arXiv:2512.21169v1 [math.GR] 24 Dec 2025

相对双曲群的强双曲性与鲍姆-康涅猜想

Hermès Lajoinie-Dodel *

2025年12月

摘要。我们为某一类强双曲度量构造了相对双曲群，其中包括具有 $CAT(0)$ 的群抛物子群和几乎阿贝尔抛物子群。如果进一步假设抛物子群满足 (RD)，则应用 Lafforgue 的一个定理，可推出这些群满足鲍姆-康涅猜想。我们构造中的关键要素之一，是使用由 Chatterji 和 Dahmani 开发的随机陪集代表元，称为掩码。

1 引言

鲍姆和 Connes 最初于1982年提出这一猜想，相关论文最终于2000年发表于 [BC00], ；随后，Baum、Connes 和 Higson 于1994年在 [BCH94], 中再次探讨了这一猜想。鲍姆-康涅猜想在交换几何与非交换几何之间建立了一座桥梁。更确切地说，该猜想指出，对于任意局部紧群 G，适当 G-作用的分类空间的 G-等变 K-同调，与该群约化 C^*-代数的 K-理论同构。离散群这一特殊情形已经十分有趣，且并非平凡。

证明给定群 G满足鲍姆–康尼斯猜想，可以推出拓扑学、几何和泛函分析中的若干著名猜想。例如，鲍姆–康尼斯映射的单射性蕴含著名的诺维科夫猜想 [Lan15], ；而根据 [GAJV19], 其满射性蕴含卡普兰斯基–卡迪森猜想。该猜想指出，当 G无挠时，其约化 C^*-代数不含非平凡幂等元。

根据 Higson 和 Kasparov 在 [HK97], 中的结果，Haagerup 性质蕴含鲍姆-康涅猜想。因此，该猜想适用于作用在树上，或更一般地作用在中值度量空间上的群 [CDH10]。然而，这一判据无法用于证明具有 Kazhdan性质（T）的无限群满足该猜想。关于满足性质（T）且满足鲍姆–康尼斯猜想的无限群，最早的例子源自 Vincent Lafforgue 的杰出工作，尤其是以下定理。

定理 1.1. *[Laf02]*
设 G是一个满足以下条件的有限生成群。

- G 具有快速衰减性质。
- G 通过等距变换适当地作用于一个一致局部有限、强双曲、弱测地的度量空间。

*Hermès Lajoinie-Dodel,lajoinie@math.uni-bielefeld.de, 德国比勒费尔德大学**关键词**： 相对双曲群、鲍姆-康涅猜想、强双曲性、格罗莫夫双曲性。**AMS 分类号**：20F65, 20F67,58B34.

那么， G满足鲍姆-康涅猜想。

(RD) 性质是群约化 C^*-代数的一种性质。当算子范数可以由一个更简单的范数控制时，该性质便成立。特别是，根据 de la Harpe [dlH88]和 Jolissaint [Jol90]的研究结果，双曲群等都满足这一性质。在我们的工作中，我们关注定理的第二点。

Kasparov 和 Skandalis 在 [KS03], [KS94] 中为研究诺维科夫猜想而定义了 bolic 度量空间，随后 Lafforgue 在定理 1.1 的背景下对其作了加强。若一个度量空间中的球满足光滑性和凸性条件，则称该空间为强双曲型。大多数情况下，强双曲度量取非整数值，因此无法实现为图度量。这类度量空间的例子包括 $CAT(0)$ 空间以及 L^p 空间（当$1 < p < \infty$时）。

利用定理 1.1，Vincent Lafforgue 证明了“经典”的双曲群，即秩 1 单李群中的一致格，满足 Baum–Connes 猜想。因此， $Sp(n, 1)$ 中的一致格构成了首个满足 Baum–Connes 猜想且具有性质 (T) 的无限群实例。

后来，Mineyev 和 Yu 在 [MY02] 中将这一结果推广到了所有双曲群，证明它们满足 Baum–Connes 猜想，尽管目前尚不清楚这些群是否为$CAT(0)$。

那么，一个自然的问题是，这一结果可以推广到哪些双曲群的推广类型。本文聚焦于相对双曲群。相对双曲性由 Gromov 于 1987年在 [Gro87]中定义。它是对双曲群的一种几何推广，适用于更广泛的一类群。大致而言，如果群 G在子群族 P 之外的几何是双曲的，那么称其相对 P 双曲。在关于这类群的众多定义中，本文仅采用 Bowditch 的定义 [Bow12], , 该定义涉及锥化图，并要求此图是双曲且精细的。

根据 [DS05], , 相对双曲群的（RD）性质已经得到了充分理解。事实上，相对于满足（RD）性质的群双曲的群也满足（RD）。因此，我们聚焦于定理 1.1 的第二点，即构造一个强双曲度量。我们所能期望的最强结果，是针对相对于具有强双曲作用的子群双曲的群。

本文针对抛物子群为 $CAT(0)$ 的情形，对这一问题给出了部分回答。

定理 1.2. 设 G 是一个相对于 $CAT(0)$ 子群双曲的群。那么 G 存在一个度量 d，满足以下性质：

- d在 G的作用下保持不变，即对于所有 $g \in G$ 以及 $x, y \in G$，都有 $d(g.x, g.y) = d(x, y)$，
- d 一致局部有限，且与词度量拟等距，
- 度量空间(G, d) 是弱测地且强双曲的。

因此，我们得到以下推论。

推论 1.3。 设 G 是一个相对于具有(RD) 性质的 $CAT(0)$ 子群双曲的群。那么 G满足鲍姆-康涅猜想。

更准确地说，对于具有（RD）性质的 $CAT(0)$ 群族，我们得到以下推论。

推论 1.4。 相对于以下群双曲的群：

- 几乎阿贝尔，

- 余紧立方化，
- 考克斯特群，

及其子群满足鲍姆-康涅猜想。

这一结果特别适用于有限体积实双曲流形的基本群。由此，我们再次证明这些群满足鲍姆–康涅猜想。

在本文中，我们给出了一个新的证明，说明双曲群存在强双曲度量。我们的度量有一个优点：定义相对简单。它利用了 [CDHL20] 中引入的双曲空间角的概念（见命题 3.5），这一概念推广了 $CAT(-1)$空间的视觉角。在相对双曲情形下，我们的度量建立在第 4 节介绍的双曲群度量构造之上，同时也借鉴了 Chatterji 和 Dahmani 在 [CD20]中引入的一种称为掩码的随机代表元概念。

值得注意的是，Nishikawa 和 Petrosyan 在一篇近期预印本 [NP25], 中独立且同时地通过不同方法，为一大类重要的相对双曲群证明了更强版本的鲍姆–康涅猜想。这一类包括秩一李群中的所有格，而这些群不在我们的定理适用范围内。尽管如此，我们仍认为我们的工作因其几何性质而具有意义。

文章结构。 第 2 节概述鲍姆-康涅猜想，重点介绍强双曲性。

第 3 节专门讨论双曲几何，尤其是相对双曲群。在第 4 节中，我们给出一个新的证明，证明双曲群承认强双曲度量。最后，在第 5 节中，我们证明定理 1.2。如上所述，主要工具是掩码这一概念，该概念由 Dahmani 和 Chatterji 在 [CD20],中发展而来，我们将在此介绍这一概念。

致谢。 本文是作者博士论文的一部分。作者感谢 Rémi Coulon 和 Mikael de la Salle 作为论文评阅人对本文的详细阅读，这对本文的改进作出了很大贡献。作者还衷心感谢 Moulay Tahar Benammeur 富有启发性的深入讨论，并感谢他同意担任论文答辩委员会委员。作者感谢 Indira Chatterji 和 François Dahmani 接受担任答辩委员会委员。作者还感谢 Ashot Minasyan 指出参考文献 [UM25]。最后，作者衷心感谢 Thomas Haettel 的支持、随时提供的帮助，以及对本文多次细致的审阅。

2 鲍姆-康涅猜想与强双曲性

本节简要介绍这一猜想。关于更一般的参考资料，请参阅 [Val02]和 [GAJV19]。

2.1 猜想简介

鲍姆-康涅猜想是 Alain Connes“非交换几何”研究计划的一部分。鲍姆-康涅猜想于1982年在文献 [BC00] 中提出，该论文最终于2000年发表。其现代版本源自 Baum、Connes 和 Higson 的论文 [BCH94]。这一猜想在一方面的几何/拓扑学与另一方面的分析之间架起了一座桥梁。

事实上，对于每个局部紧群 G，都有一个鲍姆-康涅猜想。对于每个局部紧群 G，我们总能关联四个阿贝尔群 $K_*^{top}(G)$ 和 $K_*(C_r^*(G))$（其中 $*=0,\ 1$）。我们还可以构造两个群态射：

$$\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(C_r^*(G)).$$

鲍姆-康涅猜想指出，对于 $* = 0$，1， μ_r 是一个等距同构群。

猜想 2.1。 *(鲍姆-康涅猜想)*
设 G 是一个局部紧群。组装映射：

$$\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(C_r^*(G))$$

对于 $* = 0$，这是一个等距同构，1。

左侧 $K_*^{top}(G)$ 称为几何、拓扑 边或交换 边。它涉及一个空间 EG，即 G 适当作用的分类空间；而 $K_*^{top}(G)$ 是 ~~EG~~ 的 G-等变 K-同调。

右侧 $K_*(\overline{C_r^*(G)})$ 称为解析 边或非交换 边。$C_r^*(G)$ 是 G 的约化 C^*-代数，其中 G 是由 G 在希尔伯特空间 $\ell^2(G)$ 上的左正则表示所生成的 C^*-代数。

组装映射 μ_r 通过 Kasparov KK-理论定义，并且与指标理论相关。

鲍姆-康涅猜想蕴含了其他几个著名猜想。此处仅列出这些猜想，不给出其精确表述。关于鲍姆-康涅猜想所带来的结果，可参见 [GAJV19，第 4.5 节。]

人们常说， μ_r 的满射性对分析有影响，而单射性对拓扑学有影响。

根据 [Lan15]，组装映射的单射性蕴含诺维科夫猜想。关于这一猜想的综述，可参见 [FRR95] 。

组装映射的单射性还蕴含格罗莫夫-劳森-罗森堡猜想；这一事实在 [BCH94], 中得到了证明。关于格罗莫夫-劳森-罗森堡猜想的讨论，可参见 [RS95] 。
满射性蕴含卡迪森-卡普兰斯基猜想，现陈述如下。

猜想 2.2。 若 G 是无挠的，则$C_r^*(G)$ 除0 和1之外没有幂等元。

Kaplansky 提出了一个较弱的猜想，指出群代数没有非平凡幂等元。关于组装映射的满射性蕴含 Kaplansky-Kadison 猜想这一事实的证明，参见 [GAJV19，命题 4.20。]

组装映射的满射性还蕴含拓扑怀特海德群消失。关于相关定义及这一事实的证明，请参见 [BMV05] 。

2.2 猜想的现状

首先要指出，目前尚无反例推翻鲍姆-康涅猜想。这里我们给出证明鲍姆-康涅猜想的两种方法。第一种方法是 Haagerup 性质。

定理 2.3. *[HK97]D*
离散群具 h 具有 *Haagerup* 性质的群满足鲍姆-康涅猜想。

因此，可 amen 群 [BCV95], $SO(n,\ 1)$ [VGG74],$SU(n,\ 1)$ 及其格 [VGG73] 满足鲍姆-康涅猜想。根据 [CDH10] ，在树上适当作用的群，以及更一般地，在中位数空间上适当作用的群，也已被证明满足该猜想。因此，性质 (T) 被视为证明鲍姆-康涅猜想的一项困难。Vincent Lafforgue 运用以下定理，给出了首批具有性质 (T) 且满足鲍姆-康涅猜想的无限群的例子。

定理 2.4。 *[Laf02]* 设 G 是满足以下条件的有限生成群。

- G 具有快速衰减性质。

- G 在一个一致局部有限、强双曲、弱测地度量空间上通过等距变换适当地作用。

那么 G满足鲍姆-康涅猜想。

W稍后我们将更具体地讨论性质（RD）和强双曲度量空间 s.

得益于定理 1.1，Lafforgue 证明了秩 1 单李群中余紧格满足鲍姆-康涅猜想。 $Sp(n,\ 1)$ 的余紧格提供了首批满足鲍姆-康涅猜想的无限 Property (T) 群的例子。随后，根据 de la Harpe [dlH88]以及 Mineyev 和 Yu [MY02]的工作，这一结果被推广到了所有双曲群。

Vincent Lafforgue 运用不同的方法，在 [Laf12] 中证明了双曲群满足一个更强版本的鲍姆-康涅猜想，即带系数的鲍姆-康恩猜想。

值得注意的是，直到 [NP25]的工作出现之前，关于$Sp(n,\ 1)$ 的非一致格是否满足鲍姆-康涅猜想仍悬而未决。

Vincent Lafforgue 在 [Laf10] 中指出，强性质（T）是证明鲍姆-康涅猜想时一个非常重要的难点，更具体地说，是证明组装映射的满射性时的难点。目前已知的结果仅适用于 $SL_3(\mathbb{R})$ $SL_3(\mathbb{C})$ $SL_3(\mathbb{H})$和 $E_6(-26)$中的余紧格。例如，对于 $SL_3(\mathbb{Z})$，满射性尚未得到证明。

尽管鲍姆–康涅猜想是否普遍对子群封闭仍是一个未解决的问题，Lafforgue 的定理 1.1 可以推广到子群，因为该定理的第一点显然具有这一性质，而性质 (RD) 在取子群时也保持不变。

根据 Oyono [OO01], , 鲍姆-康涅猜想在自由积、合并积和 HNN 扩张下保持成立。

2.3 快速衰减性质

关于快速衰减性质 (RD)，我们将从简介绍。有关这一主题的入门读物有 [Cha17]和 [Sap15]。

(RD) 性质是约化群 C^*-代数的一个性质。当算子范数可以用一个更简单、更易处理的范数来界定时，该性质便成立。Jolissaint 在 [Jol90], 中研究了这一性质，之后 Connes 和 Moscovici 利用它证明了双曲群的诺维科夫猜想 [CM90]。近期人们对这一性质重新产生兴趣，源于 Lafforgue 在 [Laf02], 中提出的定理 1.1，该定理表明，它是证明鲍姆-康涅猜想所需的两个条件之一。

根据 [Jol90] 和 [dlH88], , 双曲群也满足快速衰减性质。对于相对双曲群，Chatterji 和 Ruane 最早在 [CR05a] 中证明了秩一格具有这一性质；之后 Drutu 和 Sapir 将其推广到相对于具有快速衰减性质的子群双曲的群 [DS05]。关于满足或不满足快速衰减性质的群的更全面列表，请参见 [Cha17]。

更一般地，具有三角形拟中心的一个定义的群满足性质（RD）；在 [Sap15] 中，这一性质称为质心性质 。

2.4 强双曲性

强双曲性 Kasparov 和 Skandalis 在研究诺维科夫猜想时定义了双曲性[KS03], [KS94]。Vincent Lafforgue 围绕鲍姆-康涅猜想和定理 1.1 强化了这一概念。关于这一概念及相关性质的更一般介绍，请参见 [BK02]。

定义 2.5. 设 $\eta \geq 0$。若度量空间 (X,d) 满足：对于所有 x、$y \in X$，以及所有实数 $t \in [0, d(x,y)],$，都存在 $z \in X$，使得 $d(x,z) \leq t+\eta$ 且 $d(z,y) \leq d(x,y) - t + \eta$，则称其为 η-弱测地。

对于所有属于 x 和 y 之间的 η-测地区间的 x、$y \in X$、z：

$$d(x,z) + d(z,y) \leq 2\eta.$$

对于所有 x、$y \in X$，η-弱测地线 $\sigma : [0, d(x,y)] \to [0,1]$，即从 x 到 y 的一个映射，满足对于所有 $t \in [0, d(x,y)]$:

- $d(x,\ \sigma(t)) \leq t + \eta,$
- $d(\sigma(t)\ y) \leq d(x,y) - t + \eta.$

(X,d) 称为弱测地，如果存在 $\eta \geq 0$ 使得(X,d) 是 η-弱测地。

测地度量空间是 0-弱测地的。两点之间的测地线是连接这两点的 0-弱测地线。

令 $(X,\ d)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的闭球，其中 $x \in X,\ r \in \mathbb{R}_+$, $B(x,\ r)$。

定义 2.6。如果对于所有 $r \in \mathbb{R}_+$，都存在 $K \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $x \in X$, $B(x,r)$ 至多包含 K 个点，则称度量空间是一致局部有限的。

单纯　有界度图是具有一致局部有限性的图的具体例子　s.

定义 2.7。（强双曲性）如果度量空间 (X,d) 满足以下两个条件，则称其为强双曲：

- 强双曲-$B1$：如果对于所有 $\eta, r > 0$，都存在 $R = R(\eta, r) \geq 0$，使得对于所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，满足 $d(x_1, y_1)\ d(x_1, y_2)\ d(x_2, y_1)\ d(x_2, y_2) \geq R$ 且$d(x_1, x_2)\ d(y_1, y_2) \leq r$，则有：

$$|d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2) - d(x_1,y_2) - d(x_2,y_1)| \leq \eta.$$

- 弱-$B2$，若存在 $\eta > 0$ 和映射 $m : X \times X \to X$，使得：
  - m 是一个 η-中点映射，也就是说，对所有 $x, y \in X$，

$$|2d(x, m(x,y)) - d(x,y)| \leq 2\eta,$$
$$|2d(y, m(x,y)) - d(x,y)| \leq 2\eta,$$

  - 对所有 $x, y, z \in X$，

$$d(m(x,y), z) \leq \max(d(x,z), d(y,z)) + 2\eta,$$

  - 对每个 $p \in \mathbb{R}_+$，存在 $N(p) \in \mathbb{R}_+$，使得对所有 $N \geq N(p)$，若 $d(x, z) \leq N$,$d(y, z) \leq N$ 且 $d(x, y) > N$，则有：

$$d(m(x,y), z) \leq N - p.$$

$B1$-条件是关于距离的光滑性条件，见图 1；而 $B2$-条件涉及凸性，见图 2。

强双曲度量空间的例子包括适用于 $1 < p < \infty$ 的 L^p 空间，以及 $CAT(0)$ 空间。最近，Haettel、Hoda 和 Petyt 在 [HHP25，定理 4.18] 中证明，在一定条件下，配备分片 ℓ^p 度量 $1 < p < \infty$的胞腔复形是强双曲的。

利用 $CAT(0)$ 空间是强双曲的这一事实，我们知道 $CAT(0)$ 群存在强双曲作用。正如 [Val02 第 2], 章所解释的，这类群尤其包含那些在欧氏建筑或黎曼对称空间上适当地、余紧地、等距地作用的群。因此，Vincent Lafforgue 指出，“经典的”双曲群，即秩一单李群的余紧格（$SO(n,1)$ $SU(n,1)$ $Sp(n,1)$ $F_{4(-20)}$），存在强双曲作用。

为了应用定理 1.1，我们需要找到一个强双曲的弱测地度量。这里注意，弱测地性蕴含拟中点的存在。

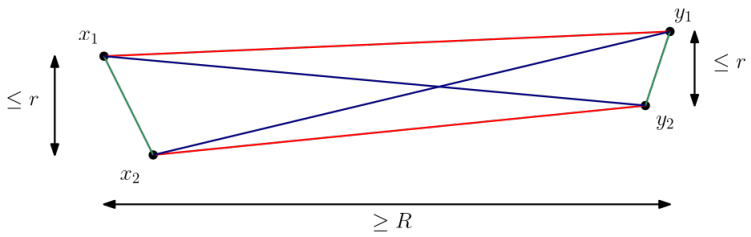


图 1： $B1$条件：光滑性

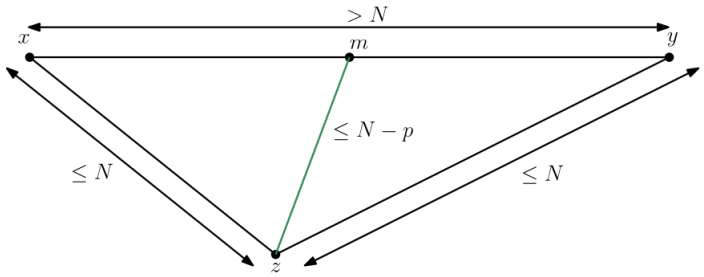


图 2： $B2'$ 条件的一部分：凸性

命题 2.8. 设 $\eta \geq 0$，若 (X, d) 是一个 η-弱测地度量空间，则(X, d) 存在 η-中点。

证明。 对于每个 $x, y \in X$，都存在 z 使得：

$$|\hat{d}(x, z) - \frac{\hat{d}(x, y)}{2}| \leq \eta,$$

$$|\hat{d}(z, y) - \frac{\hat{d}(x, y)}{2}| \leq \eta,$$

ˆ 这直接表明，(X, d) 存在一个 η-中点映射。

□

双曲群的强双曲性。 一类非常有趣、具有强双曲作用的群是双曲群。Mineyev 和 Yu [MY02] 证明，对于任意双曲群G 及其任意凯莱图 X， X 都可以赋予一个强双曲的 G-等变度量。此外，该度量与 X 的图度量拟等距。这一结果推出了双曲群及其子群满足鲍姆 - 康涅猜想。Haïssinsky 和 Matthieu [Mat11]给出了这一事实的一个更简单的证明。他们的证明使用了与凯莱图上的随机游走相关的格林函数，以及对于这一度量，格罗莫夫边界与 Busemann 函数紧化相同这一事实。Lafforgue 在 [Laf12] 中给出了这一事实的另一种证明，并证明双曲群满足更强版本的鲍姆-康涅猜想，即带系数的鲍姆-康恩猜想。

在第 4 节中，我们将利用命题 3.5 给出双曲群具有强双曲度量这一事实的新证明。随后，我们将把这一方法推广到其抛物子群为 $CAT(0)$ 的相对双曲群。

在强双曲度量空间上作用的障碍。通过再次研究格罗莫夫边界与 Busemann 函数紧化之间的关系，Haettel、Hoda 和 Petyt 在 [HHP25] 中确定了强双曲度量空间存在半单作用的一项障碍。

这是一项分裂结果，推广了 $CAT(0)$-空间 [BH99，定理 6.12] 的一个众所周知的性质。

定理 2.9. 设 G 是一个有限生成群，通过半单等距变换作用在 X上，其中 X是一个强双曲度量空间。若 z 是 G中的中心元，则 G 的某个有限指数子群以$\langle z\rangle$ 为直因子。

作为推论 [HHP25, 推论4.20。], 亏格至少为 3 的曲面映射类群不能通过半单等距变换作用在强双曲度量空间上。

同理，幂零群不能通过半单等距变换作用在强双曲空间上。事实上，整数系数海森堡群 $H_3(\mathbb{Z})$是幂零群，其中心为 $\mathbb{Z}$ ，但它不能虚分裂。因此，若要将第 5 节的证明推广到$SU(n,\ 1)$ $Sp(n,\ 1)$ $F_{4(-20)}$的非一致格，就必须构造抛物子群的非半单作用。

3 双曲性与相对双曲群

本节 中，我们回顾本文所用的双曲性和相对双曲性的概念。

3.1 格罗莫夫双曲性

设 (X,d) 为度量空间，且 $x,y\in X$。从 x到 y的测地线是一个映射 $\phi: I\mapsto X$，其中 $I=[a,b]$是 $\mathbb{R}$ 的一个区间，满足 ϕ 是等距映射， $\phi(a)=x$ 且 $\phi(b)=y$。我们常用 $[x,y]$ 表示连接 x与 y的一条测地线，即使它不一定唯一。

若度量空间 (X,d) 对任意 $x,y\in X$，都存在一条从 x到 y的测地线，则称其为测地空间。设 (X,d) 是测地空间。对于任意 $x,y,z\in X$，由连接这三个点的三条测地线$[x,y]\cup[y,z]\cup[z,y]$ 的并构成一个测地三角形。我们常用 $[x,y,z]$ 表示 x,y 与 z 之间的一个测地三角形，即使它不一定唯一。

定义 3.1。 若某个 $\delta\geq 0$ 满足所有测地三角形$[x,y,z]$ 都是 δ-薄的，则测地度量空间(X,d) 称为 δ-双曲的，也就是说，三角形的每条边都包含在另外两条边的并集的 δ-邻域内。

若存在 $\delta\geq 0$ 使得测地度量空间 X 是 δ-双曲的，则称其为双曲的 。

定义双曲性并不一定要假设空间是测地的。我们回顾一下格罗莫夫积的定义，设 X是一个度量空间，且 $x,y,z\in X$,

$$(x,z)_y=\frac{1}{2}(d(x,y)+d(y,z)-d(x,z)).$$

格罗莫夫积关于这三个变量都是 1-利普希茨的。

定义 3.2。 设 $\delta>0$，度量空间 X 按照 *Gromov* 的意义是 δ-双曲的，当且仅当对于任意四个点 $x_0,x_1,x_2,x_3\in X$,

$$(x_1,x_3)_{x_0}\geq\min((x_1,x_2)_{x_0},(x_2,x_3)_{x_0})-\delta.$$

根据 [GdlH90 的命题 21，], 对于测地度量空间 (X,d)，如果其中的三角形是 δ-薄的，那么它在 Gromov 意义下是 8δ-双曲的；反之，如果 X 在 Gromov 意义下是 δ-双曲的，那么三角形就是 4δ-薄的。从现在起，我们几乎只讨论测地空间。

注意，在测地双曲空间中，三个点之间的格罗莫夫积有一种特殊的解释。对于双曲测地度量空间中的所有 x、 y、 $z\in X$，$(x$、 $y)_z$大致等于 z 到 x 与 y之间一条测地线的距离。

引理 3.3. *[DK18，引理 11。22]*
令 X *b e* 为一个测地 δ-双曲空间。对于每个 x、y、$z \in X$ 以及每条测地线 $[x,y]$，我们有 :

$$(x|y)_z \le d(z,[x,y]) \le (x|y)_z + 2\delta.$$

在第 4 节和第 5 节中，我们还将使用以下关于双曲空间中测地线的引理。

引理 3.4. *[BH99，引理 1.15]*
设 X 为一个测地空间，且测地三角形是 δ-薄的。设 γ、$\gamma' : [0,T] \mapsto X$ 为满足 $\gamma(0) = \gamma'(0)$ 的测地线。若 $d(\gamma(t_0)\ im(\gamma')) \le K$，其中 $K > 0$ 和 $t_0 \in [0,T]$，则对所有 $t \le t_0 - K - \delta$，都有 $d(\gamma(t)\ \gamma'(t)) \le 2\delta$。

3.2 双曲空间中的视觉伪度量

这里我们描述双曲空间的一种较不寻常的性质，它将在第 4 节中使用。为了在 ∂X 上赋予度量，传统上使用的度量是视觉度量，它与 $e^{-\varepsilon(x|y)_o}$ 相当，其中 o 是基点，ε 是参数。这里将提及的结果是 [AL18] 的推广，并允许在整个双曲空间上构造视觉度量，而不仅仅是在其边界上。这种角的概念推广了源自 CAT(0) 几何的双曲流形中的角。

命题 3.5。 *[CDHL20，命题 3.2。]*
固定一个 δ-双曲测地空间 X，并选择 $\varepsilon, D > 0$，使得 $0 < \varepsilon \le {}^{log}{}_{(2)}\ \delta+D$ 。~~令~~ $\alpha = De^{-2D\varepsilon}$ 和 $\beta = \frac{8}{\varepsilon}$。对于任意 $a \in X$，存在一个定义在 X 上的伪距离 d^a_ε，使得：

- $d^a_\varepsilon(x,y) \le \beta e^{-\varepsilon(x|y)^a}$ 对所有 $x, y \in X$，
- $\alpha e^{-\varepsilon(x|y)^a} \le d^a_\varepsilon(x,y)$ 对每个 $x, y \in X$，其中 $d(x,y) \ge 2D$，
- 对所有 $g \in Isom(X)$，对所有 $x, y \in X$，$d^{g.a}_\varepsilon(g.x, g.y) = d^a_\varepsilon(x,y)$</style}。

3.3 相对双曲群

在本 小节中，我们将介绍一些研究相对双曲群的有用工具 s.

3.3.1 精细图与相对双曲群

本段中，我们给出 Farb [Far98] 和 Bowditch [Bow12]提出的相对双曲群定义。该定义基于从凯莱图构造出的图，即锥化图。

定义 3.6。*(锥化图)*
设 G 是一个有限生成群，$H_1, ..., H_k$ 是 G的子群。我们考虑 $Cay(G,S)$，它是关于有限生成集 S的 G 的凯莱图。相对于子群 $H_1, ..., H_k$，G 的锥化图按如下方式构造：对于每个 i 以及每个 H_i 的左陪集 gH_i，添加一个⌒ ⌒顶点 gH_i；对于每个 $h \in H_i$，添加一条以 gH_i 为起点、以 gh 为终点的边。我们将此图记为 $\widehat{Cay}(G,S)$。

请注意，当子群 H_i 是无限群时，锥化图是局部无限的，见图 3。

粗略地说，如果子群 H_i、$i \in \{1,...,n\}$ 及其陪集是G 成为双曲的唯一障碍，那么这个图必定是双曲的，因为在新图的度量下，H_i 的每个平移的直径都是 2。然而，在相对双曲的定义中，我们还要求锥化图满足一个额外的组合条件，称为一致精细性。

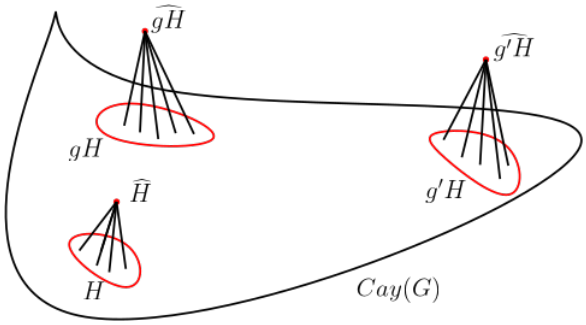


图 3：锥化图

定义 3.7。 *(精细图) [Bow12，命题 2.1.]A*

包含 g 且长度至多为 L 的简单单纯回路集合是有限的。

如果该集合的基数有一个只依赖于 L 的函数作为上界，则称它是一致细 。我们将该一致精细度函数记为 φ 。

下面的图是一致精细图的例子。

例 3.8。 • 任何局部有限图都是精细的。

• 树是精细的，因为它们没有环。

我们注意到，精细性并非拟等距不变量。事实上， $\widehat{Cay}(G, S)$ 与 $Cay\ G\ S \cup H_1 \cup ... \cup H_k$ $Cay\ G\ S \cup H_1 \cup$(，) 拟等距，而后者并非一致精 $... \cup H_k$ $\widehat{Cay}\ G\ S$ $Cay\ G\ S \cup H_1 \cup ... \cup H_k$ 细。得益于这一拟等距，(，) 是双曲的，当且仅当 (，) 是双曲的。因此，(，) 有时被用作锥化图的模型，例如在 [Osi06] 中。

现在给出 Bowditch 对相对双曲性的定义 [Bow12，定理 7.10。]

定义 3.9。 若有限生成群 G 与一族真子群构成的一对 $(G, H_1, ..., H_k)$ 满足：其中一个（或等价地，每一个）关于 $H_1, ..., H_k$ 的锥化 *Cayley* 图 $\widehat{Cay}(G)$ 是双曲的且一致精细的，则称其为相对双曲的。

一致精细度条件可以替换为 [Far98] 中定义的有界陪集穿透（BCP）。

当锥化 Cayley 图是双曲的，但并非一致细（或不满足（BCP）性质）时，我们称之为 [Far98] 中的弱相对双曲群。弱相对双曲群的一个有趣例子是有限型曲面的映射类群。根据 Masur 和 Minsky 在 [MM99, 定理 1.3.]，中的结果，对于有限个曲线稳定子而言，映射类群的锥化图是双曲的；然而，如果曲面不是单穿孔环面或四穿孔球面，该图就不是一致细的。此外，文章 [AAS07, 命题 10] 表明，映射类群不可能相对于任何有限个无限指数子群成为相对双曲群。研究相对双曲群的一大难点在于，这些图并非局部有限。我们在第 3.3.2 段定义的角和锥，可以帮助我们解决这一难题。

3.3.2 角与锥

在接下来的两段中，我们将回到一致精细图。我们首先讨论这些图中的重要对象：角和锥。锥将在一致精细图中起到邻域的作用，同时具有基数受到一致控制的优势。这里介绍的大多数结果来自 [CD 20]，，我们还证明了其他一些结果。我们从角的定义开始。

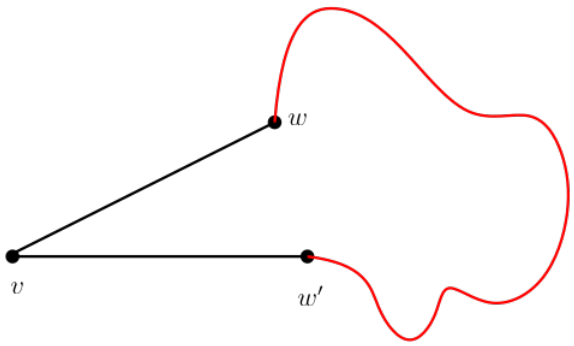
定义3.10。（角）

设 X 为一个图。给定一个顶点 $v \in X^{(0)}$ 和两条无向边 $e_1 = \{v, w\}$ 以及 $e_2 = \{v, w'\}$，满足 $v \in e_1 \cap e_2$，则在 v处 e_2与 e_1之间的角，记作 $\measuredangle_v(w, w')$，定义如下：

$$\measuredangle_v(e_1, e_2) = d_{X\setminus\{v\}}(w, w').$$

换句话说，在 v 处，$e_1 = \{v、w\}$ 与 $e_2 = \{v、w'\}$ 之间的角是避开 v的从 w 到 w' 的路径长度的下确界。特别地，该角可能等于 $+\infty$。

按照惯例，我们采用如下记号滥用：如果 x_1、x_2 和 v 是 X 的顶点，且不同于 v，那么当存在两条边 e_1、e_2，使得 $v \in e_1 \cap e_2$，其中e_i 位于 v 与 x_i 之间的某条测地线上（$i = 1, 2$），并且 $\measuredangle_v(e_1, e_2) > \theta$ 时，我们称 $\measuredangle_v(x_1, x_2) > \theta$。否则，即对于 v 与 x_i 之间的所有测地线（$i = 1, 2$），若其以满足 $v \in e_1 \cap e_2$ 的边 e_i $(i = 1, 2)$ 开始，则 $\measuredangle_v(e_1, e_2) \leq \theta$，此时我们称 $\measuredangle_v(x_1, x_2) \leq \theta$。



从 v 观察 $e_1 = \{v、w\}$ 与 $e_2 = \{v、w'\}$ 之间的角

从 c 观察点 a 和 b 之间的角，仅取决于分别连接 a 与 c、以及 b 与 c 的测地线的第一条边。

命题3.11.（角的三角不等式）

对于满足 $v \in e_1 \cap e_2 \cap e_3$ 的任意边 e_1、e_2 和 e_3 以及顶点 v，我们有：

$$\measuredangle_v(e_1, e_3) \leq \measuredangle_v(e_1, e_2) + \measuredangle_v(e_2, e_3).$$

令 a、b、$c \in X^{(0)} \setminus \{v\}$，我们还有：

$$\measuredangle_v(a, b) \leq \measuredangle_v(a, c) + \measuredangle_v(c, b).$$

证明。第一个性质直接来自 $X \setminus \{v\}$ 中的三角不等式。

要得出关于顶点的第二个不等式，我们只需回到角的定义并使用第一点。

□

In a δ-双曲的图中，顶点处的大角迫使测地线经过该顶点 .

命题 3.12。 *[CD20，命题 1.2]* 设 X 是一个 δ-双曲的图，且 a、b、c 是 X中的a、$b \neq c$顶点。

- 如果 $\measuredangle_c(a、b) > 12\delta$，那么 a 与 b 之间的每条测地线都经过 c；
- 若 e_1, e_2 是两条边，满足 $c \in e_1 \cap e_2$，且它们位于从 c 到 a 的测地线上，则 $\measuredangle_c(e_1, e_2) \leq 6\delta$；

• 对于任意 $\theta \geq 0$，若 $\measuredangle_c(a,b) > \theta + 12\delta$，那么对于在 c 处分别沿测地线朝向 a 和 b 出发的任意边 e_1，e_2，均有 $\measuredangle_c(e_1,e_2) \geq \theta$。

遵循 Chatterji 和 Dahmani 在 [CD20], 中的做法，我们来定义锥。

定义 3.13。（锥）
设 X 为一个图。设 e 为一条边，且 $\theta > 0$ 为一个数。
以边 e 为中心、参数为 θ 的锥，记作 $Cone_\theta(e)$，是 X 的顶点和边的子集，其中 v 和 e' 满足：存在一条长度至多为 θ 的路径从 e 到 e'，且其中任意两条相邻的边所成的角至多为 θ，即：

$$\begin{aligned} Cone_\theta(e) = \{e' \mid \exists e_0 = e, e_1, ..., e_n = e' \\ such\ that\ n \leq \theta, \forall i, \exists v_i \in e_i \cap e_{i+1} and \measuredangle_{v_i}(e_i, e_{i+1}) \leq \theta\} \\ \cup \{v \mid \exists e' = \{v, w\}\ and\ e_0 = e, e_1, ..., e_n = e' \\ such\ that\ n \leq \theta, \forall i, \exists v_i \in e_i \cap e_{i+1} and \measuredangle_{v_i}(e_i, e_{i+1}) \leq \theta\}. \end{aligned}$$

命题 3.14。 *[CD20，命题 1。10]* 在精细图中，锥是有限的。
如果该图是一致细的，那么对于所有 $e \in X^{(1)}$ 和 $\theta > 0$，$Cone_\theta(e)$ 的基数可以由一个关于 θ 的函数 f 从上界进行估计，该函数称为 X 的一致细度函数。

以下性质使得我们能够在相对双曲群中使用锥，作为定义薄三角形时测地线的某种有限邻域。

命题3.15。 *[CD20，命题1.10]* （锥与三角形）
在一个 δ-双曲图中，测地三角形是锥精细的，即对于任意测地三角形 $[a,b,c]$，每条位于 $[a,b]$ 上的边 e 都包含在一个参数为 50δ 的锥中，该锥围绕一条边 e'；这条边要么位于 $[a,c]$ 上，且与 a 距离相同，要么位于 $[b,c]$ 上，且与 b 距离相同。

该命题的一个推论是：在一致精细图中，即使图不是局部有限的，区间仍是一致有限的。回顾一下，对于一个单纯图 X 和两个顶点 x，x'，$I(x, x')$ 是属于 x 与 x' 之间测地线的顶点集合，换句话说$I(x, x') = \{u \in X \mid d(x, u) + d(u, x') = d(x, x')\}$。

推论 3.16。 在一致细且 δ-双曲的图 X中，对于所有 x、$x' \in X$，$I(x$、$x')$ 的基数有一个上界，该上界由依赖于 $d(x$、$x')$、δ以及一致精细度函数f的函数给出。

3.3.3 距离公式

本节讨论相对双曲群的距离公式，该公式由 Sisto 在 [Sis13]中证明。我们给出 [CD20]中提出的版本：词度量等价于锥化度量加上无限价顶点处的角度和。

命题 3.17。 *[CD20，命题 1.6。]*
设 G 是一个相对于$(H_1$、...、$H_k)$双曲的群，令 d_G 表示有限生成集对应的词度量。

令 X_c 表示相对于同一生成集的锥化图，其关联的图度量记为 d_c 。

存在 $A, B > 1$，使得对于所有 $g, h \in G$，对于 X_c 中每种测地线 $[g,h]_c$ 的选择，如果 $\Theta(g,h)$表示 $[g,h]_c$ 在无限价顶点处的边的角度和，那么：

$$\frac{1}{A} d_G(g,h) - B \leq d_c(g,h) + \Theta(g,h) \leq A d_G(g,h) + B.$$

我们将在第 5 节使用距离公式的以下改写形式。

推论 3.18。 设 G 是一个相对双曲于 $(H_1,\dots,H_k)$ 的群，设 d_G 表示关于某个有限生成集的词度量。

令 X_c 表示关于同一生成集的锥化图，其关联的图度量为 d_c 。

令 $M>0$。对于所有 $g,\ h\in G,\ \Theta(g,\ h)$ 表示测地线 $[g,h]_c$ 在无限价顶点处的边的角度和，而 $\Theta_{>M}(g,\ h)$ 表示 $[g,h]_c$ 在无限价顶点处的边中大于 M 的角的角度和。

于是 $d_c+\Theta_{>M}$ 与 d_G 拟等距。

证明。 我们将比较 $d_c+\Theta_{>M}$ 与 $d_c+\Theta$，并以命题 3.17 作结。

显然，对于所有 $g,\ h\in G$:

$$d_c(g,h)+\Theta_{>M}(g,h)\le d_c(g,h)+\Theta(g,h).$$

另一方面，若 $\Theta_{\le M}(g,\ h)$ 表示 $[g,h]_c$ 在无限价顶点处、角度低于 M 的边的角度和，则有:

$$\Theta_{\le M}(g,h)\le Md_c(g,h).$$

因此:

$$d_c(g,h)+\Theta(g,h)\le d_c(g,h)+Md_c(g,h)+\Theta_{>M}(g,h)\le M(d_c(g,h)+\Theta_{>M}(g,h)).$$

于是，根据命题 3.17，$d_c+\Theta_{>M}$ 与 d_G 拟等距。

□

下面的命题表明，对于锥化图中的两个顶点，沿两条测地线的角度和至多相差线性量；这一点将在第 5 节中用到。

命题 3.19。 设 G 是一个相对双曲群，X_c 是其锥化图之一。对于任意 $M>0$，存在 α_1、α_2、$\beta_2>0$，使得对所有 x、$y\in X_c$ 以及这两点之间的任意两条测地线 γ 和 ω，若记:

- $\Theta_\gamma(x,y)$、$\Theta_\omega(x,y)$ 分别为沿 γ、ω 的角度和，
- $d'_\gamma(x,y)=d_c(x,y)+\Theta_\gamma(x,y),\ d'_\omega(x,y)=d_c(x,y)+\Theta_\omega(x,y)$，
- $\Theta_{>M,\gamma}(x,y)$、$\Theta_{>M,\omega}(x,y)$ 分别为沿 γ、ω 且大于 M 的角度和，
- $d'_{>M,\gamma}(x,y)=d_c(x,y)+\Theta_{>M,\gamma}(x,y),\ d'_{>M,\omega}(x,y)=d_c(x,y)+\Theta_{>M,\omega}(x,y)$.

