arXiv:2512.21308v1 [math.DS] 24 Dec 2025

阿诺索夫流的帕特森–沙利文构造与整体叶几何

Clark Butler

Abstract. 我们通过一种类似于负曲率情形下帕特森–沙利文测度构造的方法，给出了传递 Anosov 流最大熵测度的一种新构造。为实施这一方法，我们证明了若干关于 Anosov 流中心-不稳定叶状结构之叶的整体几何的新结果。我们证明，中心-不稳定叶的万有覆盖在诱导黎曼度量下是 Gromov 双曲的，并且其相对格罗莫夫边界可与其中的不稳定叶作规范同一识别，使得这些叶上的 Hamenst¨adt 度量与相对格罗莫夫边界上的视觉度量相对应。随后，我们按照一种受 Bonk-Heinonen-Koskela 方法启发的技术对这些中心-不稳定叶进行一致化。除有助于构造本身外，这还使这些一致化的叶具有丰富的解析性质，例如满足庞加莱不等式。作为推论，我们得到：具有 Anosov 测地流的闭黎曼流形的基本群必为 Gromov 双曲。

1. 引言

与双曲空间上群作用相关的无穷远边界上的帕特森–沙利文测度理论，与相关商空间上测地流的动力学之间存在许多丰富的相互联系。关于这一领域近期发展的全面介绍，请参阅 [22] 的引言。将范围专门限定于闭负曲率黎曼流形上的余紧群作用和测地流时，这种相互作用在负曲率情形下导出了对最大熵测度的三种相关刻画：它可以表示为与帕特森–沙利文测度等价的叶测度的乘积 [23], ；可以表示为集中于周期轨道上的测度的平均极限 [4], ；还可以表示为一族条件测度的乘积，这些条件测度由不稳定叶上的勒贝格测度经推前并重新归一化得到 [21]。

当我们转向阿诺索夫流的一般情形时，上述第二种和第三种刻画仍然成立，但最大熵测度在不稳定叶上的条件测度源自帕特森–沙利文测度这一解释便不复存在了。事实上，由于我们对高维阿诺索夫流的一般结构整体上了解甚少，甚至可能根本不存在可供我们利用的万有覆盖上的群作用。尽管如此，对于这些流而言，保留某种形式的帕特森–沙利文构造仍然是可取的：既可以为现有方法提供新的视角，也有助于更好地处理某些使用当前方法时难以细致处理的问题（例如叶测度问题）。

我们的出发点是 Hamenst¨adt [14] 的一个关键观察，后来 Hasselblatt [15] 对此作了进一步阐述：Bowen-Margulis最大熵测度在不稳定流形上的条件测度，是这些叶片上一族度量的豪斯多夫测度；如今这族度量称为 $Hamenst¨adt$ 度量。这表明，可以通过确立 Hamenst¨adt 的某些 Ahlfors正则性性质来构造这些条件测度

度量。这就是我们将采用的构造路径。在一种密切相关的构造中，Climenhaga-Pesin-Zelerowicz 利用常见构造中用于定义 Bowen 球、并与拓扑熵相关的一族动力学度量，证明可以利用这族度量整体定义的 *Caratheodory* 维数结构 来构造最大熵测度 [10], [11]。

尽管我们的研究动机来自动力学，但本文证明中的动力学内容相当有限。相反，我们的方法主要借鉴了粗几何和度量空间上的分析。本文的大部分内容都致力于证明，与阿诺索夫流相关的动力学不变叶状结构是应用这些技术的理想场景。我们将证明，阿诺索夫流的中心-不稳定流形在其诱导黎曼度量下是 Gromov 双曲空间；并且，通过一种受 Bonk-Heinonen-Koskela 工作启发的一致化技术 [3], ，我们将证明，这些流形上的黎曼度量可以经过共形缩放，从而得到满足倍增条件的一致度量空间，并且相对于对黎曼体积进行重整化后得到的体积，支持一个 Poincar´e 不等式。开展这些工作，是为发展 Hamenst¨adt 度量的适当函数理论做准备；遗憾的是，本文篇幅有限，无法对此详加阐述。参见 [8] ，其中在更抽象的框架下进行了一些分析；这些分析将在未来的工作中应用于与阿诺索夫流相关的 Hamenst¨adt 度量领域；另参见 [2] ，了解启发 [8] 的相关工作。

现在我们详细陈述结果。为此，我们需要回顾阿诺索夫流的基本结构性质，并固定一些记号。这些性质可见于任何基础参考文献，例如 [12]。对于 $r \geq 3$ ，我们令 M 为一个 C^{r+1} 闭黎曼流形，并令 $f^t : M \to M$ 为定义在 C^{r+1} 黎曼流形 M上的 C^r 传递 Anosov 流。准确地说，我们所说的是一个 M 带有 C^r 黎曼度量的 C^{r+1} 闭流形；我们还说， f^t 在 C^r 的意义下是 $\dot{f}\colon M \to TM$ 为 M 上的 C^r 向量场。Anosov 条件是指， M 的切丛存在一个 Df^t-不变分裂 $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$，使得 E^c =张成(*f*)，并且存在常数 C_u, $C_s \geq 1$、 $0 < a_u \leq A_u$ 和 $0 < a_s \leq A_s$ ，使得对任意 $v \in E^u$ 和 $t \geq 0$,

$$C_u^{-1} e^{a_u t}\|v\| \leq \|Df^t v\| \leq C_u e^{A_u t}\|v\|, \tag{1.1}$$

且对于任意 $v \in E^s$ 和 $t \geq 0$,

$$C_s^{-1} e^{-A_s t}\|v\| \leq \|Df^t v\| \leq C_s e^{-a_s t}\|v\|. \tag{1.2}$$

我们记作 $E^{cu} = E^u \oplus E^c$ 和 $E^{cs} = E^s \oplus E^c$。除了这些不等式外，我们还始终假设 f 是一个单位向量场，且分解 $TM = E^u \oplus E^c \oplus E^s$ 是正交的。这两个假设都不构成限制，因为必要时只需修改黎曼度量，使其满足这些条件即可。

存在 f^t-不变叶状结构 $\mathcal{W}^*, * \in \{u, c, s, cu, cs\}$ ，分别与各个子丛 E^* 相切，且其叶片一致地具有 C^r 正则性。叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 通常仅为 H¨older 连续，不过，与 f 相切的叶状结构 $\mathcal{W}^c$ 是 C^r。关于这一背景下叶状结构正则性的深入讨论（特别是对叶片一致地具有C^r 正则性的精确定义），可参见 [7,第 2] 节。

阿诺索夫流的常见例子包括双曲环面自同构的悬挂流，以及负曲率黎曼流形上的测地流。在 3 维情形中，情况要丰富得多，可以通过各种外科手术构造，从已有流形出发，在新的流形上构造阿诺索夫流。

我们的第一个定理证明了阿诺索夫流的中心-不稳定流形具有 Gromov 双曲性，并确定了它们相对于一个特定点的格罗莫夫边界

$*$ 无穷远处的边界与同一叶内的一个不稳定流形（事实上，任意一个不稳定流形）相对应。关于 Gromov 双曲性、相对格罗莫夫边界以及 Hamenst¨adt 度量的定义，详见第 2 节。

由于该定理不需要上述阿诺索夫流的完整结构，因此将应用所需的结构单独提取出来会比较方便。沿用上述记号，令 $f^t\colon M \to M$ 是闭黎曼流形 M 上的一个流。我们假设 M 上有一个叶状结构 $\mathcal{W}^{cu}$，其叶 C^r 一致，并且叶状结构的切丛 $E^{cu} := T\mathcal{W}^{cu}$ 正交分解为 $E^{cu} = E^u \oplus E^c$，其中 $E^c = \mathrm{span}(f)$，且 (1.1) 在 E^u 上成立。在这种情况下，我们称 $\mathcal{W}^{cu}$ 是 f^t 的 弱扩张叶状结构。更多细节见 [7, 第 2 节。7] 虽然这并未列为定义的一部分，但还有一个叶状结构 $\mathcal{W}^u$，它沿 $\mathcal{W}^{cu}$ [7, 与 E^u 相切，并且沿 $\mathcal{W}^{cu}$ [7, 与 C^r 相切。命题 2.23]最后，下文对于 $y \in \mathcal{W}^{cu}(x)$ 和 $t \geq 0$，记 $\gamma_y(t) = f^t y$ 为 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 中从 y 出发、沿着 f^t 的流前进的测地射线。

定理 1.1。设 $f^t : M \to M$ 是定义在闭黎曼流形 M $(r \geq 3)$上的一种 C^r 流，并具有弱扩张叶状结构 $\mathcal{W}^{cu}$。那么，每个叶 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 的万有覆盖 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)}$ 在由 M 诱导的度量下都是 *Gromov* 双曲的，其双曲性常数为 $\delta = \delta(C_u, a_u, A_u)$。映射 $y \to \gamma_y$ 将 $y \in \mathcal{W}^u(x)$ 与其 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)}$ 相对格罗莫夫边界 $\partial_* \widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)}$ 典范地等同起来。

当叶 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 含有 f^t 的一个周期轨道时，必须取万有覆盖；第 2 节末尾附近的证明对此有进一步说明。

