[7] Tony J. Puthenpurakal, *Hilbert-coefficients of a Cohen-Macaulay module*, 《代数杂志》264（2003）, 第1期, 82–97。[8] Tony J. Puthenpurakal, *Ratliff-Rush filtration, regularity and depth of higher associated graded modules. I*, 《纯粹与应用代数杂志》208（2007）, 第1期, 159–176。[9] Tony J Puthenpurakal 和 SAMARENDRA SAHOO, *On unmixed and equi-dimensional associated graded rings*, arXiv预印本 arXiv:2405.20647（2024）。[10] Tony J. Puthenpurakal 和 Fahed Zulfeqarr, *Ratliff-Rush filtrations associated with ideals and modules over a Noetherian ring*, 《代数杂志》311（2007）, 第2期, 551–583。[11] Kishor Shah, *Coefficient ideals*, 《美国数学会汇刊》327（1991）, 第1期, 373–384。
*Email address*: tputhen@math.iitb.ac.in*Email address*: samarendra.s.math@gmail.comDepartment of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai 400 076, India