我们有:

- $\frac{1}{\alpha_1}d'_\omega(x,y)\le d_\gamma(x,y)\le\alpha_1 d_\omega(x,y)$.
- $\frac{1}{\alpha_2}d'_{>M,\ \omega}(x,\ y)-\beta_2\le d_{>M,\ \gamma}(x,\ y)\le\alpha_2 d_{>M,\ \omega}(x,\ y)+\beta_2$.

证明。 记 $n:=d_c(x,\ y)$。我们按以下方式排列这两条测地线 :

- $[x,y]_{c,\ \gamma}=\{u_0,\ u_1,\dots,u_n\}$，其中 $u_0=x$、$u_n=y$ 和 $d_c(u_i,\ u_{i+1})=1$，对于 $0\le i\le n-1$,
- $[x,y]_{c,\ \omega}=\{v_0,\ v_1,\dots,v_n\}$，其中 $v_0=x$、$v_n=y$ 和 $d_c(v_i,\ v_{i+1})=1$，对于 $0\le i\le n-1$。

设 $i_0\in\{1,\ \dots,\ n-1\}$，需要考虑两种情况。

- 或者 $u_{i_0}=v_{i_0}$，那么根据命题 3.12 的第二点，我们有:

$$\measuredangle_{u_{i_0}}(u_{i_0-1},u_{i_0+1})\le\measuredangle_{v_{i_0}}(v_{i_0-1},v_{i_0+1})+12\delta.$$

• 否则 $u_{i_0} \neq v_{i_0}$ 3 12, $\measuredangle_{v_{i_0}}\ v_{i_0-1}\ v_{i_0+1}\ \leq$，那么根据命题 . 的第一点，我们有：(，) 和 $\overset{\leq 12\delta}{\measuredangle_{u_{i_0}}}(u_{i_0-1},\ u_{i_0+1})$。

那么，对于所有 $i_0 \in \{1,\ldots,n-1\}$，我们有：

$$\measuredangle_{u_{i_0}}(u_{i_0-1}, u_{i_0+1}) \leq \measuredangle_{v_{i_0}}(v_{i_0-1}, v_{i_0+1}) + 12\delta,$$

因此：

$$\Theta_\gamma(x,y) \leq \Theta_\omega(x,y) + 12\delta.$$

于是：

$$d'_\gamma(x,y) \leq 13\delta d'_\omega(x,y).$$

然后利用对称性可得：

$$\frac{1}{13\delta} d'_\omega(x,y) \leq d'_\gamma(x,y) \leq 13\delta d'_\omega(x,y),$$

以及 $\alpha_1 = 13\delta$.

对于第二点，我们应用推论 3.18 得出结论。

□

3.3.4 三角形与角

本段将提及细双曲图中任意三个点之间存在一个特定测地三角形。在本段中， X 表示一个 δ-精细双曲图。

命题 3.20。 *[LD25，命题 4.18]*

令 a、 b、 $c \in X^{(0)}$，我们考虑满足以下性质的点集 v：

- v 包含在连接 a 与 b 以及 a 与 c的每条测地线中，
- $\measuredangle_v(a,b) > 50\delta$,
- $\measuredangle_v(a,\ c) > 50\delta$。

如果这个集合非空，则其中包含一个与 a 距离最远的唯一点。

定义 3.21。 *[LD25，定义 4.19]*令 $a, b, c \in X^{(0)}$，根据命题 *3.20*，我们将$\tilde{a}$ 定义为满足以下性质的点 v 中距离 a最远的点：

- v 包含在 a 与 b 之间以及 a 与 c之间的每条测地线上，
- $\measuredangle_v(a,\ b) > 50\delta$,
- $\measuredangle_v(a,c) > 50\delta$.

如果满足这三个性质的点集为空，我们就令 $\tilde{a} = a$。

˜我们以相同的方式定义 b 和 $\tilde{c}$ 。

命题 3.22. *[LD25，命题 4.20]*（见图 *5*）

设 $a, b, c \in X^{(0)}$，我们有 $d(a,\tilde{a}) \leq d(a,\tilde{c})$。换句话说，当我们沿着一条从 a到 c的测地线行进时，会依次经过 a, $\tilde{a}$, $\tilde{c}$ 和 c 。

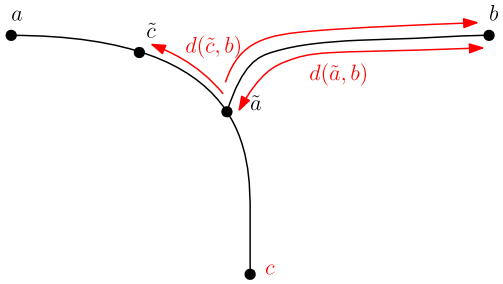


图 5： $\tilde{a}$比 a 更接近 $\tilde{c}$

定理 3.23。 *[LD25，定理 4.21]*（见图*6*）

设有 a、 b、 $c \in X^{(0)}$，以及一条连接 a和 b的测地线 $[a,b]$。存在一个三角形 $[a,b,c]$，其连接 a 和 b 的边为 $[a,b]$，使得：

- 边 $[a,b]$ 和 $[a,c]$ 在 a 和 $\tilde{a}$之间重合，
- 边 $[b,c]$ 和 $[b,a]$ 在 b 和 b之间重合，
- 边 $[c,a]$和 $[c,b]$在 c和 $\tilde{c}$之间重合，
- 对于每个 $v \in]\tilde{a}, b[$，如果我们将 $[\tilde{a},b]$的两条不同边记为 e_1和 e_2，使得 $v \in e_1 \cap e_2$，那么 $\measuredangle_v(e_1, e_2) \leq 100\delta$；同样，此性质对于 $]\tilde{a}, \tilde{c}[$ 和 $]b, \tilde{c}[$也成立。

需要注意，在 [LD25, 定理 4.21] 的证明中，可以预先指定三角形的一条边。

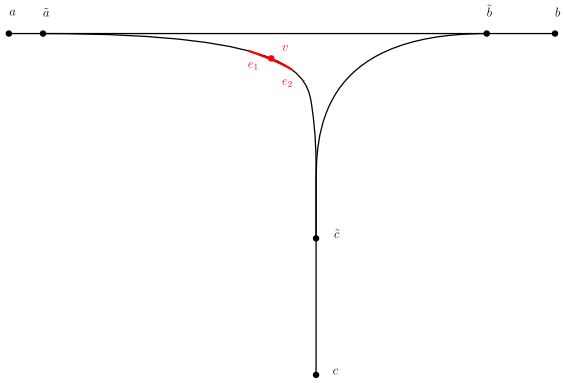


图6：点 a、 b、 c 之间的特定测地三角形，其中 $\measuredangle_v(e_1, e_2) \leq 100\delta$

命题 3.24. 设 a、 b、 $c \in X^{(0)}$ 满足 $\tilde{a} \neq \tilde{b} \neq \tilde{c}$，且 $[a,b,c]$ 是定理 *3.23* 中的一个三角形。我们令 e_1 为 $[\tilde{a},b]$ 上满足 $\tilde{a} \in e_1$ 的边，并令 e_2 为 $[\tilde{a},\tilde{c}]$ 上满足 $\tilde{a} \in e_2$ 的边。我们有：

$$\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2) \leq 12\delta.$$

证明。 证明与命题3.15的证明类似（见 [CD20]）。

□

4 双曲群的强双曲性

本节将重新证明这样一个事实：双曲群具有强双曲度量。根据 Lafforgue 的定理 1.1 [Laf02]，这是在不带系数的情况下证明鲍姆-康涅猜想的两个关键步骤之一。

双曲群具有快速衰减性质，这一事实由 de la Harpe 和 Jolissaint 分别在 [dlH88] 和 [Jol90]中证明。

关于双曲群存在强双曲度量这一事实，Mineyev 和 Yu 在 [MY02]中证明了以下定理。Haïssinsky 和 Matthieu 在 [Mat11] 中利用随机游走和格林度量重新证明了这一结果。

定理 4.1. *[MY02，定理 17]*每个双曲群 G都存在一个度量 d，具有以下性质。

- d是 G-不变的，即 $d(g.x, g.y) = d(x, y)$，对所有 $g, x, y \in G$,
- d 与词度量拟等距，
- 度量空间 (G, d) 是弱测地且强双曲的。

为了重新证明定理 [MY02]，，我们将使用命题 3.5 中定义的角这一概念。

在任意图 (X, d) 中，顶点 x 在闭子集 $F \subset X$ 上的投影是满足$d(x, F) = d(x, t)$ 的顶点 $t \in F$。

在本节余下部分， G 表示一个双曲群， X 表示由有限生成集生成的 G 的凯莱图。我们令 d 表示 G 上的度量， δ 表示 X 的双曲常数， τ 表示 X 的指数增长率，即 $\tau = \limsup_{n\to\infty} \ln |B_X(x, n)|$，其中 $|B_X(x,n)|$表示 $B_X(x,n)$ 中顶点的数量。对于所有 $x, y \in X$， $[x, y]$ 表示 x 与 y 之间的一条测地线。对于所有 $x, y, z \in X$，$[x, y, z]$ 表示以 x、 y 和 z 为顶点的一个测地三角形，即在这三个点之间各选取一条测地线。对于每个闭集

我们选择 $\eta > 0$。我们固定 $\varepsilon > 0$，使得 $0 < \varepsilon \leq \frac{log\ (2)}{\delta+\eta}$。根据命题 3.5，对于任意 $a \in X$，存在一个定义在 X 上且与 $e^{-\varepsilon(x|y)_a}$ 可比较的伪度量 d_ε^a。我们选择 p，使得 $p\varepsilon > \tau$。我们固定 $\tau' \in (\tau, p\varepsilon)$，使得存在 $C > 0$，满足对所有 $n \in \mathbb{N}$，以及所有 $x \in X$，都有 $|B_X(x, n)| \leq Ce^{\tau' n}$。

我们需要以下计数引理来证明后续结果。

引理 4.2。 存在 $C > 0$，使得对于所有 x、 $y \in X$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，都有：

$$|\{g \in G \mid d(g.o, [x, y]) = n\}| \leq Cd(x, y)e^{\tau' n}.$$

证明。 由以下包含关系可知结论显然：

$$\{g \in G \mid d(g.o, [x, y]) = n\} \subset \bigcup_{x_i \in [x,y]} (B(x_i, n) \cap G.o).$$

我们推得：

$$|\{g \in G | d(g.o, [x, y]) = n\}| \leq Cd(x, y)e^{\tau' n}.$$

□

引理 4.3。 存在一个常数 $\kappa > 0$，使得对于所有 $x \in X$：

$$\sum_{a \in X} e^{-\varepsilon p d(a,x)} \leq \kappa.$$

证明。令 $x \in X$:

$$\begin{aligned}\sum_{a\in X} e^{-\varepsilon p d(a,x)} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\{a\in X | d(a,x)=n\}} e^{-\varepsilon p n} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} C e^{\tau' n} e^{-\varepsilon p n} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} C e^{(\tau'-\varepsilon p)n} \\ &\leq \frac{C}{1-e^{\tau'-\varepsilon p}} \text{ (since } \tau' - \varepsilon p < 0).\end{aligned}$$

由 $\kappa = \frac{C}{1-e^{\tau'-\varepsilon p}}$，我们得到所需结果。 □

这里，我们定义 D，它除一个常数因子外将是强双曲度量。

命题 4.4。对所有 $x, y \in X$，

$$D(x,y) := \sum_{a\in X} d_\varepsilon^a(x,y)^p$$

是有限的。

此外，存在 $A, B > 0$，使得对所有 $x, y \in X$:

$$\frac{1}{A} d(x,y) - B \leq D(x,y) \leq A d(x,y) + B.$$

证明。令 $x, y \in X$：

$$\begin{aligned}D(x,y) &= \sum_{a\in X} d_\varepsilon^a(x,y)^p \\ &\leq \sum_{a\in X} \beta e^{-\varepsilon p (x|y)_a} \text{ (according to the first point of Proposition 3.5)} \\ &\leq \sum_{a\in X} \beta e^{-\varepsilon p (d(a,[x,y])-2\delta)} \text{ (according to Lemma 3.3)} \\ &\leq \beta e^{2p\delta\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\{a\in X | d(a,[x,y])=n\}} e^{-\varepsilon p d(a,[x,y])} \\ &\leq \beta e^{2p\delta\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\varepsilon p n} C d(x,y) e^{\tau' n} \text{ (according to Lemma 4.2)} \\ &\leq \beta e^{2p\delta\varepsilon} \frac{C}{1-e^{\tau'-\varepsilon p}} d(x,y) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

因此，$D(x, y)$ 是有限的，并且:

$$D(x,y) \leq \beta e^{2p\delta\varepsilon} \kappa d(x,y),$$

其中 $\kappa = \frac{C}{1-e^{\tau'-\varepsilon p}}$ 与引理 4.3 中的一样。

对于另一个不等式，我们注意到，对所有 $a \in [x, y]$，$(x|y)_a = 0$。

此外，根据命题 3.5，对于每个 $x, y \in X$ 满足 $d(x, y) \geq 2D$ 的对象，以及每个 $a \in X$，我们有 $d_\varepsilon^a(x, y) \geq \alpha e^{-\varepsilon (x|y)_a}$。于是，若 $d(x, y) \geq 2D$，且 $a \in [x, y]$，则得到 $d_\varepsilon^a(x, y) \geq \alpha$。

由此可推得，对于每个满足 $d(x, y) \geq 2D$ 的 $x, y \in X$，我们有:

$$D(x,y) \geq d(x,y) \alpha^p.$$

那么，存在一个常数 $K > 0$，使得对于所有 $x, y \in X$:

$$D(x,y) \geq \alpha^p d(x,y) - K.$$

如果我们设 $A := \max(\beta e^{2p\delta\varepsilon}\kappa, \frac{1}{\alpha^p})$ 和 $B := K$，我们便得到该命题所需的不等式。

□

接下来的引理将在本节其余部分中发挥作用。第一个是中值定理的一个应用。

引理 4.5. 设 $t, s \in \mathbb{R}_+$，则对所有 $p > 1$，有如下结论：

$$|t^p - s^p| \leq p \max(t^{p-1}, s^{p-1})|t - s|.$$

证明。对于所有 t，$s \in \mathbb{R}_+$，若 $t < s$，根据中值定理，存在 $c \in (t, s)$ 使得：

$$|t^p - s^p| = pc^{p-1}|t - s|.$$

那么显然，

$$|t^p - s^p| \leq p \max(t^{p-1}, s^{p-1})|t - s|.$$

□

现在我们将证明一些双曲几何中的引理。

对于每个 x，y，z，$a \in X$，当 z 靠近连接 x 和 y的测地线时，我们证明：若 a 在 $[x,z] \cup [z,y]$ 上的投影位于 $[x,z]$中，则 a 在 $[z,y]$ 上的投影靠近 z。

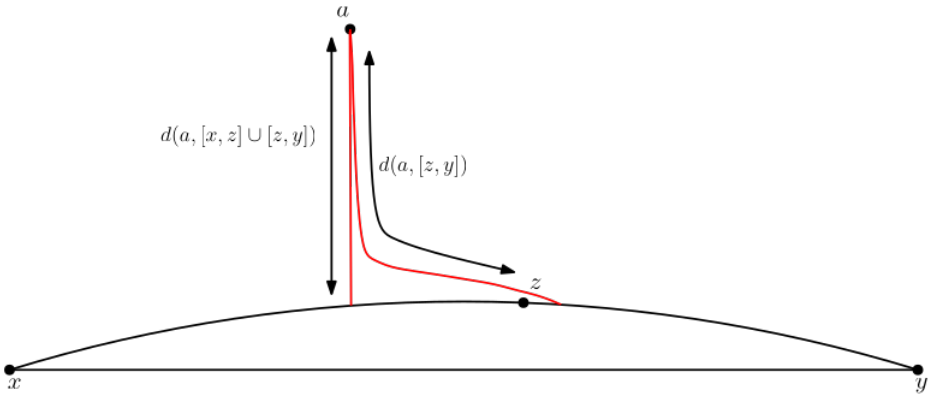


图 7：a的投影位于 $[x,z]$ 中时，$d(a, [z,y])$ 靠近 $d(a, z)$。

引理 4.6。 设 $D \geq 0$。设 x、y、$z \in X$满足 $d(z, [x,y]) \leq D$。对于每个满足$d(a, [x,z] \cup [z,y]) = d(a, [x,z])$的 $a \in X$，有：

- $d(a, [z,y]) \leq d(a, z) \leq 5\delta + 4D + d(a, [z,y])$,
- $(z|y)_a \leq d(a, z) \leq 7\delta + 4D + (z|y)_a$。

证明。设 $a \in X$使得 $d(a, [x,y] \cup [y,z]) = d(a, [x,z])$。我们将先证明 ：

$$d(a,[z,y]) \leq d(a,z) \leq 5\delta + 4D + d(a,[z,y]).$$

左边的不等式显然。参见图 7，令 u 为 $[x,z]$上的 a 的投影，令 v 为 $[z,y]$上的 a的投影。根据假设，$d(a, [x,y] \cup [y,z]) = d(a, [x,z])$，我们知道 $d(a, v) \geq d(a, u)$。

根据 [DK18，引理 11.4]，，存在 u'，z'，$v' \in [x,y]$，使得：$d(u,\ u') \le 2(D+\delta)$，$d(z,\ z') \le 2(D+\delta)$，$d(v,\ v') \le 2(D+\delta)$，并且 u'，z'，v' 在 $[x,y]$上按此顺序排列。

将薄三角形性质应用于包含 z' 的测地三角形 $[a,u',v']$，可得 $d(z',\ [a,u']) \le \delta$ 或 $d(z',\ [a,v']) \le \delta$。因此，再次应用薄三角形性质可得 $d(z,\ [a,u]) \le 4D+5\delta$ 或 $d(z,\ [a,v]) \le 4D+5\delta$。因此，我们得到：

$$d(a,z) \le d(a,v) + 4D + 5\delta \le d(a,[z,y]) + 4D + 5\delta.$$

总之，只需将此不等式与引理 3.3 中的不等式结合起来即可。

□

在下面的引理中，我们证明：若点 a 在测地线 $[x,y]$ 上的投影为 z，那么 z 接近于三角形 $[x,z,a]$ 和 $[y,z,a]$ 的拟中心。

引理 4.7。设 a、x、$y \in X$ 和 z 是 a 在 $[x,y]$ 上的一个投影，则：

$$d(a,x) \ge d(a,z) + d(z,x) - 24\delta.$$

证明。考虑一个测地三角形 $[a,x,z]$。我们将该三角形的一个拟中心记为 t，将 $[x,a]$ 中的一个顶点记为 u，将 $[x,y]$ 中的一个顶点记为 v，并将 $[a,x]$ 中的一个顶点记为 w，使得 $d(t,\ u) \le 4\delta$，$d(t,\ v) \le 4\delta$，$d(t,\ w) \le 4\delta$。

我们有如下结论：

$$\begin{aligned} d(a,z) &\le d(a,v) \ (\text{since } v \in [x,y]) \\ &\le d(a,w) + 8\delta. \end{aligned}$$

因此：

$$d(w,z) \le 8\delta \ (\text{since } w \in [a,z]).$$

因此：

$$\begin{aligned} d(a,x) &= d(a,u) + d(u,x) \ (\text{since } u \in [a,x]) \\ &\ge d(a,z) + d(z,x) - 2d(u,z) \\ &\ge d(a,z) + d(z,x) - 24\delta. \end{aligned}$$

□

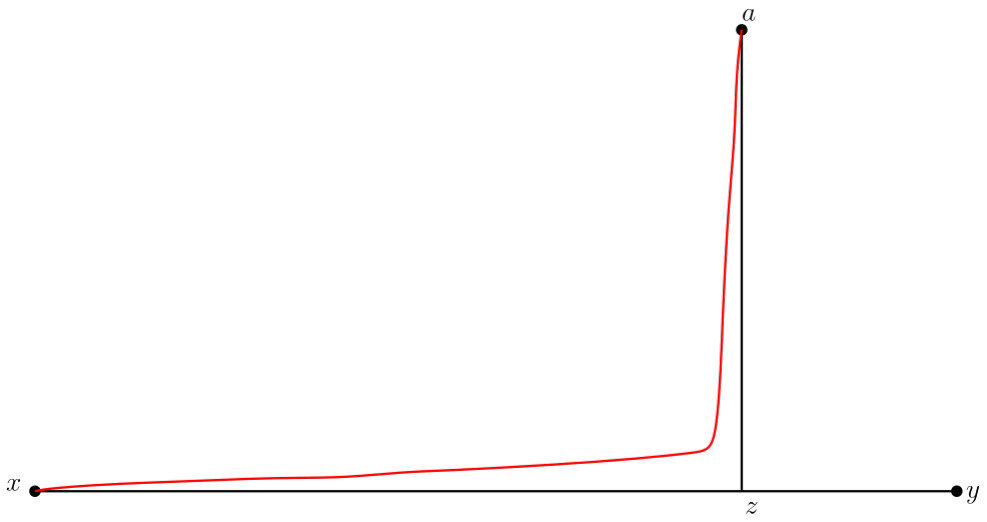


图 8：z a 在 $[x,y]$ 上的投影是三角形 $[x,a,z]$ 的一个拟中心

引理 4.8。 设 x、y、$z \in X$，以及连接 x 和 y 的一条测地线 $[x,y]$ 满足 d（z、$[x,y]$）$\leq 8\delta$，并且 $[x,z]$ 和 $[z,y]$ 分别是连接 x、z 以及 z、y 的两条测地线，则：

$$\forall a \in X, d(a,[x,z]\cup[z,y]) - 11\delta \leq d(a,[x,y]) \leq d(a,[x,z]\cup[z,y]) + 11\delta.$$

证明。 根据引理 3.4，$[x,y]$ 中的每个顶点到$[x,z]\cup[z,y]$上某一点的距离至多为 11δ，反之亦然。

于是，引理中的不等式直接成立。

□

为了证明 D 几乎是一个度量，我们需要一个接近三角不等式的不等式。这个命题对于证明这一点至关重要，也对于证明这个度量是弱测地的至关重要。

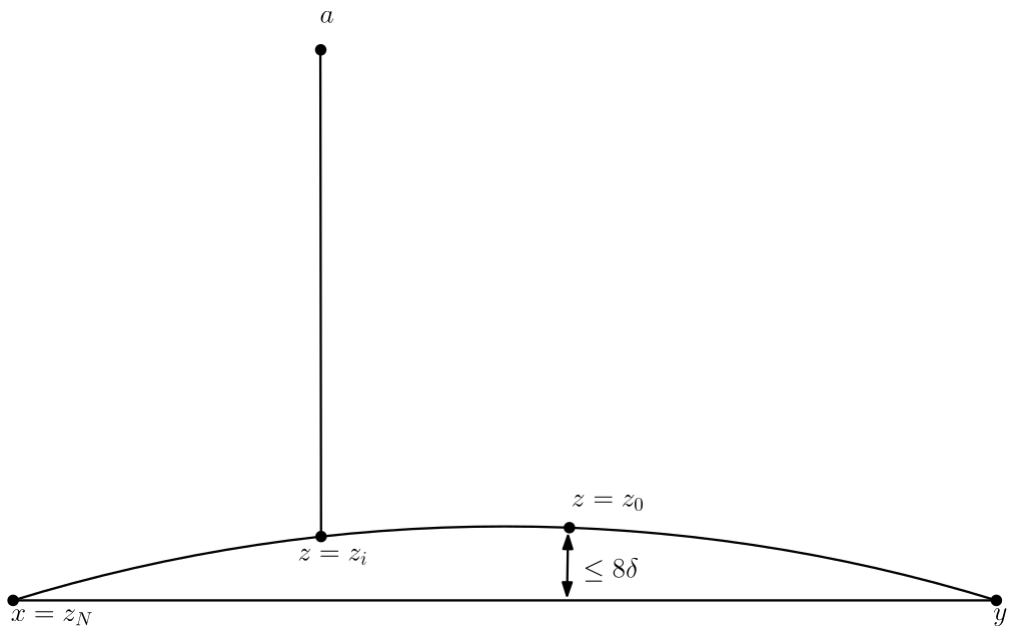


图 9： a 在 $[x,z]\cup[z,y]$上投影到 z_i

命题 4.9。存在一个常数 $C > 0$，使得对于所有 x、$y \in X$ 和 $z \in X$，只要$d(z, [x,y]) \le 8\delta$，就有：

$$|D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)| \le C.$$

证明。令 $x, y \in X$，并令 $z \in X$ 满足 $d(z,[x,y]) \le 8\delta$。取连接 x 与 z 的两条测地线 $[x,z]$，以及连接 z 与 y 的测地线 $[z,y]$。我们有：

$$\begin{aligned}
&|D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)| \\
\le &\sum_{a\in X} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
\le &\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
&+ \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[z,y])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p|.
\end{aligned}$$

我们将对得到的两个和给出上界，得到如下结果：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y] = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
\le &\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p| + d_\varepsilon^a(z,y)^p \\
\le &\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p| \\
&+ \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} d_\varepsilon^a(z,y)^p.
\end{aligned}$$

对于满足 $d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])$ 的 $a \in X$，有如下结果：

$$\begin{aligned}
d_\varepsilon^a(z,y)^p &\le \beta e^{-\varepsilon p (z|y)_a} \\
&\le \beta e^{-\varepsilon p (d(a,z) - 23\delta)} \text{ (according to Lemma 4.6).}
\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}
\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} d_\varepsilon^a(z,y)^p &\le \beta e^{3\delta p\varepsilon} \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} e^{-\varepsilon p d(a,z)} \\
&\le \beta e^{23\delta p\varepsilon} \sum_{a\in X} e^{-\varepsilon p d(a,z)} \\
&\le \beta e^{23\delta p\varepsilon} \kappa \text{ (according to Lemma 4.3)} \\
&\le K_1.
\end{aligned}$$

其中 $K_1 = 4\beta e^{23\delta p\varepsilon}\kappa$。

我们将对这个和给出上界 $\mathrm{m} \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p|.$

我们记作 $N := d(x, z)$。我们按以下意义{排列} $x, z: z, x] = \{z_0, z_1, [\ldots, z_N\}$，其中 $z_0 = z$、$z_N = x$ 和 $d(z_i, z_{i+1}) = 1$，对 $0 \le i \le N-1$ 而言，见图 9。

令 $i \in \{0, \ldots, N\}$，使得 $d(a, [x,z]\cup[z,y]) = d(a, [x,z]) = d(a, z_i)$。因此，根据引理 3.3 和 4.8，$(x|z)_a \ge d(a, z_i) - 2\delta$，且 $(x|y)_a \ge d(a, z_i) - 13\delta$。

此外，假设 $d(a, [x,z]\cup[z,y]) = d(a, [x,z]) = d(a, z_i)$，则意味着我们可以对 a，z_i 和 z 应用引理 4.7，因此：

$$d(a,z) \ge d(a,z_i) + d(z_i,z) - 24\delta \ge d(a,z_i) + i - 24\delta.$$

于是我们得到：

$$
\begin{aligned}
|d_\varepsilon^a(x,\ y)^p - d_\varepsilon^a(x,\ z)^p| &\le p\max(d_\varepsilon^a(x,\ y)^{p-1},\ d_\varepsilon^a(x,\ z)^{p-1})|d_\varepsilon^a(x,\ y) - d_\varepsilon^a(x,\ z)| \text{(根据引理 4.5)} \\
&\le p\max(d_\varepsilon^a(x,y)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x,z)^{p-1}) d_\varepsilon^a(y,z) \\
&\le p\beta^2 \max(e^{-\varepsilon(p-1)(x|y)_a}, e^{-\varepsilon(p-1)(x|z)_a}) e^{-\varepsilon(y|z)_a} \\
&\le p\beta^2 e^{-\varepsilon(p-1)(d(a,z_i)-13\delta)} e^{-\varepsilon(d(a,z)-2\delta)} \\
&\le p\beta^2 e^{p\varepsilon 13\delta} e^{\varepsilon 13\delta} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)} e^{-\varepsilon(d(a,z_i)+i-26\delta)} \\
&\le p\beta^2 e^{\varepsilon 13\delta(p+1)} e^{-\varepsilon p d(a,z_i)} e^{-\varepsilon i}.
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p| \\
&\le \sum_{i=0}^{N} \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,z_i)\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p| \\
&\le \sum_{i=0}^{N} \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,z_i)\}} p\beta^2 e^{\varepsilon 13\delta(p+1)} e^{-\varepsilon p d(a,z_i)} e^{-\varepsilon i} \\
&\le p\beta^2 e^{\varepsilon 13\delta(p+1)} \sum_{i=0}^{N} e^{-\varepsilon i} \sum_{a\in X} e^{-\varepsilon p d(a,z_i)} \\
&\le p\beta^2 e^{\varepsilon 13\delta(p+1)} \kappa \sum_{i=0}^{N} e^{-\varepsilon i} \\
&\le K_2.
\end{aligned}
$$

其中 $K_2 = p\beta^2 e^{\varepsilon 13\delta(p+1)} \kappa \frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}$。

综上，我们得到：

$$
\begin{aligned}
&|D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)| \\
&\le \sum_{a\in X} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
&\le \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[x,z])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
&+ \sum_{\{a\in X | d(a,[x,z]\cup[z,y]) = d(a,[z,y])\}} |d_\varepsilon^a(x,y)^p - d_\varepsilon^a(x,z)^p - d_\varepsilon^a(z,y)^p| \\
&\le 2K_1 + 2K_2.
\end{aligned}
$$

并且利用 $C := 2K_1 + 2K_2$，我们得到所需结果。 □

下一个命题表明， D 满足粗三角不等式。

命题 4.10. 存在一个常数 $C' > 0$，使得对于所有 x、y、$z \in X$，都有：

$$D(x,y) \le D(x,z) + D(z,y) + C'.$$

证明. 考虑 $[x,y,z]$ 一个由 x,y,z 构成的测地三角形。根据双曲性，每个三角形都存在一个 4δ-拟中心，因此存在 $u \in [x,y]$，使得：

$$d(u,[x,z]) \le 8\delta, d(u,[y,z]) \le 8\delta,$$

见图 10。

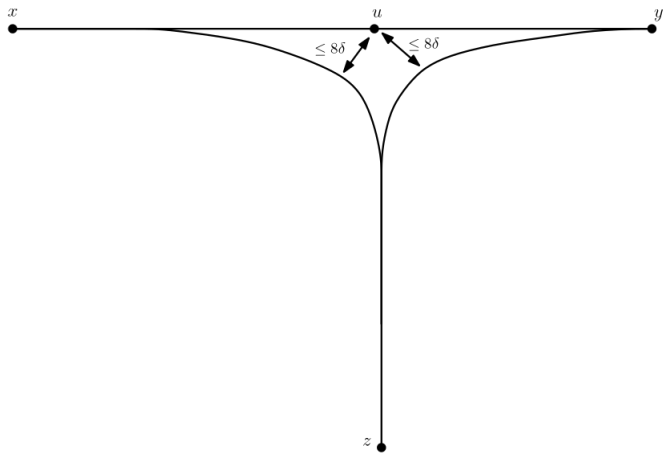


图 10： u 到三角形三条边的距离均为 8δ

那么：

$$\begin{aligned}
&D(x,y) - D(x,z) + D(z,y)\\
\leq &D(x,u) + D(u,y) + C\\
&-D(x,u) - D(u,z) + C - D(z,u) - D(u,y) + C \text{ (according to Proposition 4.9)}\\
\leq &3C.
\end{aligned}$$

由 $C' := 3C + 2(A8\delta + B)$，可得所需结果。

□

ˆ**定义 4.11.** 对所有 $\varepsilon > \tau$，我们定义函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ 如下：

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} D(x,y) + C' & if\ x \neq y \\ 0 & if\ x = y. \end{cases}$$

其中 C' 是命题 *4.10* 的常数。

ˆ**命题 4.12.** 定义 *4.11* 中的函数 d 是 X上的度量。

ˆˆ证明. 根据定义， d 具有对称性，并且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。三角不等式直接由命题 4.10 得出。

□

本节余下部分将用于证明以下定理。

ˆ**定理 4.13**。 度量 d 满足以下性质。

ˆˆˆ

- d是 G-不变的，即 $d(g.x, g.y) = d(x,y)$，对所有 $g, x, y \in G$ 均成立，ˆ
- d 是一致局部有限的，且与词度量拟等距，ˆ
- 度量空间 (G,d) 是弱测地的且强双曲。

我们已经具备证明前两点所需的全部材料。

ˆ**命题 4.14**。 d 是 G-不变的、一致局部有限的，并且与词度量拟等距。

^^证明。 d 是 G-不变这一事实直接来自 D 和 d 的定义，以及族伪距离d_ε^a 是 G-等变的这一事实，依据命题 3.5。

根据命题 4.4，存在 $A, B > 0$，使得对所有 $x, y \in X$：

$$\frac{1}{A} d(x,y) - B \leq D(x,y) \leq A d(x,y) + B.$$

因此，对所有 $x, y \in X$：

$$\frac{1}{A} d(x,y) - B + C' \leq \hat{d}(x,y) \leq A d(x,y) + B + C'.$$

因此：

$$\frac{1}{A} d(x,y) - B - C' \leq \hat{d}(x,y) \leq A d(x,y) + B + C',$$

^且 d 与 d 拟等距。

^由于 d 一致局部有限，d 也一致局部有限。 □

^**命题 4.15**。 度量空间 (X, d) 是弱测地的。

^证明。 应用命题 4.9 和命题 4.14，可以很容易地证明 (X, d) 是弱测地的，这与 [MY02][命题 14]中的证明相同。为方便读者，我们在此回顾一下。

根据命题 4.9，令 $x, y \in X$ 和 $z \in [x, y]$，我们有：

$$\hat{d}(x,z) + \hat{d}(z,y) - \hat{d}(x,y) \leq C + C',$$

其中 C 是命题 4.9 中的常数，C' 是定义 4.11 中的常数。因此：

$$\hat{d}(x,z) \leq \hat{d}(x,y) + C + C'$$

因此，该映射的像为：

$$\hat{d}(x,.) : [x,y] \to]0, +\infty[$$

^^包含于 $[0, d(x,y) + C + C']$。此外，该像包含 0 和 $d(x,y)$。

根据命题 4.14，存在 $M \geq 0$ 使得我们有：

$$|\hat{d}(x,z) - \hat{d}(x,z')| \leq M$$

当 $d(z, z') = 1$。结合 $[x,y]$ 是一条测地线这一事实可知，映射 $d(x, .)$ 将 $[x,y]$ 映到 $[0, d(x,y)]$, 中的 M-稠密子集；也就是说，对于每个 $t \in [0, d(x,y)],$, 都存在 $z \in [x,y]$ 使得：

$$|\hat{d}(x,z) - t| \leq M.$$

^于是 $-d(x,z) \leq M - t$。

由命题 4.9 可得：

$$\hat{d}(z,y) \leq \hat{d}(x,y) - t + M + C + C'.$$

^因此，对于 $\eta = M + C + C'$，(X, d) 是弱测地的 η。

□

由于弱测地度量空间的双曲性在拟等距下保持不变（见 [Laf08]），我们得到一个推论：$(X,\hat{d})$ 是双曲的。

ˆ 由此，我们推得 (X,d) 满足弱-$B2'$ 条件。

ˆ**推论 4.16**。存在 $\delta_3 \geq 0$，使得 (X,d) 是 δ_3-$B2'$。

证明。根据 [BK02][命题 11]，，具有中点映射的双曲度量空间是双曲型的，因此对某个 $\delta_3 \geq 0$，它们满足 δ_3-$B2'$。

$(X,\hat{d})$ 是弱测地的，并且根据 2.8，它具有中点映射，因此对某个 $\delta_3 \geq 0$，它满足 δ_3-$B2'$。

□

ˆ 最后要证明的是 (X,d) 满足强-$B1$ 条件这一事实。

下一个引理将用于比较点 a 在由 $B1$ 构型中的四个点确定的测地线上的投影。我们直接用格罗莫夫积表述这些不等式。

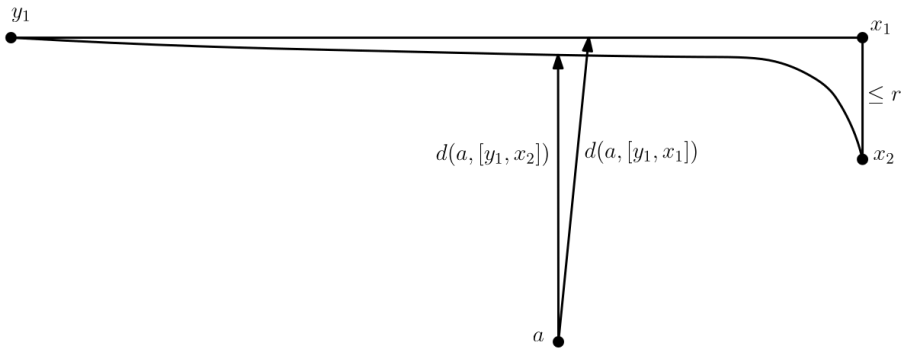


图 11：a 在 $[x_1,y_1]$ 上及在 $[x_2,y_1]$ 上的投影

引理 4.17。 设 $r \geq 0$ 以及 x_1、 x_2、 y_1、 $y_2 \in X$ 满足 $d(x_1$、 $x_2)$ $d(y_1$、 $y_2) \leq r$。则对于每个 $a \in X$，都有：

- $(x_1|y_1)_a - r \leq (x_2|y_1)_a \leq (x_1|y_1)_a + r$,
- $(x_1|y_1)_a - r \leq (x_1|y_2)_a \leq (x_1|y_1)_a + r$,
- $(x_1|y_1)_a - 2r \leq (x_2|y_2)_a \leq (x_1|y_1)_a + 2r$.