当然，定理 1.1 特别适用于阿诺索夫流的中心-不稳定叶状结构 $\mathcal{W}^{cu}$，但也适用于许多其他情形，例如阿诺索夫流 f^t 的不稳定丛 E^u 具有两个子丛 $E^u = E^{uu} \oplus E^{wu}$ 的支配分裂；在这种情况下，总存在一个与 $E^c \oplus E^{uu}$ 相切的弱扩张叶状结构 f^t（这里，E^{uu} 是扩张最强的子丛）。这一情形自然出现在具有多个不同绝对值特征值的双曲环面自同构的悬挂流，以及非恒定负曲率局部对称空间的测地流中。此外，这一性质在 C^1 小扰动下保持不变，从而为流提供了一大类有趣的弱扩张叶状结构，定理 1.1 均适用于这些叶状结构。

值得指出的是，以便未来研究：具有弱扩张叶状结构 $\mathcal{W}^{cu,f}$ 和 $\mathcal{W}^{cu,g}$ 的流 f^t 与 g^t之间的轨道等价，会在其叶上诱导相应 Gromov 双曲度量之间的叶内拟等距映射（命题 2.22）。换言之，叶的拟等距不变量定义了这些流的轨道等价不变量。

将定理 1.1 应用于具有 Anosov 测地流的闭黎曼流形的中心-不稳定叶状结构，可得以下推论。

推论 1.2. 设光滑闭黎曼流形 M 具有 *Anosov* 测地流。那么 $\pi_1(M)$ 是 *Gromov* 双曲的。

由于 Anosov 条件在流 [12, 中是 C^1 开性质（第 5 章），因此在推论中只考虑光滑流并无损失一般性。

从这里开始，重要的是假设 $C_u = C_s = 1$ 满足 (1.1) 和 (1.2)；通过修改黎曼度量（命题 2.2），总可以做到这一点。定理 1.1 的证明，是在一个抽象框架中建立相应结果，我们称之为扩张锥。这些对象可以理解为从阿诺索夫流原有背景中剥离出来的单个中心-不稳定流形。定理 1.1 引导我们通过一致化 过程构造最大熵测度；该过程针对

扩张锥，我们将在第 3 节中实施。可以将这一过程视为对如下过程的模拟：从常曲率 $K \equiv -1$ 双曲度量得到双曲空间上半平面模型的欧几里得度量。

我们仍处于定理 1.1 的设定中，并将其专门应用于$\widetilde{\ }$阿诺索夫流的中心-不稳定叶状结构。对于 $x \in M$，我们用 $\mathcal{X}_x = \mathcal{W}^{cu}(x)$ 表示经过 x 的中心-不稳定叶的万有覆盖；用 d_x 表示由 M 诱导在 $\mathcal{X}_x$ 上的黎曼度量，并用 μ_x 表示 $\mathcal{X}_x$ 上的黎曼体积（当 $\mathcal{W}^{cu}(x)$包含一个周期轨道时，这些量应理解为从 $\mathcal{W}^{cu}(x)$提升而来）。我们用$\mathcal{X}_{b,\ x}$ 表示相对于高度函数 b（其在 x 处为零）对 $\mathcal{X}_x$ 的一致化（度量为 $d_{b,\ x}$）；对于参数 $\sigma > 0$，我们用 $\mu_{\sigma,\ x}$ 表示利用 b对黎曼体积 μ_x 进行的一致化（见 (4.3)）。高度函数 b 的水平集是 $\mathcal{X}_x$ 内部的不稳定流形，而度量 $d_{b,\ x}$ 是通过对 $\mathcal{X}_x$ 上的度量进行共形缩放构造的，从而将其变为一个不完备度量空间，其度量边界$\partial\mathcal{X}_{b,\ x}$ 可与相对格罗莫夫边界 $\partial_*\mathcal{X}_x$相识别。最后，我们用 $h = h_{\mathrm{top}}(f)$ 表示 f^t的拓扑熵，并用 $a = a_u$表示 (1.1) 中 E^u 上用于定义 Hamenst¨adt 度量与一致化的最小膨胀率。

下一个定理表明，可以利用这种构造，通过 Patterson-Sullivan 类型的构造，在不稳定叶上构造最大熵 Bowen-Margulis测度的条件测度。$\mathcal{X}_{b,\ x}$ 的非紧性意味着，将测度 $\mu_{\sigma,\ x}$ 随 σ 递减至 h 时进行“重整化”，其解释稍显微妙。定理陈述中的识别$\partial\mathcal{X}_{b,\ x} \cong \mathcal{W}^u(x)$是非正式的，对应于定理 1.1 陈述中的识别。关于这两项论断，相关细节见第5节。在陈述中，$\mathcal{X}_{b,\ x} = \mathcal{X}_{b,\ x} \cup \partial\mathcal{X}_{b,\ x}$ 是对不完备度量空间 $\mathcal{X}_{b,\ x}$的完备化。

¯**定理1.3**。对于每个 $x \in M$，定义在 $\mathcal{X}_{b,\ x}$ 上的测度族 $\{\mu_{\sigma,x}\}_{\sigma>h}$ 都可以随着 $\sigma \to h$ 进行重整化，使其收敛到一个集中于 $\partial\mathcal{X}_{b,\ x} \cong \mathcal{W}^u(x)$上的、相对于 ***Hamenst¨adt*** 度量的 h/a 维豪斯多夫测度。

由于定理1.3的证明并未用到 f^t 存在最大熵测度这一条件，因此定理1.3直接推出了一种为拓扑传递的阿诺索夫流构造最大熵测度的新方法。

注 1.4。关于 Hamenst¨adt 和 Hasselblatt 的论文 [14], [15]，有许多表述容易引起误解的引文声称，这些论文使用 Hamenst¨adt 度量来构造 最大熵测度；然而，这些论文“仅仅”指出，在已经通过 Margulis 构造构造出 Bowen-Margulis 测度的前提下，其不稳定条件测度等于相对于 Hamenst¨adt 度量的 h/a 维豪斯多夫测度的一个常数倍（必须明确的是，这仍是一项重要贡献，而且两篇论文都非常明确地说明了它们所做的正是这一点）。这个问题似乎已为专家所熟知。据我们所知，定理1.3是首个通过直接确立 Hamenst¨adt 度量的 Ahlfors正则性来构造最大熵测度的方法。Climenhaga-Pesin-Zelerowicz 的工作 [10], [11] 中也采用了类似的最大熵测度构造方法，但使用的是 Bowen 球，而非 Hamenst¨adt 球；这需要使用与 Bowen 球相关的、更复杂的***Caratheodory*** 维数结构，但其优点是 Bowen 球不像 Hamenst¨adt 球那样“粗糙”。

我们的最终结果具有较强的技术性，对于不熟悉度量空间上的分析方法的读者而言，其中可能陌生的术语也使得简洁说明更具挑战。我们先陈述结果，随后再解释其重要性。所有记号均与定理1.3中的相同。

定理 1.5. 对于每个 $x \in M$ 和 $\sigma > h$，度量测度空间 $(\mathcal{X}_{b,x}, d_{b,x}, \mu_{\sigma,x})$ 均为倍增空间，且满足 *Poincaré* 不等式，其常数关于 x 一致。此外，$(\mathcal{X}_{b,x}, d_{b,x}, \mu_{\sigma,x})$也具有同样的性质。

度量测度空间上的倍增和支持 Poincaré 不等式的概念在第3节中有解释。由于 $\mu_{\sigma,x}$ 通过 $\mu_{\sigma,x}(\partial\mathcal{X}_{b,x}) = 0$从 $\mathcal{X}_{b,x}$ 扩展到，因此由一般理论 [17, 引理 8.2.3]可立即得出，$(\mathcal{X}_{b,x}, d_{b,x}, \mu_{\sigma,x})$ 满足倍增性质和 Poincaré 不等式，因为相应性质在 $(\mathcal{X}_{b,x}, d_{b,x}, \mu_{\sigma,x})$ 上成立。正如第5节末尾的讨论所示，这些结论无法推广至临界指数 $\sigma = h$。

对定理 1.5 的简要解释是，它表明，与这些均匀化中心-不稳定流形相关的位势理论，在很大程度上符合人们从欧几里得空间上半空间的位势理论推广而来的预期。然而，欧几里得情形下，边界上的度量只是余维一超平面上的欧几里得度量；而在这里，$(\partial\mathcal{X}_{b,x}, d_{b,x})$ 上的度量与 $\mathcal{W}^u(x)$ 上的 Hamenstädt 度量双 Lipschitz 等价。这使得人们能够通过分析 $\mathcal{X}_{b,x}$ 上 Sobolev型函数的边界值，研究 Hamenstädt 度量下的 Besov空间等函数空间。关于此处可能出现的结果类型的大致概况，请参见 [8] 。

本文的结构如下：首先，我们在第 2 节引入扩张锥框架，并证明定理 1.1。在第3节中，我们详细介绍定理3陈述之前所述的一致化过程。第 4 节给出相关均匀化测度的必要估计，以获得定理 1.5 中的倍增性质和 Poincaré 不等式性质。最后，在第5节中，我们说明如何将这些要素结合起来，从而在这一背景下构造新的最大熵测度。对于只关注定理1.3的读者，除开篇的定义外，可以略过第 4 节的内容。