证明。 对于第一点，一方面有：

$$(x_2|y_1)_a \leq (x_1|y_1)_a + |(x_2|y_1)_a - (x_1|y_1)_a| \leq (x_1|y_1)_a + r.$$

另一方面：

$$(x_2|y_1)_a \geq (x_1|y_1)_a - |(x_2|y_1)_a - (x_1|y_1)_a| \geq (x_1|y_1)_a - r.$$

第二点由 x_1， x_2 和 y_1， y_2 角色的对称性可直接得出。
第三点直接通过将第一点的论证应用两次即可得出。

□

引理 4.18。 设 $r \geq 0$ 和 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ 满足 $d(x_1, x_2)$ $d(y_1, y_2) \leq r$。那么对每个 $a \in X$，都有：

- $d(a, [x_1, y_1]) - (r + \delta) \leq d(a, [x_2, y_1]) \leq d(a, [x_1, y_1]) + (r + \delta)$,
- $d(a, [x_1, y_1]) - (r + \delta) \leq d(a, [x_1, y_2]) \leq d(a, [x_1, y_1]) + (r + \delta)$,
- $d(a, [x_1, y_1]) - 2(r + \delta) \leq d(a, [x_2, y_2]) \leq d(a, [x_1, y_1]) + 2(r + \delta)$。

证明。 对于第一点，考虑一个测地三角形 $[x_1, x_2, y_1]$ 以及一个顶点 $u \in [x_1, y_1]$， 使得$d(a, u) = d(a, [x_1, y_1])$。根据 δ-薄性，存在 $v \in [x_2, y_1]$ 使得 $d(u, v) \leq r + \delta$。事实上，存在 $w \in [x_1, x_2] \cup [x_2, y_1]$ 使得 $d(u, w) \leq \delta$。若 $w \in [x_2, y_1]$， 则取 $v = w$；否则， w 到 y_1的距离小于 r， 于是 $d(u, y_1) \leq r + \delta$。

因此：

$$d(a, [x_2, y_1]) \leq d(a, v) \leq d(a, u) + d(u, v) \leq d(a, [x_1, y_1]) + (r + \delta).$$

根据 $[x_1, y_1]$ 和 $[x_2, y_1]$ 角色的对称性，我们得到反向不等式。

根据 $[x_1, y_2]$ 和 $[x_2, y_1]$ 角色的对称性，第二点显然成立。

对于第三点，将同样的证明应用于三角形 $[x_1, x_2, y_2]$， 可得：

$$d(a, [x_1, y_2]) - (r + \delta) \leq d(a, [x_2, y_2]) \leq d(a, [x_1, y_2]) + (r + \delta),$$

将其与第二点结合，我们得到：

$$d(a, [x_1, y_1]) - 2(r + \delta) \leq d(a, [x_2, y_2]) \leq d(a, [x_1, y_1]) + 2(r + \delta),$$

这就是第三点。

□

^**定理 4.19**。 度量空间 (X, d) 满足强-$B1$。

ˆ 证明。根据命题 4.14，(X,d) 满足强-$B1$ 这一事实，等价于：对于所有 $r>0$ 和 $\eta>0$，存在 $R=R(\eta,r)\geq 0$，使得对于所有 $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in X$，若 $d(x_1,y_1)\ d(x_1,y_2)\ d(x_2,y_1)\ d(x_2,y_2)\geq R$ 且 $d(x_1,x_2)\ d(y_1,y_2)\leq r$，则有：

$$|\hat{d}(x_1,y_1)+\hat{d}(x_2,y_2)-\hat{d}(x_1,y_2)-\hat{d}(x_2,y_1)|\leq\eta.$$

我们稍后将选择足够大且为偶数的 $R\in\mathbb{N}$。记 m 为 $[x_1,y_1]$ 中满足 $d(x_1,m)\geq\frac{R}{2}$ 且 $d(m,y_1)\geq\frac{R}{2}$ 的一个顶点。对于所有 $a\in X$，$\pi(a)$ 表示 a 在 $[x_1,y_1]$ 上距离 x_1 最近的投影。更确切地说，这意味着 $\pi(a)\in[x_1,y_1]$，$d(a,[x_1,y_1])=d(a,\pi(a))$；对于所有满足 $d(a,[x_1,y_1])=d(a,u)$ 的 $u\in[x_1,y_1]$，我们有：$d(x_1,u)\geq d(x_1,\pi(a))$。$\pi(a)$ 是距离 x_1 最近的 a 的投影这一事实，仅用于无歧义地定义 a 在 $[x_1,y_1]$ 中的投影，见图 12。

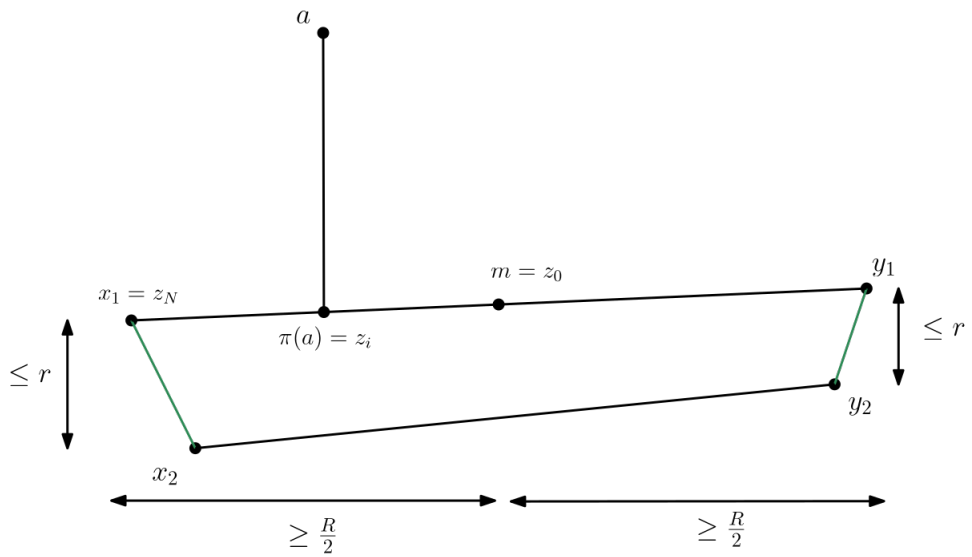


图 12：$\pi(a)$ 是 a 在 $[x_1,y_1]$ 上的投影

我们固定 $\eta, r > 0$。考虑 $R > 0$ 和四个点 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，其中 $d(x_1, y_1)\ d(x_1, y_2)\ d(x_2, y_1)\ d(x_2, y_2) \geq \hat{}\ \hat{}\ \hat{}\ \hat{} R$，且 $d(x_1, x_2)\ d(y_1, y_2) \leq r$。特别地，我们指出 $d(x_1, y_1)\ d(x_1, y_2)\ d(x_2, y_1)\ d(x_2, y_2) > 0$。$\hat{}$ 因此，对于所有 $i, j \in \{1, 2\}$，$d(x_i, y_j) = D(x_i, y_j) + C'$，我们有如下结论：

$$|\hat{d}(x_1, y_1) + \hat{d}(x_2, y_2) - \hat{d}(x_1, y_2) - \hat{d}(x_2, y_1)| = |D(x_1, y_1) + D(x_2, y_2) - D(x_1, y_2) - D(x_2, y_1)|.$$

于是，我们有：

$$\begin{aligned}
&|D(x_1, y_1) + D(x_2, y_2) - D(x_1, y_2) - D(x_2, y_1)| \\
\leq &\sum_{a \in X} |d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^p + d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^p| \\
\leq &\sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [x_1, m]\}} |d_\varepsilon^a(x_1, y_1^p) + d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^p| \\
+ &\sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} |d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^p + d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^p|.
\end{aligned}$$

现在的目标是，当 R 足够大时，用某个常数从上方界定所得的两个和：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} |d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^p + d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^p| \\
\leq &\sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} |d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^p - d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^p| + |d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^p - d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^p| \\
&\leq \sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} p \max(d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1, x_2) \\
&+ \sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} p \max(d_\varepsilon^a(x_2, y_2)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_1, y_2)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

我们将首先从上方界定该和：

$$\sum_{\{a \in X | \pi(a) \in [m, y_1]\}} p \max(d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1, x_2).$$

我们记作 $N := d(m,\ y_1)$。我们按以下意义对 $[m, y_1]$ 排序：$[m, y_1] = \{z_0,\ z_1,\ \ldots\ldots,\ z_N\}$，其中 $z_0 = m$、$z_N = y_1$ 和 $d(z_i,\ z_{i+1}) = 1$ 对 $0 \leq i \leq N - 1$成立，见图13。

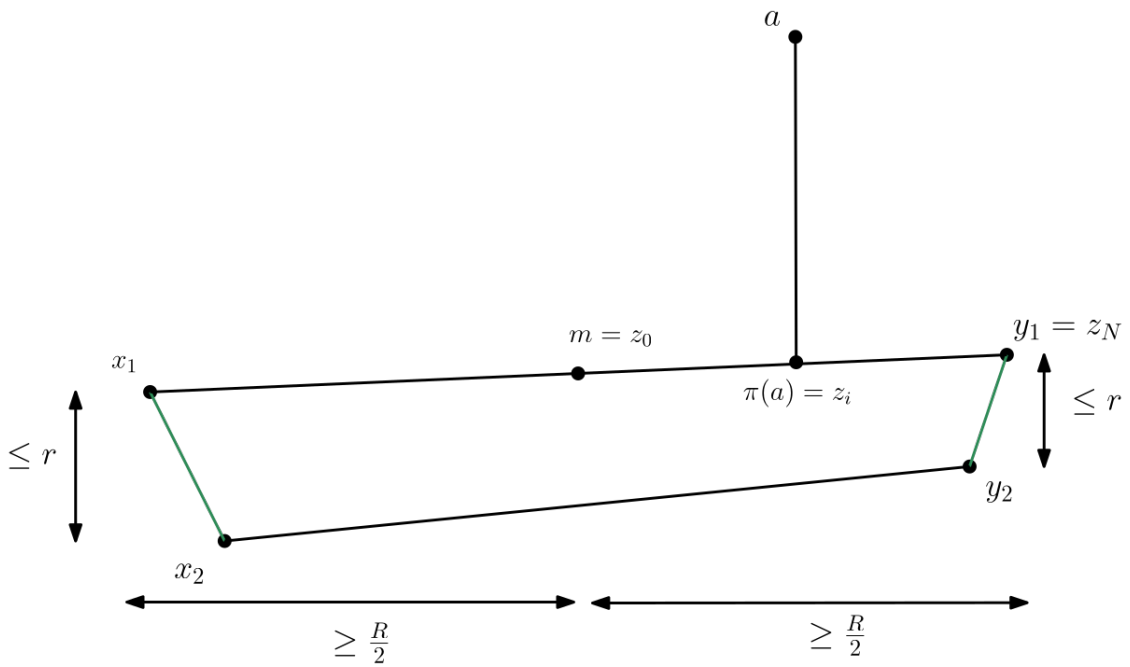


图13： $\pi(a) = z_i \in [m, y_1]$

根据 z_i 的定义，我们有 $d(x_1, z_i) \geq \frac{R}{2} + i$. –
令 $a \in X$ 使得 $\pi(a) = z_i$，则有：

$\max(d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^{p-1}) \leq \beta \max(e^{-\varepsilon(p-1)(x_1|y_1)_a}, e^{-\varepsilon(p-1)(x_2|y_1)_a}) \leq \beta \max(e^{-\varepsilon(p-1)(d(a,z_i)-2\delta)}$
$e^{-\varepsilon(p-1)(d(a,z_i)-2\delta-r)})$（根据引理 3.3 和引理 4.17）$\leq \beta e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+r)} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)}$ 。

综上，我们有：

$$\max(d_\varepsilon^a(x_1, y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2, y_1)^{p-1}) \leq \beta e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+r)} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)}. \tag{1}$$

仍在 $\pi(a) = z_i$ 的情形下，根据引理 4.7，我们有：

$$d(a, x_1) \geq d(a, z_i) + d(z_i, x_1) - 24\delta \geq d(a, z_i) + \frac{R}{2} + i - 24\delta.$$

此外，根据三角不等式，我们注意到：

$$(x_1, x_2)_a \geq d(a, x_1) - d(x_1, x_2).$$

因此，我们得到如下结果：

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^a(x_1, x_2) \leq & \beta e^{-\varepsilon(x_1, x_2)_a} \\ \leq & \beta e^{-\varepsilon(d(a,x_1)-d(x_1,x_2))} \\ \leq & \beta e^{-\varepsilon(d(a,z_i)+\frac{R}{2}+i-r-24\delta)} \\ \leq & \beta e^{\varepsilon(r+24\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} e^{-\varepsilon i} e^{-\varepsilon d(a,z_i)}. \end{aligned}$$

总而言之，我们得到：

$$d_\varepsilon^a(x_1,x_2) \le \beta e^{\varepsilon(r+24\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} e^{-\varepsilon i} e^{-\varepsilon d(a,z_i)}. \tag{2}$$

综上，我们可以给出和的上界：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a\in X|\pi(a)\in[m,y_1]\}} p\max(d_\varepsilon^a(x_1,y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2,y_1)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1,x_2) \\
\le& p\sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}} \max(d_\varepsilon^a(x_1,y_1)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_2,y_1)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1,x_2) \\
\le& p\beta^2\sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}} e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+r)} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)} e^{-\varepsilon(d(a,z_i)+\frac{R}{2}+i-r-24\delta)} \text{ (according to Equations 1 and 2)} \\
\le& p\beta^2 e^{\varepsilon(pr+2p\delta+22\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} \sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}} e^{-\varepsilon p d(a,z_i)} e^{-\varepsilon i} \\
\le& p\beta^2 e^{\varepsilon(pr+2p\delta+22\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} \sum_{i=0}^{N} e^{-\varepsilon i} \sum_{a\in X} e^{-\varepsilon p d(a,z_i)} \\
\le& p\beta^2 e^{\varepsilon(pr+2p\delta+22\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} \kappa \sum_{i=0}^{N} e^{-\varepsilon i} \text{ (according to Lemma 4.3)} \\
\le& p\beta^2 e^{\varepsilon(pr+2p\delta+22\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} \kappa \frac{1-e^{-\varepsilon(N+1)}}{1-e^{-\varepsilon}} \\
\le& p\beta^2 e^{\varepsilon(pr+2p\delta+22\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} \kappa \frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

因此，当 $R\in\mathbb{N}$ 足够大且为偶数时，$e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}$ 可以任意小，和也可以任意小。

现在，我们将给出和的上界：

$$\sum_{\{a\in X|\pi(a)\in[m,y_1]\}} p\max(d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^{p-1}) d_\varepsilon^a(x_1,x_2).$$

对于所有满足 $\pi(a)=z_i$ 的 a，根据公式 2，我们仍有：

$$d_\varepsilon^a(x_1,x_2) \le \beta e^{\varepsilon(r+24\delta)} e^{-\varepsilon\frac{R}{2}} e^{-\varepsilon i} e^{-\varepsilon d(a,z_i)}.$$

对于所有满足 $\pi(a)=z_i$ 的 a，我们有：

$$\begin{aligned}
&\max(d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^{p-1}) \le \beta \max(e^{-\varepsilon(p-1)(x_2|y_2)_a}, e^{-\varepsilon(p-1)(x_1|y_2)_a}) \le \beta \max(e^{-\varepsilon(p-1)(d(a,z_i)-2\delta-2r)}, \\
&e^{-\varepsilon(p-1)(d(a,z_i)-2\delta-r)}) \text{（根据引理 3.3 和引理 4.17 ）} \le \beta e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+2r)} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)} \text{ 。}
\end{aligned}$$

总结如下：

$$\max(d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^{p-1}, d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^{p-1}) \le \beta e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+2r)} e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)}. \tag{3}$$

综合起来，我们可以对和进行界定：

$$\sum_{\{a\in X|\pi(a)\in[m,y_1]\}} p\max(d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^{p-1},d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^{p-1})d_\varepsilon^a(x_1,x_2)$$

$$\leq p\sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}}\max(d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^{p-1},d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^{p-1})d_\varepsilon^a(x_1,x_2)$$

$$\leq p\beta^2\sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}}e^{\varepsilon(p-1)(2\delta+2r)}e^{-\varepsilon(p-1)d(a,z_i)}e^{-\varepsilon(d(a,z_i)+\frac{R}{2}+i-r-24\delta)} \text{ (according to Equations 2 and 3)}$$

$$\leq p\beta^2 e^{\varepsilon(p2r+2p\delta+22\delta)}e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}\sum_{i=0}^{N}\sum_{\{a\in X|\pi(a)=z_i\}}e^{-\varepsilon pd(a,z_i)}e^{-\varepsilon i}$$

$$\leq p\beta^2 e^{\varepsilon(p2r+2p\delta+22\delta)}e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}\sum_{i=0}^{N}e^{-\varepsilon i}\sum_{a\in X}e^{-\varepsilon pd(a,z_i)}$$

$$\leq p\beta^2 e^{\varepsilon(p2r+2p\delta+22\delta)}e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}\kappa\sum_{i=0}^{N}e^{-\varepsilon i} \text{ (according to Lemma 4.3)}$$

$$\leq p\beta^2 e^{\varepsilon(p2r+2p\delta+22\delta)}e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}\kappa\frac{1-e^{-\varepsilon(N+1)}}{1-e^{-\varepsilon}}$$

$$\leq p\beta^2 e^{\varepsilon(p2r+2p\delta+22\delta)}e^{-\varepsilon\frac{R}{2}}\kappa\frac{1}{1-e^{-\varepsilon}}.$$

和前一种情况一样，当 R 任意大时，这个和可以任意小。

为完成定理的证明，我们需要从上方用 η 控制这个和 :

$$\sum_{\{a\in X|\pi(a)\in[x_1,m]\}}|d_\varepsilon^a(x_1,y_1^p)+d_\varepsilon^a(x_2,y_2)^p-d_\varepsilon^a(x_1,y_2)^p-d_\varepsilon^a(x_2,y_1)^p|.$$

即使 $\pi(a)$ 的定义对于 x_1,x_2,y_1,y_2 并不对称，在前一种情况下，我们只需利用 $\pi(a)$ 是测地线 $[x_1,y_1]$ 上的最近点投影这一事实，来控制满足 $\pi(a)\in[m,y_1]$ 的 $a\in X$ 对应的和。因此，当 $\pi(a)\in[x_1,m]$ 时，同样的证明仍然适用，证明完毕。

□

我们以定理 4.13 的证明总结本节的结果。

证明。 定理 4.13

ˆ 每个双曲群都存在一个度量 d，其定义见定义 4.11。

根据命题 4.14，该度量具有 G-不变性、一致局部有限性，并且与词度量拟等距。

ˆ 根据命题 4.15，度量空间（X，d）是弱测地的。

ˆˆ 根据推论 4.16，(X，d) 满足 $\delta-B2$，其中某个 δ；根据定理 4.19，(X，d) 满足强-$B1$，因此 (X，ˆd) 是强双曲型的。

□

5 相对双曲群的强双曲性

本节中，我们证明以下定理。

ˆ**定理 5.1.** 每个具有 相对双曲 $CAT(0)$ 抛物子群 G 的群都存在一个度量 d，满足以下性质。

ˆ ˆ ˆ

- d 是 G-不变的，即对所有 g、x、$y \in G$，均有 $d(g.x, g.y) = d(x, y)$，ˆ
- d 一致局部有限，且与词度量拟等距，ˆ
- 度量空间 (G, d) 是弱测地且强双曲的。

更确切地说，我们对一类更广泛的相对双曲群证明了这一结论，这类群在第 5.2 节中定义。我们还将证明，根据 [UM25，命题 8.1]，这类群也包括几乎阿贝尔抛物子群。

推论 5.2. 相对于 $CAT(0)$ 抛物子群双曲且具有(RD) 性质的群及其子群满足鲍姆-康涅猜想。

更确切地说，对于具有 (RD) 性质的 $CAT(0)$ 群族，我们得到以下推论。

推论 5.3. 相对于以下几类群双曲的群及其子群：

- 几乎阿贝尔，
- 余紧立方化，
- 考克斯特群，

满足鲍姆-康涅猜想。

推论 5.4。 完备实双曲流形的基本群具有强双曲度量。

第 5 节的结构。

- 第5.1小节专门介绍记号。
- 在第5.2小节中，我们精确定义了我们所关注的容许抛物子群类，并证明该类包括 $CAT(0)$ 群和几乎阿贝尔群。
- 在第5.3小节中，我们讨论抛物子群上的一种随机代表元概念，即由 Dahmani 和 Chatterji 在 [CD20] 中定义的掩码。文中引用的大部分性质都出自 [CD20]，另有一些是新的。
- 在第5.4小节中，我们为锥化图的所有顶点定义一种与掩码相关的伪度量。在相对双曲群的强双曲度量定义中，这些伪度量将发挥与命题 3.5 中的角在双曲群的强双曲度量定义中相同的作用。我们证明了关于这些伪度量的一个重要控制结果。
- 在第5.5小节中，我们证明，对于无限价点，这些伪度量与锥化图中定义3.10的角是可比的。ˆ
- 第5.6小节专门介绍度量 d的定义，它将是强双曲度量。在本小节中，我们证明这确实是一个度量。ˆ
- 在第5.7小节中，我们证明 d 与群度量拟等距。

- 在小节 5.8 中，我们证明度量空间 $(G,\ d)$ 是弱测地的。ˆ ˆ
- 在第 5.9 小节中，我们证明 d满足弱-$B2'$ 条件。 ˆ
- 在第 5.10 小节中，我们证明 d 满足强-$B1$ 条件。
- 第 5.11 小节是总结部分，我们概述所有先前的结果。我们结合定理 4.13 和定理 1.1，证明了对于具有有限生成的 $CAT(0)$（满足（RD）性质）且抛物子群几乎阿贝尔的相对双曲群，鲍姆-康涅猜想成立。

5.1 记号

在本节中， G 表示一个相对于真子群 $P_1,\dots,P_n$双曲的群。进一步假设所有 $P_1,\dots,P_n$ 均为无限且有限生成。

令 d_G 表示 G 上关于某个有限生成集的词距离。令 X_c 表示一个锥化图，其定义见 G 中相对于 $P_1,\dots,P_n$ 的定义 3.6，且使用相同的生成集。令 d_c表示 X_c的图度量；对于所有 $x,y\in X_c$，$[x,y]_c$表示 d_c中连接 x 与 y的一条测地线。我们用 X_c^{∞}表示 X_c的无限价顶点集合。我们将用 $I_c(x,y)=\{z\in X_c\mid d_c(x,y)=d_c(x,z)+d_c(z,y)\}$ 表示 X_c中 x与 y之间的测地区间。令 δ 表示 X_c 的双曲常数，并假设 δ 是一个整数。下文中，由于假设抛物子群是无限的，我们不区分 G 与 X_c/X_c^{∞}。

对于所有 $x,y\in X_c$，我们将 $\Theta'(x,y)$ 记为测地线 $[x,y]_c$ 上无限价顶点处角度和的最小值；对于所有 $M>0$, $\Theta'_{>M}(x,y)$，将测地线 $[x,y]_c$ 上无限价顶点处角度和大于 M 的最小值。我们将 $d':X_c\times X_c\to\mathbb{N}$ 定义为 $d'(x,y)=d_c(x,y)+\Theta'(x,y)$。我们回顾一下，根据命题 3.17，它在 G 上的限制是一个与词度量拟等距的度量。对于所有 $M>0$，我们以同样的方式将 $d'_{>M}:X_c\times X_c\to\mathbb{N}$ 定义为 $d'_{>M}(x,y)=d_c(x,y)+\Theta'_{>M}(x,y)$。根据推论 3.18，在 G 上，d'_M 也与 d_G 拟等距。

设 H 是一个具有固定生成集的有限生成群，设 $C>0$ 是一个常数。我们用 $\mathrm{Proba}_C(H)$ 表示 H 上支集直径至多为 C 的有限支撑概率测度所构成的集合。注意到，通过狄拉克测度， H 嵌入 $\mathrm{Proba}_C(H)$。

我们将离散空间 X 上测度的范数 $\|\eta\|$ 定义为其 ℓ^1-范数 $\|\eta\|:=\sum_{x\in X}|\eta(x)|$。此外，令 $\|\eta\Delta\eta'\|:=\|\eta-\eta'\|$。

对于所有 $K>0$、 $x\in\mathbb{R}_+$，令：

$$[x]_K:=\begin{cases}0 \text{ if } x\le K\\ x \text{ if } x>K.\end{cases}$$

5.2 关于抛物子群的假设

本节将介绍我们的结果适用的抛物子群。我们首先陈述对抛物子群所要求的假设，然后证明 $CAT(0)$ 群满足这些假设。

以下两个性质是对弱-$B2'$性质条件的加强。为了证明相对双曲群具有弱-$B2'$ 性质，我们需要假设抛物子群上定义的度量满足这两个性质。

第一个性质称为 η-无峰性，它表示点到测地线的距离在测地线的端点处达到最大值，误差不超过常数 η。

定义 5.5. *(η_2-无峰性)* 设 $\eta_1\ge 0$ 和 $\eta_2\ge 0$。设 (X,d) 是一个 η_1-弱测地度量空间，若存在 $\eta_2>0$，使得对所有 x、y、$z\in X$，都存在一条从 x到 y的 η_1-弱测地线 $\sigma:[0,1]\to X$，且对于 $t\in[0,1]$，有：

$$d(z,\sigma(t))\le\max(d(x,z),d(y,z))+\eta_2.$$

第二个性质称为 η-强凸性，它是在经典一致凸性的基础上，允许相差一个加性常数的非对称强化。事实上，给定三个点 x、y 和 z，我们不再要求 z 比起 x 和 y更接近 x 与 y 之间测地线的中点，而是要求 z 比起 x 和 y更接近测地线上每一个与二者都相距足够远的点。

定义 *5.6.*（η_2-强凸）设 $\eta_1 \geq 0$ 和 $\eta_2 \geq 0$。设 (X, d) 是一个 η_1-弱测地度量空间。若对所有 $0 < \eta < \frac{1}{2}$，对于 $\varepsilon \in (0, 1)$，都存在 $\delta \in (0, 1)$，使得对于所有满足 $d(x, z) \leq N$、$d(z, y) \leq N$且 $d(x, y) > \varepsilon N$ 的 x、y、$z \in X$，都存在一条 η_1-弱测地线$\sigma : [0, 1] \to X$，从 x 到 y，使得对所有 $t \in [\eta, 1 - \eta]$，都有：

$$d(z, \sigma(t)) \leq N(1 - \delta) + \eta_2.$$

直接由定义可知，对于某些 $\eta_1 \geq 0$ 和 $\eta_2 \geq 0$，若测地度量空间 (X, d) 是 η_1-强凸且无峰的，则满足弱-$B2'$。

定义 5.7。若有限生成群 P 满足以下条件，则称其为可容许的：对于所有 $C > 0$，$Proba_C(P)$都存在一个 P-不变伪度量，记为 d_b，使得：

- d_b 是弱测地的，
- d_b 是 η-无峰的，并且对于某个 $\eta > 0$，在同一选定的弱测地线下是 η-强凸的，
- d_b 满足强-$B1$、弱-$B2_\prime$，
- 通过狄拉克质量定义的包含映射，从 (P, d_P) 到 $(Proba_C(P)\ d_b)$ 是一个拟等距，
- 对于所有 $\mu, \nu \in Proba_C(P)$，若 $supp(\mu) \cap supp(\nu) \neq \varnothing$，则有：$d_b(\mu, \nu) \leq 2C\|\mu \Delta \nu\|$。

第 5 节的其余部分将用于证明以下定理。我们将在第 5.11 小节中给出完整证明。

^定理 5.8。每个 相对于容许子群 G 双曲的群 都具有一个度量 d，满足以下性质。

- $\hat{d}$是 G-不变的，即 $d(g.x, g.y) = d(x, y)$，对所有 g、x、$y \in G$，^
- d 一致局部有限，并且与词度量拟等距，^
- 度量空间 (G, d) 是弱测地且强双曲的。

我们将在本节余下部分证明，CAT(0)群是可容许的。

我们在此证明 $(\mathbb{R}^n, \ell^2)$ 是 0-无峰的。下文中，$\|.\|$ 表示欧几里得范数，d_{ℓ^2} 表示欧几里得距离。

引理 5.9。对于所有 x、y、$z \in \mathbb{R}^n$，以及所有 $t \in [0, 1]$，有：

$$d_{\ell^2}(z, (1 - t)x + ty) \leq \max(d_{\ell^2}(z, x), d_{\ell^2}(z, y)).$$

证明。通过施加一个平移，我们可以设 $z = 0$。因此，只需证明对于所有 $t \in [0, 1]$，有：

$$\|(1 - t)x + ty\| \leq \max(\|x\|, \|y\|).$$

这对每个范数都成立，因此引理得证。 □

作为推论，$CAT(0)$ 空间是 0-无峰的。

推论 5.10. $CAT(0)$ 空间没有峰点。

证明。设 (X,d) 是一个 $CAT(0)$ 空间。设 $x,y,z \in X$，并考虑 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in (\mathbb{R}^2, d_{\ell^2})$ 这一比较三角形。

设 p 是 x 与 y 之间测地线上的一点，$\tilde{p}$ 是一个比较点，即 $\tilde{x},\tilde{y}$ 之间测地线上的一点，满足 $d_{\ell^2}(\tilde{p},\tilde{x}) = d(p,x)$ 且 $d_{\ell^2}(\tilde{p},\tilde{y}) = d(p,y)$。

我们有：

$d(z,p) \le d_{\ell^2}(\tilde{z},\tilde{p})$（根据 $CAT(0)$ 不等式）$\le \max(d_{\ell^2}(\tilde{z},\tilde{x})\ d_{\ell^2}(\tilde{z},\tilde{y}))$（根据引理 5.9）$\le \max(d_{\ell^2}(z,x)\ d_{\ell^2}(z,y))$（根据比较三角形的定义）。

□

我们在此证明 $(\mathbb{R}^n, \ell^2)$ 是 0-强凸的。

引理 *5.11.* 对所有 $\eta \in (0,1)$，对所有 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $\delta \in (0,1)$，使得对于所有满足 $d_{\ell^2}(x,y) \ge \varepsilon \max(d_{\ell^2}(x,z)\ d_{\ell^2}(z,y))$ 的 $x,y,z \in \mathbb{R}^n$，对于所有 $t \in (\eta, 1-\eta)$，有：

$$d_{\ell^2}(z,(1-t)x+ty) \le \max(d_{\ell^2}(x,z), d_{\ell^2}(z,y))(1-\delta).$$

证明。令 $\varepsilon \in$ 属于 (0,1)，通过平移，我们假设 $z = 0$。假设 $\|x\| \le \|y\|$ 和 $\|x-y\| \ge \varepsilon\|y\|$。

对所有 $t \in$ 属于 (0,1)，我们将使用中线恒等式的以下变体：

$$\|(1-t)x+ty\|^2 + t(1-t)\|x-y\|^2 = (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2.$$

我们得到：

$$\begin{aligned}\|(1-t)x+ty\|^2 &= (1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - t(1-t)\|x-y\|^2\\ &\le (1-t)\|y\|^2 + t\|y\|^2 - \varepsilon t(1-t)\|y\|^2\\ &\le (1-\varepsilon t(1-t))\|y\|^2\\ &\le (1-\varepsilon\eta(1-\eta))\|y\|^2.\end{aligned}$$

因此：

$$\|(1-t)x+ty\| \le \sqrt{1-\varepsilon\eta(1-\eta)}\|y\|,$$

并且由于 $\sqrt{1-\varepsilon\eta(1-\eta)} \in$ 属于 (0,1)，我们设：

$$\delta := 1 - \sqrt{1-\varepsilon\eta(1-\eta)},$$

于是得到所需结果。

□

因此，$CAT(0)$ 空间是强凸的。

推论 5.12. $CAT(0)$ 空间是强凸的。

证明。设 $\eta \in (0,1)$、$\varepsilon \in (0,1)$ 和 $x,y,z \in X$ 满足 $d(x,y) \ge \varepsilon \max(d(x,z)\ d(z,y))$。我们考虑 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z} \in (\mathbb{R}^2, d_{\ell^2})$，它是 x,y,z 的比较三角形，并注意到这些点满足引理 5.11 的假设。设 σ 为 X 中连接 x 和 y 的测地线，$\tilde{\sigma}$ 为连接 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的测地线。对所有 $t \in [0,1]$，根据比较点的定义，$\sigma(t)$ 的比较点是 $\tilde{\sigma}(t)$。

根据引理 5.11，存在 $\delta \in (0,1)$，使得对于所有 $t \in (\eta, 1-\eta)$，我们有：

$$d_{\ell^2}(\tilde{z},\tilde{\sigma}(t)) \le \max(d_{\ell^2}(\tilde{x},\tilde{z}), d_{\ell^2}(\tilde{z},\tilde{y}))(1-\delta).$$

因此，我们有：

$d(z,\ \sigma(t)) \le d_{\ell^2}(\tilde{z},\ \tilde{\sigma}(t))$（根据 $CAT(0)$不等式）$\le \max(d_{\ell^2}(\tilde{x},\ \tilde{z})\ d_{\ell^2}(\tilde{z},\ \tilde{y}))(1-\delta)$（根据前面的注记）$\le \max(d_{\ell^2}(x,\ z)\ d_{\ell^2}(z,\ y))(1-\delta)$（根据比较三角形的定义）。

□

为了证明 $CAT(0)$群是可容许的，我们将使用 $CAT(0)$空间上测度的重心。

命题5.13。 *[Stu03，命题4.3。]*
设(X,d)是一个 $CAT(0)$ 度量空间，且 X上的一个有限支撑测度为 $\mu := \sum_{x\in X}\mu_x\delta_x$，其中$\sum_{x\in X}\mu_x = 1$，并且正实数族$(\mu_x)_{x\in X}$几乎为零。

函数 $z \mapsto \sum_{x\in X}\mu_x d^2(z,x)$ 存在唯一的最小值，称为其重心。

为了验证 CAT(0) 情形下可容许群的最后一个条件，我们将使用 L^1 Wasserstein 度量，并在此给出定义。

定义 5.14。 *[Stu03，定义 4.1。]*
设 (X,d) 为一个 $CAT(0)$ 空间，设 $\mu = \sum_{x\in X}\mu_x\delta_x$和 $\nu = \sum_{x\in X}\nu_x\delta_x$是定义在 X 上的两个有限支撑概率测度，其中 $(\mu_x)_{x\in X}$ 和 $(\nu_x)_{x\in X}$ 是几乎为零的实数族，且满足 $\sum_{x\in X}\mu_x = \sum_{x\in X}\nu_x = 1$。

耦合 Π 是 μ 和 ν 上的一个概率测度，定义在 X^2 上，且其边缘分布为 μ 和 ν，即$\Pi = \sum_{x,y\in X}\Pi_{x,y}\delta_{(x,y)}$ 其中对所有 $x \in X$, $\sum_{y\in X}\Pi_{x,y} = \mu_x$ 成立；并且对所有 $y \in X$, $\sum_{x\in X}\Pi_{x,y} = \nu_y$成立。运输计划 Π 的代价记为 $c(\Pi)$，定义为：$c(\Pi) := \sum_{x,y\in X}\Pi_{x,y}d(x,y)$。

μ与 ν 之间的 ***Wasserstein*** 距离定义如下：

$$d^W(p,q) = \inf\{c(\Pi) : \Pi \ is\ a\ coupling\ between\ \mu\ and\ \nu\}.$$

以下由 [Stu03], 给出的结果，使我们能够根据 Wasserstein 距离控制重心之间的差异。

定理 5.15. *[Stu03，定理 6.3]*
设(X,d)是一个 $CAT(0)$ 度量空间。设 μ, ν 是(X,d)上的两个有限支撑测度。则有：

$$d(Bar(\mu), Bar(\nu)) \le d^W(\mu,\nu).$$

引理 5.16. 设(X,d)是一个 $CAT(0)$ 度量空间。设 $C > 0$。设 μ,ν是 X 上的两个有限支撑概率测度，其支撑直径不超过 C，并进一步假设 $supp(\mu) \cap supp(\nu) \neq \varnothing$。

那么：

$$d(Bar(\mu), Bar(\nu)) \le 2C\|\mu\Delta\nu\|.$$

证明。设 μ 和 ν 是两个支集直径有界于 C 的有限支撑测度。我们假设 $\text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(\nu) \neq \varnothing$。因此，我们可以写成：

- $\mu = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\delta_{x_i} + \sum_{i>p}^{n}\mu_i\delta_{x_i}$ with $\sum_{i=1}^{p}\mu_i + \sum_{i>p}^{n}\mu_i = 1$,
- $\nu = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\delta_{x_i} + \sum_{i>p}^{m}\nu_i\delta_{y_i}$ with $\sum_{i=1}^{p}\mu_i + \sum_{i>p}^{m}\nu_i = 1$,

如果允许 x_i 和 y_i 并非两两不同。

我们在 $X \times X$ 上设定如下运输计划：

$$\Pi = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \delta_{(x_i,x_i)} + \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{p}\mu_i} \sum_{i>p}^{n}\sum_{j>p}^{m} \mu_i\nu_j \delta_{(x_i,y_j)}.$$

简单计算可得，Π 实际上是 μ 与 ν 之间的运输计划。我们设 $a := \sum_{i=1}^{p}\mu_i$。

简单计算可得：

$$\|\mu\Delta\nu\| = 2 - a$$

再经过简单计算，我们得到：

$$c(\Pi) \le 2C\frac{1}{1-a}\sum_{i>p}^{n}\sum_{j>p}^{m}\mu_i\nu_j \le 2C(1-a) \le 2C(2-a),$$

因此 $c(\Pi) \le 2C\|\mu\Delta\nu\|$。

根据定理 5.15 和定义 5.14，我们得到：

$$d(Bar(\mu), Bar(\nu)) \le 2C\|\mu\Delta\nu\|.$$

□

我们在此证明 $CAT(0)$ 群是可容许的。

命题 5.17. $CAT(0)$ 群是可容许的。

证明. 设 P 是一个 $CAT(0)$ 群。根据定义，存在一个 (X,d) $CAT(0)$ 度量空间，使得 P 在其上通过等距变换真且余紧地作用。此外，存在一个 φ 不变的拟等距映射，将赋予词度量的 P 与 (X,d) 联系起来。

设 $C > 0$，令 $\mu,\nu \in \mathrm{Proba}_C(P)$。我们定义 $\mathrm{Proba}_C(X)$，即 X 上直径不超过 C 的有限支撑概率测度集合。我们定义 $\varphi^\star$，这是 $\mathrm{Proba}_C(P)$ 与 $\mathrm{Proba}_C(X)$ 之间的映射，由 φ 定义，并通过狄拉克质量作延拓。

我们设：

$$d_b(\mu,\nu) = d(\mathrm{Bar}(\varphi^\star(\mu)), \mathrm{Bar}(\varphi^\star(\nu))).$$

我们将证明 d_b 满足定义 5.7 的所有假设。d_b 显然是 $\mathrm{Proba}_C(P)$ 上的伪度量。

由于 P 通过等距变换作用于 (X, d)，d_b 显然是不变的。

由于 φ 是 P 与 (X, d) 之间的拟等距。存在 $\eta > 0$，使得对于所有 $x \in X$，都存在 $h \in P$，使得 $d(x, \varphi(h)) \le \eta$。我们将证明 d_b 是 η-弱测地的。

设 $\mu, \nu \in \mathrm{Proba}_C(P)$。我们用 γ 表示 (X, d) 中连接 $\mathrm{Bar}(\varphi^\star(\mu))$ 与 $\mathrm{Bar}(\varphi^\star(\nu))$ 的唯一测地线。

对于所有 $t \in [0,1]$，都存在 $\tilde{\gamma}(t)$，使得 $d(\gamma(t)\ \varphi(\tilde{\gamma}(t))) \le \eta$。因此 $\delta_{\tilde{\gamma}(t)} \in \mathrm{Proba}_C(P)$，并且我们有：

- $d_b(\mu, \delta_{\tilde{\gamma}(t)}) = d(\mathrm{Bar}(\varphi^\star(\mu)), \gamma(t)) \le d(\mathrm{Bar}(\varphi^\star(\mu)), \gamma(t)) + \eta \le t + \eta,$
- $d_b(\delta_{\tilde{\gamma}(t)}\ \nu) = d(\tilde{\gamma}(t), \mathrm{Bar}(\nu)) \le \eta + d(\gamma(t), \mathrm{Bar}(\nu)) \le d_b(\mu,\nu) - t + \eta.$

那么 d_b is η-弱测地。

我们将证明 d_b 没有峰值。首先，根据推论 5.12，我们知道，对于所有x， y， $z \in X$ 以及 γ，在 x 和 y 之间的唯一测地线上，对所有 $t \in [0,1]$，都有：

$$d(z, \gamma(t)) \leq \max(d_{\ell^2}(z,x), d_{\ell^2}(z,y)).$$

设 μ， ν， $\lambda \in \text{Proba}_C(P)$，令 γ为 Bar($\varphi^\star(\mu)$) 与 Bar($\varphi^\star(\nu)$) 之间的唯一测地线，令 σ为按前述方式定义的 μ与 ν 之间的一条弱测地线。我们有如下结论：

$$\begin{aligned} d_b(\lambda, \sigma(t)) &\leq d(\text{Bar}(\varphi^\star(\lambda)), \gamma(t)) + \eta \\ &\leq \max(d(\text{Bar}(\varphi^\star(\lambda)), \text{Bar}(\varphi^\star(\mu))), d(\text{Bar}(\varphi^\star(\lambda)), \text{Bar}(\varphi^\star(\nu)))) + \eta. \end{aligned}$$

那么 d_b 是 η-无峰的。

我们将证明 d_b是强凸的。设 $\eta \in (0, 1\ 2)$ $\varepsilon \in (0, 1)$且$N \in \mathbb{R}_+^*$。设 μ、 ν、 $\lambda \in \text{Proba}_C(P)$，其中 $d_b(\mu, \lambda) \leq N$、 $d_b(\lambda, \nu) \leq N$ 且 $d_b(\mu, \nu) \geq \varepsilon N$。令 γ 为 Bar($\varphi^\star(\mu)$) 与 Bar($\varphi^\star(\nu)$) 之间的唯一测地线，令 σ 为按前述方式定义的 μ 与 ν 之间的一条弱测地线。根据推论 5.12，存在 $\delta \in (0, 1)$，使得对所有 $t \in [\eta, 1-\eta]$:

$$d(\lambda, \gamma(t)) \leq N(1-\delta).$$

因此，对于所有 $t \in [\eta, 1-\eta]$，我们有：

$$\begin{aligned} d_b(\lambda, \sigma(t)) &= d(\text{Bar}(\varphi^\star(\lambda)), \sigma(t)) \\ &\leq d(\text{Bar}(\varphi^\star(\lambda)), \gamma(t)) + \eta \\ &\leq N(1-\delta) + \eta. \end{aligned}$$

因此， d_b 是 η-强凸的。

由于 d_b 是弱 η-测地线的、 η-无峰的并且是 η-强凸的，因此它满足弱-$B2'$ according 。

由于 (X, d) 是一个 $CAT(0)$ 度量空间，(Proba$_C(P)$ d_b) 显然满足强-$B1$。

令 $g, h \in P$。根据定义，我们有： $d_b(\delta_g, \delta_h) = d(\varphi(g)\ \varphi(h))$。因此，由于 φ 是拟等距，从 (P, d_P) 到 (Proba$_C(P)$ d_b) 的包含映射通过狄拉克质量是一个拟等距

最后，令 $\mu, \nu \in \text{Proba}_C(P)$，其中 supp($\mu$) $\cap$ supp(ν) $\neq \varnothing$。那么 supp($\varphi^\star(\mu)$) $\cap$ supp($\varphi^\star(\nu)$) $\neq \varnothing$，因此根据引理 5.16，我们得到：

$$d_b(\mu, \nu) = d(\text{Bar}(\varphi^\star(\mu)), \text{Bar}(\varphi^\star(\nu))) \leq 2C\|\mu \Delta \nu\|.$$

□

我们现在推导出，有限生成的几乎阿贝尔抛物子群是可容许的。

推论 5.18。 几乎阿贝尔抛物子群是可容许的。

本文其余部分将用于证明以下定理。

ˆ定理 5.19。 每个具有可容许抛物子群的相对双曲群 G 都存在一个度量 d，并具有以下性质。

ˆ ˆ ˆ

- d是 G-不变的，即 $d(g.x, g.y) = d(x, y)$，对所有 $g, x, y \in G$均成立。ˆ
- d 是一致局部有限的，且与词度量拟等距，ˆ
- 度量空间 (G, d) 是弱测地的，并且是强双曲的。

5.3 掩码

在本小节中，我们讨论证明中的一个重要概念，该概念由 Dahmani 和 Chatterji 在[CD20，第 2]，节中定义，即掩码。

要定义掩码，我们需要回顾在 [CD20] 中也定义的一致局部精细图上的流的定义。这一概念推广了 Alvarez 和 Lafforgue 在 [AL17] 中针对一致有限双曲图引入的流的概念。流从一个初始点出发，以一个目标点为终点，沿着“可接受”路径将初始点向目标点移动。在 Alvarez-Lafforgue 的工作中，可接受路径是测地线粗邻域内的 α-测地线。它们并不适用于一致精细图，因为这些路径不是有限的。这里，我们用锥形的 α-测地线锥取而代之，它们的行为类似，但其基数得到了严格控制。流的最后一步是一个支集测度，其支集包含于目标点的 1-邻域内，且总是有界的；这个测度称为掩码。这个名称的由来是，掩码的支集表示“目标点为了隐藏初始点而必须藏身的点集”。掩码还将作为陪集的随机代表元。

掩码最重要的性质是它们以指数速度收敛，也就是说，对于任意一对邻近点，它们的掩码之差相对于源点到目标点的距离呈指数级小。

本节的大部分结果来自 [CD20]；不过，我们证明了掩码的某些性质。我们先回顾 α-测地线和锥形 α-测地线的定义。

定义 5.20。 *[CD20]*

设 X 为图， d 为其图度量，且 $\alpha \geq 0$。对于任意两个顶点 x、$a \in X$， t 属于α与 a 之间的一条 x -测地线，当且仅当：

$$d(x,t) + d(t,a) \leq d(x,a) + \alpha.$$

定义 5.21。 *[CD20，定义 1.12。]*

设 X为一个图，且 x、$a \in X^{(0)}$。对于 $\rho \geq 0$，我们用 $\mathcal{E}_{a,\,x}(\rho)$ 表示边 e 的集合，其中 $d(a,e) = \rho$包含在从 a 到 x 的一条测地线上。我们称 $t \in X$ 属于x与 a之间的一条 α-锥形测地线，如果 t 位于一条 α-测地线上， $d(a,t) \leq d(a,x)$，并且：

$$t \in \bigcap_{e \in \mathcal{E}_{a,x}(d(a,t))} Cone_{40\alpha}(e).$$

We d记 $U_\alpha[a,x]$ 为属于 x 与 a 之间某条 α-圆锥测地线的点集。

对于每个 $\rho \geq 0$，我们记 $\mathcal{S}_{a,\,x}(\rho)$ 为 $U_\alpha[a,x]$ 中距 a 为 ρ 的切片，即如下点集：

$$\mathcal{S}_{a,x}(\rho) = \{t \in U_\alpha[a,x] \mid d(t,a) = \rho\}$$

$U_\alpha[a,x]$ 中距 a 为 ρ 的点集。

在本文余下部分，我们令 $\alpha = 2\delta$。

下面的命题表明，测地线包含于圆锥 α-测地线中 .

命题 5.22。 *[CD20，命题 1.13.(3)]* 对于每个 $\rho \geq 0$，对于所有 $v \in I_c(x、a)$ 满足 $d_c(v、a) = \rho$的情形，我们有：

$$v \in \mathcal{S}_{a,x}(\rho).$$

我们用 Proba(X_c) 表示支撑在 X_c 的顶点上的有限支撑概率测度集合。

我们回顾流步骤的定义：

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Proba}(X_c) \times X_c^{(0)} & \to & \mathrm{Proba}(X_c) \times X_c^{(0)} \\ (\eta, a) & \mapsto & (T_a(\eta), a) \end{array} \right.$$

这里我们再次说明， δ 假设为一个整数。给定 a和 x，我们称在 x 处的步 T_a 为：

- 初始 若 $d_c(a,\ x) > 5\delta$ 不是 5δ的倍数，
- 正则 当 $d_c(a,\ x) > 5\delta$ 和 $d(a,\ x)$ 是 5δ 的倍数时，
- 结束 当 a 具有无限价且 $1 < d_c(a,\ x) \leq 5\delta$，或者当 a 具有有限价、 $d_c(a,\ x) \leq 5\delta$ 且存在 u 使得 $\measuredangle_u(a,\ x) > 1000\delta$ 时，
- 平稳 在所有其他情况下，即以下三种情况之一：
  - $x = a$，
  - a具有无限价且 x是 a的邻点，
  - a 具有有限价， $d_c(a,\ x) \leq 5\delta$ 且对于所有 u， $\measuredangle_u(a,\ x) \leq 1000\delta$。

我们用 δ_x 表示位于 x 的狄拉克质量，并通过定义 $T_a(\delta_x)$（其中 a， x 是 X 的两个顶点）来定义流步骤 T，然后将其按线性性扩展到概率测度上：

$$T_a\big(\sum_x \lambda_x \delta_x\big) = \sum_x \lambda_x T_a(\delta_x).$$

定义 5.23. *[CD20，定义 2.1.]* 设 $a, x \in X_c^{(0)}$。我们将 $r_{a,\ x}$ 设为满足 $5\delta r < d_c(a, x)$ 的最大整数 r。

- 如果步 T_a 在 x 处是初始的或正则的，那么 $T_a(\delta_x)$ 是由切片 $\mathcal{S}_{a,x} = \mathcal{S}_{a,x}(5\delta r_{a,x})$ 支撑的均匀概率测度，如定义 *5.21* 中所述，
- 如果步 T_a 在 x 处结束，且 a 具有无限价，那么 $T_a(\delta_x)$ 是由距离 *{style id='29'>1 </style}*处的切片 $\mathcal{S}_{a,x} = \mathcal{S}_{a,x}(1)$ 支撑的均匀概率测度，该切片距 a为 *1*。若步结束且 a具有有限价，那么 $T_a(\delta_x)$ 是支撑在唯一的 c 极小化 $d_c(a, c)$上的狄拉克质量，使得 $\measuredangle_c(a, x) > 900\delta$，
- 如果步 T_a 在 x 处是平稳的，那么 $T_a(\delta_x) = \delta_x$ (以及 $\mathcal{S}_{a,x} = \{x\}$)。

参见图 14。
该命题表明，这个流最终会变为常数。

命题 5.24。 *[CD20，命题 2.2。]*
对于所有的 $a, x \in X_c^{(0)}$， *5.23* 中的流步骤在 k 上是平稳的：若 $k > r_{a,\ x} + 1$，则有 $T_a^{r_{a,\ x}+1}(\delta_x) = T_a^k(\delta_x)$。

流的平稳性使我们能够定义极限，即掩码。

定义 5.25。 *[CD20，定义 2.3。]*
给定 X_c 中的任意两个顶点 a和 x， a 在 x 上的掩码是由下式给出的概率测度：

$$\mu_x(a) = T_a^{R(a,x)}(\delta_x) = \lim_{k\to\infty} T_a^k(\delta_x),$$

其中 $R(a, x)$ T_a 在 δ_x 上达到平稳步所需的最小迭代次数 .

对于 $x \in X_c$， $a \in X_c^\infty(a)$ 将充当与 a 关联的陪集上 x 的随机代表元。

引理 5.26. *[CD20，引理 2.6。]* 令 x、 $y \in X_c$、 $a \in X_c$ 和 $d_c(a, x) = d_c(a, y)$。
如果 $d_c(x, y) \leq 8\delta$，并假设它们两者的流步骤均为正则，则有：

$$supp(T_a(\delta_x)) \cap supp(T_a(\delta_y)) \neq \varnothing.$$

以下命题表明，掩码的直径一致有界，见图 14。

命题 5.27. *[CD20，命题 2.4。]*

对于所有 $x \in X_c$，对于所有 $a \in X_c^{\infty}$，$a \neq x$，测度 $\mu_x(a)$ 支撑在a的1-邻域内。此外，如果 e 是测地线段 $[a,x]_c$的第一条边，则测度 $\mu_x(a)$ 支撑在$Cone_{160\delta}(e)$上。

For all $x \in X_c$, for all $a \in X_c \backslash X_c^{\infty}$, $\mu_x(a)$ is supported by $Cone_{11160\delta}(a)$.

特别地，掩码的支撑集是一致有界的。更精确地说，我们令 $C = \mathbf{diam}(Cone_{11160\delta}(e)$，并且有 $\mathbf{diam}(\mu_x(a)) \leq \mathbf{diam}(Cone_{11160\delta}(e) \leq C$。

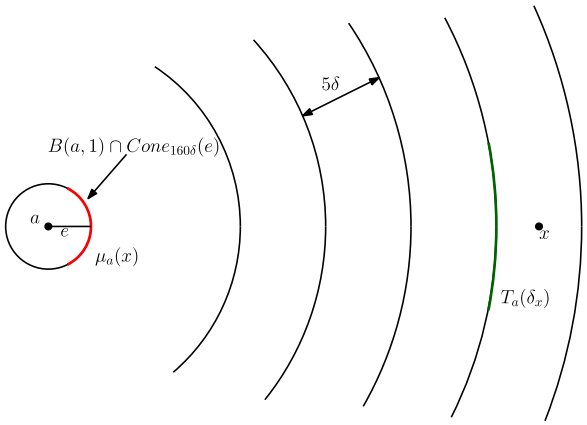


图 14： x 在 a上的掩码

在本节余下部分中，提到 $\mathrm{Proba}_C(P_i)$ 时， C 表示命题 5.27 中的常数。

下面的命题说明，当流经过一个大角时，这个大角会起到检查点的作用。

命题 5.28. *[CD20，命题 2.7.]*

设 a, x 是 X_c 中的顶点。若存在 $u \in I_c(a,x)$ 使得 $\measuredangle_u(a,x) > (2000\delta)^2$,，则对于任意与 x 的距离为1 的 y，都有：

$$\mu_x(a) = \mu_y(a) = \mu_u(a).$$

下一个命题表明，对于该流的两个源，这两个源之间测地线上的任意一点，其针对这两个源的掩码都互不相交。

命题 5.29. *[CD20，命题 2.12.]*

若 $d_c(x,y) \geq 10\delta$，且若 $a \in G$ 与 x 和 y 的距离均至少为 5δ，并且 $a \in [x,y]_c$ 对于某条测地线成立，

$$\|\mu_x(a) \Delta \mu_y(a)\| = 2.$$

利用以下关键性质，我们可以用角来控制两个彼此接近的点 x 和 y 的掩码在远离它们的点 a 处的差异。

命题 5.30。 *[CD20，命题 2.11。]*

存在两个常数 $\kappa < 1$ 和 $R_0 > 0$，使得对于所有 $a \in X_c$，对于每个 $x_1, x_2 \in X_c$，满足$d_c(x_1, x_2) = 1$，如果 x 在 x_1, x_2中更接近 a，那么对于所有测地线 $[x,a]_c$，如果 $\Theta(x,a)$ 表示测地线 $[x,a]_c$上的角度和，那么如果

$$d_c(a,x) + \Theta(a,x) \geq R_0,$$

有:

$$\|\mu_{x_1}(a)\Delta\mu_{x_2}(a)\| \le \kappa^{d_c(a,x)+\Theta(a,x)}.$$

以下推论是命题 5.30 的另一种表述。

推论 5.31。 存在常数 $\kappa < 1$ 和 $R_0 > 0$，使得对于所有彼此距离为1的 $x, y \in X_c$，对于所有 $a \in X_c$ 以及所有测地线 $[x,a]_c$, $[y,a]_c$，若 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(x,a)$，则 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(y,a)$ 分别表示测地线 $[x,a]_c$, $[y,a]_c$上大于$(2000\delta)^2$的角度和。

对于任意 $R \ge R_0$，若 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(x,a) + d_c(x,a) \ge R$，则有:

- $\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \le \kappa^{R-1}$,
- 和 $\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \le \kappa$最小值$(\Theta_{>(2000\delta)^2}(x,a)+d_c(x,a)\Theta_{>(2000\delta)^2}(y,a)+d_c(y,a))$。

证明。 我们固定两条测地线 $[x,a]_c$和 $[y,a]_c$。分别记 $\Theta(x,a)$为测地线$[x,a]_c$上的角度和， $\Theta(y,a)$为测地线 $[y,a]_c$上的角度和。

If $\Theta_{(2000\delta)^2}(x,a) > 0$, t hen th存在 $u \in I_c$ (x,a) such th在 $\measuredangle_u(a,x) > (2000$ $)^2$, th根据 ding 命题 5.28:

$$\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| = 0.$$

y同样成立，因此我们假设 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(x,a) = 0$ 且 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(y,a) = 0$。

我们取命题 5.30 中的 R_0 以及 $R \ge R_0$，因此得到如下结论。

如果 x 比 y更接近 a，那么:

$$\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \le \kappa^{d_c(a,x)+\Theta(a,x)} \le \kappa^{d_c(a,x)+\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,x)} \le \kappa^{R-1}.$$

如果 y 接近 r 到 a 比 x，则 $d_c(a,x) + \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y) = d_c(a,y) + \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,x) - 1 \ge R-1$ 并且:

$$\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \le \kappa^{d_c(a,y)+\Theta(a,y)} \le \kappa^{d_c(a,y)+\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y)} \le \kappa^{R-1}.$$

此外，我们指出:

$$\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \le \kappa^{\min(\Theta_{>(2000\delta)^2}(x,a)+d_c(x,a),\Theta_{>(2000\delta)^2}(y,a)+d_c(y,a))}.$$

□

以下命题对于定义强双曲度量至关重要。它表明，当 p足够大时，对于所有 x，$y \in X_c$ x 和 y 的掩码差属于 l_p。

命题5.32。 存在 $p_0 > 1$，使得对于所有 $p > p_0$ 以及所有 x、$y \in X_c$:

$$\sum_{a\in X_c} \|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\|^p$$

是收敛的。

证明。 根据 [CD20，推论 2.13，], 该命题对于 $x \in G$ 和 $y \in X_c$ 成立。假设 x，$y \in X_c^\infty$。令 $x_0 \in G$，我们有如下结果:

$$\begin{aligned}(\sum_{a\in X_c} \|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\|^p)^{\frac{1}{p}} &\le (\sum_{a\in X_c} \|\mu_x(a)\Delta\mu_{x_0}(a)\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{a\in X_c} \|\mu_{x_0}(a)\Delta\mu_y(a)\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty(\text{ according to [CD20, Corollary 2.13.]}).\end{aligned}$$

这就证明了该命题。 □

下面的命题表明，对于邻居，这个和存在一个一致界。尽管这一结果在 [CD20]，中有所使用，但并未明确陈述；为方便读者，我们在此给出证明。

命题 5.33。令 p_0 如命题 *5.3* 中所述。对于所有 $p > p_0$，存在 $D > 0$，它仅取决于 p，使得对于所有满足 $d_c(x, y) = 1$ 的 x、$y \in X_c$，我们有：

$$\sum_{a \in X_c} \|\mu_x(a) \Delta \mu_y(a)\|^p \leq D.$$

证明。根据锥化图的定义 3.6，两个相邻顶点不能同时具有有限价。设 $x \in G, y \in X_c$ 且 $d_c(x, y) = 1$。对所有 $a \in X_c$：

$$\begin{aligned} \|\mu_x(a) \Delta \mu_y(a)\| &= \|x.\mu_1(x^{-1}a) \Delta x \mu_{x^{-1}y}(x^{-1}a)\| \\ &= \|\mu_1(x^{-1}a) \Delta \mu_{x^{-1}y}(x^{-1}a)\|. \end{aligned}$$

因此，命题中的不等式等价于：对所有满足 $d_c(1, x) = 1$ 的 $x \in X_c$，存在与 x 无关的 $D > 0$，使得：

$$\sum_{a \in X_c} \|\mu_1(a) \Delta \mu_x(a)\|^p \leq D.$$

与 [CD20], 中推论 2.13 的证明类似，我们考虑集合 $S_{d'(2000\delta)^2}(R, G) = \{g \in G, d'(2000\delta)^2(1, g) = R\}$。由于 $d'(2000\delta)^2$ 与 d_G 拟等距，存在 $A \geq 1$ 和 $\gamma_G > 1$，使得 $S_{d'(2000\delta)^2}(R, G)$ 的基数小于 $A\gamma_G^R$。我们将 $S_{d'(2000\delta)^2}(R)$ 定义为 $S_{d'(2000\delta)^2}(R, G)$ 与满足 $d'(2000\delta)^2(1, g) = R$ 的顶点 $x \in X_c^\infty$ 的并。其基数至多为某个 A'，该数与抛物子群的数量有关。

κ 表示命题 5.30 和推论 5.31 中的常数。然后利用推论 5.31，当 R 足够大时，我们有：

$$\sum_{a \in S_{d', (2000\delta)^2}(R)} \|\mu_1(a) \Delta \mu_x(a)\|^p \leq (\kappa^{R-1})^p A' \gamma_G^R.$$

结合这一不等式以及在命题 5.3 中选择 p 时还满足 $\kappa^p \leq \frac{1}{\gamma_G}$ 这一事实，可知和 $\sum_{a \in X_c} \|\mu_1(a) \Delta \mu_x(a)\|^p$ 收敛，且与 x 无关。

□

下一个引理将有助于描述无限价顶点；对于这些顶点，其邻居掩码互不相交。我们回顾一下，对所有 $x, y \in X_c$,

$$I_c(x, y) := \{z \in X_c \mid d_c(x, y) = d_c(x, z) + d_c(z, y)\}.$$

引理 5.34. 对所有 $x \in X_c$ 以及所有满足 $a \neq x$ 的 $a \in X_c^\infty$，对所有 $u \in I_c(x, a)$，若满足 $d_c(a, u) = 1$，则有：

$$u \in supp(\mu_x(a)).$$

证明。需要考虑四种情况：

1. 若 $d_c(a, x) = 1$ 是 $I_c(x, a)$ 中唯一满足 $d_c(a, x) = 1$ 的顶点，则 $u = x$。第一步是平稳的，因此 $\mu_a(x) = \delta_x$，且 $x \in \text{supp}(\mu_x(a))$。

2. 若 $1 < d_c(a, x) \leq 5\delta$，则流的第一步已经结束。因此，$T_a(\delta_x)$ 是支集位于切片 $S_{a, x} = S_{a, x}(1)$ 上的均匀概率测度；根据命题 5.22，对于所有满足 $d_c(a, u) = 1$ 的 $u \in I_c(x, a)$，我们有 $u \in S_{a, x}(1)$，因此：

$$u \in \text{supp}(T_a(\delta_x)).$$

在接下来的步骤中，流是平稳的，因此对于所有满足 $d_c(a, u) = 1$ 的 $u \in I_c(x, a)$，我们有：

$$u \in \text{supp}(\mu_x(a)).$$

现在假设 $d_c(a,x) > 5\delta$。我们按照定义 5.23 令 $r_{a,x}$ 为满足 $5\delta r < d_c(a,x)$ 的最大整数r。

3. 若流的第一步是正则的。我们可以通过归纳法证明，对于所有 $k \in \{0,\ldots,r_{a,x}-1\}$，对于所有满足 $d_c(a,u) = (r_{a,x}-k)5\delta$ 的 $u \in I_c(x,a)$，都有：

$$u \in \operatorname{supp}(T_a^{k+1}(\delta_x)).$$

在初始化时，$T_a(\delta_x)$ 是支集为切片 $S_{a,x} = S_{a,x}(5\delta r_{a,x})$ 的均匀概率测度。因此，对于所有 $u \in I_c(x,a)$，只要 $d_c(a,u) = 5\delta r_{a,x}$，就有：

$$u \in \operatorname{supp}(T_a^{1}(\delta_x)).$$

假设结论对某个 $k \in \{0,\ldots,r_{a,x}-2\}$ 成立。那么，对于所有满足$d_c(a,v) = (r_{a,x}-k)5\delta$ 的 $v \in I_c(a,x)$，都有：

$$v \in \operatorname{supp}(T_a^{k+1}(\delta_x)).$$

流的一个新步骤给出如下事实：对于所有满足 $d_c(a,v) = (r_{a,x}-k)5\delta$ 的 $v \in I_c(a,x)$，对于所有满足 $d_c(a,u) = (r_{a,x}-(k+1))5\delta$ 的$u \in I_c(a,v)$：

$$u \in \operatorname{supp}(T_a^{1}(\delta_v)) \subset \operatorname{supp}(T_a^{k+2}(\delta_x)).$$

为了完成归纳法的证明，我们只需指出，这样的 u with$d_c(a,u) = (r_{a,x}-(k+1))5\delta$，且满足存在 $v \in I_c(a,x)$ 使得 $d_c(a,v) = (r_{a,x}-k)5\delta$with $u \in I_c(a,v)$ 的集合，恰好就是满足 $d_c(a,u) = (r_{a,x}-(k+1))5\delta$. 的 $u \in I_c(x,a)$ 的集合
那么，对于所有满足 $d_c(a,v) = 5\delta$ 的 $v \in I_c(a,x)$，我们有：

$$v \in \operatorname{supp}(T_a^{r_{a,x}}(\delta_x)),$$

因此，对于这样的 v，$\operatorname{supp}(\mu_v(a)) \subset \operatorname{supp}(\mu_x(a))$。
再次利用证明中的第一点可知，对于所有满足 $d_c(a,v) = 5\delta$ 的 $v \in I_c(a,x)$，以及所有满足 $d_c(a,u) = 1$ 的 $u \in I_c(v,a)$：

$$u \in \operatorname{supp}(\mu_v(a)).$$

最后，我们只需指出，这类 u 的集合恰好是满足 $d_c(a,\ u) = 1$ 的 $u \in I_c(x,\ a)$ 的集合。

4. 若流的第一步是初始的，则 $T_a(\delta_x)$ 是由切片 $S_{a,\ x} = S_{a,\ x}(5\delta r_{a,\ x})$ 支撑的均匀概率测度。因此，对于所有满足 $d_c(a,\ v) = 5\delta r_{a,\ x}$ 的 $v \in I_c(x,\ a)$，我们有：

$$v \in \operatorname{supp}(T_a(\delta_x)),$$

取极限可得：

$$\operatorname{supp}(\mu_v(a)) \subset \operatorname{supp}(\mu_x(a)).$$

前一点表明，对于所有满足 $d_c(a,\ v) = 5\delta r_{a,\ x}$ 的 $v \in I_c(v,\ a)$，以及所有满足 $d_c(a,\ u) = 1$ 的$u \in I_c(v,\ a)$，我们有：

$$u \in \operatorname{supp}(\mu_v(a)).$$

最后需要指出，这类 u 的集合恰好是满足$d_c(a,u) = 1$的 $u \in I_c(x,\ a)$的集合。

□

这里，我们描述掩码互不相交的相邻点所对应的顶点。

命题 5.35。 设 $x, y \in X_c$ 满足 $d_c(x,y) = 1$，对所有满足以下条件的 $a \in X_c^\infty$：

$$supp(\mu_x(a)) \cap supp(\mu_y(a)) = \varnothing,$$

我们有：

$$a \in Cone_{(2000\delta)^2}(\{x, y\}).$$

*P*证明。 设 $a \in X_c^\infty$。若 $a = x$ 或 $a = y$，结论显然成立，因此我们假设 $a \neq x, a \neq y$。

若 $d_c(x,a) \neq d_c(y,a)$，我们可以假设 $d_c(x,a) > d_c(y,a)$。由于 $d_c(x,y) = 1$，我们知道$y \in I_c(x,a)$。根据命题 5.34，对所有满足 $= 1$ 的 $u \in I_c(y,a)$ 和 $d_c(a,u)$，我们有：

$$u \in \mathrm{supp}(\mu_y(a)).$$

此外， $u \in I_c(y,a) \subset I_c(x,a)$，因此 $u \in \mathrm{supp}(\mu_x(a))$，于是：

$$\mathrm{supp}(\mu_x(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_y(a)) \neq \varnothing.$$

因此，我们可以假设 $d_c(x,a) = d_c(y,a)$。我们还可以假设， a 与 x 之间以及 a 与 y 之间的角均有上界 $(2000\delta)^2$。否则，应用命题 5.28 可得 $\mathrm{supp}(\mu_x(a)) = \mathrm{supp}(\mu_y(a))$。因此，要证明该命题，我们只需证明：

$$d_c(a,x) \leq (2000\delta)^2.$$

事实上，我们将证明 $d_c(a,x) \leq 10\delta$。

假设 $d_c(a,x) > 10\delta$。我们将证明 $\mathrm{supp}(\mu_x(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_y(a)) \neq \varnothing$。需要考虑两种情况。

- 如果 x 和 y 对应的流步骤是正则的。由于 $d_c(x,y) = 1 \leq 8\delta$ 且 $d_c(x,a) = d_c(y,a)$，我们可以应用引理 5.26 得到：

$$\mathrm{supp}(T_a(\delta_x)) \cap \mathrm{supp}(T_a(\delta_y)) \neq \varnothing,$$

因此我们推得 $\mathrm{supp}(\mu_x(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_y(a)) \neq \varnothing$。

- 如果 x 和 y 对应的流步骤是初始的。由于 $d_c(a,x) > 10\delta$，存在 $k > 1$，使得 $T_a(\delta_x)$ 是支集为切片 $S_{a,x} = S_{a,x}(5k\delta)$ 的均匀概率测度，并且 $T_a(\delta_y)$ 是支集为切片 $S_{a,y} = S_{a,y}(5k\delta)$ 的均匀概率测度。

考虑 $x' \in I_c(x, a)$ 和 $y' \in I_c(y, a)$，使得 $d_c(x', a) = d_c(y', a) = 5k\delta$，我们知道$x' \in \mathrm{supp}(T_a(\delta_x))$，并且 $y' \in \mathrm{supp}(T_a(\delta_y))$。此外，由于 δ-双曲性，我们注意到$d_c(x', y') \leq 2\delta + 1 \leq 8\delta$。由于 $k > 1$， x' 和 y' 的流步骤是正则的，因此再次应用引理 5.26 可得：

$$\mathrm{supp}(T_a(\delta_{x'})) \cap \mathrm{supp}(T_a(\delta_{y'})) \neq \varnothing.$$

由于 $\mathrm{supp}(T_a(\delta_{x'})) \cap \mathrm{supp}(T_a(\delta_{y'})) \subset \mathrm{supp}(T_a^2(\delta_x)) \cap \mathrm{supp}(T_a^2(\delta_y))$，我们得出 ：

$$\mathrm{supp}(\mu_x(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_y(a)) \neq \varnothing.$$

因此，我们知道 $d_c(a, x) \leq 10\delta \leq (2000\delta)^2$，从而 $a \in Cone_{(2000\delta)^2}(\{x, y\})$。

□

利用以下推论，我们统计每对点中互不相交的掩码数量。

推论 5.36。 固定 x、 $y \in X_c$。假设 d_c（x、 y） $= n$。
考虑 X_c 中连接 x 与 y 的一条测地线 $[x,y]_c$ 。
我们按如下意义对 $[x,y]_c$ 进行排序： $[x,y]_c = \{x_0$、 x_1、…、 $x_n\}$，其中 $x_0 = x$、 $x_n = y$ 和 d_c（x_i、 x_{i+1}） $=1$，对于 $0 \leq i \leq n-1$。
我们置：

$$\mathcal{A} := \{a \in X_c^\infty \mid \exists i_0 \in \{0,\dots,n-1\} \ such\ that\ supp(\mu_{x_{i_0}}(a)) \cap supp(\mu_{x_{i_0+1}}(a)) = \varnothing\}.$$

于是 $\mathcal{A}$ $\subset$ 锥$^{(2000\delta)^2}$（$[x,y]_c$），因此存在一个常数 $L > 0$，它仅取决于双曲常数以及 X_c 的一致精细度函数，使得：

$$|\mathcal{A}| \leq L d_c(x,y).$$

证明。 令 $a \in$ 为 A，则根据定义，存在 $i_0 \in$ {0，…， $n-1$} 使得：

$$\mathrm{supp}(\mu_{x_{i_0}}(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_{x_{i_0+1}}(a)) = \varnothing.$$

根据命题 5.35，我们有：

$$a \in \mathrm{Cone}_{(2000\delta)^2}(\{x_{i_0}, x_{i_0+1}\}).$$

根据命题 3.14，存在 $L > 0$，使得对于所有 $e \in X_c^{(1)}$：

$$|\mathrm{Cone}_{(2000\delta)^2}(e)| \leq L.$$

因此：

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathrm{Cone}_{(2000\delta)^2}(\{x_i, x_{i+1}\}) = \mathrm{Cone}_{(2000\delta)^2}([x,y]_c).$$

最后：

$$|\mathcal{A}| \leq |\bigcup_{i=0}^{n-1} \mathrm{Cone}_{(2000\delta)^2}(\{x_i, x_{i+1}\})| \leq Ln \leq L d_c(x,y).$$

□

5.4 锥化图每个顶点所关联的伪度量的定义

在本文余下部分中， G 表示一个相对于可容许子群 5.7 相对双曲的群。设X_c 表示它的一个锥化图。设 d_b 表示支集直径至多为 C 的概率测度集合上的强双曲伪距离，在抛物子群 P_i 中不作区分，其中 C 是命题 5.27 的常数。设 P_i 为一个抛物子群， $g \in G$, μ， $\nu \in \mathrm{Proba}_C(gP_i)$，我们定义：

$$d_b(\mu,\nu) := d_b(g^{-1}\mu, g^{-1}\nu).$$

这是良定义的，因为 d_b 是 P_i-不变的。
对于所有 $a \in X_c$，我们将定义一个伪度量，它将作为构造强双曲度量的关键工具。

定义 5.37。令 x， $y \in G$ 我们设：

- 当 $a \in X_c^\infty$, d_a（x, y） $:= d_b$（μ_x（a） μ_y（a））， 其中 d_b 是关联抛物子群上的强双曲度量，

- *when* $a \in X_c \backslash X_c^\infty$, $d_a(x,y) := \|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\|$.

特别地，对于所有 $a \in X_c$，关联函数 d_a 是一个伪度量。

下面的引理将用于证明一个关键结果，从而使我们能够精确控制 d_a。

我们回顾一下，对于所有 x，$y \in X_c$，对于所有 $M > 0$，$\Theta'(x, y)$ 表示连接 x 和 y 的测地线上的最小角度和，而 $\Theta'_{>M}(x, y)$ 表示连接 x 和 y 的测地线上大于 M 的最小角度和。

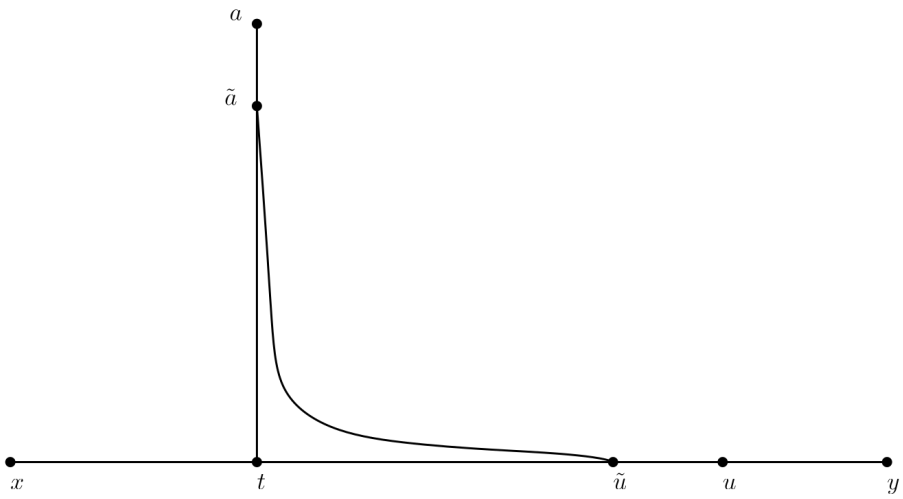


图15：三角形 $[\tilde{a}, t, \tilde{u}]$ 的各边上的角均由 100δ 控制。

引理 5.38。设 $[x,y]_c$ 是 X_c、$u \in [x,y]_c$ 和 $a \in X_c$ 中的一条测地线，且 $M > 100\delta$。设 $t \in X_c$ 是 a 在 $[x,y]_c$ 上的一个投影。

存在两条测地线 $[u,a]_c$、$[t,a]_c$，使得：

$$\Theta_{>M}(a,u) \geq \Theta_{>M}(a,t) - 12\delta,$$

其中 $\Theta_{>M}(a,u)$ $\Theta_{>M}(a,t)$ 分别表示在 $[a,u]_c$、$[a,t]_c$ 上大于 M 的角度和。特别地，我们有：

$$\Theta_{>M}(a,u) \geq \Theta'_{>M}(a,t) - 12\delta,$$

证明。我们可以假设 $u \in [y,t]_c$。我们选取一个如定理 3.23 中所述的测地三角形 $[u,a,t]_c$，其中三角形 $[\tilde{u},\tilde{a},\tilde{t}]_c$ 能够恰当地嵌入，并且满足 $[u,t]_c \subset [x,y]_c$，见图15。

首先，注意到 a 在 $[x,y]_c$ 上的投影 $\tilde{t} \in [u,t]_c \subset [x,y]_c$ 并且 $\tilde{t} \in [t,a]_c$ 那么 $\tilde{}$

在 , 其中 t , $\tilde{a}$, $\tilde{u}$ 并非各不相同 , 我们有 $[a,t]_c \subset [a,u]_c$ 结果可直接得出 y.