我们感谢 Amie Wilkinson 对本文早期稿件提出的意见。我们还要感谢 Zhenghe Zhang，他促使作者重新投身数学研究。

2. 扩张锥

记号。本文中，符号 $\asymp$、$\lesssim$ 和 $\gtrsim$ 用于表示两个量 V 和 W 在乘法常数 $C \geq 1$ 的意义下可比；常数所依赖的因素将在每节开头附近说明，必要时也会进一步指出依赖关系的变化。因此，$V \lesssim W$ 表示 $V \leq CW$，$V \gtrsim W$ 表示 $V \geq C^{-1}W$，而 $V \asymp W$ 表示 $V \lesssim W$ 和 $V \gtrsim W$。当需要明确常数 C 时，我们写作 $\asymp_C$，等等。

对于加性常数 $c \geq 0$，如果 $W - c \leq V \leq W + c$，我们记作 $V \doteq W$。与上文一样，我们写作 $\doteq_c$以明确表示该常数。虽然此处所述的常数 C 和 c 可能随行而变，但应始终将其理解为：当它们所依赖的参数限制在参数空间的紧区域内时，这些常数都有统一的上界。

对于黎曼流形 $\mathcal{X}$ 上的曲线 $\gamma : I \to \mathcal{X}$，参数化定义域的记号 I 可以表示 $\mathbb{R}$ 中的任意区间 $I = (s, t)$，其中 $-\infty \leq s \leq t \leq \infty$，且每个端点都可以包含或不包含。对于 $s \in I$，记号 $I_{\geq s} = I \cap [s, \infty)$ 和 $I_{\leq s} = I \cap (-\infty, s]$ 将分别表示限制在时刻 $t \geq s$ 和 $t \leq s$ 上。我们用简写 $\gamma_{\geq s} = \gamma|_{I_{\geq s}}$ 和 $\gamma_{\leq s} = \gamma|_{I_{\leq s}}$ 表示测地线 γ 在这两个区间上的限制。如果 γ 是可求长的，则记 $\ell(\gamma)$ 表示 γ 的长度。当 γ 是测地线时，其参数化始终采用单位速率。

对于 C^{r+1} 黎曼流形 $\mathcal{X}$，我们记 g 为 TM 上的 C^r 黎曼度量，并记 d 为相应的距离函数。在本小节中，正则性参数 r 始终满足 $r \geq 2$，因此我们可以顺利应用黎曼几何的标准结果。按照通常约定，我们使用记号 $\langle \, , \, \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 表示使用 g 测得的内积和范数。令 ∇ 为 g 的 Levi-Civita 联络。对于 C^1 函数 $b\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，我们记 ∇b 为 b 的梯度；如果 b 是 C^2，则记 $\nabla^2 b = \nabla(\nabla b)$ 为 b 的 Hessian，其定义为 b 的梯度的协变导数。b 的 Hessian 通过以下方式在 $T\mathcal{X}$ 上定义一个对称双线性型：

$$\nabla^2 b(v, w) = \langle \nabla_v \nabla h, w \rangle,$$

对于同一切空间中的切向量 v、$w \in T\mathcal{X}_x$。

对于接下来给出的定义，我们考虑完备 C^{r+1} 黎曼流形 $\mathcal{X}$ 上的一个 C^r 单位向量场 $f\colon \mathcal{X} \to T\mathcal{X}$，其维数为 $\dim \mathcal{X} \geq 2$。对于这样的向量场，我们记 $f^t\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 为它生成的 C^r 流。若函数 C^{r+1} $b\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 满足由梯度 $\dot{f} = \nabla b$ 生成的流 $f^t\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，则称其为高度函数

$$b(f^t x) = b(x) + t, \tag{2.1}$$

对所有 $x \in \mathcal{X}$ 和 $t \in \mathbb{R}$均成立。我们将交替使用记号 f 和 ∇b 表示 b 的梯度，具体取决于需要强调的内容。注意，(2.1)意味着. b 是满射，f是 $\mathcal{X}$上的单位向量场；并且若记 $E^c = \operatorname{span}(f)$及$E^u = (E^c)^\perp$，则切丛存在一个 Df^t-不变的正交分解 $T\mathcal{X} = E^u \oplus E^c$。注意，若 b 是高度函数，那么对于任意满足 $\nabla b = \nabla b_s$的 $s \in \mathbb{R}$，$b_s = b + s$ 也是高度函数。由于 $\nabla b = f$ 且 f 是单位向量，我们得出 b 作为映射 $b\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 是 1-Lipschitz 的；在下文中我们将频繁使用这一事实。

b 的水平集构成 $\mathcal{X}$ 的一个余维一 C^r 叶状结构 $\mathcal{W}^u$，它与 E^u 相切，且经过 $x \in \mathcal{X}$ 的叶由 $\mathcal{W}^u(x) = b^{-1}(\{b(x)\})$给出。方程 (2.1) 表明，这个叶状结构在 f^t下不变，即对所有 $x \in \mathcal{X}$和$t \in \mathbb{R}$，都有 $f^t(\mathcal{W}^u(x)) = \mathcal{W}^u(f^t x)$。$f^t$ 的流线是单位速测地线，它们构成 $\mathcal{X}$ 的一个一维叶状结构 $\mathcal{W}^c$，与 E^c相切。经过 x 的流线记为 $\mathcal{W}^c(x) = \{f^t x\}_{t \in \mathbb{R}}$，由此得到的 $\mathcal{X}$ 的叶状结构 $\mathcal{W}^c$ 是 C^r。关于叶状结构正则性的更多细节，请参见第5节开头的讨论。

定义 2.1。一个扩张锥 $(\mathcal{X}, b)$是一个完备的 C^{r+1} 黎曼流形 $\mathcal{X}$，配备一个 C^{r+1} 高度函数 $b\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$，其关联流 $f^t\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ 具有如下性质：存在常数 $0 < a \leq A$，使得对所有 $v \in E^u$ 和 $t \geq 0$,

$$e^{at}\|v\| \leq \|Df^t v\| \leq e^{At}\|v\|. \tag{2.2}$$

因此，在扩张锥中，由高度函数生成的梯度流会一致地扩张叶状结构的叶 $\mathcal{W}^u$。只要高度函数 b 已明确，我们通常就将 $\mathcal{X}$ 本身称为扩张锥。我们还指出，采用上述 $b_s = b + s$ 时，$s \in \mathbb{R}$ 的扩张锥（$\mathcal{X}$，b_s）被视为彼此不同，因为它们具有不同的高度函数。

有时，不等式 (2.2) 只能在相差一个乘法常数的意义下成立。例如，在推论 1.2 的证明中就会出现这种情况。此时值得注意的是，通过标准的度量变换论证可以消去这个常数。这会导致度量 g 损失一个导数，而这在实际应用中通常无关紧要。这里给出的证明改编自 [20, 引理 9.1.11]。

命题 2.2. 假设定义 *2.1* 的所有条件均满足$r \geq 3$，但不满足 (2.2)，而是对 $t \geq 0$ 和 $v \in E^u$ 有较弱的界，

$$C^{-1}e^{at}\|v\| \leq \|Df^t v\| \leq Ce^{At}\|v\|, \tag{2.3}$$

对某个常数 $C \geq 1$。于是我们可以在 $T\mathcal{X}$ 上找到一个新的 C^{r-1} 黎曼度量 g_*，使得 g_* 满足定义 *2.1*，其中常数为 $0 < a_* \leq A_*$，并且对任意 $t \geq 0$ 和 $v \in E^u$，有

$$e^{a_* t}\|v\|_* \leq \|Df^t v\|_* \leq e^{A_* t}\|v\|_*, \tag{2.4}$$

常数 a_* 和 A_*，以及 g_* 与 g 的统一可比常数，仅由 a、A和 C决定。

证明。由于 $C \geq 1$，我们可以选取 $T > 0$ 使得 $C^{-1}e^{aT} = 2$，并在 E^u 上定义一个新的度量 g_*，如下：

$$g_*(v, w) = \int_0^T g(Df^t v, Df^t w)\, dt,$$

然后通过要求分解 $T\mathcal{X} = E^u \oplus E^c$ 正交并令 $g_*(\dot{f}, \dot{f}) \equiv 1$，将其延拓到 $T\mathcal{X}$。度量 g_* 是 C^{r-1}，因为 g 和 f^t 是 C^r；只要我们能验证 (2.4)，它就满足定义 2.1 的要求。于是

$$\nabla_{\dot{f}} g_*|_{E^u} = (g \circ Df^T - g)|_{E^u}.$$

对向量 $v \in E^u$ 求值并使用 (2.3) 得到

$$(C^{-1}e^{aT} - 1)g(v, v) \leq \nabla_{\dot{f}} g_*(v, v) \leq (Ce^{AT} - 1)g(v, v),$$

由我们对 T 的选择可知，

$$g(v, v) \leq \nabla_{\dot{f}} g_*(v, v) \leq Ce^{AT} g(v, v),$$

因此由 (2.3) 得到，

$$C^{-1}e^{aT} g_*(v, v) \leq \nabla_{\dot{f}} g_*(v, v) \leq C^2 e^{2AT} g_*(v, v).$$

取 $a_* = C^{-1}e^{aT}$ 和 $A_* = C^2 e^{2AT}$，即可得出结论 (2.4)。 □

从 (2.2) 中的下界容易看出，$\mathcal{X}$ 与叶状结构 $\mathcal{W}^u$ 具有阿诺索夫流的中心不稳定叶和不稳定叶的定义特征，

$$\mathcal{W}^u(x) = \{y \in \mathcal{X} : \lim_{t\to\infty} d(f^{-t}x, f^{-t}y) = 0\},$$

对于 $t \geq 0$ 和任意 x，$y \in \mathcal{X}$

$$d(f^{-t}x, f^{-t}y) \leq C,$$

对于某个常数 C；事实上，只要将 t 限制为足够大，我们可以取任意 $C > |b(x) - b(y)|$。结合 (2.1) 和 (2.2)，不难进一步证明，$\mathcal{W}^u$ 的每个叶$\mathcal{W}^u(x)$ 都与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚，而 $\mathcal{X}$ 与 $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n+1 =$维 $\mathcal{X}$) 微分同胚；论证方法与证明阿诺索夫流的不稳定叶与$\mathbb{R}^n$微分同胚时所用的方法相同。特别地，$\mathcal{X}$ 以及 $\mathcal{W}^u$ 的叶都是可缩的，因此也是单连通的。

在本小节的大部分内容中（直到引理 2.20 之前的讨论），我们只需假设 (2.2) 中的下界成立，也就是说，增长率的上界 A 并非必需。在此之前，$\asymp$、$\doteq$ 等式中的所有隐含常数都只依赖于 a_*。

如果一条测地线 γ 与 E^c相切，即它是 f^t的一条流线的一部分，我们就称它为竖直的 。由于所有竖直测地线都包含在 f^t的流线中，根据测地线唯一性，一条非竖直测地线 γ 不会在任何地方与 E^c相切。一条竖直

测地线若 $b(\gamma(t))$ 随 t 增大而增加，则称其为上升的；若 $b(\gamma(t))$ 随 t增大而减小，则称其为下降的。对于一条测地线 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$，我们用 $b_\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ 表示复合映射 $b_\gamma = b \circ \gamma$。

对于两个对称二阶张量 g_1 和 g_2，我们用记号 $g_1 \geq g_2$ 表示不等式$g_1(v, v) \geq g_2(v, v)$ 对所有 $v \in T\mathcal{X}$都成立，其中 $>$、$\leq$、$<$的定义类似。因此，例如，对于函数 C^2 $h\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 和常数 $c \in \mathbb{R}$，记号 $\nabla^2 h \geq cg$ 表示以下界

$$\nabla^2 h(v, v) \geq c\|v\|^2,$$

对所有 $v \in T\mathcal{X}$都成立。当且仅当 $\nabla^2 h \geq 0$时，函数 h是凸的（沿测地线的黎曼意义下）；当且仅当 $\nabla^2 h > 0$时，函数 h是严格凸的。我们还回顾一下记号$\iota_v g(w) = g(v, w)$，它表示张量与向量 v 的缩并。

引理 2.3。我们有 $\iota_{\dot f}\nabla^2 b = 0$、$\nabla^2 b \geq 0$和 $\nabla^2 b|_{E^u} \geq ag$。因此 b 是凸的。此外，如果 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 不是竖直测地线，那么函数 b_γ 在 I上严格凸。

证明。由于 f^t 的流线是单位速测地线，我们必有$\nabla_{\dot f}\dot f = 0$，因此对于任意向量 $v \in T\mathcal{X}$，$\nabla^2 b(\dot f, v) = 0$。由此得到 $\iota_{\dot f}\nabla^2 b = 0$。此外，对于竖直测地线 $\gamma\colon I \to Y$ 以及某个 $t \in I$对应的单位向量 $v \in E^u_{\gamma(t)}$，将 v 唯一延拓为沿 γ 的 C^r 平行向量场 $V\colon I \to T\mathcal{X}$，所得向量均为单位向量，且取值于 γ上 $E^c = \operatorname{span}(\dot f)$的正交补 E^u 中。这些都是标准的黎曼几何事实，可由如下观察立即得出：沿 γ的表达式 $\langle V, V\rangle$ 和$\langle V, \dot f\rangle$ 在应用 $\nabla_{\dot f}$后均变为 0。

现在设 $x \in \mathcal{X}$ 为给定点，$v \in E^u_x$ 为给定的单位向量。令 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ 为满足 $\gamma(0) = x$的竖直测地线。令 $V\colon \mathbb{R} \to E$ 为沿着 γ 对 v 作平行移动所得的延拓，使得 $V(0) = v$。由于 Levi-Civita 联络无挠，我们有

$$\nabla_{\dot f} V - \nabla_V \dot f = \mathcal{L}_{\dot f} V,$$

其中 $\mathcal{L}_{\dot f}V$是 V沿着 f的李导数。形式上，为了计算李导数，我们将 V延拓为 γ 邻域内的一个 C^r向量场；但由于该导数在 x 处仅取决于 V 沿着 γ 的取值，因此所选的延拓并不重要。根据 V的平行条件，我们有 $\nabla_{\dot f} V = 0$，而 $\nabla_V f$ 仅取决于求值点处 V的值。由于 f^t以 $\dot f$描述流，因此我们可以将 $\nabla_v \dot f$计算为

$$\nabla_v \dot f = \lim_{t\to\infty} \frac{v - Df^{-t}(V(\gamma(t)))}{t}.$$

与 v 取内积，我们得到

$$\langle \nabla_v \dot f, v\rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1 - \langle Df^{-t}(V(\gamma(t))), v\rangle}{t}.$$

但根据 (2.2) 以及 $V(\gamma(t))$ 是一个单位向量这一事实，

$$\langle Df^{-t}(V(\gamma(t))), v\rangle \leq \|Df^{-t}(V(\gamma(t)))\| \leq e^{-at}.$$

Thus

$$\langle \nabla_v \dot f, v\rangle \geq \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{-at}}{t} = a,$$

由于这个最后的极限正是函数 $t \to -e^{-at}$ 在 $t = 0$ 处的导数。这就完成了主要断言的证明。b 为凸函数的断言直接由 $\nabla^2 b \geq 0$ 得出。对于最后一个断言，正如在引理陈述之前所指出的，如果测地线 $\gamma\colon I \to Y$ 不是竖直测地线，那么它处处都不与 E^c 相切。因此，$\gamma'(t)$ 具有一个

对所有 $t \in I$ 而言在 E^u 中的非平凡分量，于是 $\nabla^2 b(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0$，因此 b_γ 在 I 上具有正的二阶导数，这意味着 b_γ 是严格凸的。□

注记 2.4。改为假设 (2.2) 中的上界，并在引理 2.3 的证明中交换 t 与 $-t$，可得

$$\nabla^2 b(v, v) \leq A\|v\|^2,$$

对所有 $v \in E^u$ 均成立。由于 b 的 Hessian 是局部计算的，显然，如果我们只假设在 x 的某个邻域内满足扩张条件 (2.2)，那么这些关于 $\nabla^2 b|_{E^u}$ 的估计在点 $x \in \mathcal{X}$ 处也成立。

由引理 2.3 可直接得到以下推论。

引理 2.5。设 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一条测地线。那么，b_γ 至多在一个时刻 $s \in I$ 取到最小值。如果这样的时刻 s 存在且位于 I 的内部，那么 b_γ 在 $I_{\leq s}$ 上严格递减，并在 $I_{\geq s}$ 上严格递增。否则，b_γ 严格递增或严格递减。

若 γ 是竖直测地线，则 $b'_\gamma \equiv 1$。若 γ 不是竖直的，则 b'_γ 在 I上严格递增。

证明。若 γ 是竖直测地线，则引理中的结论显然成立，因此我们可以假设 γ 不是竖直的。根据引理 2.3，b_γ 是严格凸的。于是，这些结论可由定义在区间 $I \subseteq \mathbb{R}$ 上的严格凸函数的相应基本性质推出。□

我们可以将引理 2.5 中描述的凸性推论进一步细化为以下微分不等式。

引理2.6。对于 $\mathcal{X}$ 中的任意测地线 γ，高度函数限制在 γ 上满足微分不等式

$$b''_\gamma \geq a\sqrt{1 - (b'_\gamma)^2}. \tag{2.5}$$

证明。由于

$$b'_\gamma(t) = \langle \gamma'(t), \dot{f}(\gamma(t)) \rangle,$$

我们有

$$\begin{aligned} b''_\gamma(\gamma(t)) &= \langle \gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} \dot{f}(\gamma(t)) \rangle \\ &= \nabla^2 b(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &\geq a\sqrt{1 - b'_\gamma(t)^2}, \end{aligned}$$

其中我们写作

$$\gamma'(t) = b'_\gamma(t)\dot{f}(\gamma(t)) + \left(\sqrt{1 - b'_\gamma(t)^2}\right) v_t, \tag{2.6}$$

对于单位向量 $v_t \in E^u$，并使用 $\nabla^2 b(\dot{f}(\gamma(t)), \dot{f}(\gamma(t))) = 0$ 以及 $\nabla^2 b(\dot{f}(\gamma(t)), v_t) = 0$和 $\nabla^2 b|_{E^u} \geq ag$。□

对于 $x \in \mathcal{X}$，我们令 $P_x\colon \mathcal{X} \to \mathcal{W}^u(x)$ 表示沿着 f^t 的流线投影到 $\mathcal{W}^u(x)$ 上的投影，即 $P_x(y) = f^{b(x)-b(y)}y$。注意，对于 $y \in \mathcal{W}^u(x)$ 和 $d(y, P_x(y))$，任意一对点 $x, y \in \mathcal{X}$ 都有 $= b(y) - b(x)$。我们将使用不等式 (2.5)，以类似于 [18, 命题 4.7] 的方式，估计测地线在 P_x 下的像的长度。