假设 $t, \tilde{a}, \tilde{u}$ 各不相同。记 $\Theta_{>M}(a,u)$ 为 $[a,u]_c$ 上大于 M 的角度和。当 $a \neq \tilde{a}$ 时，记 $[a,\tilde{a}]_c$ 中满足 $\tilde{a} \in e_1$ 的边为 e_1。记 $[\tilde{a},t]_c$ 中满足 $\tilde{a} \in e_2$ 的边为 e_2，并记 $[\tilde{a},\tilde{u}]_c$ 中满足 $\tilde{a} \in e_2'$ 的边为 e_2'。同理，记 $[\tilde{a},\tilde{u}]_c$ 中满足 $\tilde{u} \in f_1$ 的边为 f_1；当 $\tilde{u} \neq u$ 时，记 $[\tilde{u},u]_c$ 中满足 $\tilde{u} \in f_2$ 的边为 f_2。根据定理 3.23，沿 $[\tilde{a},\tilde{u}]$ 的角有界于 100δ，因此：

- $\Theta_{>M}(a,u) = \Theta_{>M}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2')]_{>M} + [\measuredangle_{\tilde{u}}(f_1,f_2)]_{>M} + \Theta_{>M}(\tilde{u},u)$,
- and $\Theta_{>M}(a,t) = \Theta_{>M}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)]_{>M}$,

约定当 e_1 未定义时，角 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2')$ 为零；当 f_1 未定义时，角 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2)$ 为零；当 f_1 未定义时，角 $\measuredangle_{\tilde{u}}(f_1, f_2)$ 为零。

根据三角不等式和命题 3.24，我们有：

$$|\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2') - \measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2)| \leq \measuredangle_{\tilde{a}}(e_2, e_2') \leq 12\delta.$$

这就得到了该命题的第一个不等式，最后一点可直接得出。

□

下面的计数引理将在后文中发挥作用。

引理 5. 39. 存在一个常数 $A \geq 1$ 和 $\gamma_G > 1$，使得对于所有 $x \in G$，以及所有整数 n ：

$$|\{a \in X_c \mid d'_{(2000\delta)^2}(x, a) \leq n\}| \leq A\gamma_G^n.$$

证明。 论证与命题 5.33 的证明类似，并结合了推论 3.18。

□

该引理表明，如果点 a 属于测地线周围的一个锥，那么点 a 与其在该测地线上的投影之间的角度之和是一致有界的。

引理 5.40. 设 x、$y \in X_c$ 和 $a \in X_c$，且 $t \in X_c$ 是 a 在 $[x, y]_c$ 上的投影，则存在一个整数 $C_0 > 0$，使得 $a \in$ 锥$^{(2000\delta)^2}([x, y]_c)$ 蕴含：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a, t) \leq C_0.$$

证明. 由于 $a \in$ 锥$^{(2000\delta)^2}([x, y]_c)$，我们知道 $d_c(a, t) \leq (2000\delta)^2$.M

此外，存在一个点 $u \in [x, y]_c$，以及一条从 u 到 a 的测地线，使得其中所有角度 S

测地线都为，b 由 $(2000\delta)^2$ 有界。

因此，根据引理 5.38，我们得到：

$$\Theta'_{(2000\delta)^2}(t, a) \leq 12\delta.$$

因此：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a, t) \leq (2000\delta)^2 + 12\delta,$$

并且由 $C_0 = (2000\delta)^2 + 12\delta$，我们得到所需结果。

□

利用这个命题，我们可以通过点 a 到测地线的距离，控制沿着一条趋向点 a 的测地线上两个连续掩码之间的差异。

命题 5.41. 设 $x, y \in G$ 和 $a \in X_c$。我们选取一条测地线 $[x, y]_c = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$，满足 $x_0 = x, x_n = y$ 和 $d_c(x_i, x_{i+1}) = 1$，对所有 $0 \leq i \leq n-1$ 均成立，且 $n = d_c(x, y)$。设 $i_0 \in [\![0, n]\!]$ 满足 x_{i_0} 是 a 在 $[x, y]_c$ 上的投影。若 $d'_{(2000\delta)^2}(a, x_{i_0}) \geq R_0$，其中 R_0 为推论 *5.31* 的常数，则对所有 $i \in [\![0, n]\!]$，有：

$$\|\mu_{x_i}(a) \Delta \mu_{x_{i+1}}(a)\| \leq \kappa^{-24\delta} \kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,t) + |i - i_0|},$$

其中 κ 表示命题 *5.30* 中的常数。

证明。 令 $i \in [\![0, i_0 - 1]\!]$。如果 $d'_{(2000\delta)^2}(a, x_{i_0}) \geq R_0$，根据引理 5.38，分别存在从 a 到 x_i 以及从 a 到 x_{i+1} 的两条测地线，使得沿这些测地线大于 $(2000\delta)^2$ 的角的和分别等于 $\Theta'_{(2000\delta)^2}(a, x_{i_0})$。

因此，根据推论 5.31 的第二点，我们得到如下结果：

$$\|\mu_{x_i}(a) \Delta \mu_{x_{i+1}}(a)\| \leq \kappa^{\Theta'_{(2000\delta)^2}(a, x_{i_0}) + \min(d_c(a, x_i), d_c(a, x_{i+1}))}.$$

根据引理 4.7，由于 x_{i_0} 是 a 在 $[x, y]_c$ 上的投影，我们有：

- $d_c(a,x_i) \geq d_c(a,x_{i_0}) + d_c(x_{i_0},x_i) - 24\delta \geq d(a,x_{i_0}) + i_0 - i - 24\delta$,
- $d_c(a,x_{i+1}) \geq d_c(a,x_{i_0}) + d_c(x_{i_0},x_{i+1}) - 24\delta \geq d_c(a,x_{i_0}) + i_0 - (i+1) - 24\delta$.

因此 $\min(d_c(a, x_i)\ d_c(a, x_{i+1})) \geq d_c(a, x_{i_0}) + i_0 - i - 24\delta$，并且我们有：

$$\|\mu_{x_i}(a)\Delta\mu_{x_{i+1}}(a)\| \leq \kappa^{-24\delta}\kappa^{-d'_{(2000\delta)^2}(a,t)-(i_0-i)}.$$

当 $i \in [\![i_0, n-1]\!]$ 时，同样的证明仍然适用。 □

以下定理是本节最重要的结果。对于所有 x, $y \in G$ 以及所有$a \in X_c^\infty$充分远离 $[x,y]_c$的情形，它使我们能够用群中 a 到测地线 $[x,y]_c$的距离的递减指数函数来控制 $d_a(x, y)$。

定理 5.42。令 x、$y \in G$和 $a \in X_c$，我们选取一条连接 x 与 y的测地线 $[x,y]_c$。令 $t \in X_c$为 a在 $[x,y]_c$上的一个投影。存在 $C_1 > 0$和 $K_1 > 0$，使得 $d'_{(2000\delta)^2}(a,t) > C_1$蕴含：

$$d_a(x,y) \leq K_1\kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,t)},$$

其中 κ表示命题 *5.30* 中的常数。

证明。记 $n := d_c(x, y)$。我们按如下方式对 $[x,y]_c$排序：$[x,y]_c = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$，其中 $x_0 = x$、$x_n = y$和 $d_c(x_i, x_{i+1}) = 1$对 $0 \leq i \leq n-1$成立。令 $i_0 \in [\![0,n]\!]$使得 $t = x_{i_0}$。我们先证明，对于所有满足以下条件的 $a \in X_c$：对 $d'_{(2000\delta)^2}(a, t) > C_0$，其中 C_0 为引理 5.40 中的常数，都有：

$$d_a(x,y) \leq C(\|\mu_{x_0}(a)\Delta\mu_{x_1}(a)\| + ... + \|\mu_{x_{n-1}}(a)\Delta\mu_{x_n}(a)\|),$$

其中 C 为命题 5.27 中的常数。

如果 a 具有有限价，则这显然成立。事实上：

$$\begin{aligned} d_a(x,y) &= \|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| \\ &\leq \|\mu_{x_0}(a)\Delta\mu_{x_1}(a)\| + ... + \|\mu_{x_{n-1}}(a)\Delta\mu_{x_n}(a)\| \\ &\leq C(\|\mu_{x_0}(a)\Delta\mu_{x_1}(a)\| + ... + \|\mu_{x_{n-1}}(a)\Delta\mu_{x_n}(a)\|) \text{ (since } C \geq 1). \end{aligned}$$

假设 $a \in X_c^\infty$，若 $d'_{(2000\delta)^2}(a, t) > C_0$，根据引理 5.40，我们知道 $a \notin 锥^{(2000\delta)^2}([x,y]_c)$。因此，根据推论 5.36，对于所有 $i \in [\![0, n-1]\!]$，$\mathrm{supp}(\mu_{x_i}(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_{x_{i+1}}(a)) \neq \varnothing$，并且根据定义 5.7，我们有：

$$d_a(x_i, x_{i+1}) \leq C\|\mu_{x_i}(a)\Delta\mu_{x_{i+1}}(a)\|.$$

因此：

$$\begin{aligned} d_a(x,y) &\leq d_a(x_0,x_1) + ... + d_a(x_{n-1},x_n) \\ &\leq C(\|\mu_{x_0}(a)\Delta\mu_{x_1}(a)\| + ... + \|\mu_{x_{n-1}}(a)\Delta\mu_{x_n}(a)\|). \end{aligned}$$

进一步假设 $d'_{(2000\delta)^2}(a, t) > R_0$，其中 $> R_0$为命题 5.41 中的常数。我们可以应用命题 5.41 得到如下结果。

$$\begin{aligned} d_a(x,y) &\leq C(\sum_{i=0}^{n-1}\|\mu_{x_i}(a)\Delta\mu_{x_{i+1}}(a)\| \text{ (since } C \geq 1) \\ &\leq C\kappa^{-24\delta}\sum_{i=0}^{n-1}\kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,t)+|i-i_0|} \text{ (Proposition 5.41)} \\ &\leq C\kappa^{-24\delta}\kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,t)}(\sum_{i=0}^{i_0}\kappa^i + \sum_{i=1}^{n-i_0-1}\kappa^i) \\ &\leq C\kappa^{-24\delta}\kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,t)}\frac{2}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

然后，利用 $C_1 = \max(C_0, R_0)$ 和 $K_1 = C\kappa^{-24\delta}\frac{2}{1-\kappa}$，我们得到所需结果。 □

5.5 无限价顶点处角与掩码的比较

在本节中，我们证明，对于锥化图中的点 x, y，对所有 $a \in X_c^\infty$， d_a 与从 a 观察到的 x 和 y 之间的角拟等距。

命题 5.43. 存在 $A, B > 0$，使得对于所有 $x, y \in X_c$ 和 $a \in X_c^\infty$, $a \neq x, y$:

$$\frac{1}{A} d_a(x,y) - B \leq \measuredangle_a(x,y) \leq A d_a(x,y) + B.$$

证明. 我们先证明，对于所有满足 $d_c(u,a) = 1$ 且 $d_c(v,a) = 1$ 的 $u, v \in X_c$ 和 $a \in X_c^\infty$，存在 $A > 0$，使得:

$$\frac{1}{A} d_b(\delta_u, \delta_v) \leq \measuredangle_a(x,y) \leq A d_b(\delta_u, \delta_v).$$

若我们将与 a 对应的抛物陪集记为 gH（针对 $g \in G$），并将 G 的一个子群记为 H，则将 H 中的图距离记为 d_H。因此， $d_H(u,v)$ 是 a 的 1- 邻域内连接 u、 v 的最短路径在 X_c 中的长度。

我们设两条边为 $e = \{a, u\}$ 和 $f = \{a, v\}$。该路径避开 a，因此根据角的定义:

$$\measuredangle_a(e,f) \leq d_H(u,v).$$

此外，根据定义 5.7，存在 $\beta > 1$，使得:

$$\frac{1}{\beta} d_b(\delta_u, \delta_v) - \beta \leq d_H(u,v) \leq \beta d_b(\delta_u, \delta_v) + \beta.$$

因此，

$$\measuredangle_a(e,f) \leq \beta d_b(\delta_u, \delta_v) + \beta.$$

对于反向不等式，假设 $\measuredangle_a(u, v) = n$，并将从 u 到 v 且避开 a 的最短路径上的顶点记为 u_1, ..., u_n。将每个 u_i 在 gH 上的投影记为 $\tilde{u_i}$。然后考察三角形 $[\tilde{u_i}, u_i, \tilde{u_{i+1}}]$，我们得到一条长度小于 $8\delta + 2$ 且避开 a 的路径，于是 $\measuredangle_a(\tilde{u_i}, \tilde{u_{i+1}}) \leq 8\delta + 2$。利用 X_c 一致细这一事实，可知过渡 $\tilde{u_i}^{-1}\tilde{u_{i+1}}$ 只有有限个。因此，存在 $K > 0$，使得 $d_H(\tilde{u_i}, \tilde{u_{i+1}}) \leq K$。因此， $d_H(u, v) \leq nK \leq \measuredangle_a(u, v)K$.

由第一个点，我们得出存在 $A > 1$ 使得:

$$\frac{1}{A} d_b(\delta_u, \delta_v) - A \leq \measuredangle_a(u,v) \leq A d_b(\delta_u, \delta_v) + A.$$

特别地，对于所有 $x, y \in X_c$、所有 $a \in X_c^\infty$，以及所有满足 $d_c(u, a) = d_c(v, a) = 1$ 的 $u \in I_c(x, a)$ 和 $v \in I_c(y, a)$，这些不等式均成立。

此外，根据定义 5.23， $\delta_u = \mu_u(a)$，因为流的第一个部分是平稳的；根据引理 5.34， $u \in \mathrm{supp}(\mu_x(a))$。因此，根据定义 5.7，我们有:

$$d_b(\delta_u, \mu_x(a)) \leq 2C.$$

同理，我们有 $d_b(\delta_v, \mu_y(a)) \leq 2C$，那么对于所有满足 $d_c(u, a) = d_c(v, a) = 1$ 的 $u \in I_c(x, a)$ 和 $v \in I_c(y, a)$，我们有:

$$\frac{1}{A} d_b(\mu_x(a)\mu_y(a)) - \frac{1}{A} 2C - A \leq \measuredangle_a(u,v) \leq A d_b(\mu_x(a)\mu_y(a)) + A2C + A.$$

由于这个不等式成立，对于所有满足 $d_c(u, a) = d_c(v, a) = 1$ 的 $u \in I_c(x, a)$ 和 $v \in I_c(y, a)$，我们有:

$$\frac{1}{A} d_a(x,y) - B \leq \measuredangle_a(x,y) \leq A d_a(x,y) + B,$$

其中对于某些 B 和 $d_a(x,y) = d_b(\mu_x(a)\ \mu_y(a))$，根据定义 5.37。

□

5.6 强双曲度量

在本小节中，我们将定义强双曲度量，并证明它确实是一个度量。在定义它之前，我们需要一些预备引理。

引理 5.44. 设 $M > 6\delta$。设 $x, y \in X_c$ 为一条连接 x 和 y 的测地线 $[x,y]_c$，且 $z \in Cone_M([x,y]_c)$。那么对所有 $v \in X_c$, $v \neq x, y, z$，有：

- $\measuredangle_v(x,z) \leq 2M$,
- 或 $\measuredangle_v(z,y) \leq 2M$.

证明。 我们将用反证法证明，不存在满足下式的 v：

- $\measuredangle_v(x,z) > 2M$,
- $\measuredangle_v(z, y) > 2M$.

在这种情况下，若 $z \in [x,y]_c$，如果存在这样的 v，根据命题 3.5，这意味着$v \in [x,z]_c \cap [z,y]_c$，这是不可能的。

假设 $z \notin [x,y]_c$，我们将 t记作 z在 $[x,y]_c$上的一个投影。由于 $z \in Cone_M([x,y]_c)$，对于所有 $v \neq t$，我们有：

$$\measuredangle_v(z,t) \leq M,$$

此外，我们有：

$$\measuredangle_t(x,z) \leq M, \measuredangle_t(z,y) \leq M.$$

这直接意味着 $t \neq v$。我们两次应用三角不等式，得到 t:

- $2M < \measuredangle_v(x,z) \leq \measuredangle_v(x,t) + \measuredangle_v(t,z)$,
- $2M < \measuredangle_v(y, z) \leq \measuredangle_v(y, t) + \measuredangle_v(t, y)$。

因此，根据命题 3.5，我们再次得到 $v \in [x,t]_c \cap [t,y]_c$，这与反证法矛盾。

□

下面的引理是锥化图中引理 4.6 的一个类似结果，涉及锥化距离以及沿测地线的角度和。

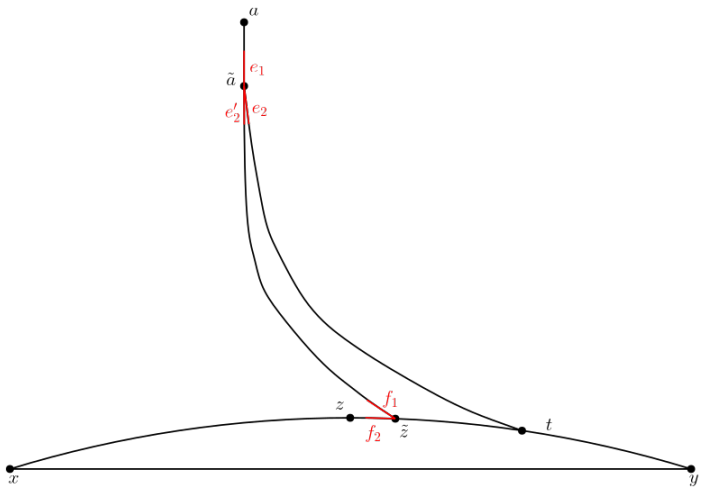


图 16： a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影位于 $[x,z]$中， t 是 a 在 $[z,y]_c$ 上的投影。

引理 5.45。 设 $x, y \in X_c$，我们选取一条连接 x 和 y 的测地线 $[x,y]_c$。设 $z \in Cone_{26\delta+2}([x,y]_c)$，我们选取两条测地线 $[x,z]_c$ 和 $[z,y]_c$，分别连接 x, z 以及 z, y。设 $a \in X_c$ 满足 $d_c(a,[x,z]_c \cup [z,y]_c) = d_c(a,[x,z]_c)$。记 $t \in X_c$ 为 a 在 $[z,y]_c$ 上的一个投影。那么存在一个常数 $V \geq 0$，它与 x, y, z, a 无关，使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,t) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z) - V - \measuredangle_t(a,z),$$

其中 α_2^2 是命题 3.19 中定义的常数。

证明。 我们在与引理相同的假设下选取 x，y，z，a，$t \in X_c$。当 $z = t$ 时结论显然成立，因此我们假设 $z \neq t$。根据引理 4.6，取适当的常数，可知存在 $V > 0$，使得 $d_c(a,t) \geq d_c(a,z) - V$。我们考虑定理 3.23 中的三角形 $[a,z,t]_c$。我们可以选取边 $[z,t]_c$，使得 $[z,t]_c \subset [z,y]_c$。注意，由于 t 是 a 在 $[z,y]_c$ 上的投影，$\tilde{t} = t$（见图 16）。我们分别用 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t)$、$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,z)$ 表示 $[a,t]_c$、$[a,z]_c$ 上大于 $2000\delta^2$ 的角度和。需要考虑两种情况。

在第一种情况下，我们假设 $\tilde{a}$、$\tilde{z}$、t 彼此不同。若 $a \neq \tilde{a}$，我们将 $[a,\tilde{a}]_c$ 上满足 $\tilde{a} \in e_1$ 的边记为 e_1，并分别将 $[\tilde{a},t]_c$、$[\tilde{a},z]_c$ 中满足 $\tilde{a} \in e_2 \cap e_2'$ 的边记为 e_2、e_2'。若 $z \neq \tilde{z}$，我们分别将 $[a,\tilde{z}]_c$、$[z,\tilde{z}]_c$ 中满足 $\tilde{z} \in f_1 \cap f_2$ 的边记为 f_1、f_2，见图 16。我们考虑 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2)$ $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2')$ $\measuredangle_{\tilde{z}}(f_1, f_2)$，并约定在边未定义的情况下，这些角均等于零。

那么根据定理 3.23，我们有：

- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)]_{(2000\delta)^2}$，
- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,z) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2')]_{(2000\delta)^2} + [\measuredangle_{\tilde{z}}(f_1,f_2)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{z},z)$.

首先，我们说明：

$$|\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2) - \measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2')| \leq \measuredangle_{\tilde{a}}(e_2,e_2') \leq 12\delta,$$

根据命题 3.24。

现在我们将通过反证法证明：

$$[\measuredangle_{\tilde{z}}(f_1,f_2)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{z},z) = 0.$$

因此，我们假设：

- 存在 $v \in]z, \tilde{z}[$，使得 $\measuredangle_v(z,a) > (2000\delta)^2$。
- 或 $\measuredangle_{\tilde{z}}(f_1,f_2) > (2000\delta)^2$。

我们用 u 表示 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影，回顾一下 $u \in [x,z]_c$。假设我们处于第一种情况，则存在 $v \in]z, \tilde{z}[$ 使得：

$$\measuredangle_v(z,y) > (2000\delta)^2.$$

由于 u 是 z 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影，因此我们还有如下结论：

$$\measuredangle_v(a,u) \leq 12\delta.$$

根据三角不等式，我们得到如下结论：

$$\measuredangle_v(u,z) \geq 2000\delta - 12\delta.$$

由于 $u \in [x,z]_c$，我们有：

$$\measuredangle_v(x,z) \geq 2000\delta - 12\delta.$$

于是我们得到了与引理 5.44 矛盾的结论。

在 $\measuredangle_{\tilde{z}}(f_1, f_2) > (2000\delta)^2$, 的情况下，我们有 $\measuredangle_{\tilde{z}}(z, a) > (2000\delta)^2$。根据 $\tilde{z}$ 的定义，我们有$\measuredangle_{\tilde{z}}(z, y) > (2000\delta)^2 - 12\delta$，依据命题 3.24。由于 u 是 $[x, z]_c \cup [z, y]_c$ 的投影，我们有：

$$\measuredangle_{\tilde{z}}(a, u) \leq 12\delta.$$

因此：

$$\measuredangle_{\tilde{z}}(z, u) \geq 2000\delta - 12\delta,$$

由于 $u \in [x, z]_c$，我们得到：

$$\measuredangle_{\tilde{z}}(x, u) \geq 2000\delta - 12\delta$$

于是根据引理 5.44，我们得到反证法。

应用命题 3.19 即可得出结论。

在第二种情形下，三角形 $[z, a, t]_c$ 是一棵三叉树，因为 t 是 a 在 $[z, y]_c$ 上的投影，所以我们有 $t \in [a, z]_c$。因此：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a, z) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a, t) + [\measuredangle_t(z, a)]_{(2000\delta)^2}.$$

我们再次应用命题 3.19 得出结论。

□

这个引理使我们能够控制引理 5.45 中的角 $\measuredangle_t(a, z)$。

引理 5.46。设 x、$y \in X_c$，我们选取一条连接 x 和 y 的测地线 $[x, y]_c$。设 $z \in Cone_{26\delta+2}([x, y]_c)$，我们分别选取连接 x、z 以及 z、y 的两条测地线 $[x, z]_c$ 和 $[z, y]_c$。设 $a \in X_c$ 使得 $d_c(a、[x, z]_c \cup [z, y]_c) = d_c(a、[x, z]_c)$。我们将 a 在 $[z, y]_c$ 上的一个投影记为 $t \in X_c$。如果 $\measuredangle_t(z、a) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta$，则：

$$|\theta(d_a(x, y)) - \theta(d_a(x, z)) - \theta(d_a(z, y))| = 0.$$

证明。我们将使用命题 5.28 证明在此情形下：

$$\mu_x(a) = \mu_z(a).$$

根据命题 5.28，我们有 $\mu_z(a) = \mu_t(a)$。

我们将 $u \in [x, z]_c$ 记作 a 在 $[x, z]_c \cup [z, y]_c$ 上的一个投影。因此，我们有：

$$\measuredangle_t(a, u) \leq 12\delta.$$

因此：

$$\measuredangle_t(z, u) \geq (2000\delta)^2,$$

并且由于 $u \in [x, z]_c$，我们得到，

$$\measuredangle_t(x, u) \geq (2000\delta)^2.$$

然后再次应用命题 5.28，得到：

$$\mu_x(a) = \mu_t(a).$$

因此，我们最终得到：

$$\begin{aligned}
&|\theta(d_a(x, y)) - \theta(d_a(x, z)) - \theta(d_a(z, y))| \\
=&|\theta(d_b(\mu_t(a), \mu_y(a))) - \theta(d_b(\mu_t(a), \mu_y(a))) - \theta(d_b(\mu_t(a), \mu_t(a)))| \\
=&0.
\end{aligned}$$

□

下面的引理是锥化图中引理 4.7 的一个类似结果，涉及锥化距离以及沿测地线的角度和。

引理 5.47。 存在一个常数 $W \geq 0$，使得对于所有 x、$y \in X_c$，任意测地线 $[x,y]_c$，对于所有 $a \in X_c$，令 $t \in X_c$ 为 a 在 $[x,y]_c$上的一个投影，则对于所有 $z \in [x,y]_c$，有：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,z) \geq \frac{1}{\alpha_2^2}(d'_{(2000\delta)^2}(a,t) + d_c(t,z)) - W,$$

其中 α_2 是命题 *3.19* 中定义的一个常数。

证明。 根据引理 4.7，我们有：

$$d_c(a,z) \geq d_c(a,t) + d_c(t,z) - 24\delta.$$

然后，根据引理 5.38，存在两条测地线 $[a,t]_c$、$[a,z]_c$，使得：

$$\Theta_{(2000\delta)^2}(z,a) \geq \Theta_{(2000\delta)^2}(t,a) - 12\delta,$$

其中，$\Theta_{(2000\delta)^2}$（z，a）和 $\Theta_{(2000\delta)^2}$（t，a）表示这两条测地线上大于（2000δ）^{2} 的角度和。

然后，应用命题 3.19 即可得出结论。

□

下面的　　引理是引理 4.8 在相对双曲群框架下的一个类比　　.

引理 5.48。 设为 $x,y \in X_c$，我们选取一条连接 x 和 y 的 $[x,y]_c$测地线。设 $z \in cone_{26\delta+2}([x,y]_c)$ 是一个顶点。我们分别选取两条测地线，一条连接 $[x,z]_c$ 和 $[z,y]_c$，另一条分别连接 x,z 与 z,y。

设 $a \in X_c$, $u \in X_c$ 是 a 在 $[x,y]_c$ 上的一个投影，且 $v \in X_c$ 是 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的一个投影。存在一个仅取决于 δ 的 $Z > 0$，使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,u) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,v) - Z - \measuredangle_u(a,v).$$

证明。 根据引理 4.8，取适当的常数后，存在一个仅取决于 δ 的 $Z > 0$，使得：

$$d_c(a,u) \geq d_c(a,v) - Z.$$

为完成该引理的证明，我们需要证明对所有 $w \in X_c$, $w \neq, v, u$，均有：

$$\measuredangle_w(u,v) \leq 300\delta$$

首先，让我们证明这一事实。
令 t 表示 z 在 $[x,y]_c$ 上的投影。
我们先用反证法证明：

$$\measuredangle_z(u,v) \leq 300\delta.$$

假设：

$$\measuredangle_z(u,v) > 300\delta.$$

由于 v 是 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影，因此有：

$$\measuredangle_z(a,v) \leq 12\delta.$$

不失一般性地，假设 $v \in [x,z]_c$，则可得：

$$\measuredangle_z(u,x) > 300\delta,$$

这意味着 $z \in [x,u]_c \subset [x,y]_c$。综上，根据三角不等式，我们有：

$$\measuredangle_z(a,u) \geq \measuredangle_z(u,v) - \measuredangle_z(a,v) > 12\delta,$$

这与 u 是 a 在 $[x,y]_c$ 上的投影这一事实矛盾。用同样的思路，我们还有：

$$\measuredangle_t(u,v) \leq 300\delta.$$

当 $w \neq z,t$ 时，我们将对 u 与 t 之间的角、v 与 z 之间的角进行估计，并根据三角不等式以及 z 与 t 之间的角有界这一事实得出结论。

设存在 $w \neq v, w \neq z$，使得：

$$\measuredangle_w(v,z) > 100\delta.$$

根据命题 3.5，这意味着 $w \in [x,z]_c \cup [z,y]_c$。此外，由于 v 是 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影，我们有：

$$\measuredangle_w(a,v) \leq 12\delta.$$

不失一般性，设 $v \in [x,z]_c$，则可得：

$$\measuredangle_w(x,z) > 100\delta.$$

因此：

$$\measuredangle_w(x,t) \geq \measuredangle_w(x,z) - \measuredangle_w(x,t) \geq 100\delta - (26\delta + 2) > 12\delta.$$

因此 $w \in [x,t]_c \subset [x,y]_c$。

然而：

$$\measuredangle_w(a,u) \geq \measuredangle_w(u,v) - \measuredangle_w(a,v) > 12\delta,$$

这与 u 是 $[x,y]_c$ 上 a 的投影这一事实矛盾。同理，u 和 t 之间的每个角都被 100δ 所界。因此，对于所有 $w \neq z,t$，我们有：

$$\measuredangle_w(u,v) \leq \measuredangle_w(u,t) + \measuredangle_w(t,z) + \measuredangle_w(z,v) \leq 300\delta.$$

现在我们说明这一事实足以得出结论。考虑定理 3.23 中的三角形 $[a,u,v]$。先假设这个三角形是一个三叉树。若 $u \in [a,v]_c$，则有：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,v) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,u) + [\measuredangle_u(a,v)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(u,v) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,u) + [\measuredangle_u(a,v)]_{(2000\delta)^2},$$

根据 g 不等 q式 y 5.6，并根据 g 命题 p3.19 得出结论。

若 $u \notin [a,v]_c$，我们将 w 记为三叉树的中心，并且有：

- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,v) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,w) + [\measuredangle_w(a,v)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(w,v)$
- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,u) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,w) + [\measuredangle_w(a,u)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(w,u)$

根据不等式 5.6，我们有 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(w,v) = 0$。为了控制 $[\measuredangle_w(a,v)]_{(2000\delta)^2}$，我们应用三角不等式，得到：

$$|\measuredangle_w(a,v) - \measuredangle_w(a,u)| \leq \measuredangle_w(u,v),$$

并且我们再次使用不等式 5.6。

现在假设 $[a,u,v]$ 不是三叉树，那么 $\tilde{a}$，$\tilde{u}$，$\tilde{v}$ 均不相同。若 $a \neq \tilde{a}$，我们用 e_1 表示 $[a,\tilde{a}]_c$ 上的边，使得 $\tilde{a} \in e_1$，并用 e_2，e_2' 分别表示 $[\tilde{a},v]_c$、$[\tilde{a},u]_c$ 的边，使得 $\tilde{a} \in e_2 \cap e_2'$。若 $v \neq \tilde{v}$，我们用 f_1，f_2 分别表示 $[a,\tilde{v}]_c$、$[v,\tilde{v}]_c$ 的边，使得 $\tilde{v} \in f_1 \cap f_2$。我们考虑 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2)$ $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2')$ $\measuredangle_{\tilde{v}}(f_1, f_2)$，并约定在边未定义的情形下，角均为零。于是得到：

- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,u) \geq \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_{r2})]_{(2000\delta)^2}$,
- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,v) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)]_{(2000\delta)^2} + [\measuredangle_{\tilde{v}}(f_1,f_2)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{v},v)$.

根据不等式 5.6，我们有：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{v},v) = 0.$$

根据命题 3.24，$|\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,\ e_2')-\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,\ e_2)|$ 有界。最后，根据命题 3.24，$\measuredangle_{\tilde{v}}(f_1,\ f_2)$与 $\measuredangle_{\tilde{v}}(v,\ u)$接近，而根据公式 5.6，后者有界。

我们通过应用命题 3.19 得出结论。

□

这个引理使我们能够控制引理 5.48 中的角 $\measuredangle_u(v,\ a)$。

引理 5.49。设为 $x,y \in X_c$，我们选取一条连接 x 和 y 的测地线 $[x,y]_c$。设 $z \in cone_{26\delta+2}([x,y]_c)$ 为一个顶点。我们分别选取两条测地线，连接 $[x,z]_c$ 和 $[z,y]_c$、x 和 z、z 和 y。

设 $a \in X_c$，$u \in X_c$ 是 a 在 $[x,y]_c$ 上的投影，$v \in X_c$ 是 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影。若 $\measuredangle_u(a,v) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta$，则：

$$|\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| = 0.$$

证明。不失一般性，假设 $v \in [x,z]_c$。我们将利用命题 5.28 证明在这种情况下：

$$\mu_x(a) = \mu_z(a).$$

根据角度三角不等式，我们有：

$$\measuredangle_u(a,x) \geq \measuredangle_u(a,v) - \measuredangle_u(v,x).$$

当 $\measuredangle_u(v,z) \geq 12\delta$ 时，这意味着 $u \in [v,x]_c$，进而，$\measuredangle_u(a,v) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta$ 的情况与 v 是 a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$ 上的投影这一事实相矛盾。因此：

$$\measuredangle_u(a,x) \geq (2000\delta)^2.$$

根据命题 5.28，我们得到 $\mu_x(a) = \mu_u(a)$。

同样的思路可用于证明 $\mu_z(a) = \mu_u(a)$。

因此，我们最终得到：

$$\begin{aligned}
&|\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\
=&|\theta(d_b(\mu_u(a),\mu_y(a))) - \theta(d_b(\mu_u(a),\mu_y(a))) - \theta(d_b(\mu_u(a),\mu_u(a)))| \\
=&0.
\end{aligned}$$

□

命题 5.50。存在一个实数 $P \geq p_0 > 1$，其中 p_0 是命题 *5.3* 中的实数，并且存在一个常数 $\sigma > 0$，使得对所有 $x \in G$：

$$\sum_{a \in X_c} \kappa^{\frac{P}{\alpha_2^4} d'_{(2000\delta)^2}(a,x)} \leq \sigma.$$

其中 κ 是命题 *5.30* 的常数，α_2 是命题 *3.19* 的常数。

证明。我们固定 $x \in X_c$。

根据引理 5.39，存在与 x 无关的 $A \geq 1$ 和 $\gamma_G > 1$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$，集合 $S_{d'^{(2000\delta)^2}}(n) = \{a \in X_c, d'^{(2000\delta)^2}(a,x) = n\}$ 的基数小于 $A\gamma_G^n$。因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，对于所有 $P \in \mathbb{R}$：

$$\sum_{a \in S_{d'^{(2000\delta)^2}}(n)} \kappa^{\frac{P}{\alpha_2^4} d'^{(2000\delta)^2}(a,x)} \leq \kappa^{\frac{P}{\alpha_2^4} n} A\gamma_G^n.$$

We ^{P}选择 P，使得 $\kappa^{\alpha_2^4} \leq \frac{1}{\gamma_G}$，因此该和收敛，且与 x 无关 . □

我们在此定义一个从 $\mathbb{R}_+$ 到 $\mathbb{R}_+$ 的函数：当取值较大时，它等于恒等函数乘以一个常数；当取值较小时，它等于 $t \mapsto t^P$。强双曲度量将定义为所有 $a \in X_c$ 的 d_a 之和，并对这些量应用此函数。其思路是，当抛物子群的贡献较小时，该度量将类似于双曲情形下的度量。当抛物子群的贡献较大时，我们将依靠 d_a 的强双曲性。

定义 5.51. 令 t_0 为一个常数，满足 $t_0 \geq A((2000\delta)^2 + 18\delta) + AB + 2$，其中 A, B 是命题 *5.43* 中的常数。

我们将 $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 定义为：

$$\theta(t) = \begin{cases} t^P & if\ t \leq t_0 \\ t_0^{P-1} t & if\ t \geq t_0. \end{cases}$$

其中 P 是命题 *5.50* 中的实数。

我们来检验 θ 是否为利普希茨函数。

引理 5.52. θ 是 Pt_0^{P-1}-利普希茨的。

证明. θ 除在 t_0 和 $|\theta'| \leq Pt_0^{P-1}$ 处外处处可微。

θ 在 $[0, t_0]$ 和 $[t_0, \infty[$ 上显然是 Pt_0^{P-1}-利普希茨的。

设 $s < t_0 < t$。

$$\begin{aligned} \theta(t) - \theta(s) &= \theta(t) - \theta(t_0) + \theta(t_0) - \theta(s) \\ &\leq Pt_0^{P-1}(t - s). \end{aligned}$$

□

这里注意到，对所有 $a \in X_c$，x，$y \in G$ 当值 $d_a(x,\ y)$ 较大时，a 具有无限价。

引理 5.53。设 x、$y \in G$ 和 $a \in X_c$ 满足 $d_a(x,y) \geq t_0$，则：

- $a \in X_c^\infty$，
- $\measuredangle_a(x,y) \geq (2000\delta)^2 + 18\delta$ 并且特别地，x 与 y 之间的每条测地线都经过 a。

证明。令 x，$y \in G$ 和 $a \in X_c$，$d_a(x,\ y) \geq t_0 \geq A((2000\delta)^2 + 18\delta) + AB$ 满足 A，B 为命题 5.43 中的常数。根据定义，对于所有 $a \in G$，对于所有 x，$y \in G$，$d_a(x,\ y) \leq 2$。由于 $t_0 \geq 2$，$a \in X_c^\infty$。

此外，根据命题 5.43，我们有 $\measuredangle_a(x,\ y) \geq (2000\delta)^2 + 18\delta$。

最后，这 这意味着，根据命题，a 属于 x 和 y 之间的每一条测地线。

3.12.

□

引理 5.54。对于所有 $x, y \in G$，和

$$\sum_{a \in X_c} d_a(x,y)^P,$$

是有限的。

证明。根据命题 5.3，对于所有 $x,\ y \in X_c$，存在有限个 $a \in X_c$ 使得：

$$||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)|| = 2.$$

否则，和 $\sum_{a\in X} ||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)||^{p_0}$ 将发散，其中 p_0 是命题 5.3 中的整数。

那么集合 $\mathrm{E}_{x,y} := \{a \in X_c^{c} \mid ||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)|| = 2\}$ 是有限的。

此外，对于所有 $a \in X_c/\mathrm{E}_{x,y}$，我们有 $\mathrm{supp}(\mu_x(a)) \cap \mathrm{supp}(\mu_y(a)) \neq \varnothing$，于是根据定义 5.7：

$$d_a(x,y) \leq C||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)||.$$

因此：

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in X_c} d_a(x,y)^P &= \sum_{a\in\mathcal{E}_{x,y}} d_a(x,y)^P + \sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{E}_{x,y}} d_a(x,y)^P \\
&\leq \sum_{a\in\mathcal{E}_{x,y}} d_a(x,y)^P + C^P \sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{E}_{x,y}} ||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)||^P \text{ (according to the previous remark)} \\
&\leq \sum_{a\in\mathcal{E}_{x,y}} d_a(x,y)^P + C^P \sum_{a\in X_c} ||\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)||^P \\
&< \infty \text{ （根据命题 5.3 以及 } P \geq p_0 \text{ 这一事实）.}
\end{aligned}$$

这就证明了该引理。

□

正如在双曲群的情形中一样，我们在此定义一个函数，它与度量相差一个常数。

命题 5.55。对于所有 $x,\ y \in G$,

$$D(x,y) := \sum_{a\in X_c} \theta(d_a(x,y))$$

是有限的。

证明。令 $x,\ y \in G$，令 $[x,y]_c$ 为连接 x 和 y 的一条测地线。令 $a \in X_c$ 使得 $d_a(x,\ y) \geq t_0$，则根据引理 5.53，我们有 $a \in [x,y]_c$。

因此我们得到如下结论：

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \sum_{a\in[x,y]_c} \theta(d_a(x,y)) + \sum_{a\in X_c\setminus[x,y]_c} \theta(d_a(x,y)) \\
&= \sum_{a\in[x,y]_c} \theta(d_a(x,y)) + \sum_{a\in X_c\setminus[x,y]_c} d_a(x,y)^P \text{ (according to the previous remark)} \\
&\leq \sum_{a\in[x,y]_c} \theta(d_a(x,y)) + \sum_{a\in X_c} d_a(x,y)^P \\
&< \infty \text{ (according to Lemma 5.54 and the fact that } [x,y]_c \text{ is finite.)}
\end{aligned}$$

□

以下性质至关重要，因为它将使我们能够证明 D 满足粗三角不等式。它还将用于证明强双曲度量是弱测地的。在双曲群的情形下，证明思路与命题 4.9 的证明非常相似，但也存在一些额外的技术困难。下一个命题尤其适用于两个顶点 $x,\ y \in G$ 以及每个 $z \in G \cap I_c(x,\ y)$。

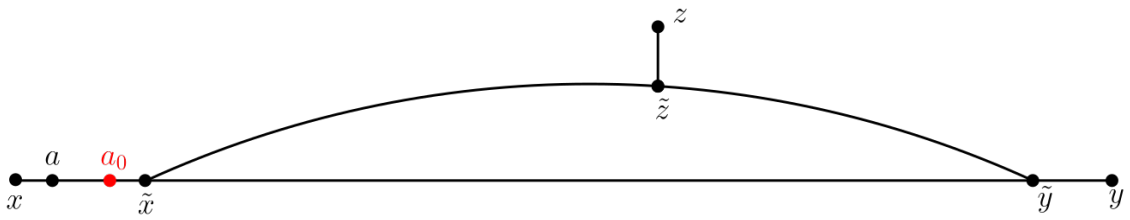


图17：如果 $a_0 \in \mathrm{B}$，那么 a_0 是一个检查点，并且 $\mu_z(a) = \mu_y(a)$。

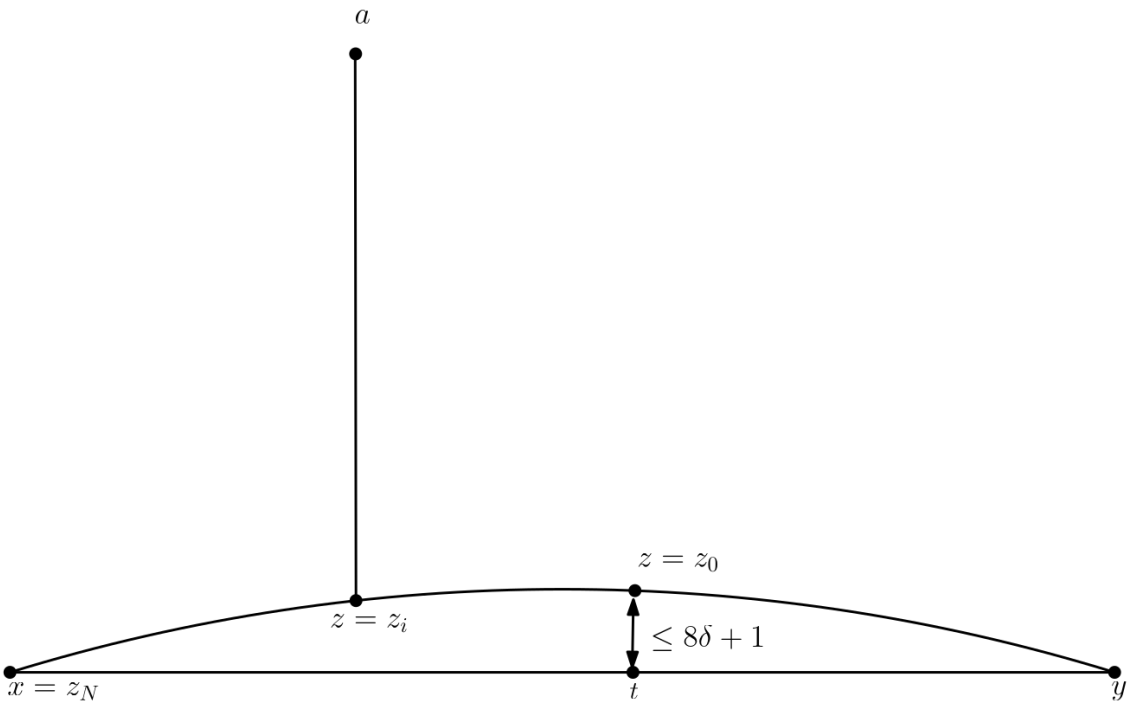


图18： a 在 $[x,z]_c \cup [z,y]_c$上投影到 z_i

命题 5.56。 存在 $\nu > 0$，使得对所有 x、$y \in G$，以及连接 x 和y 的所有测地线 $[x,y]_c$，并且对所有满足 $z \in Cone_{26\delta+2}([x,y]_c)$ 的 $z \in G$，均有：

$$|D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)| \leq \nu.$$

证明。 在命题的假设下，令 x，$y \in G$ 和 $z \in G$。我们将证明存在$\nu > 0$ 使得：

$$|D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)| \leq \sum_{a \in X_c} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \leq \nu.$$

首先注意到，由于 $z \in Cone_{26\delta+2}([x,y]_c)$，根据引理 5.44，对于所有 $a \in X_c$，我们有：

$$d_a(x,z) < t_0 \text{ or } d_a(z,y) < t_0,$$

其中 t_0 是定义 5.51 中的常数。

因此，对于所有 $a \in X_c$，不失一般性地假设 $d_a(z,y) < t_0$，我们有：

$$\begin{aligned}|\theta(d_a(x,\ y)) - \theta(d_a(x,\ z)) - \theta(d_a(z,\ y))| &\le P t_0^{P-1} |d_a(x,\ y) - d_a(x,\ z)| + \theta(d_a(z,\ y)) \quad \text{（根据引理 5.52）} \\ &\le P t_0^{P-1} d_a(z,y) + d_a(z,y)^P \\ &\le (P+1) t_0^P,\end{aligned}$$

其中 P 是命题 5.50 中的实数。

将满足以下条件的 $a \in X_c$ 记为集合 B：

- $d_a(x,y) \ge t_0$,
- 或 $d_a(x,\ z) \ge t_0$,
- 或 $d_a(z,\ y) \ge t_0$。

我们将开始证明：

$$\sum_{a \in \mathcal{B}} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \le 4 t_0^P (P+1).$$

考虑定理 3.23 中的三角形 $[x,y,z]_c$。

根据公式 5.6，我们有：

- $\mathcal{B} \cap [z, \tilde{z}[= \varnothing$,
- 且 $\tilde{z} \in \mathcal{B}$ 意味着 $\tilde{z} = \tilde{x} = \tilde{y}$。

因此，我们有：

$$\mathcal{B} \subset ([x,\tilde{x}]_c \cup [\tilde{y},y]_c) \cap X_c^\infty.$$

若 $\mathcal{B} \cap [x,\tilde{x}[_c \neq \varnothing,$，我们将 a_0 定义为 $\mathcal{B} \cap [x,\tilde{x}[_c$ 中距离 $\tilde{x}$最近的点，见图17。我们将证明，对于所有 $a \in \mathcal{B} \cap [x,\tilde{x}[_c, a \neq a_0,$，都有：

$$\mu_z(a) = \mu_{a_0}(a) \text{ and } \mu_y(a) = \mu_{a_0}(a),$$

这将推出：

$$\begin{aligned}&|\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\ =&|\theta(d_b(\mu_x(a), \mu_{a_0}(a))) - \theta(d_b(\mu_x(a), \mu_{a_0}(a))) - \theta(d_b(\mu_{a_0}(a), \mu_{a_0}(a)))| \\ =&0.\end{aligned}$$

为此，我们将证明，对于这样的 a，有 $\measuredangle_{a_0}(a,\ z) \ge (2000\delta)^2,$，且 $\measuredangle_{a_0}(a,\ y) \ge (2000\delta)^2$，然后应用命题 5.28。由于 $a_0 \in [x,\tilde{x}[_c,$，我们知道 $a_0 \notin [z,y]_c$，因此根据引理 5.53，我们知道 $d_{a_0}(z,\ y) < t_0$。于是 $a_0 \in \mathcal{B}$ 意味着 $d_{a_0}(x,\ y) \ge t_0$，或者 $d_{a_0}(z,\ y) \ge t_0$。

在 $d_{a_0}(x,y) \ge t_0$ 的情况下，根据引理 5.53，我们知道 $\measuredangle_{a_0}(x,y) \ge (2000\delta)^2 + 6\delta$。由于 $a \in I_c(x, a_0)$，根据命题 3.12 的第二点，$\measuredangle_{a_0}(a,y) \ge (2000\delta)^2 + 12\delta > (2000\delta)^2$。因此，我们推得：

$$\measuredangle_{a_0}(a,z) \ge \measuredangle_{a_0}(a,y) - \measuredangle_{a_0}(y,z) \ge (2000\delta)^2,$$

因为 $a_0 \notin [y,z]_c$。对于情形 $d_{a_0}(x,z) \ge t_0$，我们也采用相同的方法。

因此，当 B $\cap [x,\tilde{x}[_c \neq \varnothing$ 时：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x,\tilde{x}]_c} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\
&\leq |\theta(d_{a_0}(x,y)) - \theta(d_{a_0}(x,z)) - \theta(d_{a_0}(z,y))| + |\theta(d_{\tilde{x}}(x,y)) - \theta(d_{\tilde{x}}(x,z)) - \theta(d_{\tilde{x}}(z,y))| \\
&\leq 2(P+1)t_0^P.
\end{aligned}$$

当 B $\cap [x,\tilde{x}]_c = \varnothing$ 时，不等式显然成立；对 B $\cap [\tilde{y},y]_c$ 进行相同的计算后，我们可推出：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in\mathcal{B}} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\
&= \sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x,\tilde{x}]_c} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\
&+ \sum_{a\in\mathcal{B}\cap[\tilde{y},y]_c} |\theta(d_a(x,y)) - \theta(d_a(x,z)) - \theta(d_a(z,y))| \\
&\leq 4t_0^P(P+1).
\end{aligned}$$

现在，我们将证明存在一个常数 ν_1，使得：

$$\sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{B}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P| \leq \nu_1.$$

我们有：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{B}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P| \\
&\leq \sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P| \\
&+ \sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[z,y]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P|.
\end{aligned}$$

我们将对第一个和作上界估计；同样的思路也适用于第二个和。对于所有满足 $d_c(a,\ [x,z]_c\cup[z,y]_c) = d_c(a,\ [x,z]_c)$ 的 $a\in X_c$，记 t 为 a $[z,y]_c$ 的一个投影。我们可以假设 $\measuredangle_t(a,\ z) < (2000\delta)^2 + 12\delta$；否则，根据引理 5.46，我们有：

$$|d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P| = 0.$$

那么根据引理 5.45，存在一个与 a 无关的 $V > 1$（至多改变 V），使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,t) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z) - V. \tag{4}$$

同理，令 u a 在 $[x,y]_c$ 上的投影为 v，并令 v 在 $[x,z]_c\cup[z,y]_c$ 上的投影为 $[x,z]_c\cup[z,y]_c$，根据引理 5.49，我们总可以假设 $\measuredangle_u(a,\ v) \leq (2000\delta)2 + 12\delta$。根据引理 5.45，存在一个常数 $Z > 1$（至多改变 Z），使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,u) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,v) - Z. \tag{5}$$

我们得到如下结果：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P| \\
&\leq \sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P| + d_a(z,y)^P \\
&\leq \sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P| \\
&+ \sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} d_a(z,y)^P.
\end{aligned}$$

首先，我们对和给出上界：

$$\sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B}|d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} d_a(z,y)^P.$$

令 $a\in X_c$ 满足 $d_c(a,\ [x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,\ [x,z]_c)$。记 $t\in X_c$ 为 a 在 $[z,y]_c$ 上的一个投影。由不等式 4 可知：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,u)\geq\frac{1}{\alpha_2^2}d'_{(2000\delta)^2}(a,z)-V.$$

于是存在一个常数 $C_2>0$，使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,z)\geq C_2\implies d'_{(2000\delta)^2}(a,u)\geq C_1.$$

此外，根据推论 3.18，当 $z\in G$ 时，集合 $\{a\in X_c\mid d'_{(2000\delta)^2}(a,\ z)\leq C_2\}$ 的基数小于 $A\gamma_G^{C_2}$。

因此，根据定理 5.42 和引理 5.45，对于所有满足 $d_c(a,\ [x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,\ [x,z]_c)$ 且 $d'_{(2000\delta)^2}(a,\ z)\geq C_2$ 的 $a\in X_c$，有：

$$d_a(z,y)^P\leq\kappa^{\frac{P}{\alpha_2^2}d'_{(2000\delta)^2}(a,z)-PV} \tag{6}$$

因此，根据引理 5.53，对于所有满足 $d_c(a,\ [x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,\ [x,z]_c)$ 的 $a\in X_c$，我们得到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B}|d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} d_a(z,y)^P\\
\leq&\sum_{\{a\in X_c|d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}} d_a(z,y)^P\\
\leq&A\gamma_G^{C_2}t_0^P+\sum_{a\in X_c}\kappa^{\frac{P}{\alpha_2^2}d'_{(2000\delta)^2}(a,z)-PV}\\
\leq&A\gamma_G^{C_2}t_0^P+\kappa^{-PV}\sum_{a\in X_c}\kappa^{\frac{P}{\alpha_2^2}d'_{(2000\delta)^2}(a,z)}\\
\leq&A\gamma_G^{C_2}t_0^P+\kappa^{-PV}\sigma\ \text{(according to Proposition 5.50).}
\end{aligned}\tag{7}$$

现在，我们将对以下和给出上界：

$$\sum_{\{a\in X_c\setminus\mathcal{B}|d_c(a,[x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,[x,z]_c)\}}|d_a(x,y)^P-d_a(x,z)^P|.$$

记 $N:=d_c(x,\ z)$。我们按如下方式对 $[z,x]_c$ 排序：$[z,x]_c=\{z_0,\ z_1,\ \ldots\ldots,\ z_N\}$，其中 $z_0=z$、$z_N=x$，且 $d_c(z_i,\ z_{i+1})=1$ 对于 $0\leq i\leq N-1$ 成立，见图 18。

注意，对于所有满足 $d_c(a,\ [x,z]_c\cup[z,y]_c)=d_c(a,\ z_i)$ 的 $a\in X_c$，我们有：

$$\begin{aligned}
d'_{(2000\delta)^2}(a,z)&\geq d_c(a,z)\\
&\geq d_c(a,z_i)+d_c(z_i,z)-24\delta\\
&\geq d_c(a,z_i)+i-24\delta\\
&\geq i-24\delta.
\end{aligned}$$

并且根据引理 5.47，在测地线 $[x,z]_c$ 上，我们有：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,z)\geq\frac{1}{\alpha_2^2}(i+d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i))-W.$$

此外，对于所有 $i \in \{0, \ldots\ldots, N\}$，对于所有 $a \in X_c$，存在一个常数 $C_3 \geq C_1$，使得对于所有$a \in X_c$，$d_c(a, z_i) = d_c(a, [x,z]_c \cup [z,y]_c)$ 和 $d'_{(2000\delta)^2}(a, z_i) \geq C_3$，根据定理 5.42 和不等式 5，我们有：

$$d_a(x,y) \leq \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i) - Z} \text{ and } d_a(x,z) \leq \kappa^{d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i)}. \tag{8}$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\{a \in X_c \setminus \mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c \cup [z,y]_c) = d_c(a,[x,z]_c)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \sum_{\{a \in X_c \setminus \mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c \cup [z,y]_c) = d_c(a,z_i)\}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P| \\
&\leq P \sum_{i=0}^{N} \sum_{\{a \in X_c \setminus \mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c \cup [z,y]_c) = d_c(a,z_i)\}} \max(d_a(x,y)^{P-1}, d_a(x,z)^{P-1}) d_a(z,y) \text{ (according to the mean value theorem)} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_3} t_0^P \\
&+ P \sum_{i=0}^{N} \sum_{\{a \in X_c \setminus \mathcal{B} | d_c(a,[x,z]_c \cup [z,y]_c) = d_c(a,z_i)\}} \max(d_a(x,y)^{P-1}, d_a(x,z)^{P-1}) \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z) - V} \text{ (according to Inequality 7)} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_3} t_0^P + P\kappa^{-V} t_0^{P-1} A\gamma_G^{C_1} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^2}} + P\kappa^{\frac{-W}{V} - (P-1)Z - V} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \sum_{a \in X_c} \kappa^{(\frac{P-1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_2^4}) d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i)} \text{ (according to Inequalities 8)} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_3} t_0^P + P\kappa^{-V} t_0^{P-1} A\gamma_G^{C_1} \frac{1 - \kappa^{\frac{N+1}{\alpha_2^2}}}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} + P\kappa^{\frac{-W}{V} - (P-1)Z - V} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \sum_{a \in X_c} \kappa^{\frac{P}{\alpha_2^4} d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i)} \text{ (according to Proposition 5.50)} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_2} t_0^P + P\kappa^{-V} t_0^{P-1} A\gamma_G^{C_3} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} + P\kappa^{\frac{-W}{\alpha_2^2} - (P-1)Z - V} \sigma \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_3} t_0^P + P\kappa^{-V} t_0^{P-1} A\gamma_G^{C_1} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} + P\kappa^{\frac{-W}{\alpha_2^2} - (P-1)Z - V} \sigma \frac{1 - \kappa^{\frac{N+1}{\alpha_2^4}}}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^4}}} \\
&\leq PA\gamma_G^{C_3} t_0^P + P\kappa^{-V} t_0^{P-1} A\gamma_G^{C_1} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} + P\kappa^{\frac{-W}{\alpha_2^2} - (P-1)Z - V} \sigma \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^4}}}.
\end{aligned}$$

因此，结合不等式 7，和：

$$\sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}} |d_a(x,y)^P - d_a(x,z)^P - d_a(z,y)^P|,$$

有界　　其上界为一个与 x，y 和 z 无关的常数。命题的证明至此结束。　　□

下一个命题表明，对于同一抛物子群中的两个相邻点，D 与 d_a 可比较。

命题 5.57。存在一个常数 $\Lambda > 0$，使得对于所有 x、$y \in G$ 和 $a_0 \in X_c^{\infty}$，若$d_c(x, a_0) = d_c(a_0, y) = 1$，则有：

$$|D(x,y) - t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y)| \leq \Lambda.$$

证明。首先，我们指出：

$$|\theta(d_{a_0}(x,y)) - t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y)| \leq 2t_0^P.$$

事实上，如果 $\theta(d_{a_0}(x,y)) = t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y)$，则显然成立。当 $\theta(d_{a_0}(x,y)) = d_{a_0}(x,y)^P$ 时，则有：

$$|\theta(d_{a_0}(x,y)) - t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y)| \leq d_{a_0}(x,y)^P + t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y) \leq 2t_0^P.$$

此外，根据引理 5.53，对于所有 $a \in X_c, a \neq a_0$，我们有： $\theta(d_a(x,y)) = d_a(x,y)^P$。于是：

$$|D(x,y) - t_0^{P-1} d_{a_0}(x,y)| \leq 2t_0^P + \sum_{a \in X_c, a \neq a_0} d_a(x,y)^P.$$

我们将最后一个和从上方估计为一个常数。取一条连接 x 和 y 的测地线 $[x,y]_c$。根据推论 5.36，若 $a \notin Cone_{(2000\delta)^2}([x,y]_c)$，则对所有 $a \neq a_0$：

$$d_a(x,y) \leq d_a(x,a_0) + d_a(a_0,y) \leq C(\|\mu_x(a)\Delta\mu_{a_0}(a)\| + \|\mu_{a_0}(a)\Delta\mu_y(a)\|).$$

由于 ≤ 2 为 $d_c(x,y)$，存在一个与 x 和 y 无关的常数 $\lambda > 0$，使得：

$$|Cone_{(2000\delta)^2}([x,y]_c)| \leq \lambda.$$

于是：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in X_c, a \neq a_0} d_a(x,y)^P \\
\leq &\lambda t_0^P + \sum_{a \in X_c} C^P (\|\mu_x(a)\Delta\mu_{a_0}(a)\| + \|\mu_{a_0}(a)\Delta\mu_y(a)\|)^P \\
\leq &\lambda t_0^P + C^P [(\sum_{a \in X_c} \|\mu_x(a)\Delta\mu_{a_0}(a)\|^P)^{\frac{1}{P}} + (\sum_{a \in X_c} \|\mu_{a_0}(a)\Delta\mu_y(a)\|^P)^{\frac{1}{P}}]^P \\
\leq &\lambda t_0^P + C^P 2^{\frac{1}{P}} D \text{ (according to Proposition 5.33).}
\end{aligned}$$

当 $\Lambda := t_0^P(\lambda + 2) + C^P 2^{\frac{1}{P}} D$ 时，我们得到所需的不等式。 □

作为本小节的结尾，尚需证明 D 满足粗三角不等式。接下来的引理将用于证明这一点。

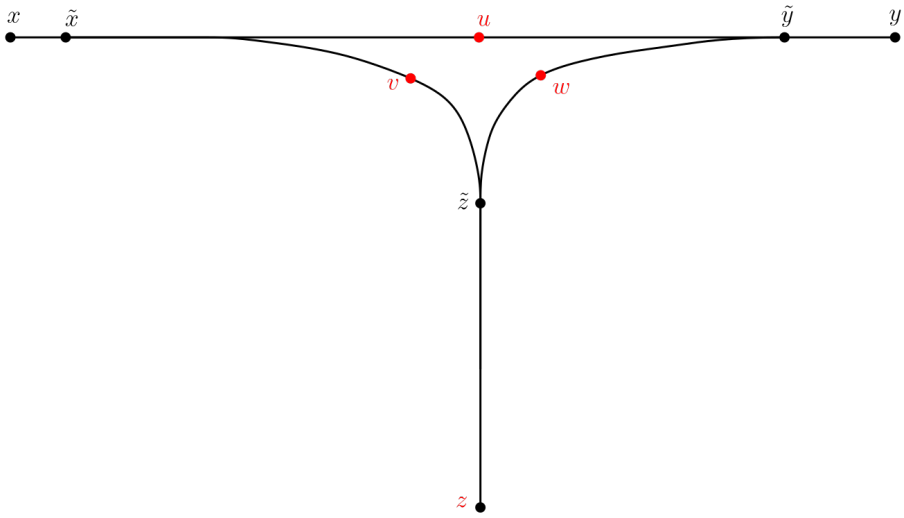


图 19： u 与 v 之间的角以及 u 与 w 之间的角均有界

引理 5.58。考虑满足 $I_c(x,y) \cap I_c(y,z) \cap I_c(z,x) = \varnothing$ 的 x、y、$z \in X_c$。设 $[x,y,z]_c$ 是 x、y 和 z 之间的一个三角形。存在 $u \in [x,y]_c \cap G$ 使得：

- $u \in Cone_{26+2}([x,z]_c)$，
- $u \in Cone_{26+2}([z,y]_c)$。

证明。由于 $I_c(x, y) \cap I_c(y, z) \cap I_c(z, x) = \varnothing$ 彼此不同，三角形 $[x,y,z]_c$ 不是三叉树。根据 X_c 的 δ-双曲性以及 [GdlH90，命题 21]，$[x,y,z]_c$ 存在一个 4δ-拟中心。通过选取邻点，我们可以找到：

- $u \in G \cap [x,y]_c$，
- $v \in [z,x]_c$，
- 和 $w \in [z,y]_c$，
- 使得 $d_c(u,v)\ d_c(u,w)\ d_c(v,w) \leq 8\delta + 1$，

参见图 19。

此外，我们可以选择 u, v, w 使得：

- $|d_c(u,x) - d_c(v,x)| \leq 1$，
- $|d_c(u, y) - d_c(w, y)| \leq 1$，
- $|d_c(v, z) - d_c(w, z)| \leq 1$.

我们将证明，u 与 v 之间的每个角都有界；证明与[CD20 命题 1.10]的证明类似。记 σ_0 为连接 u与 v的一条测地线。记 σ_1为 $[x,y]_c$ 的子线段，它从 u 开始，并沿 x的方向延伸 3δ，除非它先到达x。（否则，沿着测地线 $[x,y]_c$和 $[x,z]_c$可得到一条长度至多为$14\delta + 2$的路径。）记 $\sigma_1^0 = u$ 为其初始点，σ_1^1 为其端点。根据双曲性，存在一条从 σ_1^1到 $[x,z]_c$、长度至少为 2δ的线段 σ_2。记 σ_3为 $[x,z]_c$的子线段，它闭合了回路$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$。根据三角不等式，$\sigma_3$ 的长度至少为 $13\delta + 1$。由此得到一个长度为 $26\delta + 2$的回路，因此 u与 v之间的所有角都由 $26\delta + 2$界定。用相同的证明可得 $\measuredangle_v(x,u) \leq 26\delta + 2, \measuredangle_v(u,y) \leq 26\delta + 2$。最后，利用 u、v和 w角色的对称性即可得出结论。

□

现在我们证明 D 满足粗三角不等式。

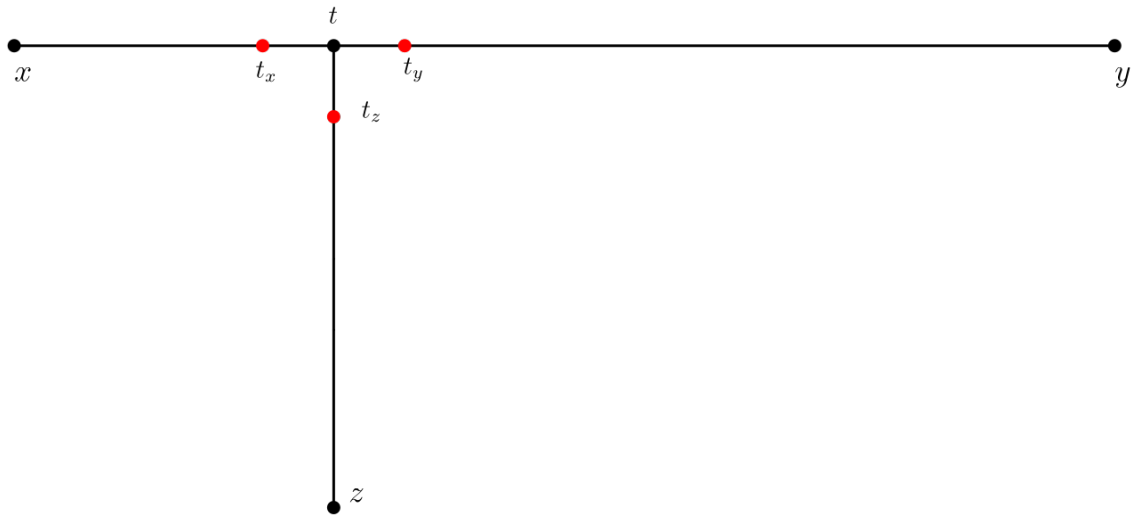


图20： $\tilde{x}$、 $\tilde{y}$、 $\tilde{z}$ 不全相同且 $t \in X_c^\infty$ 的情况。

命题 5.59. 存在一个常数 $C_{triangle} > 0$，使得对于所有的 x、 y、 $z \in G$ ：

$$D(x,y) \leq D(x,z) + D(z,y) + C_{triangle}.$$

证明。令 x、 y、 $z \in X_c$。考虑一个三角形 $[x,y,z]_c$。需要考虑两种情况：$I_c(x, y) \cap I_c(y, z) \cap I_c(z, x)$ 是否为空。

1. 假设 $I_c(x, y) \cap I_c(y, z) \cap I_c(z, x) \neq \emptyset$。存在一个属于这三个区间的顶点 t。

   - 在 $t \in G$ 的情况下，我们可以应用命题 5.56。于是得到：

   $$\begin{aligned}
   &D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)\\
   \leq &D(x,t) + D(y,t) + \nu\\
   &-D(x,t) - D(t,z) + \nu - D(y,t) - D(t,z) + \nu \text{ (according to Proposition 5.56)}\\
   \leq &3\nu.
   \end{aligned}$$

   - 在 $t \in X_c^\infty$ 的情况下，我们将应用命题 5.57，以及对于所有 $a \in X_c$、d_a 都满足三角不等式这一事实。我们将 t_x 记为 t 在 $[x,t]_c$ 上的邻点，将 t_y 记为 $[t,y]_c$ 上的邻点，并将 t_z 记为 $[z,t]_c$ 上的邻点，见图20。于是，我们得到：

   $$\begin{aligned}
   &D(x,y) - D(x,z) - D(z,y)\\
   \leq &D(x,t_x) + D(t_x,t_y) + D(t_y,y) + 2\nu\\
   &-D(x,t_x) - D(t_x,t_z) - D(t_z,z) + 2\nu\\
   &-D(y,t_y) - D(t_y,t_z) - D(t_z,z) + 2\nu \text{ (according to Proposition 5.56 applied three times)}\\
   \leq &D(t_x,t_y) - D(t_y,t_z) - D(t_z,t_x) + 6\nu\\
   \leq &t_0^{p'-1} d_a(t_x,t_y) + \Lambda - t_0^{p'-1} d_a(t_x,t_z)\\
   &+\Lambda - t_0^{p'-1} d_a(t_y,t_z) + \Lambda + 6\nu \text{ (according to Proposition 5.57)}\\
   \leq &\Lambda t_0^{p'-1} (d_a(t_x,t_y) - d_a(t_x,t_z) - d_a(t_z,t_y)) + 6\nu\\
   \leq &6\nu \text{ (according to the triangular inequality for } d_a).
   \end{aligned}$$

2. 现在假设 $I_c(x,y) \cap I_c(y,z) \cap I_c(z,x) = \varnothing$。根据引理 5.58，见图 19，存在： $u \in G \cap [x,y]_c$, $v \in [x,z]_c$ 使得：

- $u \in Cone_{26+2}([x,z]_c)$,
- $u \in Cone_{26+2}([z,y]_c)$。

根据命题 5.56，我们有：

- $|D(x,\ y) - D(x,\ u) - D(u,\ y)| \le \nu$,
- $|D(x,\ z) - D(x,\ u) - D(u,\ y)| \le \nu$,
- $|D(z,\ y) - D(z,\ u) - D(u,\ y)| \le \nu$

因此：

$$\begin{aligned} & D(x,y) - D(x,z) - D(z,y) \\ \le & D(x,u) + D(u,y) + \nu \\ & -D(x,u) - D(u,z) + \nu - D(y,u) - D(u,z) + \nu \text{ (according to Proposition 5.56)} \\ \le & 3\nu. \end{aligned}$$

由 $C_{\text{triangle}} = 6\nu$，我们得到结果。

□

^**定义 5.60**。 我们将函数 $d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ 定义为：

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} D(x,y) + C_{triangle} & if\ x \neq y \\ 0 & if\ x = y. \end{cases}$$

其中 $C_{triangle}$ 是命题 *5.59* 的常数。

^**命题 5.61**。 定义 *5.60* 中的函数 d 是 X_c上的度量。

^^证明。 根据定义， d 是对称的，并且 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$。
三角不等式是命题 5.59 的直接推论。

□

本文余下部分将用于证明

5.7 bolic 度量与群度量具有可比性

在本节中，　　^我们将证明，度量 d 在粗略意义上小于群度量，也就是说，
存在一个递增的 一个递增且无界的函数 ρ_1，使得对所有 $x,\ y \in G$:

$$\rho_1(d_G(x,y)) \le \hat{d}(x,y).$$

^对于反向不等式，由于 d 是 G-不变的， G 是有限生成的，我们可以直接得知 d 小于 G，且二者之间存在线性控制。

强双曲度量在粗略意义上大于群度量这一事实，将用于证明该度量一致局部有限。另一个不等式将用于证明强双曲度量满足强双曲-$B1$ 条件。

在小节 5.8 中，我们将利用这两个度量是弱测地这一事实，证明它们实际上是拟等距的。

命题 5.62. 存在 $M > 0$，使得对所有 $x, y \in G$:

$$\hat{d}(x,y) \le M d_G(x,y).$$

ˆ证明. 我们设 S 为与 d_G相关联的 G 生成元。我们设 $M := \max_{s\in S} d(1,s)$。
设 $x,y \in G$。设 $n := d_G(x,y)$。那么存在 $s_1,...,s_n \in S$，使得 $x^{-1}y = s_1,...,s_n$，并且我们有：

$$\begin{aligned}\hat{d}(x,y) &= \hat{d}(1,x^{-1}y)\\ &\leq \hat{d}(1,s_1) + \hat{d}(1,s_2) + ... + \hat{d}(1,s_n)\\ &\leq M d_G(x,y).\end{aligned}$$

□

现在我们证明反向不等式。

命题 5.63. 存在一个递增且无界的函数 ρ_1，使得对所有 $x,y \in G$：

$$\rho_1(d_G(x,y)) \leq \hat{d}(x,y).$$

证明。设 $a \in X_c^\infty$，根据命题 5.43,

$$\measuredangle_a(x,y) \to \infty \Rightarrow d_a(x,y) \to \infty.$$

我们固定一条测地线 $[x,y]_c$。在锥化图的构造中，两个无限价顶点不能相邻，因此：

$$|[x,y]_c \cap G| \geq \frac{1}{2} d_c(x,y).$$

此外，根据命题 5.29，若 $d_c(x,y) \geq 10\delta$，则对所有与 x 和 y 的距离至少为 5δ 的 $a \in [x,y]_c$，我们有 $\|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\| = 2$。因此，若假设 $d_c(x,y) \geq 10\delta$，则有：

$$\begin{aligned}D(x,y) \geq & \sum_{a\in[x,y]_c\cap G} \theta(d_a(x,y)),\\ \geq & \sum_{a\in[x,y]_c\cap G} \|\mu_x(a)\Delta\mu_y(a)\|^p \text{ (according to Definition 5.37)},\\ \geq & \frac{1}{2} d_c(x,y) 2^p - 10\delta \text{ (according to Proposition 5.29)}.\end{aligned}$$

于是：

$$d_c(x,y) \to \infty \Rightarrow D(x,y) \to \infty.$$

最后，我们利用定理 3.17、距离公式和定义 5.60，证明存在一个递增且无界的函数 ρ_1，使得对于所有 $x,\ y \in G$：

$$\rho_1(d_G(x,y)) \leq \hat{d}(x,y).$$

□

5.8 关于 d_G 的弱测地性与拟等距

ˆ 在本节中，我们将证明度量 d 是弱测地的。我们将利用这一事实和第 5.7 小节证明，d 和 d_G 实际上是拟等距的。

回顾一下，若存在 $\eta \geq 0$，使得对于每一对点 $x,\ y \in X$ 以及每个 $t \in [0, d(x,\ y)],$，都存在一点 $z \in X$，满足 $d(x,\ z) \leq t+\eta$ 且 $d(z,\ y) \leq d(x,\ y) - t + \eta$，则称度量空间 $(X,\ d)$ 是弱测地的。

回忆一下，根据定义 5.7，G 的抛物子群是可容许的。因此，我们假设对于所有抛物子群 P 以及所有 $C > 0$，$\mathrm{Proba}_C(P)$ 都带有一个强双曲度量，且这些度量是弱测地的。因此，取弱测地常数的最大值后，我们可以假设存在 $\varepsilon \geq 0$，使得 d_b 是 ε-弱测地的，其中 d_b 表示

相应的强双曲度量，不区分抛物子群。

根据命题 5.56，对于任意一对顶点 x，$y \in X_c$，以及连接这两点的任意测地线 $[x,y]_c$，顶点 $z \in G \cap [x,y]_c$ 在 d 上满足三角不等式等号情形，误差有界。

然而，弱测地性以及抛物顶点 a 的两个相邻顶点 u 和 v 在 d 中的距离可能任意大。在这种情况下，我们将利用 d_b 的弱测地性。将连接 u 和 v 的弱测地线投影到 a 的 1-邻域上，可以帮助我们在 X_c 中构造一条连接 u 和 v 的路径，其步长在 d 中有界，且其顶点满足三角不等式等号情形，误差有界。

命题 5.64. 对于所有 $a \in X_c^\infty$，对于所有满足 $d_c(x,a) = d_c(a,y) = 1$ 的 $x, y \in G$，对于所有 $t \in [0, d_a(x,y)]$，存在 $u \in G$ 满足 $d_c(u,a) = 1$，使得：

- $d_a(x, u) \le t + 4C + \varepsilon$,
- $d_a(u, y) \le d_a(x, y) - t + 4C + \varepsilon$,
- 和 $\measuredangle_a(x,u) \ge 12\delta$, $\measuredangle_a(u,y) \ge 12\delta$,

其中，ε 是 d_b 的弱测地线常数，而 C 是命题 5.27 的常数。

证明。必要时应用一次平移后，我们用 P 表示与 a 相关联的抛物子群。在命题的假设下，令 $x, y \in G$。回忆一下，$d_a(x,y) = d_b(\delta_x, \delta_y)$。根据 d_b 的 ε-弱测地线性质，对于 $t \in [0, d_a(x,y)]$，，存在 $\lambda \in \mathrm{Proba}_C(P)$，使得：

- $d_b(\delta_x, \lambda) \le t + \varepsilon$,
- $d_b(\lambda, \delta_y) \le d_a(x,y) - t + \varepsilon$.

此外，如有必要，通过调整 ε，我们可以假设：

$$d_b(\delta_x, \lambda) \ge A12\delta - AB + 2C,\ d_b(\lambda, \delta_y) \ge A12\delta - AB + 2C,$$

其中 A，B 是命题 5.43 中的常数。
令 $u \in \mathrm{supp}(\lambda)$，则 $u \in G$，根据定义 5.7 的最后一点，我们有：

$$d_b(\lambda, \delta_u) \le 4C.$$

因此，我们有：

- $d_b(\delta_x, \delta_u) \le t + 4C + \varepsilon$,
- $d_b(\delta_u, \delta_y) \le d_a(x, y) - t + 4C + \varepsilon$,
- $d_b(\delta_x, \delta_u) \ge A12\delta - AB$, $d_b(u, \delta_y) \ge A12\delta - AB$.

根据命题 5.43，第三点给出如下结论：

$$\measuredangle_a(x,u) \ge 12\delta,\ \measuredangle_a(u,y) \ge 12\delta.$$

□

下一个定义描述抛物子群中的弱测地线，或者等价地说，描述无限价顶点的 1-邻域中的弱测地线。

定义 5.65. （抛物子群中的优选弱测地线）

设 $a \in X_c^\infty$和 P为关联抛物子群。对于所有满足 $d_c(x,a) = d_c(a,y) = 1$ 的 $x, y \in G$，我们称集合 $[x,y]_{d_a}$ 为优选弱测地线，它是 a 的1邻域中的一组顶点，且具有以下性质：

- $x, y \in [x,y]_{d_a}$,
- $[x,y]_{d_a}$ 是一条 $(4C+\varepsilon)$-弱测地线,
- 对于所有 $u \in [x,y]_{d_a}, u \neq x, y$,
$$\measuredangle_a(x,u) \geq 12\delta, \quad \measuredangle_a(u,y) \geq 12\delta.$$
- $[x,y]_{d_a}$ 是 η-无峰的，并且对某个 $\eta \geq 0$ 是 η-强凸的。

根据命题 5.64，对于所有 $a \in X_c^\infty$，以及所有满足 $d_c(x, a) = d_c(a, y) = 1$ 的 $x, y \in G$，存在这样一组顶点 $[x,y]_{d_a}$。

定义 5.66。设 $x, y \in G$，使得 $d_c(x,y) = n$。我们考虑这两个顶点之间的一条测地线 $[x,y]_c$，其顶点按如下顺序排列：$[x,y]_c = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$，其中 $x_0 = x$, $x_n = y$，且 $d_c(x_i, x_{i+1}) = 1$ 对于 $0 \leq i \leq n-1$。

我们定义（即使它取决于测地线的选择）：

$$[x,y]_{\hat{d}} := ([x,y]_c \cap G) \cup \bigcup_{x_i \in X_c^\infty} [x_{i-1}, x_{i+1}]_{d_{x_i}}.$$

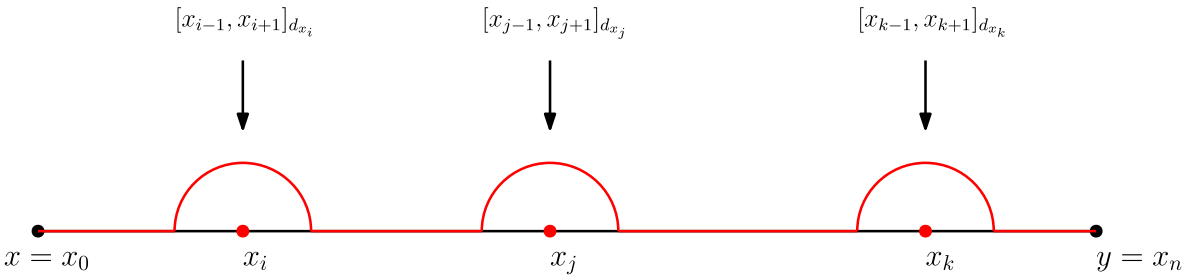


图 21：x 与 y 之间经过 3 个无限价点的弱测地线

ˆ**命题 5.67**。 度量空间 (G, d) 是弱测地的。

证明。 我们将证明，定义 5.66 中定义的集合是连接 x 和 y 的弱测地线。

设 $x, y \in G$，使得 $d_c(x, y) = n$。我们考虑连接这两个顶点的一条测地线，并按如下方式排列 $[x, y]_c = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$，其中 $x_0 = x$、 $x_n = y$ 和 $d_c(x_i, x_{i+1}) = 1$ 对于 $0 \leq i \leq n-1$。我们考虑相应的集合 $[x, y]_{\hat{d}} := ([x, y]_c \cap G) \cup \bigcup_{x_i \in X_c^\infty} [x_{i-1}, x_{i+1}]_{d_{x_i}}$.