引理 2.7。设 x 和 y 是 $\mathcal{X}$ 中不在同一条竖直测地线上的点。设 $\gamma\colon [0,T] \to \mathcal{X}$ 是一条从 x 指向 y 的定向测地线，并假设 $b'_\gamma(0) \geq 0$。那么，若令 $\eta = P_x \circ \gamma$ 且 $\theta = \sqrt{1 - b'_\gamma(0)^2}$，则 $\ell(\eta) \lesssim \theta$，因此 $d(x, P_x(y)) \lesssim \theta$ 且 $d(x,y) \doteq b(y) - b(x)$。

证明。由于 $b'_\gamma(0) \geq 0$，我们有 $b'_\gamma(t) > 0$，其中 $t > 0$，由引理 2.5 可得。由于点 $y \in \mathcal{X}$ 处的 P_x 的导数 DP_x 可以分解为 $DP_x = Df^{b(x)-b(y)} \circ \pi_y$，其中 $\pi_y\colon T\mathcal{X}_y \to E^u_y$ 是正交投影，我们可以将 $\ell(\eta)$ 估计为

$$\ell(\eta) \leq \int_0^T e^{-a(b_\gamma(t)-b_\gamma(0))} \sqrt{1 - b'_\gamma(t)^2}\, dt.$$

这里我们对与（2.6）中相同的 $\gamma'(t)$ 分解应用了 DP_x。由于 b'_γ 是递增的，我们可以用其在 $t = 0$ 处的值来估计 $\sqrt{1 - b'_\gamma(t)^2}$，从而得到

$$\ell(\eta) \leq \theta \int_0^T e^{-a(b_\gamma(t)-b_\gamma(0))}\, dt.$$

我们首先假设 $b'_\gamma(0) \geq \frac{a}{2}$。那么对于 $0 \leq t \leq T$，有 $b'_\gamma(t) \geq \frac{a}{2}$，这意味着

$$b_\gamma(t) - b_\gamma(0) \geq \frac{a}{2} t,$$

在 $[0,T]$ 上。因此

$$\begin{aligned} \ell(\eta) &\leq \theta \int_0^T e^{-\frac{a}{2}t}\, dt \\ &\leq \theta \int_0^\infty e^{-\frac{a}{2}t}\, dt \\ &\lesssim \theta, \end{aligned}$$

其中我们回顾一下，隐含常数仅取决于 a。

在第二种情况下 $b'_\gamma(0) < \frac{a}{2}$，我们考虑 $b'_\gamma(t) \leq \frac{1}{2}$ 的等式 (2.5)。于是有 $-b''_\gamma(t) \geq \frac{a}{2}$。因此，在不等式 $b'_\gamma(t) \leq \frac{1}{2}$ 成立的任意区间 $[0,s]$ 上，我们可以得出

$$b'_\gamma(t) \geq \frac{a}{2} t + b'_\gamma(0) \geq \frac{a}{2} t,$$

因为 $b'_\gamma(0) \geq 0$。这意味着 $s \leq a^{-1}$，因为若 $t > a^{-1}$ 取上述值，不等式 $b'_\gamma(t) \leq \frac{1}{2}$ 就会被违反。我们得出，对于 $t \geq a^{-1}$，$b'_\gamma(t) \geq \frac{a}{2}$。令 $h = \min\{a^{-1}, T\}$，利用 $b_\gamma(t) \geq b_\gamma(0)$ 对于 $t \geq 0$ 成立这一事实，我们计算得，

$$\begin{aligned} \ell(\eta) &\leq \theta \left(\int_0^h e^{-a(b_\gamma(t)-b_\gamma(0))}\, dt + \int_h^T e^{-\frac{a}{2}(t-h) - a(b_\gamma(h)-b_\gamma(0))}\, dt \right) \\ &\leq \theta \left(\int_0^h dt + \int_0^{T-h} e^{-\frac{a}{2}t}\, dt \right) \\ &\leq \theta \left(a^{-1} + \int_0^\infty e^{-\frac{a}{2}t}\, dt \right) \lesssim \theta. \end{aligned}$$

因此，我们在两种情况下都得出 $\ell(\eta) \lesssim \theta$，从而 $d(x, P_x(y)) \lesssim \theta$。结论 $d(x,y) \doteq b(y) - b(x)$ 随即由 $d(y, P_x(y)) = b(y) - b(x)$ 以及平凡界 $\theta \leq 1$ 得出。□

请注意，正如证明末尾所述，我们有 $\theta \leq 1$，因此无论 $b'_\gamma(0) \geq 0$ 的值如何，总能得出 $\ell(\eta) \lesssim 1$ 和 $d(x, P_x(y)) \lesssim 1$。

我们定义以 b 为基点的两点 $x, y \in \mathcal{X}$ 的形式格罗莫夫积 为

$$(x|y)_b = \frac{1}{2}(b(x) + b(y) - d(x, y)). \tag{2.7}$$

由于 b 是 1-Lipschitz，我们有

$$(x|y)_b \leq \min\{b(x), b(y)\}. \tag{2.8}$$

由引理 2.5 得到的唯一次最小值点可与格罗莫夫积 $(x|y)_b$ 相连。

引理 2.8。对于 $x, y \in \mathcal{X}$，令 $\gamma\colon I \to \mathcal{X}$ 为一条连接 x 与 y 的测地线。令 z 为 γ 上使 b 取得最小值的唯一点。则

$$b(z) = \inf_{t \in I} b(\gamma(t)) \doteq (x|y)_b.$$

*Let*令 γ_{xz} 表示 γ 上从 x 到 z 的弧，γ_{zy} 表示 γ 上从 z 到 y 的弧，若 $w \in \gamma_{xz}$ 则 n

$$d(P_w(x), w) \doteq 0, \;\; d(x, w) \doteq b(x) - b(w),$$

并且如果 $w \in \gamma_{zy}$ 那么

$$d(P_w(y), w) \doteq 0, \;\; d(y, w) \doteq b(y) - b(w).$$

证明. 不失一般性，我们可以假设 $b(x) \leq b(y)$。如果 x和 y 位于同一条竖直测地线上，那么 $z = x$，$(x|y)_b = b(x)$，且对于 γ 上的任意点 w，我们有$P_w(x) = P_w(y) = w$，从而得到结论。因此，我们可以假设 x 与 y不在同一条竖直测地线上。设 $\gamma\colon [0, T] \to \mathcal{X}$为一条连接 x与 y的测地线。如果 $b'_\gamma(0) \geq 0$，那么根据引理 2.5，$z = x$。根据引理 2.7，我们有 $b(y) - b(x) \doteq d(x, y)$，从而得到$(x|y)_b \doteq b(x)$。对于第二个结论，弧 γ_{xz} 是平凡的，且 $\gamma_{zy} = \gamma$，因此我们需要证明对于每个$t \in [0, T]$，都有 $d(P_{\gamma(t)}(y), \gamma(t)) \doteq 0$且 $d(y, \gamma(t)) \doteq b(y) - b(\gamma(t))$。但是根据引理 2.5，由于 b'_γ 在 γ上递增，对于 $0 \leq t \leq T$，必有 $b'_\gamma(t) \geq 0$，因此结论立即由引理 2.7 得出。

最后，假设 $b'_\gamma(0) < 0$。由于 $b(x) \leq b(y)$，且 $x \neq y$ 这意味着 b 在 $[0, T]$的内部取得最小值；令 t_0为取得该最小值时的时间，并令 $z = \gamma(t_0)$。设 $\check{\gamma}(t) = \gamma(T - t)$ 表示取反向定向的 γ。于是我们有两条测地线：从 z到 x的 $\gamma_1 = \check{\gamma}|_{[T-t_0, T]}$，以及从 z到 y的 $\gamma_2 = \gamma|_{[t_0, T]}$。由于 b 在 γ 上于 z处取得最小值，因此 $b'_\gamma(t_0) = 0$，我们可以分别将前述情形应用于 γ_1 和 γ_2。第二个结论立即成立；至于第一个，由于 $d(x, z) \doteq b(x) - b(z)$ 且 $d(y, z) \doteq b(y) - b(z)$，我们得出 $(x|y)_b \doteq b(z)$，如所需。□

现在我们可以推导出一种称为 δ-不等式 的、针对以b为基点的格罗莫夫积的不等式，由此可得 $\mathcal{X}$的 Gromov 双曲性。我们需要先准备一个简短的引理。

引理 2.9。设 γ_i 是连接 x_i 与 y_i 、沿 $i = 1$向下的测地线段，2。那么 $(y_1|y_2)_b \leq (x_1|x_2)_b$。

证明。我们有

$$\begin{aligned} 2(y_1|y_2)_b &= b(y_1) + b(y_2) - d(y_1, y_2) \\ &= b(x_1) + b(x_2) - d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) - d(y_1, y_2) \\ &= 2(x_1|x_2)_b + d(x_1, x_2) - d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2) - d(y_1, y_2), \end{aligned}$$

由于

$$d(x_1,x_2)\le d(x_1,y_1)+d(x_2,y_2)+d(y_1,y_2),$$

由三角不等式可得结论。 □

命题 2.10。 存在一个仅取决于 a 的 $\delta\ge 0$，使得对于任意 x、y、$z\in\mathcal{X}$，

$$(x|z)_b\ge \min\{(x|y)_b,(y|z)_b\}-\delta.$$

证明。对于 $p\in\{x,y,z\}$，令 $\gamma_p\colon \mathbb{R}\to\mathcal{X}$ 为按 $\gamma_p(b(p))=p$ 参数化的上升垂直测地线。将引理 2.8 应用于分别连接 x 到 y 以及 y 到 z 的测地线 γ_{xy} 和 γ_{yz}，我们得到点 $x'\in\gamma_x$、y'、$y''\in\gamma_y$ 和 $z'\in\gamma_z$，使得

$$d(x',y')\doteq 0\doteq d(y'',z'),$$

且 $b(y')\doteq(x|y)_b$、$b(y'')\doteq(y|z)_b$，最后 x' 和 z' 分别位于 γ_x 和 γ_z 上的 x 和 z 下方。于是，由于这两点属于同一条竖直测地线 γ_y，$(y'|y'')_b=\min\{b(y')\ b(y'')\}$。因此

$$(x'|z')_b\doteq(y'|y'')_b\doteq\min\{(x|y)_b,(y|z)_b\},$$

所需结论即可由引理 2.9 得出。 □

为了使用命题 2.10 证明 $\mathcal{X}$ 是 Gromov 双曲的，我们需要引入一个引理以及 [9, 第 2] 章中的一些术语：对于 $\delta\ge 0$ 而言，δ-三元组 是指三个实数a、b、c组成的三元组，其中 a、b、c 中最小的两个数之差至多为 δ。注意，$(a$、b、$c)$ 是 δ-三元组，当且仅当不等式

$$c\ge\min\{a,b\}-\delta, \tag{2.9}$$

对于 a、b和 c角色的所有排列均成立。我们需要下面这个称为四面体引理的结论。

引理 2.11。 [9, 引理 2.1。4] 设 d_{12}、d_{13}、d_{14}、d_{23}、d_{24}、d_{34} 是六个数，使得四个三元组 $(d_{23}$、d_{24}、$d_{34})$、$(d_{13}$、d_{14}、$d_{34})$、$(d_{12}$、d_{14}、$d_{24})$ 和 $(d_{12}$、d_{13}、$d_{23})$ 均为 δ-三元组。那么

$$(d_{12}+d_{34},d_{13}+d_{24},d_{14}+d_{23})$$

是一个 2δ-三元组。

最后，我们用格罗莫夫积给出 Gromov 双曲性的定义：度量空间 $\mathcal{X}$是 δ-双曲的，如果对于任意 x、y、z、$p\in\mathcal{X}$，都有

$$(x|z)_p\ge\min\{(x|y)_p,(y|z)_p\}-\delta. \tag{2.10}$$

这里，$(x|y)_p$ 是以 p 为基点的普通 Gromov 积，定义为

$$(x|y)_p=\frac{1}{2}(d(x,p)+d(y,p)-d(x,y)).$$

注意，该定义等价于：对于任意选取的点 x、y、z、$p\in\mathcal{X}$，三元组 $((x|y)_p$、$(x|z)_p$、$(y|z)_p)$ 都是一个 δ-三元组。根据 δ [13, 第 2 章、命题 21]，该定义与 Rips 定义等价，即测地三角形的 δ-薄性相差一个乘法因子 4。我们还要指出，我们经常引用的那篇文本 [9] 采用了更严格的 δ-双曲性定义；该定义由（2.10）推出，只需用 $\delta/4$ 替代 δ [9, 命题 2.1.3]这导致我们从该文引用的结论中的某些常数要乘以 4。

命题 2.12. 空间 $\mathcal{X}$ 是 δ-双曲的，其中 $\delta=\delta(a)$。

证明。 我们将使用 [9, 第 2 章.4] 中定义的交叉差三元组 。对于 $\mathcal{X}$ 中的四点组 $Q=(x,y,z,u)$, 以及一个固定的基点 $o\in\mathcal{X}$，该三元组定义为

$$A_o(Q)=((x|y)_o+(z|u)_o,(x|z)_o+(y|u)_o,(x|u)_o+(y|z)_o).$$

三元组 $A_o(Q)$ 中各元素之间的差，与三元组

$$A_b(Q)=((x|y)_b+(z|u)_b,(x|z)_b+(y|u)_b,(x|u)_b+(y|z)_b),$$

例如，通过常规计算可知，

$$(x|y)_o+(z|u)_o-(x|z)_o-(y|u)_o=(x|y)_b+(z|u)_b-(x|z)_b-(y|u)_b,$$

这两个表达式均等于

$$\frac{1}{2}(-d(x,y)-d(z,u)+d(x,z)+d(y,u)).$$

类似的计算可得其他差值也相等。因此，对于给定的 $\delta\geq 0$， $A_o(Q)$ 是一个 δ-三元组，当且仅当 $A_b(Q)$ 是一个 δ-三元组。

利用引理 2.10，我们得出这六个数 $(x|y)_b$、$(z|u)_b$、$(x|z)_b$、$(y|u)_b$、$(x|u)_b$、$(y|z)_b$ 一起满足引理 2.11 的假设，其参数为 $\delta=\delta(a)$。这意味着 $A_b(Q)$ 是一个 2δ-三元组，因此 $A_o(Q)$ 是一个 2δ-三元组。根据 [9, 命题 2.4.1]，这意味着以 o 为基点、位于 $\mathcal{X}$ 中且以 δ 替代 2δ 的格罗莫夫积满足不等式 (2.10)。由此我们得出， $\mathcal{X}$ 是 2δ-双曲的。□

由命题 2.12 可知， $\mathcal{X}$ 是一个完备测地的 δ-双曲空间。回顾一下，格罗莫夫边界 $\partial\mathcal{X}$ 可以如下定义：对于基点$o\in\mathcal{X}$的一个固定选择，它是由 $\{x_n\}$ 构成的等价类集合；其中的序列属于 $\mathcal{X}$，并按以下意义趋于无穷远：

$$(x_n|x_m)_o\to\infty,$$

当 $m,\ n\to\infty$ 时，若 $\{x_n\}\sim\{y_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n|y_n)_o=\infty.$$

注意，这些概念不依赖于基点 o的选择。由于 $\mathcal{X}$ 是完备测地的，格罗莫夫边界也可以刻画为$\mathcal{X}$ 的测地边界，其元素是由 $[\gamma]$ 构成的等价类，其中 γ 是测地射线： $[0,\infty)\to\mathcal{X}$，若存在常数 C 使得对于所有 $t\geq 0$，都有 $\gamma\sim\eta$ 当且仅当 $d(\gamma(t)\ \eta(t))\leq C$。我们将根据需要在这两种表述之间自由切换。详情请参阅 [9,第 1-2 章]。

根据 (2.2)， $\mathcal{X}$ 中的每条下降测地射线都确定了 $\partial\mathcal{X}$中的同一点。特别地，若 $b(x)=b(y)$, 且 $\gamma_x,\gamma_y:[0,\infty)\to\mathcal{X}$ 是分别从 x 和 y 出发的两条下降测地射线，则对所有 $t\geq 0$,

$$d(\gamma_x(t),\gamma_y(t))\leq e^{-at}d(x,y),$$

因此 $d(\gamma_x(t)\ \gamma_y(t))\to 0$ 与 $t\to\infty$相同。我们将这个公共点记作 $*\in\partial\mathcal{X}$，并将 $\partial_*\mathcal{X}=\partial X\backslash\{*\}$ 定义为 $\partial\mathcal{X}$中 $*$ 的补集。

对于下降测地射线 $\gamma:[0,\infty)\to Y$和 $x\in\mathcal{X}$，我们记

$$B_\gamma(x)=\lim_{t\to\infty}d(\gamma(t),x)-t,$$

for 为与测地射线 γ相关联的布塞曼函数的标准定义。

引理 2.13。 令 $\gamma:\ [0,\infty)\to\mathcal{X}$ 为一条下降测地射线。则

$$B_\gamma(x)\doteq b(x)-b(\gamma(0)).$$

证明。对每个 $n \in \mathbb{N}$设 $y_n = \gamma(n)$，令 η 为连接 y_0 与 x的测地线，并令 $z \in \eta$ 为 b 在 η上取最小值的点。然后取 n充分大，使得

$$b(y_n) = b(y_0) - n < b(z).$$

那么根据引理 2.8，我们可以计算

$$d(x, y_n) \doteq d(x, z) + d(z, y_n) \doteq b(x) - b(z) + b(z) - b(y_n) = b(x) - b(y_n).$$

Then

$$d(x, y_n) - n = d(x, y_n) - b(y_n) + b(y_0) \doteq b(x) - b(y_0).$$

令 $n \to \infty$，并注意到 $y_0 = \gamma(0)$，即可完成证明。 □

因此，我们可以将 b 视为以 $*$ 为基点的布塞曼函数，采用 Buyalo-Schroeder [9, 第 3], 章所述的广义意义；因为 b 与任意给定的“真正”布塞曼函数 B_γ（以.....为基点）$*$ 仅相差一个只依赖于 a的加性误差。我们处理方式的唯一不同之处在于，现在用于定义布塞曼函数的误差界限是人为选取的，并直接依赖于 a，而不是双曲性常数 $\delta = \delta(a)$。不过，如有必要，可以通过增大 δ，使其大于引理 2.13 中的加性常数 $c = c(a)$，来弥合这一差异；接下来我们就会这样做。

对于 $\xi, \zeta \in \partial_* \mathcal{X}$，我们定义

$$(\xi|\zeta)_b = \inf \liminf_{n\to\infty} (x_n|y_n)_b,$$

下确界取遍所有序列 $\{x_n\} \in \xi$, $\{y_n\} \in \zeta$（这里我们将格罗莫夫边界上的点视为趋于无穷远的序列的等价类）。这将以 b 为基点的格罗莫夫积推广到 $\partial_* \mathcal{X}$。于是我们有如下结论。