设 $z \in [x, y]_c \cap G$，根据命题 5.56，我们有：

$$\hat{d}(x, z) + \hat{d}(z, y) - \hat{d}(x, y) \leq \nu + 2C_{triangle}.$$

设 $i_0 \in \{1, ..., n-1\}$，使得 $x_{i_0} \in X_c^\infty$。设 $z \in [x_{i_0-1}, x_{i_0+1}]_{d_{x_{i_0}}}$。根据定义 5.65，我们有：

$$\measuredangle_{x_{i_0}}(x_{i_0-1}, z) \geq 12\delta, \ \measuredangle_{x_{i_0}}(z, x_{i_0+1}) \geq 12\delta.$$

因此，由于 $x_{i_0-1} \in I_c(x, x_{i_0})$ 和 $x_{i_0+1} \in I_c(x_{i_0}, y)$，我们得到：

$$\measuredangle_{x_{i_0}}(x, z) \geq 12\delta, \ \measuredangle_{x_{i_0}}(z, y) \geq 12\delta.$$

因此，根据命题 3.12，我们得到：

- $x_{i_0-1} \in I_c(x, z)$，
- 且 $x_{i_0+1} \in I_c(z, y)$。

我们得到：

$$\begin{aligned}
&\hat{d}(x, z) + \hat{d}(z, y) - \hat{d}(x, y) \\
&\leq D(x, x_{i_0-1}) + D(x_{i_0-1}, z) + D(z, x_{i_0+1}) + D(x_{i_0+1}, y) \\
&- D(x, x_{i_0-1}) - D(x_{i_0-1}, x_{i_0+1}) - D(x_{i_0+1}, y) + 4\nu + 2C_{triangle} \text{ (according to Proposition 5.56)} \\
&\leq D(x_{i_0-1}, z) + D(z, x_{i_0+1}) - D(x_{i_0-1}, x_{i_0+1}) + 4\nu + 2C_{triangle} \\
&\leq t_0^{P-1}(d_{x_{i_0}}(x_{i_0-1}, z) + d_{x_{i_0}}(z, x_{i_0+1}) - d_{x_{i_0}}(x_{i_0-1}, x_{i_0+1})) \\
&+ 3\Lambda + 4\nu + 2C_{triangle} \text{ (according to Proposition 5.57)} \\
&\leq t_0^{P-1}(4C + \varepsilon) + 3\Lambda + 4\nu + 2C_{triangle} \text{ (according to Definition 5.65).}
\end{aligned}$$

那么，对所有 $z \in [x, y]_{\hat{d}}$，我们有：

$$\hat{d}(x, z) + \hat{d}(z, y) - \hat{d}(x, y) \leq t_0^{P-1}(2C + \varepsilon) + 3\Lambda + 4\nu + 2C_{triangle}.$$

因此，映射的像：

$$\hat{d}(x, .) : [x, y]_{\hat{d}} \to [0, \infty)$$

is 包含于 $[0, \hat{d}(x, y) + t_0^{P-1}(2C + \varepsilon) + 3\Lambda + 4\nu + 2C_{triangle}]$，它包含 0 和 $\hat{d}(x, y)$.

设 $z \in [x, y]_{\hat{d}}$。若 $z \in [x, y]_{\hat{d}} - (\bigcup_{x_i \in X_c^\infty} [x_{i-1}, x_{i+1}]_{d_{x_i}})$，则存在 $z' \in [x, y]_c \cap G$，使得 $d_c(z, z') = 1$。根据命题 5.62，存在 $\tau > 0$，使得对所有满足 $d_c(z, z') = 1$ 的 $z, z' \in G$，都有：

$$|\hat{d}(x, z) - \hat{d}(x, z')| \leq \hat{d}(z, z') \leq \tau.$$

若 $z \in \bigcup_{x_i \in X_c^\infty} [x_{i-1}, x_{i+1}]_{d_{x_i}}$，则存在 $i_0 \in \{1, ..., n\}$ 使得 $z \in [x_{i_0-1}, x_{i_0+1}]_{d_{x_{i_0}}}$，$z' \in [x_{i_0-1}, x_{i_0+1}]_{d_{x_{i_0}}}$，使得 $x_{i_0} \in [x, y]_c \cap X_c^\infty$。根据的定义，存在 使得：

$$|d_{x_{i_0}}(x_{i_0-1}, z) - d_{x_{i_0}}(x_{i_0-1}, z')| \leq 4C + \varepsilon.$$

因此：

$$\begin{aligned}
|\hat{d}(x, z) - \hat{d}(x, z')| &\leq |\hat{d}(x_{i_0}, z) - \hat{d}(x_{i_0}, z')| + 2\nu \\
&\leq t_0^{P-1}|d_{x_{i_0}}(x_{i_0}, z) - d_{x_{i_0}}(x_{i_0}, z')| + 2\Lambda + 2\nu \\
&\leq t_0^{P-1}2C + \varepsilon + 2\Lambda + 2\nu.
\end{aligned}$$

因此，该映射的像：

$$\hat{d}(x,.):[x,y]_{\hat{d}}\to[0,\hat{d}(x,y)+t_0^{P-1}(4C+\varepsilon)+3\Lambda+4\nu+2C_{triangle}],$$

是 $[0,\hat{d}(x,\ y)$ 中的 $\max(\tau,\ t_0^{P-1}2K+\varepsilon+2\Lambda+2\nu)$-稠密子集，也就是说，对于每个 $t\in[0,\hat{d}(x,\ y)],$，都存在 $z\in[x,y]_{\hat{d}}$ 使得：

$$|\hat{d}(x,z)-t|\le\max(\tau,t_0^{P-1}4C+\varepsilon+2\Lambda+2\nu).$$

由此可得 $\hat{d}(x,\ z)\ \le t+\max(\tau,\ t_0^{P-1}4C+\varepsilon+2\Lambda+2\nu)$，根据前面的讨论，我们有：

$$\begin{aligned}\hat{d}(z,y)&\le\hat{d}(x,y)-\hat{d}(x,z)+t_0^{P-1}(4C+\varepsilon)+3\Lambda+4\nu+2C_{tri}\\&\le\hat{d}(x,y)-t+\max(\tau,t_0^{P-1}4C+\varepsilon+2\Lambda+2\nu)+t_0^{P-1}(4C+\varepsilon)+3\Lambda+4\nu+2C_{triangle}.\end{aligned}$$

$\hat{}$总之，$(G,\ d)$ 是 η-弱测地的，

$$\eta:=\max(\tau,t_0^{P-1}4C+\varepsilon+2\Lambda+2\nu)+t_0^{P-1}(4C+\varepsilon)+3\Lambda+4\nu+2C_{triangle}.$$

□

$\hat{}\ \hat{}$ $(G,\ d)$ 是弱测地的这一事实，使我们能够将 d 与 d_G 之间的粗等价提升为拟等距。

$\hat{}$**命题 5.68**。 (G,d) 和 (G,d_G) 是拟等距的。

证明。根据命题 5.62，存在 $M>0$，使得对于所有 $x,y\in G$，都有：

$$\hat{d}(x,y)\le Md_G(x,y).$$

$\hat{}$ 对于反向不等式，我们利用这样一个事实：对于某个 $\varepsilon>0,\ d$ 是 ε-弱测地的。考虑一条连接 x 和 y 的弱测地线 $\gamma=\{w_0,w_1,...,w_m\}$，其中 $w_0=x,\ w_m=y$。进一步假设 $\hat{}$ 存在 $\beta>0$，使得对于 $0\le i\le m-1,\ d(w_i,w_{i+1})\in[\beta,2\beta]$。注意：

$$\hat{d}(x,y)\ge\sum_{i=0}^{m}\hat{d}(w_i,w_{i+1})-m\varepsilon\ge m(\beta-\varepsilon).$$

于是：

$$m\le\frac{1}{\beta-\varepsilon}\hat{d}(x,y).$$

此外，根据命题 5.63，存在 $\alpha_2\ge0$，使得对于所有满足 $\hat{}d(u,v)\ \le2\beta$ 的 $u,v\in G$，都有：

$$d_G(u,v)\le\alpha_2.$$

因此：

$$d_G(x,y)\le\sum_{i=0}^{m}d_G(w_i,w_{i+1})\le m\alpha_2\le\frac{\alpha_2}{\beta-\varepsilon}\hat{d}(x,y).$$

□

^5.9 d 验证弱-$B2'$

^在本小节中，我们将证明 d 满足弱-$B2'$。根据定义 5.7 和 5.65，我们回顾一下：存在 $\eta > 0$，使得对于所有 $a \in X_c^\infty$， d_a 满足 $\eta - B2'$；并且对于所有 $x, y \in X_c$ 满足 $d_c(x, a) = d_c(a, y) = 1$，都存在 $[x,y]_{d_a}$，它是 a 的 1-邻域内的一个顶点序列，使得$[x,y]_{d_a}$ 是一条 η-弱测地线，且无 η-峰并且是 η-弱凸的。

命题 5.69。设 x_1、$y_1 \in G$ 以及 x_2、$y_2 \in G$ 满足 $x_2(x_1$、$y_1)$。在 X_c 中，存在一条连接 x_1 与 y_1 的测地线，以及一条连接 x_2 与 y_2 的测地线，使得相应的弱测地线$[x_1,y_1]_{\hat{d}}$和 $[x_2,y_2]_{\hat{d}}$满足：

$$[x_2,y_2]_{\hat{d}} \subset [x_1,y_1]_{\hat{d}}.$$

证明。设 x_1、$y_1 \in G$ 满足 $d_c(x_1$、$y_1) = n$，以及 x_2、$y_2 \in G$ 满足 $d_c(x_1$、$x_2) = l \in \mathbb{N}$ 和 $d_c(x_1$、$y_2) = k$。我们考虑一条连接这两个顶点的测地线，其中包含位于这两个顶点之间的 x_2、y_2，其顺序如下：$[x_1,y_1]_c = \{z_0$、…、z_l、…、z_k、…、$z_n\}$，其中 $z_0 = x_1$、$z_l = x_2$、$z_k = y_2$ $z_n = y_1$ 且 $d_c(z_i$、$z_{i+1}) = 1$ 对于 $0 \le i \le n-1$。

我们按照定义 5.66，设定相应的弱测地线序列：

$$[x_1,y_1]_{\hat{d}} = ([x_1,y_1]_c \cap G) \cup \bigcup_{z_i \in X_c^\infty} [z_{i-1}, z_{i+1}]_{d_{z_i}},$$

其中 $[z_{i-1}, z_{i+1}]_{d_{z_i}}$ 是如定义 5.65 所述的弱测地线序列。

那么，根据命题 5.67，$[x_2,y_2]_{\hat{d}} = ([x_2,y_2]_c \cap G) \cup_{z_i \in X_c^\infty} \bigcup_{i \in \{k, \ldots, l\}} [z_{i-1}, z_{i+1}]_{d_{z_i}}$是一个弱测地线序列，并且包含在$[x_1,y_1]_{\hat{d}}$ 中。

□

引理 5.70。设 $x, y \in G$，我们用 $[x,y]_c$ 表示 x 和 y 之间的一条测地线，并用 $[x,y]_{\hat{d}}$ 表示与 $[x,y]_c$ 相关联的弱测地线序列，如定义 *5.66* 所述。设 $z \in G$，我们令 $t \in X_c$ 为 z 在 $[x,y]_c$ 上的一个投影。我们还设 $t_x \in [x,t]_c$ 满足 $d_c(t, t_x) = 1$，并设 $t_z \in [t,z]_c$ 满足 $d_c(t, t_z) = 1$。我们有如下结论：

- *if* $t \in G$, *then* $\hat{d}(z,x) \ge \hat{d}(z,t) + \hat{d}(t,x) - \nu - C_{triangle}$,
- *otherwise* $t_x, t_z \in G$ *and* $\hat{d}(z,x) \ge \hat{d}(z,t_z) + \hat{d}(t_z,t_x) + \hat{d}(t_x,x) - \nu - C_{triangle}$,

其中，ν 是命题 *5.56* 中的常数，$C_{triangle}$ 是命题 *4.10* 中的常数。

证明。如果 $t \in G$，则需要考虑两种情况。

^^^如果 $\measuredangle_t(x, z) > 12\delta$，那么 t属于连接 x 和 z 的每条测地线，于是根据命题 5.56，$d(z, x) \ge d(z, t) + d(t, x) - \nu - C_{triangle}$。否则，我们令三角形为 $[x,z,t]$。注意到 t 与其在 $[x,z]_c$ 上的投影之间的角被 $26\delta + 2$ 所界，然后 $t \in cone_{26\delta+2}([x,z]_c)$，因此它再次满足命题 5.56 的假设。

如果 $t \notin G$，我们采用相同的方法证明 t_x，$t_z \in cone_{26\delta+2}([x,z]_c)$，并根据命题 5.56 得出结论。

□

^^我们在此证明 d 满足弱-$B2'$。我们猜想，更强的性质是：对于某个 $\eta \ge 0$，d 也具有 η-强凸性。

^**命题 5.71**。(G,d) 满足弱 $B2'$，即存在 $\eta_1 \ge 0$ 和一个映射 $m : X \times X \to X$，使得：

- m 是一个 η_1-中点映射，也就是说，对于所有的 x、$y \in X$，

$$|2\hat{d}(x, m(x,y)) - \hat{d}(x,y)| \le 2\eta_1,$$
$$|2\hat{d}(y, m(x,y)) - \hat{d}(x,y)| \le 2\eta_1,$$

- 对于所有的 x、y、$z \in X$，

$$\hat{d}(m(x,y),z) \le \max(\hat{d}(x,z),\hat{d}(y,z)) + 2\eta_1,$$

- 对于每个 $p \in \mathbb{R}_+$，都存在 $N(p) \in \mathbb{R}_+$，使得对于所有 $N \ge N(p)$，当 $d(x,z) \le N$、$d(y,z) \le N$ 以及 $d(x,y) > N$ 时，均有：

$$\hat{d}(m(x,y),z) \le N - p.$$

证明。A根据命题 5.67 和 2.8，对于所有 $x,y \in G$，都存在 $m \in [x,y]_{\hat{d}}$，使得 ：

$$|2\hat{d}(x,m) - \hat{d}(x,y)| \le 2\eta,$$

$$|2\hat{d}(y,m) - \hat{d}(x,y)| \le 2\eta.$$

我们先证明第一点，即存在 $\eta_1 \ge 0$，使得对于所有 $x,y,z \in G$，

$$\hat{d}(m,z) \le \max(\hat{d}(x,z),\hat{d}(y,z)) + 2\eta_1. \tag{9}$$

我们将 z 在 $[x,y]_c$ 上的一个投影记为 t。

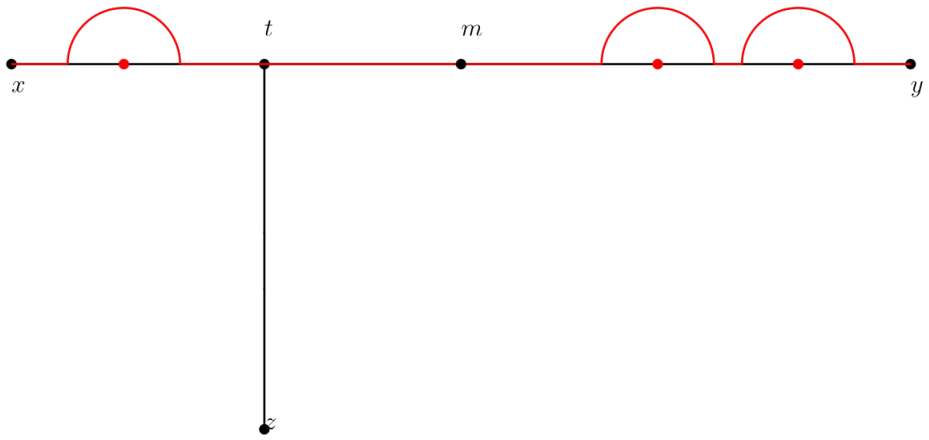


图 22： t 有限价的情形

1. 首先，假设 $t \in [x,y]_{\hat{d}}$，见图 22。在此情况下 $t \in G$，并且我们选择合适的测地线，使相应的定义 5.66 中的弱测地线满足 $[x,y]_{\hat{d}} = [x,t]_{\hat{d}} \cup [t,y]_{\hat{d}}$，依据命题 5.69。由 x 和 y 作用的对称性，我们可以假设 $m \in [t,y]_{\hat{d}}$。在此情况下，根据引理 5.70，我们注意到 $d(z,y) \ge d(z,t) + d(t,y) - \nu - C_{triangle}$。因此：

$$\begin{aligned}\hat{d}(z,y) &\ge \hat{d}(z,t) + \hat{d}(t,y) - \nu - C_{triangle} \\ &\ge \hat{d}(z,t) + \hat{d}(t,m) + \hat{d}(m,y) - \nu - C_{triangle} - \eta \\ &\ge \hat{d}(z,m) - \nu - C_{triangle} - \eta.\end{aligned}$$

2. 在此情况下，我们假设 $t \notin [x,y]_{\hat{d}}$，即 $t \in [x,y]_c \cap X_c^\infty$。我们令 t_x 为 $[x,t]_c$ 的顶点，使得 $d_c(t_x,t) = 1$；令 t_y 为 $[t,y]_c$ 的顶点，使得 $d_c(t_y,t) = 1$；并令 t_z 为 $[t,z]_c$ 的顶点，使得 $d_c(t,t_z) = 1$。

- 假设 $d_c(m,t) = 1$，并 $m \notin [x,y]_c$ 参见图 23。等价地，这意味着 $m \in [t_x,t_y]_{\hat{d}}$.

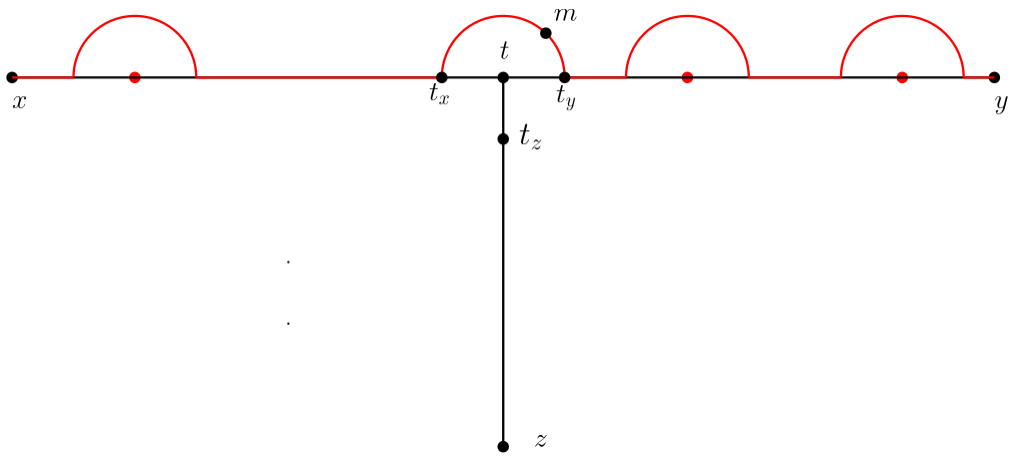


图 23： t 具有无限价且 m 与 t接近的情形

在这种情况下，由于根据定义 5.7， d_t 没有峰，因此我们有：

$$d_t(t_z, m) \leq \max(d_t(t_z, t_x), d_t(t_z, t_y)) + \eta.$$

不失一般性，假设：

$$d_t(t_z, m) \leq d_t(t_y, t_z) + \eta.$$

因此：

$$\begin{aligned}
&\hat{d}(z, y) \\
&\geq \hat{d}(z, t_z) + \hat{d}(t_z, t_y) + \hat{d}(t_y, y) - 2\nu - 2C_{triangle} \\
&\quad \text{(according to Lemma 5.70 applied two times)} \\
&\geq \hat{d}(z, t_z) + t_0^{P-1} d_t(t_z, t_y) + \hat{d}(t_y, y) - 2\nu - 2C_{triangle} - \Lambda \\
&\quad \text{(according to Proposition 5.57)} \\
&\geq \hat{d}(z, t_z) + t_0^{P-1} d_t(m, t_z) + \hat{d}(t_y, y) - 2\nu - 2C_{triangle} - \Lambda - 2t_0^{P-1}\eta \\
&\geq \hat{d}(z, t_z) + \hat{d}(m, t_z) + \hat{d}(t_y, y) - 2\nu - 2C_{triangle} - 2\Lambda - 2t_0^{P-1}\eta \\
&\quad \text{(according to Proposition 5.57)} \\
&\geq \hat{d}(m, z) - 2\nu - 2C_{triangle} - 2\Lambda - 2t_0^{P-1}\eta.
\end{aligned}$$

• 假设 $d_c(m, t) > 1$，或者 $m \in [x, y]_c$；在这种情况下，请参见图 24。根据 x 和 y 角色之间的对称性，我们可以假设 $m \in [t_y, y]_{\hat{c}}$。在这种情况下，我们对 t_y 应用引理 ^^^ 5.70，得到 $d(z, y) \geq d(z, t_y) + d(t_y, y) - \nu - C_{triangle}$。因此：

$$\begin{aligned}
\hat{d}(z, y) &\geq \hat{d}(z, t_y) + \hat{d}(t_y, y) - \nu - C_{triangle} \\
&\geq \hat{d}(z, t_y) + \hat{d}(t_y, m) + \hat{d}(m, y) - \nu - C_{triangle} - \eta \\
&\geq \hat{d}(z, m) - \nu - C_{triangle} - \eta.
\end{aligned}$$

总之，我们有：

$$\hat{d}(z, m) \leq \max(\hat{d}(x, z), \hat{d}(y, z)) + 2\nu + 2C_{triangle} + 2\Lambda + 2t_0^{P-1}\eta.$$

^那么，对于某个 $\eta_1 > 0$， d 满足不等式 9。

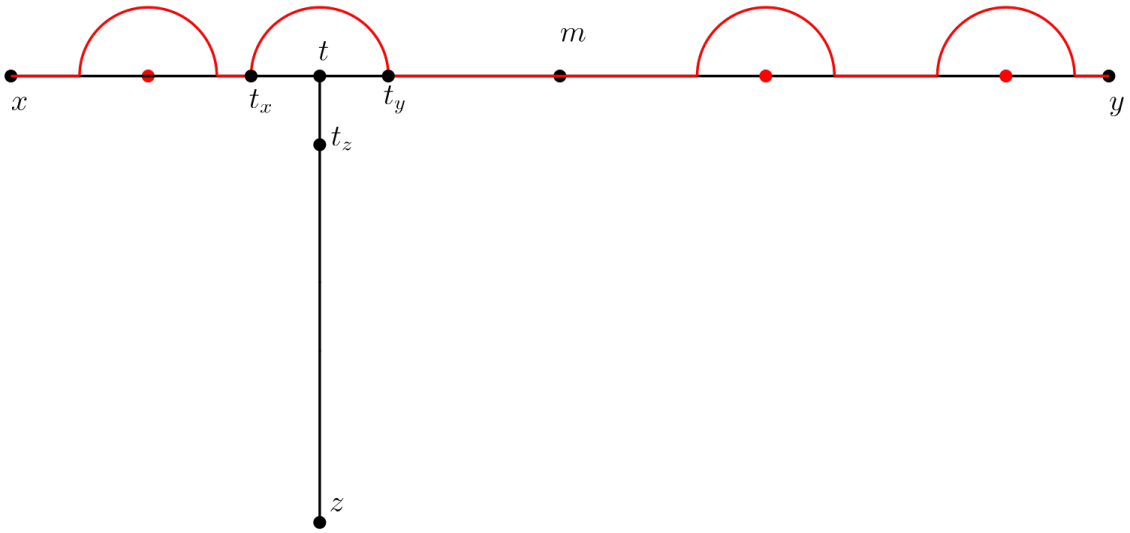


图 24： t 具有无限价且 m 远离 t的情形

现在我们将证明，对每个 $p \in \mathbb{R}_+$，都存在 $N(p) \in \mathbb{R}_+$，使得对于所有 $N \geq N(p)$，若 $\hat{d}(x, z) \leq N$， $\hat{d}(y, z) \leq N$，且 $\hat{d}(x, y) > N$，则有：

$$\hat{d}(m, z) \leq N - p.$$

我们将采用与前一点相同的析取。仍用 t 表示 z 在$[x, y]_c$上的投影。

1. 假设在此情形下 $t \in [x, y]_{\hat{d}}$，即 $t \in G$。不失一般性，假设$m \in [t, y]_{\hat{d}}$。因此，根据先前的计算：

$$\hat{d}(z, y) \geq \hat{d}(z, m) + \hat{d}(m, y) - \nu - C_{triangle} - \eta.$$

根据 m的定义，我们有：

$$\hat{d}(y, m) \geq \frac{N}{2} - \eta.$$

那么：

$$\hat{d}(z, m) \leq \hat{d}(z, y) - \hat{d}(m, y) + \nu + C_{triangle} + \eta \leq N - \frac{N}{2} + \nu + C_{triangle} + 2\eta.$$

那么，对于每个 $p \in \mathbb{R}_+$，如果我们取足够大的 N，就有：

$$\hat{d}(z, m) \leq N - p.$$

2. 假设在这种情况下 $t \notin [x, y]_{\hat{d}}$。我们令 t_x $[x, t]_c$ 的顶点为 $d_c(t_x, t) = 1$，令 t_y $[t, y]_c$ 的顶点为 $d_c(t_y, t) = 1$，并令 t_z $[t, z]_c$ 的顶点为 $d_c(t, t_z) = 1$。

- 假设在这种情况下 $d_c(m, t) > 1$ 或 $m \in [x, y]_c$。我们可以假设 $m \in [t_y, y]_{\hat{d}}$。这种情况与前一种类似。根据先前的计算，我们有：

$$\hat{d}(z, y) \geq \hat{d}(z, m) + \hat{d}(m, y) - \nu - C_{triangle} - \eta.$$

我们仍有：

$$\hat{d}(y, m) \geq \frac{N}{2} - \eta.$$

再者：

$$\hat{d}(z,m) \leq N - \frac{N}{2} + \nu + C_{triangle} + 2\eta.$$

那么，对每个 $p \in \mathbb{R}_+$，只要取 N 足够大，就有：

$$\hat{d}(z,m) \leq N - p.$$

- 假设 $d_c(m, t) = 1$ 且 $m \notin [x,y]_c$。在这种情况下，我们有 $m \in [t_x, t_y]_{\hat{d}}$。我们将 $\sigma : [0,1] \to [0, d(x, y)]$ 重写为弱测地线 $[t_x, t_y]_{d_t}$。令 $p > 0$。进一步假设 $\hat{d}(t_z, t_y) \geq d(t_z, t_x)$，那么根据 d 对某个 $\eta_1 > 0$ 满足不等式 9 这一事实，我们有 $d(t_z, m) \leq d(t_z, t_y) + \eta_1$。

  假设 $d(y, t_y) > p + 2C_{triangle} + 2\nu + \eta_1$。
  我们有：

$$\begin{aligned}\hat{d}(z,m) &\leq \hat{d}(z,t_z) + \hat{d}(t_z,m)\\ &\leq \hat{d}(z,t_z) + \hat{d}(t_z,t_y) + \eta_1\\ &\leq \hat{d}(z,y) - \hat{d}(y,t_y) + 2C_{triangle} + 2\nu + \eta_1\\ &\leq N - p.\end{aligned}$$

  假设 $d(x, t_x) > d(t_x, m) + p + C_{triangle} + \nu$，则有：

$$\begin{aligned}\hat{d}(z,m) &\leq \hat{d}(z,t_x) + \hat{d}(t_x,m)\\ &\leq \hat{d}(z,x) - \hat{d}(x,t_x) + C_{triangle} + \nu + \hat{d}(t_x,m)\\ &\leq N - p.\end{aligned}$$

  现在假设 $d(y, t_y) \leq p + 2C_{triangle} + 2\nu$ 且 $d(x, t_x) \leq d(t_x, m) + p + C_{triangle} + \nu$。
  在这种情况下，我们将利用这样一个事实：对于某个 $\eta_2 > 0$，d_t 是 η_2-强凸的。
  根据 m 的定义，我们有 $\hat{d}(y, m) \geq \frac{N}{2} - \eta$。
  于是：

$$\hat{d}(t_y,m) \geq \frac{N}{2} - \eta - \hat{d}(y,t_y) \geq \frac{N}{2} - \eta - p - 2C_{triangle} - 2\nu.$$

  出于同样的原因，$\hat{d}(x, m) \geq \frac{N}{2} - \eta$。因此：

$$2\hat{d}(t_x,m) + p + C_{triangle} + \nu \geq \hat{d}(x,t_x) + \hat{d}(t_x,m) \geq \frac{N}{2} - \eta,$$

  于是：

$$\hat{d}(t_x,m) \geq \frac{N}{4} - \frac{C_{triangle}}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{p}{2} - \frac{\eta}{2}.$$

  那么，当 N 足够大时，存在 $0 < \eta < \frac{1}{2}$ 使得 $m = \sigma(t),\ t \in [\eta, 1-\eta]$。此外：

$$\begin{aligned}\hat{d}(t_x,t_y) &\geq \hat{d}(t_x,m) + \hat{d}(m,t_y) - C_{triangle} - \nu\\ &\geq \frac{3}{4}N - \frac{3}{2}(\eta + p) - \frac{5}{2}(C_{triangle} + \nu).\end{aligned}$$

  因此，当 N 足够大时，对于所有 $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4})$，我们有：

$$\hat{d}(t_x,t_y) \geq \varepsilon(N + 2\nu + 2C_{triangle}).$$

  在这种情况下：

$$\hat{d}(z,y) \geq \hat{d}(z,t_z) + \hat{d}(t_z,t_y) + \hat{d}(t_y,y) - 2\nu - 2C_{triangle}.$$

因此：

$$\hat{d}(t_z, t_y) \le N + 2\nu + 2C_{triangle}$$

于是：

$$\hat{d}(t_x, t_y) \ge \varepsilon \hat{d}(t_z, t_x).$$

于是，根据 d_t 是 η_2-无峰的这一事实，存在 $\delta \in (0,1)$，使得：

$$\hat{d}(t_z, m) \le (1-\delta)\hat{d}(t_z, t_y) + \eta_2.$$

此外：

$$\begin{aligned} 2\hat{d}(t_z, t_y) \ge & \hat{d}(t_x, t_z) + \hat{d}(t_z, t_y) \\ \ge & \hat{d}(t_x, t_y) \\ \ge & \frac{\varepsilon}{2} N. \end{aligned}$$

因此，当 N 充分大时，有：

$$\hat{d}(t_z, m) \le \hat{d}(t_z, t_y) - p.$$

最后，我们指出：

$$\begin{aligned} \hat{d}(z, m) \le & \hat{d}(z, t_z) + \hat{d}(t_z, m) \\ \le & \hat{d}(z, t_z) + \hat{d}(t_z, t_y) + \hat{d}(t_y, y) - p \\ \le & N - p. \end{aligned}$$

ˆ 这最终证明了 d 弱满足-$B2'$。

□

ˆ5.10 d 验证强-$B1$

ˆ 在本小节中，我们证明 d 验证强-$B1$。我们需要一些预备引理。
这个引理对应相对双曲情形中的引理 4.18，因为它考虑了角。

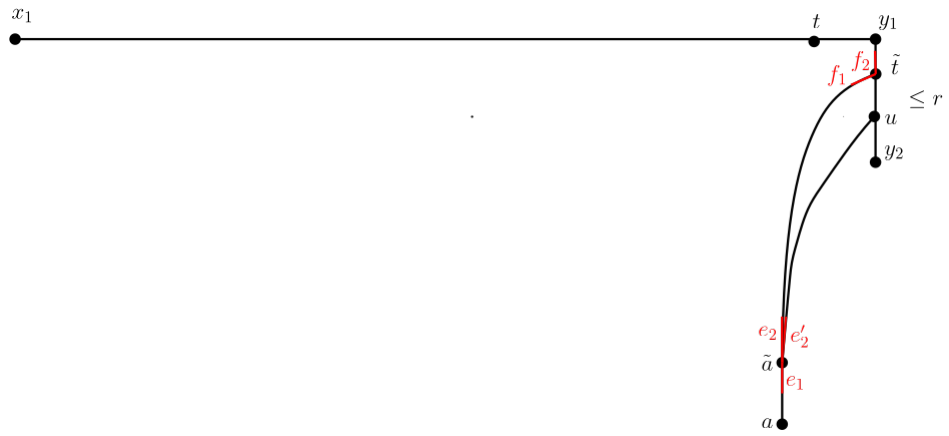


图 25：当 y_1处的角很大时，投影到测地线 $[x_1, y_1]_c$ 和 $[x_1, y_2]_c$ 上的比较。

引理 5.72。 设 $r \geq 0$。设 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ 满足 $d'(x_1, x_2)\ d'(y_1, y_2) \leq r$。设 $a \in X_c$，并记为：

- $t \in [x_1, y_1]_c$ a 在 $[x_1, y_1]_c$上的投影，
- $u \in [x_1, y_2]_c$ a 在 $[x_1, y_2]_c$上的投影，
- $v \in [x_2, y_1]_c$ a 在 $[x_2, y_1]_c$上的投影，
- $w \in [x_2, y_2]_c$ a 在 $[x_2, y_2]_c$上的投影。

存在一个仅依赖于 r 和 δ 的 $\lambda_1 \geq 0$，使得：

- $d_{\prime(2000\delta)^2}(a, u) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d_{\prime(2000\delta)^2}(a, t) - \measuredangle_u(a, t) - \lambda_1$,
- $d_{\prime(2000\delta)^2}(a, v) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d_{\prime(2000\delta)^2}(a, t) - \measuredangle_v(a, t) - \lambda_1$,
- $d_{\prime(2000\delta)^2}(a, w) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d_{\prime(2000\delta)^2}(a, t) - \measuredangle_w(a, t) - \lambda_1$,

其中， α_2 是命题 *3.19*中的常数。

证明。 我们考虑测地线 $[x_1, y_1]_c$和 $[x_1, y_2]_c$。 根据引理 4.18，我们有：

$$d_c(a, u) \geq d_c(a, t) - (r + \delta).$$

为得出结论，我们需要通过 a 和 t之间大于（2000δ）^{2} 的角度和，来控制 a 和 u 之间大于（2000δ）^{2} 的角度和。

1. 如果 $\measuredangle_{y_1}(x_1, y_2) \leq \max(r, 12\delta)$，则有$y_2 \in cone_{\max(r,12\delta)}([x_1, y_1]_c)$。在此情况下，我们采用与引理 5.48中相同的证明，其中 x_1 扮演 x的角色， y_1 扮演 y 的角色，而 y_2 扮演 z的角色。我们得到一个仅依赖于 r 和 δ 的常数 λ_1，使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a, u) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a, t) - \measuredangle_u(a, t) - \lambda_1,$$

其中 α_2 是命题 3.19 中的常数。

2. 剩下的情况是 $\measuredangle_{y_1}(x_1, y_2) > \max(r, 12\delta)$；在这种情况下，根据命题 3.12 和 $t \notin I_c(a, u)$，有 $y_1 \in [x_1, y_2]_c$。我们考虑定理 3.23 中的一个三角形 $[a, u, t]$，其边为 $[t, u]_c \subset [x_1, y_2]_c$。由于 u是 a在 $[x_1, y_2]_c$上的投影， $\tilde{u} = u$。

- 当 $[a, u, t]$是一个三叉树时，我们有 $u \in [a, t]_c$，因此：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a, t) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a, u) + \measuredangle_t(a, u) + \Theta_{>(2000\delta)^2}(u, t).$$

对于所有 $w \in [u, t]_c$，都有如下结论。若 $w \in [y_1, y_2]_c$，则 $\measuredangle_w(u, t) \leq r$。若 $w \in [x_1, y_1]_c$，我们将用反证法证明 $\measuredangle_w(u, t) < (2000\delta)^2$。于是，假设 $\measuredangle_w(u, t) \geq (2000\delta)^2$。由于 $w \in [x_1, y_1]$，且 t是 a在 $[x_1, y_1]_c$上的投影，根据命题 3.12，我们有 $\measuredangle_w(a, t) \leq 12\delta$。这意味着：

$$\measuredangle_w(a, u) \geq \measuredangle_w(u, t) - \measuredangle_w(t, u) > 12\delta,$$

这与以下事实相矛盾： $w \in [x_1, y_2]_c$ 且 u 是 a 在$[x_1, y_2]_c$上的投影。因此：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(u, t) \leq r^2.$$

• 现在假设 $[a,u,t]$ 不是三叉树，那么 $\tilde{a}$、u、$\tilde{t}$ 彼此不同（见图 25）。若 $a \neq \tilde{a}$，我们用 e_1 表示 $[a,\tilde{a}]_c$ 上的边，使得 $\tilde{a} \in e_1$；并用 e_2、$e'2$ 分别表示 $[\tilde{a},t]_c$、$[\tilde{a},u]_c$ 上的边，使得 $\tilde{a} \in e_2 \cap e'2$。若 $t \neq \tilde{t}$，我们分别用 f_1、f_2 表示 $[a,\tilde{t}]_c$、$[t,\tilde{t}]_c$ 上的边，使得 $\tilde{t} \in f_1 \cap f_2$。我们考虑 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e_2) \measuredangle_{\tilde{a}}(e_1, e'2) \measuredangle_{\tilde{t}}(f_1, f_2)$，并约定在边未定义的情形下，角等于零。于是得到：

- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,u) \geq \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2')]_{(2000\delta)^2}$，
- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)]_{(2000\delta)^2} + [\measuredangle_{\tilde{t}}(f_1,f_2)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{t},t)$.

与前一种情况相同，我们有 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{t}, t) \leq r^2$。根据命题 3.24，我们有：

$$|\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2') - \measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)| \leq 12\delta.$$

再次根据命题 3.24，$\measuredangle_{\tilde{t}}(f_1, f_2)$ 与 $\measuredangle_{\tilde{t}}(t, u)$ 12δ 接近，且小于 r。应用命题 3.19即可得出结论。

□

以下引理使我们能够处理引理5.72中两个投影之间的角较大的情况。

引理5.73。设 $r \geq 0$。设 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ 满足 $d'(x_1,x_2)$ $d'(y_1,y_2) \leq r$。设 $a \in X_c$，定义：

- 令 $t \in [x_1,y_1]_c$ 为 a 在 $[x_1,y_1]_c$ 上的一个投影，
- $u \in [x_1,y_2]_c$ a 在 $[x_1,y_2]_c$ 上的投影，
- $v \in [x_2,y_1]_c$ a 在 $[x_2,y_1]_c$ 上的投影，
- $w \in [x_2,y_2]_c$ a 在 $[x_2,y_2]_c$ 上的投影。

若以下条件之一成立：

- $\measuredangle_u(a,t) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta + \max(r, 12\delta)$，
- $\measuredangle_v(a,t) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta + r + \max(r, 12\delta)$，
- $\measuredangle_w(a,t) \geq (2000\delta)^2 + 12\delta + r + \max(r, 12\delta)$，

我们有：

$$|\theta(d_a(x_1,y_1)) + \theta(d_a(x_2,y_2)) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| = 0.$$

证明。设 $\measuredangle_u(a,t) \geq (2000\delta)^2 + r$，其他情形可由 x_1, x_2, y_1, y_2 之间的对称性推出。我们将利用命题 5.28 证明：

$$\mu_{x_1}(a) = \mu_{y_1}(a) = \mu_{y_2}(a).$$

首先用反证法说明 $\measuredangle_u(t,x_1) \leq 12\delta$。事实上，若有 $\measuredangle_u(t,x_1) > 12\delta$，则可推出 $u \in [x_1,t]_c \subset [x_1,y_2]_c$，这与 $\measuredangle_u(a,t) \geq (2000\delta)^2 + r \geq 12\delta$，以及 t 是 a 在 $[x_1,y_1]_c$ 上的投影这一事实相矛盾。

因此我们可以推出：

$$\measuredangle_u(a,x_1) \geq \measuredangle_u(a,t) - \measuredangle_u(t,x_1) \geq (2000\delta)^2 + \max(r, 12\delta) \geq (2000\delta)^2,$$

根据命题 5.28，这意味着 $\mu_{x_1}(a) = \mu_u(a)$。
同理，可以证明 $\measuredangle_u(a,y_2) \geq (2000\delta)^2 + r$，并且 $\mu_{y_2}(a) = \mu_u(a$).