引理 2.14。 [9, 引理 3.2。4] 存在一个普适常数 $C \geq 1$，使得对于以 b 为基点的格罗莫夫积,

(1) For any $\xi, \zeta \in \partial_* \mathcal{X}$ and any $\{x_n\} \in \xi$, $\{y_n\} \in \zeta$ we have

$$(\xi|\zeta)_b \leq \liminf_{n\to\infty} (x_n|y_n)_b \leq \limsup_{n\to\infty} (x_n|y_n)_b \leq (\xi|\zeta)_b + C\delta,$$

将 ζ 替换为 $x \in \mathcal{X}$ 时，同样的结论也成立。

(2) 对任意 $\xi, \zeta, \lambda \in \mathcal{X} \cup \partial_* \mathcal{X}$，我们有

$$(\xi|\lambda)_b \geq \min\{(\xi|\zeta)_b, (\zeta|\lambda)_b\} - C\delta.$$

将我们对 δ-双曲性的定义与参考文献中的定义进行比较，可知我们可以取 $C = 176$。

相对于 $*$ 的格罗莫夫边界 $\partial_* \mathcal{X}$ 的定义仿照标准格罗莫夫边界，但改用以 b 为基点的格罗莫夫积：我们令 $\partial_* \mathcal{X}$ 为序列 $\{x_n\}$ 的等价类的集合，其中这些序列相对于 b 趋于无穷远，具体而言，

$$(x_n|x_m)_b \to \infty,$$

如 $m, n \to \infty$，其中 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ 若

$$\lim_{n\to\infty} (x_n|y_n)_b = \infty.$$

正如我们之前对记号 $\partial_* \mathcal{X} = \partial\mathcal{X} \backslash \{*\}$ 的使用所示，我们有以下对 $\partial_* X$中点的刻画。

命题 2.15. [9, 命题 3.4.1] 序列 $\{x_n\}$ 相对于 b 收敛到无穷远，当且仅当它收敛到一个点 $\xi \in \partial\mathcal{X} \backslash \{*\}$。这种对应关系定义了 $\partial_* \mathcal{X}$ 与 $\partial\mathcal{X} \backslash \{*\}$之间的典范识别。

将这个命题与 $\partial\mathcal{X}$ 作为 $\mathcal{X}$ 的测地边界这一刻画结合起来，我们得出结论： $\partial_*\mathcal{X}$ 可以识别为 $\mathcal{X}$ 中测地射线 $[\gamma]$的等价类空间，其中这些测地射线与任何下降测地射线的距离都不有界。引理 2.14 表明，以 b 为基点的格罗莫夫积可以自然地延拓到边界$\partial_*\mathcal{X}$，并且在选取更大的 δ后，仍满足 δ-不等式 (2.10)。

由于 b 是 1-Lipschitz 的，任何上升测地射线都不可能与下降测地射线保持有界距离。下面我们进一步证明， $\partial_*\mathcal{X}$ 可以与 $\mathcal{X}$ 中所有从 $\mathcal{W}^u$（x）出发的上升测地射线构成的空间相识别，其中 $x\in\mathcal{X}$ 可任意选取。为此，我们需要以下由 (2.5) 得出的简单推论。

引理 2.16. 设 γ： $I\to\mathcal{X}$ 是一条测地线，且区间 I 的右端点为 ∞。那么，要么对所有 $t\in I$，都有 $b'_\gamma(t)=-1$；要么当 $t\to\infty$ 时， $b'_\gamma(t)\to 1$。

证明。若 γ 是一条竖直测地线，则 $b'_\gamma\equiv -1$ 或 $b'_\gamma\equiv 1$，结论显然成立。若 γ 不是竖直的，则由引理 2.5 b'_γ 可知它严格递增。设 $c=\lim_{t\to\infty}b'_\gamma(t)$。由于 b 是 1-Lipschitz 的，我们有 $|b'_\gamma|\le 1$，因此 $|c|\le 1$。若 $|c|<1$，则由 (2.5) 可知存在一个 $t_0\in I$，使得

$$b''_\gamma(t)\ge\sqrt{1-c^2},$$

对于 $t\ge t_0$。这意味着

$$b'_\gamma(t)\ge b'_\gamma(t_0)+(t-t_0)\sqrt{1-c^2},$$

对于足够大的 t，这与 $b'_\gamma(t)\le 1$ 相矛盾，因为 $t\to\infty$。我们得出 $|c|=1$，由于 b'_γ 是递增的，并且 $|b'_\gamma|\le 1$，我们进一步推导出 $c=1$。□

命题 2.17。对于任意 $x\in\mathcal{X}$，将从 $\mathcal{W}^u(x)$ 上开始的上升测地射线 $\gamma\to[\gamma]$ 映射到其在 $\partial_*\mathcal{X}$ 中的代表元的映射是一个双射。

证明。为证明单射性，设 γ 和 η 是从 $\mathcal{W}^u(x)$ 上开始的两条上升测地射线。若存在某个常数 C，使得对于所有 $t\ge 0$ 都有 $d(\gamma(t),\eta(t))\le C$，那么根据 (2.2)，对于所有 $t\ge 0$都有$d(\gamma(0),\eta(0))\le Ce^{-at}$。令 $t\to\infty$，我们得出 $\gamma(0)=\eta(0)$，因此 $\gamma=\eta$。这证明了单射性。

对于满射性，考虑一条测地射线 $\gamma\colon[0,\infty)\to\mathcal{X}$，它代表 ξ中的一个点 $\partial_*\mathcal{X}$。由引理 2.16 可知，必有 $b'_\gamma(t)\to 1$，因为 $t\to\infty$；否则 $b'_\gamma\equiv -1$，这意味着 γ 是一条下降测地射线，而根据命题陈述之前的讨论，这是不可能的。因此，对极限关系 $b'_\gamma(t)\to 1$ 积分，得到 $b(\gamma(t))\to\infty$，因为$t\to\infty$。若 γ 是一条上升测地射线，则将 γ 延拓为一条完整的垂直测地线 $\tilde\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathcal{X}$，它与 $\mathcal{W}^u(x)$ 相交于唯一一点 y；所求的上升测地射线便是从 y出发的 $\tilde\gamma$ 的子射线 η。

因此，我们可以假设 γ 不是一条竖直测地线。令 $\{x_n\}=\{\gamma(n)\}$，其中 $n\in\mathbb{N}$，然后取足够大的 N，使得 $b_\gamma|_{[N,\infty)}\ge b(x)$，并且 b_γ 在 $[N,\infty)$ 上递增。接着，我们将范围限制为 $n\ge N$。对于 $m\ge n$，连接 x_n 与 x_m 的 γ 线段满足引理 2.7 的假设，因此 $d(x_n,P_{x_n}(x_m))\doteq 0$。对每个 n，令 $p_n=P_x(x_n)$，并注意到此时对于 $m\ge n\ge N$，有

$$d(p_m,p_n)\lesssim e^{-a(b(x_n)-b(x))}.$$

因此，$\{p_n\}$ 在 $\mathcal{X}$ 中定义了一个柯西序列，该序列收敛于点 $p\in\mathcal{W}^u$（x）。令 η 为从 p出发的上升测地射线。令 y_n 为 η 上的对应点，使得b（y_n）$=b$（x_n）。如上所示，存在一个常数 C，使得对任意 $m\ge n\ge N$，都有 d（x_n，P_{x_n}（x_m））$\le C$。由于 P_x（P_{x_n}（x_m））$=p_m$，若固定 n，令 $m\to\infty$，并注意到$f^{b(x_n)}$（x）$-b$ 是$P_x|_{\mathcal{W}^u}$（x_n）的逆映射，我们便可得出 P_{x_n}（x_m）$\to y_n$，当 $m\to\infty$时成立，因此对 $n\ge N$，有 d（x_n，y_n）$\le C$。由于序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的长度均为单位长度

分别在 γ 和 η 上的间距，因此这些测地线彼此相距有界，从而 $[\gamma] = [\eta]$。这就证明了所需的满射性。□

利用引理 2.7 中得到的关于 θ 的更精确估计，我们可以改进命题 2.17 的结论，证明上述测地线 γ 和 η 实际上在无穷远处彼此趋近。

引理 2.18。假设 γ、η：$[0,\infty) \to \mathcal{X}$ 是确定同一点 $\xi \in \partial_*\mathcal{X}$的测地射线。那么，当 $t \to \infty$ 趋于 $s_t \geq 0$ 时，$d(\gamma(t)\ \eta(s_t)) \to 0$，其中 $s_t \geq 0$ 的选取满足$b(\gamma(t)) = b(\eta(s_t))$，一旦 t 充分大。

证明。由命题 2.17 可知，$\partial_*\mathcal{X}$ 中的每一点都由一条上升测地射线表示，因此我们可以假设 η 是一条上升测地射线，因为一般情形可由三角不等式推出。我们还可以假设 γ 不是竖直的；否则，γ 要么是 η 的子线段，要么反之；在这两种情形下，引理的结论都显然成立。省略 γ 的初始线段并重新参数化后，我们可以假设 $b'_\gamma(0) \geq 0$。再通过省略初始线段并重新参数化（必要时对 γ 和η 二者都进行），我们可以进一步假设 γ 和 η 从同一高度出发，即 $b_\gamma(0) = b_\eta(0)$。于是，对于每个 $t \geq 0$，存在一个 $s_t \geq 0$，使得 $b_\gamma(t) = b_\eta(s_t)$。