由此我们推得：

$$\measuredangle_u(a,y_1) \geq \measuredangle_u(a,y_2) - \measuredangle_u(y_1,y_2) \geq (2000\delta)^2,$$

因为 $d'(y_1,\ y_2) \leq r$。因此，$\mu_{y_1}(a) = \mu_u(a)$。

最后，我们得到 $\mu_{x_1}(a) = \mu_{y_1}(a) = \mu_{y_2}(a)$，由此可得：

$$|\theta(d_a(x_1,y_1)) + \theta(d_a(x_2,y_2)) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| = 0.$$

□

引理 5.74。设 $r \geq 0$, $y_1, y_2 \in G$，使得 $d'(y_1,y_2) \leq r$。设 $a \in X_c$，且 $t \in X_c$ 是 a 在 $[y_1,y_2]_c$ 上的投影，则存在仅依赖于 r 和 δ 的 $\lambda_2 \geq 0$，使得：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a,t) \geq \frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,y_1) - \measuredangle_t(a,y_1) - \lambda_2,$$

其中 α_2 是命题 *3.19* 中的常数。

证明。首先我们注意到：

$$d_c(a,t) \geq d_c(a,y_1) - r.$$

现在我们需要控制从 a 到 t 的大角与从 a 到 y_1 的大角之间的差异。在 $t \in [a,y_1]_c$ 的情况下，我们有：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y_1) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) + [\measuredangle_t(a,y_1)]_{>(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(t,y_1).$$

$d'(y_1,\ y_2) \leq r$ 意味着 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(t,\ y_1) \leq r^2$，因此：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) \geq \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y_1) - \measuredangle_t(a,y_1) - r^2.$$

命题 3.19 给出了所需的不等式，其中某个 λ_2 仅取决于 δ 和 r。

在 $t \notin [y_1,a]_c$的情况下，我们考虑一个三角形 $[y_1,t,a]_c$，如定理 3.23 所示，其中边$[t,y_1]_c$是 $[y_1,y_2]_c$的子集。由于 t是 a在 $[y_1,y_2]_c$上的投影，我们有 $t = \tilde{t}$，且 t、$\tilde{y_1}$和 a各不相同。若 $a \neq \tilde{a}$, 记 e_1为 $[a,\tilde{a}]_c$上的边，使得 $\tilde{a} \in e_1$，并记 e_2、e'_2分别为$[\tilde{a},y_1]_c$、$[\tilde{a},t]_c$的边，使得 $\tilde{a} \in e_2 \cap e'_2$。若 $y_1 \neq \tilde{y_1}$，记 f_1、f_2分别为 $[a,\tilde{y_1}]_c$、$[y_1,\tilde{y_1}]_c$的边，使得 $\tilde{y_1} \in f_1 \cap f_2$。我们考虑 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)$ $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e'_2)$ $\measuredangle_{\tilde{y_1}}(f_1,f_2)$；约定在边未定义的情况下，角等于零。若 $a \neq \tilde{a}$，记 e_1为 $[a,\tilde{a}]_c$上的边，使得 $\tilde{a} \in e_1$，并记 e_2、e'_2分别为 $[\tilde{a},y_1]_c$、$[\tilde{a},t]_c$的边，使得 $\tilde{a} \in e_2 \cap e'_2$。若 $y_1 \neq \tilde{y_1}$，记 f_1、f_2分别为 $[a,\tilde{y_1}]_c$、$[y_1,\tilde{y_1}]_c$的边，使得 $\tilde{y_1} \in f_1 \cap f_2$。我们考虑 $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)$ $\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e'_2)$ $\measuredangle_{\tilde{y_1}}(f_1,f_2)$；约定在边未定义的情况下，角等于零。于是得到：

- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e'_2)]_{(2000\delta)^2}$,
- $\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y_1) = \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,\tilde{a}) + [\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)]_{(2000\delta)^2} + [\measuredangle_{\tilde{y_1}}(f_1,f_2)]_{(2000\delta)^2} + \Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{y_1},y_1)$。

  与前一种情况一样，我们有 $\Theta_{>(2000\delta)^2}(\tilde{y_1},y_1) \leq r^2$。此外，根据命题 3.24，我们有：

$$|\measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e'_2) - \measuredangle_{\tilde{a}}(e_1,e_2)| \leq 12\delta.$$

同样根据命题 3.24，角 $\measuredangle_{\tilde{y_1}}(f_1,f_2)$ 与 $\measuredangle_{\tilde{y_1}}(y_1,t)$ 12δ 接近，后者小于 r，因为 $d'(y_1,y_2) \leq r$。因此：

$$\Theta_{>(2000\delta)^2}(a,t) \geq \Theta_{>(2000\delta)^2}(a,y_1) - r^2 - r - 12\delta.$$

我们再次以命题 3.19 的一个应用作结。

□

这个引理使我们能够控制引理 5.74 的角 $\measuredangle_t(a, y_1)$。

引理 5.75。设 $r \geq 0$、y_1、$y_2 \in G$ 使得 $d'(y_1, y_2) \leq r$。设 $a \in X_c$ 和 $t \in X_c$ 是 a 在 $[y_1, y_2]_c$ 上的投影，若 $\measuredangle_t(a, y_1) \geq (2000\delta)^2 + r$，则：

$$d_a(y_1, y_2) = 0.$$

证明。我们将证明，若 $\measuredangle_t(a, y_1) \geq (2000\delta)^2 + r$，则有：

$$\mu_{y_1}(a) = \mu_{y_2}(a).$$

根据命题 5.28，我们知道：

$$\mu_{y_1}(a) = \mu_t(a).$$

此外：

$$\measuredangle_t(a, y_2) \geq \measuredangle_t(a, y_1) - \measuredangle_t(y_1, y_2) \geq (2000\delta)^2,$$

于是，再次使用命题 5.28 可得：

$$\mu_{y_1}(a) = \mu_t(a),$$

这意味着 $d_a(y_1, y_2) = 0$。

□

ˆ 我们现在几乎已经具备了证明强-$B1$ for d所需的所有要素。下面的命题仅说明，我们可以在 $a \in X_c^\infty$ 上一致地应用强 $B1$ for d_a。

命题 *5.76.* 对所有 $\eta, r > 0$，存在 $R = R(\eta, r) \geq 0$，使得对所有 $a \in X_c^\infty$，以及所有$x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，若 $d_a(x_1, y_1)\ d_a(x_1, y_2)\ d_a(x_2, y_1)\ d_a(x_2, y_2) \geq R$且 $d_a(x_1, x_2)\ d_a(y_1, y_2) \leq r$，则有：

$$|d_a(x_1, y_1) + d_a(x_2, y_2) - d_a(x_1, y_2) - d_a(x_2, y_1)| \leq \eta.$$

证明。回想一下，群 G 相对一族可容许子群 $P_1, \ldots, P_n$是双曲的。因此，对每个 P_i和每个 $C > 0$, $\mathrm{Proba}_C(P_i)$都具有强双曲度量。因此，这些度量必定满足强-$B1$。对所有 $\eta, r > 0$，存在 R_i，使得对所有与 P_i相关联的 $a \in X_c^\infty$，以及所有$x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，若 $d_a(x_1, y_1)\ d_a(x_1, y_2)\ d_a(x_2, y_1)\ d_a(x_2, y_2) \geq R_i$ 且 $d_a(x_1, x_1)\ d_a(x_2, x_2) \leq r$，则有：

$$|d_a(x_1, y_1) + d_a(x_2, y_2) - d_a(x_1, y_2) - d_a(x_2, y_1)| \leq \eta.$$

取 R 为 R_i 的最大值，对于所有 $a \in X_\infty$，对于所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，其中 $d_a(x_1, y_1)\ d_a(x_1, y_2)$, $d_a(x_2, y_1)\ d_a(x_2, y_2) \geq R$以及 $d_a(x_1, x_1)\ d_a(x_2, x_2) \leq r$，我们有：

$$|d_a(x_1, y_1) + d_a(x_2, y_2) - d_a(x_1, y_2) - d_a(x_2, y_1)| \leq \eta.$$

□

ˆ 在这里，我们将证明关于 d 的最重要结果，即 strong-$B1$。根据命题 3.17 的距离公式，当距离 $d(x_1, y_1)$ 较大时，有两种情况需要考虑：一种是锥化图中 x_1 与 y_1 之间存在大角；另一种是锥化空间中 x_1 与 y_1 之间的距离较大

ˆ**定理 5.77.** 度量空间 (G, d) 满足强-$B1$。

证明。回顾一下，对于所有 $x, y \in G$, $d'(x,y) = d_c(x,y)+\Theta'(x,y)$，其中 $\Theta'(x,y)$ 表示连接 $[x,y]_c$ 的测地线上无限价顶点处角度和的最小值。根据命题 ˆ 5.68 和命题 3.17，(X,d) 满足强-$B1$ 等价于：对于所有 $r > 0$ 和 $\eta > 0$，存在 $R = R(\eta, r) \geq 0$，使得对于所有 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$，其中$d'(x_1, y_1)\ d'(x_1,y_2)\ d'(x_2,y_1)\ d'(x_2,y_2) \geq R$ 且 $d'(x_1,x_2)\ d'(y_1,y_2) \leq r$，我们有：

$$|\hat{d}(x_1,y_1) + \hat{d}(x_2,y_2) - \hat{d}(x_1,y_2) - \hat{d}(x_2,y_1)| \leq \eta.$$

稍后我们将选取 $R \in \mathbb{N}$，使其为偶数且足够大。假设：

$$d'(x_1,y_1) \geq R$$

这意味着：

$$d_c(x_1,y_1) + \Theta(x_1,y_1) \geq R.$$

需要考虑两种情况。

1. 首先假设：

$$d_c(x_1,y_1) \leq \sqrt{R}.$$

因此，若 $R \geq 4$，则有：

$$\sqrt{R} \max_{a \in X_c^\infty} (\measuredangle_a(x_1,y_1)) \geq \Theta(x_1,y_1) \geq \frac{R}{2}.$$

因此存在 $a_0 \in X_c^\infty$，使得：

$$\measuredangle_{a_0}(x_1,y_1) \geq \frac{\sqrt{R}}{2}.$$

我们将证明，当 R 足够大时，对所有 $a \in X_c$、$a \neq a_0$，都有：

$$|\theta(d_a(x_1,y_1)) + \theta(d_a(x_2,y_2) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| = 0.$$

为此，我们注意到，对所有 $a \in X_c$、$a \neq a_0$，都有：

$$\measuredangle_{a_0}(x_1,a) + \measuredangle_{a_0}(a,y_1) \geq \measuredangle_{a_0}(x_1,y_1) \geq \frac{\sqrt{R}}{2}.$$

不失一般性，设：

$$\measuredangle_{a_0}(x_1,a) \geq \frac{\sqrt{R}}{4}.$$

因此，我们得到：

$$\measuredangle_{a_0}(x_2,a) \geq \measuredangle_{a_0}(x_1,a) - \measuredangle_{a_0}(x_1,x_2) \geq \frac{\sqrt{R}}{4} - r.$$

因此，如果我们取足够大的 R，使得 $\frac{\sqrt{R}}{4} - r \geq (2000\delta)^2$,，就有：

$$\measuredangle_{a_0}(x_1,a), \measuredangle_{a_0}(x_2,a) \geq (2000\delta)^2.$$

那么，根据命题 5.28，这意味着：

$$\mu_{x_1}(a) = \mu_{x_2}(a) = \mu_{a_0}(a).$$

因此：

$$|\theta(d_a(x_1,y_1)) + \theta(d_a(x_2,y_2)) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| = |\theta(d_b(\mu_{x_1}(a), \mu_{y_1}(a))) + \theta(d_b(\mu_{x_1}(a), \mu_{y_2}(a))) - \theta(d_b(\mu_{x_1}(a), \mu_{y_1}(a))) - \theta(d_a(\mu_{x_1}(a), \mu_{y_1}(a)))| = 0.$$

因此，我们得到：

$$\begin{aligned}&|\hat{d}(x_1,y_1) + \hat{d}(x_2,y_2) - \hat{d}(x_1,y_2) - \hat{d}(x_2,y_1)| \\ =&|\theta(d_{a_0}(x_1,y_1)) + \theta(d_{a_0}(x_2,y_2)) - \theta(d_{a_0}(x_1,y_2)) - \theta(d_{a_0}(x_2,y_1))|.\end{aligned}$$

我们有：

- $\measuredangle_{a_0}(x_1,y_1) \geq \frac{\sqrt{R}}{2}$,
- $\measuredangle_{a_0}(x_2,y_1) \geq \frac{\sqrt{R}}{2} - r$,
- $\measuredangle_{a_0}(x_1,y_2) \geq \frac{\sqrt{R}}{2} - r$,
- $\measuredangle_{a_0}(x_2,y_2) \geq \frac{\sqrt{R}}{2} - 2r$.

因此，根据命题 5.43，如果我们取足够大的 R，则有：

$$\begin{aligned}&|\hat{d}(x_1,y_1) + \hat{d}(x_2,y_2) - \hat{d}(x_1,y_2) - \hat{d}(x_2,y_1)| \\ =&|\theta(d_{a_0}(x_1,y_1)) + \theta(d_{a_0}(x_2,y_2)) - \theta(d_{a_0}(x_1,y_2)) - \theta(d_{a_0}(x_2,y_1))| \\ =&t_0^{P-1}|d_{a_0}(x_1,y_1) + d_{a_0}(x_2,y_2) - d_{a_0}(x_1,y_2) - d_{a_0}(x_2,y_1)|.\end{aligned}$$

最后，应用命题 5.76，我们可以找到一个与 a_0 无关的 R，使得：

$$|d_{a_0}(x_1,y_1) + d_{a_0}(x_2,y_2) - d_{a_0}(x_1,y_2) - d_{a_0}(x_2,y_1)| \leq \eta.$$

2. 假设在第二种情况下 $d_c(x_1, y_1) \geq \sqrt{R}$. 同样，我们稍后会选择足够大的 R。

记 B 为满足以下条件的 $a \in X_c$ 集合：

- $d_a(x_1, y_1) \geq t_0$,
- 或 $d_a(x_1, y_2) \geq t_0$,
- 或 $d_a(x_2, y_1) \geq t_0$,
- 或 $d_a(x_2, y_2) \geq t_0$.

我们有如下结论：

$$\begin{aligned}&|\hat{d}(x_1,y_1) + \hat{d}(x_2,y_2) - \hat{d}(x_1,y_2) - \hat{d}(x_2,y_1)| \\ &\leq \sum_{a\in\mathcal{B}} |\theta(d_a(x_1,y_1) + \theta(d_a(x_2,y_2)) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| \\ &+ \sum_{a\in X_c} |d_a(x_1,y_1)^P + d_a(x_2,y_2)^P - d_a(x_1,y_2)^P - d_a(x_2,y_1)^P|.\end{aligned}$$

(a) 我们首先证明，当 R 足够大时，有：

$$\sum_{a\in\mathcal{B}} |\theta(d_a(x_1,y_1) + \theta(d_a(x_2,y_2)) - \theta(d_a(x_1,y_2)) - \theta(d_a(x_2,y_1))| \leq 4\eta.$$

我们固定四条测地线 $[x_1,y_1]_c$，$[x_2,y_2]_c$，$[x_1,y_2]_c$，$[x_2,y_1]_c$。根据引理 5.53，我们知道：

$$\mathcal{B}\subset([x_1,y_1]_c\cup[x_2,y_2]_c\cup[x_1,y_2]_c\cup[x_2,y_1]_c)\cap X_c^\infty.$$

我们将证明，当 R 足够大时，有：

$$\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|\le\eta.$$

由于 x_1、y_1、x_2 和 y_2 的作用具有对称性，这将对 $\mathrm{B}\cap[x_2,y_1]_c$、$\mathrm{B}\cap[x_1,y_2]_c$、$\mathrm{B}\cap[x_2,y_2]_c$ 给出相同的结果。
我们将 m 记作 $[x_1,y_1]_c$ 中满足 $d_c(x_1,m)\ge\frac{1}{2}d_c(x_1,y_1)-1$ 且 $d_c(m,y_1)\ge\frac{1}{2}d_c(x_1,y_1)-1$ 的一个顶点。我们注意到以下事实：

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|\\&\le\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c,a\in[x_1,m]_c}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|\\&+\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c,a\in[m,y_1]_c}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|.\end{aligned}$$

让我们对第一个和给出上界；第二个和的界将由对称性得到。

设 $a\in X_c$ 满足 $a\in[x_1,m]_c$，则有：

$$\begin{aligned}d_c(a,[y_1,y_2]_c)&\ge d_c(a,y_1)-r\ (\text{since } d_c(y_1,y_2)\le r)\\&\ge\frac{1}{2}d_c(x_1,y_1)-1-r\ (\text{since } a\in[x_1,m]_c).\end{aligned}$$

因此，如果 R 足够大，我们可以将定理 5.42 应用于 a 和 $[y_1,y_2]_c$，从而有：

$$d_a(y_1,y_2)\le K_1\kappa^{d_c(a,[y_1,y_2]_c)}\le K_1\kappa^{\frac{1}{2}d_c(x_1,y_1)-1-r},$$

其中 K_1 是定理 5.42 中的常数。
由此，我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c,a\in[x_1,m]_c}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|\\&\le\sum_{a\in\mathcal{B}\cap[x_1,y_1]_c,a\in[x_1,m]_c}2Pt_0^{P-1}d_a(y_1,y_2)\ (\text{according to Lemma 5.52})\\&\le 2Pt_0^{P-1}d_c(x_1,y_1)\kappa^{\frac{1}{2}d_c(x_1,y_1)-1-r}\\&\le 2Pt_0^{P-1}R\kappa^{\frac{1}{2}R-1-r},\end{aligned}$$

当 R 足够大时。
当 R 趋于正无穷时，最后一项趋于 0，因此当 R 足够大时，它小于 η。

总之，我们证明了：

$$\sum_{a\in\mathcal{B}}|\theta(d_a(x_1,y_1)+\theta(d_a(x_2,y_2))-\theta(d_a(x_1,y_2))-\theta(d_a(x_2,y_1))|\le4\eta.$$

(b) 现在，我们将证明，当 R 足够大时，有：

$$\sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{B}}|d_a(x_1,y_1)^P+d_a(x_2,y_2)^P-d_a(x_1,y_2)^P-d_a(x_2,y_1)^P|\le2\eta.$$

稍后我们将选择一个足够大的偶数 $R \in \mathbb{N}$。我们用 m 表示 $[x_1, y_1]_c$ 中的一个顶点，使得 $d_c(x_1, m) \geq \frac{R}{2}$ 且 $d_c(m, y_1) \geq \frac{R}{2}$。对于所有 $a \in X$，$\pi(a)$ 表示 a 到 $[x_1, y_1]_c$ 上距离 x_1 最近的投影。更确切地说，这意味着 $\pi(a) \in [x_1, y_1]_c$，$d_c(a, [x_1, y_1]_c) = d_c(a, \pi(a))$；对于所有满足 $d_c(a, [x_1, y_1]_c) = d_c(a, u)$ 的 $u \in [x_1, y_1]_c$，都有：$d_c(x_1, u) > d_c(x_1, \pi(a))$。$\pi(a)$ 是距离 x_1 最近的 a 的投影这一事实，仅用于无歧义地定义 a 在 $[x_1, y_1]_c$ 中的投影。

我们有如下结论：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}} |d_a(x_1, y_1)^P + d_a(x_2, y_2)^P - d_a(x_1, y_2)^P - d_a(x_2, y_1)^P| \\
&\leq \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [x_1, m]_c} |d_a(x_1, y_1)^P + d_a(x_2, y_2)^P - d_a(x_1, y_2)^P - d_a(x_2, y_1)^P| \\
&+ \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [m, y_1]_c} |d_a(x_1, y_1)^P + d_a(x_2, y_2)^P - d_a(x_1, y_2)^P - d_a(x_2, y_1)^P|.
\end{aligned}$$

我们将对第一个和给出上界；由对称性可知，第二个和的证明相同。为此，我们注意到：

$$\begin{aligned}
&\sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [x_1, m]_c} |d_a(x_1, y_1)^P + d_a(x_2, y_2)^P - d_a(x_1, y_2)^P - d_a(x_2, y_1)^P| \\
&\leq \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [x_1, m]_c} P \max(d_a(x_1, y_1)^{P-1}, d_a(x_1, y_2)^{P-1}) d_a(y_1, y_2) \\
&+ \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [x_1, m]_c} P \max(d_a(x_2, y_1)^{P-1}, d_a(x_2, y_2)^{P-1}) d_a(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

同样，我们将对第一个和给出上界。对于第二个和，证明相同。记作 $N := d_c(x_1, m)$。我们按以下方式对 $[m, x_1]_c$ 排序：$[m, x_1]_c = \{z_0, z_1, \ldots, z_N\}$，其中 $z_0 = m$、$z_N = x_1$ 和 $d_c(z_i, z_{i+1}) = 1$ 对于 $0 \leq i \leq N - 1$。

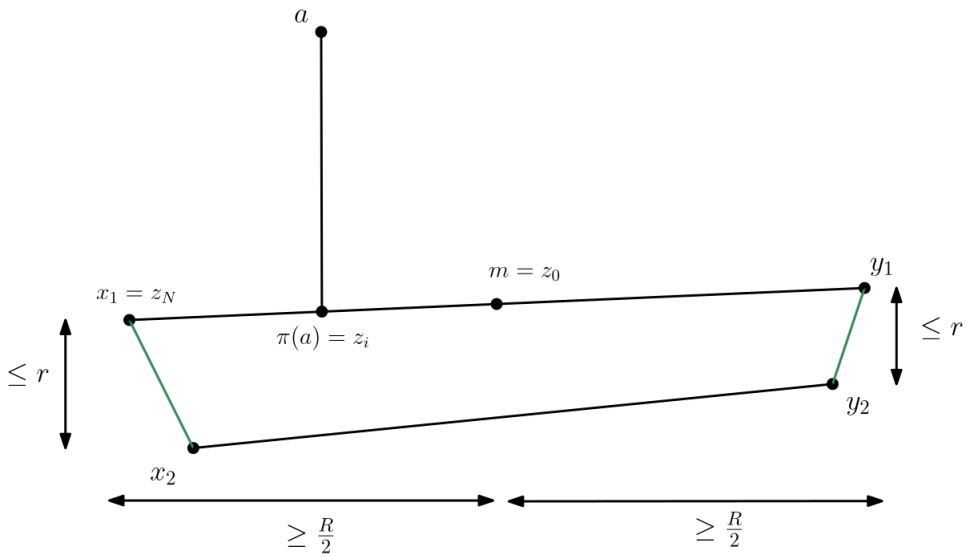


图 26：$\pi(a) = z_i \in [x_1, m]$

如果 R 足够大，对于所有满足 $a \in [m, x_1]_c$ 的 $a \in X_c$，我们可以将定理 5.42 应用于 a 和 $[y_1, y_2]_c$，结合引理 5.74 和引理 5.75，得到：

$$d_a(y_1, y_2) \leq K_1 \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a, y_1) - \omega_2}, \tag{10}$$

其中 $\omega_2 := \lambda_2 + (2000\delta)^2 + r$， λ_2 为引理 5.74 中的常数。对于所有 $i \in \{1,...,n\}$ 以及满足 $\pi(a) = z_i$ 的 $a \in X_c$，我们有 $d_c(z_i, y_1) \geq i + \frac{R}{2}$，因此：

$$\begin{aligned} d'_{(2000\delta)^2}(a, y_1) &\geq d_c(a, y_1) \\ &\geq d_c(a, z_i) + d_c(z_i, y_1) - 24\delta \text{(according to Lemma 4.7)} \\ &\geq d_c(a, z_i) + i + \frac{R}{2} - 24\delta \\ &\geq i + \frac{R}{2} - 24\delta. \end{aligned}$$

此外，根据引理 5.47，在测地线 $[x_1, y_1]_c$ 上：

$$d'_{(2000\delta)^2}(a, y_1) \geq \frac{1}{W}(i + \frac{R}{2} + d'_{(2000\delta)^2}(a, z_i)) - W.$$

此外，根据定理 5.42，对于所有的 $i \in \{1, ..., n\}$ 以及满足 $\pi(a) = z_i$ 的 $a \in X_c$，除有限多个 a 外，我们有：

$$\max(d_a(x_1, y_1)^{P-1}, d_a(x_1, y_2)^{P-1}) \leq K_1 \max(\kappa^{(P-1)d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i)}, \kappa^{(P-1)(\frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i) - \omega)}) \text{(根据引理 5.72 和引理 5.73)} \leq K_1 \kappa^{\frac{P-1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a,z_i) - (P-1)\omega_1},$$

—— (11)

其中 $\omega_1 := \lambda_1 + (2000\delta)^2 + 12\delta + \max(r, 12\delta)$， λ_1 为引理 5.72 中的常数。因此，我们得到：

$$\begin{aligned} &\sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) \in [x_1, m]_c} P \max(d_a(x_1, y_1)^{P-1}, d_a(x_1, y_2)^{P-1}) d_a(y_1, y_2) \\ &\leq P \sum_{i=0}^{N} \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) = z_i} \max(d_a(x_1, y_1)^{P-1}, d_a(x_1, y_2)^{P-1}) d_a(y_1, y_2) \\ &\leq P \sum_{i=0}^{N} \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}, \pi(a) = z_i} \max(d_a(x_1, y_1)^{P-1}, d_a(x_1, y_2)^{P-1}) K_1 \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a, y_1) - \omega_2} \text{ (according to Equation 10)} \\ &\leq P K_1 2\gamma_G^{C_1} t_0 \kappa^{-\frac{24\delta}{\alpha_2^2} - \omega_2} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^2}} \text{ (bound for the } a \text{ closed to } [x_1, y_1]_c) \\ &+ P \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \kappa^{-(P-1)\omega_1 - \omega_2} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \sum_{a \in X_c \setminus \mathcal{B}} \kappa^{\frac{P-1}{\alpha_2^2} d'_{(2000\delta)^2}(a, z_i)} \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^4} d'_{(2000\delta)^2}(a, z_i)} \text{ (according to Equation 11)} \\ &\leq P K_1 2\gamma_G^{C_1} t_0 \kappa^{-\frac{24\delta}{\alpha_2^2} - \omega_2} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \text{ (geometric sum)} \\ &+ P \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \kappa^{-(P-1)\omega_1 - \omega_2} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_4}} \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \sum_{a \in X_c} \kappa^{\frac{P}{\alpha_2^4} d'_{(2000\delta)^2}(a, z_i)} \\ &\leq P K_1 2\gamma_G^{C_1} t_0 \kappa^{-\frac{24\delta}{\alpha_2^2} - \omega_2} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \\ &+ P \kappa^{-(P-1)\omega_1 - \omega_2} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} \sigma \sum_{i=0}^{N} \kappa^{\frac{i}{\alpha_2^4}} \text{ (according to Proposition 5.50)} \\ &\leq P K_1 2\gamma_G^{C_1} t_0 \kappa^{-\frac{24\delta}{\alpha_2^2} - \omega_2} \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^2}}} \kappa^{\frac{R}{2\alpha_2^2}} + P \kappa^{-(P-1)\omega_1 - \omega_2} \sigma \frac{1}{1 - \kappa^{\frac{1}{\alpha_2^4}}} \kappa^{\frac{R}{\alpha_2^4}} \text{ (geometric sum).} \end{aligned}$$

当 R 趋于无穷大时，最后一项趋于零，因此，当 R 足够大时，我们有：

$$\sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{B},\pi(a)\in[x_1,m]_c} P\max(d_a(x_1,y_1)^{P-1},d_a(x_1,y_2)^{P-1})d_a(y_1,y_2)\le\eta.$$

因此：

$$\sum_{a\in X_c\setminus\mathcal{B}}|d_a(x_1,y_1)^P+d_a(x_2,y_2)^P-d_a(x_1,y_2)^P-d_a(x_2,y_1)^P|\le 2\eta.$$

证明至此结束。

□

5.11 结论

我们给出定理 5.19 的证明。

证明。 定理 5.19

函数 $\hat{d}$ 根据命题 5.61，定义 5.60 中的度量是定义在 G 上的。

ˆ根据定义， d 是 G-不变的。

ˆˆ根据命题 5.68 d 与词度量拟等距，因此 d 是一致局部有限的。

ˆ根据命题 5.67，度量空间 $(G,\ d)$ 是弱测地的。

ˆ根据定理 5.77 d 满足强-$B1$条件；根据命题 5.71，满足弱-$B2'$ 条件，因此 d 是强双曲的。

□

由于 $CAT(0)$ 群是可容许的，我们可得定理 5.1。

证明。 根据命题 5.17 $CAT(0)$，群是可容许的。我们应用定理 5.19。

□

根据 Lafforgue 定理 1.1，我们在此介绍关于鲍姆-康涅猜想的结果。

证明。 推论 5.2

设 H 是相对双曲群 G 的一个子群，其中有 $CAT(0)$ 个抛物子群具有 (RD) ˆˆ 性质。根据定理 5.8，存在 G 上的度量 d，使得 $(G,\ d)$ 弱测地且强双曲。根据命题 5.68， d 与 G 上的词度量拟等距，因此它是局部一致有限的，并且 H 在 G 上的作用是适当的。最后，根据 [CR05a], H 满足 (RD) 性质。根据定理 1.1，我们推得 H 满足鲍姆-康涅猜想。

□

在这个推 论中，我们给出了一些 $CAT(0)$ 群族，这些群的 (RD) 性质已为人所知 .

证明。 推论 5.3

根据 [UM25，命题 8.1], 几乎阿贝尔群是 $CAT(0)$ 群，因此根据命题 5.17，它们是可容许的。根据 Jolissaint [Jol90], 它们满足 (RD) 性质。

根据定义，余紧立方化群是 $CAT(0)$ 群；根据[CR05b], 它们满足 (RD) 性质。

Coxeter 群群是 $CAT(0)$，据 [Dav25], , 它们满足 (RD) 性质，据 [CR05b] .

□

证明。 推论 5.4

根据 [BH99，引理 II.10.27], 实完全双曲流形的基本群相对于几乎阿贝尔子群是双曲的，因此根据推论 5.3，它们满足鲍姆-康涅猜想。

□

参考文献

[AAS07] James W. Anderson、Javier Aramayona 和 Kenneth J. Shackleton。《群强相对双曲性的一种障碍》。J. Group Theory，10(6):749–756，2007年。[AL17] Aurélien Alvarez 和 Vincent Lafforgue。《双曲群在 ℓ^p 空间上的真仿射等距作用》。Expo. Math.，35(1):103–118，2017年。[AL18] Aurélien Alvarez 和 Vincent Lafforgue。《双曲群在 ℓ^p 空间商上的真仿射等距作用》。Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)，51(6):1389–1398，2018年。[BC00] Paul Baum 和 Alain Connes。《李群与叶层的几何 K理论》。Enseign. Math. (2)，46(1-2):3–42，2000年。[BCH94] Paul Baum、Alain Connes 和 Nigel Higson。《真作用的分类空间与群 C^*代数的K理论》。载于《 C^*代数：1943–1993——五十周年庆典》。美国数学会 C^*代数理论创立五十周年纪念特别会议，1993年1月13–14日，美国得克萨斯州圣安东尼奥，页241–291。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会，1994年。[BCV95] M. E. B. Bekka、P.-A. Cherix 和 A. Valette。《可 amen 群的真仿射等距作用》。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第2卷。根据奥伯沃尔法赫数学研究所1993年9月会议编写，页1–4。剑桥：剑桥大学出版社，1995年。[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，《数学科学基础丛书》第319卷。柏林：施普林格，1999年。[BK02] Michelle Bucher 和 Anders Karlsson。《Bolic空间的定义》。Expo. Math.，20(3):269–277，2002年。[BMV05] Hela Bettaieb、Michel Matthey 和 Alain Valette。《K同调中的无界对称算子与鲍姆-康涅猜想》。J. Funct. Anal.，229(1):184–237，2005年。[Bow12] B. H. Bowditch。《相对双曲群》。Int. J. Algebra Comput.，22(3):1250016，66页，2012年。[CD20] Indira Chatterji 和 François Dahmani。《相对双曲群在 ℓ^p空间上的真作用》。Annales Henri Lebesgue，3:35–66，2020年。[CDH10] Indira Chatterji、Cornelia Druţu 和 Frédéric Haglund。《从中位数观点看 Kazhdan 性质与 Haagerup 性质》。Adv. Math.，225(2):882–921，2010年。[CDHL20] Indira Chatterji、François Dahmani、Thomas Haettel 和 Jean Lécureux。《双曲空间的切丛与 l^p 空间上的真仿射作用》，2020年。[Cha17] Indira Chatterji。《快速衰减性质导论》。载于《朗兰兹对应周边》。国际会议，巴黎南大学，法国奥尔赛，2015年6月17–20日。会议论文集，页53–72。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS），2017年。[CM90] Alain Connes 和 Henri Moscovici。《循环上同调、诺维科夫猜想与双曲群》。Topology，29(3):345–388，1990年。[CR05a] I. Chatterji 和 K. Ruane。《具有快速衰减性质的一些几何群》。Geom. Funct. Anal.，15(2):311–339，2005年。[CR05b] I. Chatterji 和 K. Ruane。《具有快速衰减性质的一些几何群》。Geom. Funct. Anal.，15(2):311–339，2005年。

[Dav25] Michael W. Davis。《考克斯特群的几何与拓扑》。施普林格数学专著。瑞士尚：施普林格，第2版，2025年。[DK18] Cornelia Druţu 和 Michael Kapovich。《几何群论》。附 Bogdan Nica 撰写的附录，《美国数学会专题丛书》第63卷。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS），2018年。[dlH88] Pierre de la Harpe。《双曲群、算子代数与 Jolissaint 定理》。（Hyperbolic groups, operator algebras and Jolissaint's theorem）。C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, 307(14):771–774，1988年。[DS05] Cornelia Druţu 和 Mark Sapir。《具有快速衰减性质的相对双曲群》。Int. Math. Res. Not.，2005(19):1181–1194，2005年。[Far98] B. Farb。《相对双曲群》。Geom. Funct. Anal.，8(5):810–840，1998年。[FRR95] Steven C. Ferry、Andrew Ranicki 和 Jonathan Rosenberg。《诺维科夫猜想的历史与综述》。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第1卷。根据奥伯沃尔法赫数学研究所1993年9月举行的会议编写，页7–66。剑桥：剑桥大学出版社，1995年。[GAJV19] Maria Paula Gomez Aparicio、Pierre Julg 和 Alain Valette。《鲍姆-康涅猜想：扩展综述》。载于《非交换几何进展》。基于2017年3月23日至4月7日在中国上海举行的非交换几何会议，适逢 Alain Connes 七十寿辰，页127–244。瑞士尚：施普林格，2019年。[GdlH90] Etienne Ghys 和 Pierre de la Harpe（编）。《论 Mikhael Gromov 的双曲群》。（On the hyperbolic groups à la M. Gromov），《数学进展丛书》第83卷。波士顿，马萨诸塞州：Birkhäuser，1990年。[Gro87] M. Gromov。《双曲群》。载于《群论论文集》，《数学科学研究所出版物》第8卷，75–263页（1987年），1987年。[HHP25] Thomas Haettel、Nima Hoda 和 Harry Petyt。《胞腔复形上的 ℓ^p 度量》。J. Lond. Math. Soc., II. Ser.，111(1):43，2025年，编号 e70062。[HK97] Nigel Higson 和 Gennadi Kasparov。《在希尔伯特空间上适当等距作用的群的算子 K理论》。Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.，3(22):131–142，1997年。[Jol90] Paul Jolissaint。《群约化 C^*代数中的快速衰减函数》。Trans. Am. Math. Soc.，317(1):167–196，1990年。[KS94] Guennadi Kasparov 和 Georges Skandalis。《"Bolic"群与诺维科夫猜想》。C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I，319(8):815–820，1994年。[KS03] Gennadi Kasparov 和 Georges Skandalis。《在"bolic"空间上适当作用的群与诺维科夫猜想》。Ann. Math. (2)，158(1):165–206，2003年。[Laf02] Vincent Lafforgue。《巴拿赫代数的双变 K理论与鲍姆-康涅猜想》。Invent. Math.，149(1):1–95，2002年。[Laf08] Vincent Lafforgue。《(T) 性质的强化》。Duke Math. J.，143(3):559–602，2008年。[Laf10] Vincent Lafforgue。《强化的(T)性质与鲍姆-康涅猜想》。载于《数学量子》。纪念 Alain Connes 的非交换几何会议，法国巴黎，2007年3月29日至4月6日，页323–345。普罗维登斯，罗得岛：美国数学会（AMS）；剑桥，马萨诸塞州：克莱数学研究所，2010年。

[Laf12] Vincent Lafforgue。《带系数的鲍姆-康恩猜想》与双曲群。J. Noncommut. Geom., 6(1):1–197, 2012。[Lan15] Markus Land。解析组装映射与指标理论。J. Noncommut. Geom., 9(2):603–619, 2015。[LD25] Hermès Lajoinie-Dodel。强性质（T）与相对双曲群。Math. Z., 310(2):42, 2025。编号/第 36 号。[Mat11] Haissïnky Matthieu。通过随机游走研究双曲群的鲍姆-康涅猜想。在线可得，2011。[MM99] Howard A. Masur 和 Yair N. Minsky。曲线复形的几何。I：双曲性。Invent. Math., 138(1):103–149, 1999。[MY02] Igor Mineyev 和 Guoliang Yu。双曲群的鲍姆-康涅猜想。Invent. Math., 149(1):97–122, 2002。[NP25] Shintaro Nishikawa 和 Nansen Petrosyan。Dehn填充、等变同调与鲍姆-康涅猜想，2025。[OO01] Hervé Oyono-Oyono。鲍姆-康涅猜想与树上的群作用。 K-Theory, 24(2):115–134, 2001。[Osi06] Denis V. Osin。相对双曲群：内在几何、代数性质与算法问题。Mem. Am. Math. Soc. 第 843 卷。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2006。[RS95] Jonathan Rosenberg 和 Stephan Stolz。Gromov-Lawson 猜想的一个“稳定”版本。载于《Čech 百年纪念：纪念 Eduard Čech 百岁诞辰的同伦理论会议，1993 年 6 月 22–26 日，美国马萨诸塞州波士顿东北大学》，第 405–418 页。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，1995。[Sap15] Mark Sapir。群的快速衰减性质与重心。J. Topol. Anal., 7(3):513–541, 2015。[Sis13] Alessandro Sisto。投影与相对双曲性。Enseign. Math. (2), 59(1-2):165–181, 2013。[Stu03] Karl-Theodor Sturm。非正曲率度量空间上的概率测度。载于《流形、图与度量空间上的热核与分析：关于流形和图上的热核、随机游走与分析的季度项目讲义，2002 年 4 月 16 日至 7 月 13 日，法国巴黎》，第 357–390 页。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2003。[UM25] Jon Merladet Urigüen 和 Ashot Minasyan。自由构造中的虚拟收缩，2025。[Val02] Alain Valette。鲍姆-康涅猜想导论。笔记由 Indira Chatterji 记录。附录由 Guido Mislin 撰写。巴塞尔：Birkhäuser，2002。[VGG73] A. M. Vershik、I. M. Gel’fand 和 M. I. Graev。群 SL(2, R) 的表示，其中 R 是函数环。Russ. Math. Surv., 28(5):87–132, 1973。[VGG74] A. M. Vershik、I. M. Gel’fand 和 M. I. Graev。群G^X 的不可约表示与上同调。Funct. Anal. Appl., 8:151–153, 1974。