由引理 2.16 可知 $b'_\gamma(t) \to 1$，当 $t \to \infty$ 时成立。因此，若如引理 2.7 中那样定义 $\theta(t) = \sqrt{1 - (b'_\gamma(t))^2}$，则 $\theta(t) \to 0$。对于固定的 $T \geq 0$，若我们考虑 $t \geq T$，则投影$x_{t,T} = P_{\gamma(T)}(\gamma(t))$ 满足 $d(\gamma(T)\ x_{t,T}) \lesssim \theta(T)$；而当 $t \to \infty$ 时，根据命题 2.17 证明中所用的论证，我们有 $x_{t,T} \to \eta(s_T)$。因此 $d(\gamma(T)\ \eta(s_T)) \lesssim \theta(T)$，这就推出了所需结论，因为当 $T \to \infty$ 时，$\theta(T) \to 0$。□

我们记录引理 2.8 对可能在 $\partial_*\mathcal{X}$ 处有端点的测地线的如下推广。该推广通过常规的极限论证得到。对于 $x \in \mathcal{X}$，我们将投影 $P_x : \mathcal{X} \to \mathcal{W}^u(x)$ 扩展到 $\partial_*\mathcal{X}$，方法是令 $P_x(\zeta)$ 为与 $\mathcal{W}^u(x)$ 的唯一交点，其中 $\mathcal{W}^u(x)$ 是包含定义命题 2.17 中 $\zeta \in \partial_*\mathcal{X}$ 的上升测地射线的竖直测地线。命题 2.17 的证明表明，此扩展具有如下意义下的连续性：若 $\gamma : [0,\infty) \to \mathcal{X}$ 是一条端点为 ζ 的测地射线，则当 $t \to \infty$ 时，$P_x(\gamma(t)) \to P_x(\zeta)$。

引理 2.19。对于 x、$y \in \mathcal{X} \cup \partial_*\mathcal{X}$，令 $\gamma : I \to \mathcal{X}$ 为一条连接 x 与 y的测地线。令 z 为 γ 上使 b 取得最小值的唯一点。则

$$b(z) = \inf_{t \in I} b(\gamma(t)) \doteq (x|y)_b.$$

记 γ_{xz} 为从 x 到 z 的 γ 的弧，记 γ_{zy} 为从 z 到 y的 γ 的弧；若 $w \in \gamma_{xz}$，则

$$d(P_w(x), w) \doteq 0,\ \ d(x,w) \doteq b(x) - b(w),$$

若 $w \in \gamma_{zy}$，则

$$d(P_w(y), w) \doteq 0,\ \ d(y,w) \doteq b(y) - b(w).$$

证明。我们证明 x、$y \in \partial_*\mathcal{X}$时的延拓情形；其他情形只需稍作调整，证明类似。在此情形下，$\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ 对所有时刻都有定义。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $x_n = \gamma(-n)$、$y_n = \gamma(n)$、$\gamma_n = \gamma|_{[-n,n]}$。令 z 为 γ上 b 的唯一最小值点，则当 n 足够大时，我们将有 $z \in \gamma_n$，且 z 将是 γ_n上 b 的唯一最小值点。因此，γ_n 的引理 2.8 成立，其参考最小点为 z。由引理 2.14，当 n 充分大时，$(x|y)_b \doteq (x_n|y_n)_b$，从而我们得到 $b(z) \doteq (x|y)_b$，这就给出了第一个结论。

对于第二组陈述，很容易看出，只要知道投影 $P_w(x_n)$ 和 $P_w(y_n)$

当 $n \to \infty$ 时收敛到 $P_w(x)$ 和 $P_w(y)$。但这正是我们在证明命题 2.17 的满射性过程中确立的。□

度量空间之间的映射 $F\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ $\mathcal{X}_i$ 是（K, C）-准等距的，如果存在 $K \geq 1$ 和 $C \geq 0$，使得对于任意 x、$y \in \mathcal{X}_1$,

$$K^{-1} d_2(x,y) - C \leq d_1(F(x), F(y)) \leq K d_2(x,y) + C. \tag{2.11}$$

此外，如果对于每个 $y \in \mathcal{X}_2$，都存在某个 $x \in \mathcal{X}_1$ 使得 $d_2(F(x)\ y) \leq K$，那么我们称 F 为（K, C）-拟等距映射，或简称拟等距映射。情形 $C = 0$ 对应于双利普希茨映射。格罗莫夫双曲性是测地度量空间的一个拟等距不变量，具体来说，若 $F\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ 是一个（K, C）-拟等距映射，且 $\mathcal{X}_1$ 是 δ-双曲的，那么 $\mathcal{X}_2$ 是 δ'-双曲的，其中 δ' 仅取决于 δ、K 和 C。例如，参见 [9, 第 4] 章。

命题 2.2 意味着将流形 $\mathcal{X}$ 上的黎曼度量 g_1 替换为一个黎曼度量 g_2，使得存在常数 $L = L(C, a, A)$，满足 $g_1 \asymp_L g_2$。令d_1和 d_2 表示 $\mathcal{X}$上的相应度量，则恒等映射 $(\mathcal{X}, d_1) \to (\mathcal{X}, d_2)$ 是 L-双利普希茨的。由于我们在命题 2.12 中证明了 $(\mathcal{X}, d_2)$ 是 δ-双曲的，且按照命题 2.2 的记号有 $\delta = \delta(a_*)$，因此原黎曼流形 $(\mathcal{X}, d_1)$ 也是 δ'-双曲的，且 $\delta' = \delta'(a, A, C)$。由于 $(\mathcal{X}, d_1)$ 和 $(\mathcal{X}, d_2)$ 具有相同的竖直测地线，命题 2.17 的结论同样适用于 $(\mathcal{X}, d_1)$ 和 $(\mathcal{X}, d_2)$。这里我们利用了如下事实：测地双曲空间之间的拟等距映射$\mathcal{X}_1 := (\mathcal{X}, d_1)$ 和 $\mathcal{X}_2 := (\mathcal{X}, d_2)$ 会在相对格罗莫夫边界的点之间诱导对应关系 $\partial_* \mathcal{X}_1 \to \partial_* \mathcal{X}_2$，前提是将 $\mathcal{X}_1$ 的特定无穷远点映到 $\mathcal{X}_2$ [9, 的特定无穷远点。第 4] 章中，在这种情况下，该断言显然成立，因为一条测地射线在 $\mathcal{X}_1$ 中是下降的，当且仅当它在 $\mathcal{X}_2$中是下降的。

定理 *1.1* 的证明。 实际上，我们已经基本完成了证明；现在只需澄清关于包含周期轨道的叶的一些问题。我们假设处于定理 1.1 陈述之前所述的弱扩张叶状结构情形。这里我们沿用此前引入的记号。根据命题 2.2，我们可以在 M 上的度量中损失一个导数，从而得到一个新的双利普希茨等价黎曼度量，使得 (2.4) 对某个可能不同的 $0 < a_* \leq A_*$ 成立。这使我们从 $r \geq 3$ 到达 $r \geq 2$；下文假设这一修改已经完成。根据本证明开始之前的讨论，只需在完成这一修改后证明定理 1.1 的结论即可。因此，下文假设这一修改已经完成。

对于 f^t，叶状结构 $\mathcal{W}^u$ 的所有叶都与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚，$n =$ 维数为 E^u，因为 f^t 对该叶状结构作一致扩张。每个叶 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 要么与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 微分同胚（若它不包含 f^t 的周期轨道），要么与悬挂空间微分同胚，

$$\mathcal{W}^{cu}(x) \cong \mathcal{W}^u(x) \times \mathbb{R}/(p, 0) \sim (f^T p, T), \tag{2.12}$$

其中，T 是 $\mathcal{W}^{cu}(x)$内部周期轨道的周期。这就穷尽了所有可能性：若 $f^{-T}\colon \mathcal{W}^u(x) \to \mathcal{W}^u(x)$是从不稳定叶到其自身的映射，且 $T > 0$，则根据压缩映射定理，它恰有一个不动点（对应于该周期轨道）；若取满足 $f^{-T}(\mathcal{W}^u(x)) = \mathcal{W}^u(x)$的最小 $T > 0$，便得到描述式(2.12)。这个最小 T 为正，源于 M的紧致性。

若 $\mathcal{W}^{cu}(x)$中不含周期轨道，则有 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)} = \mathcal{W}^{cu}(x)$。我们定义一个高度函数 $b_x\colon \mathcal{W}^{cu}(x) \to \mathbb{R}$，令 $b_x(y) = t$，当且仅当 $y \in \mathcal{W}^u(f^t x)$。那么，$b_x$ 是 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 上的一个 C^{r+1} 函数，其梯度为 $\nabla b_x = f$，且其水平集是不稳定叶

$\mathcal{W}^u(y)$, $y \in \mathcal{W}^{cu}(x)$。根据此定义，$(\mathcal{W}^{cu}(x)\ b_x)$ 是定义 2.1 中的一个扩张锥。

当 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 确实有一个周期轨道时，万有覆盖 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)} \cong \widetilde{\mathcal{W}^u(x)} \times \mathbb{R}$ 在此情况下，其甲板变换群为 $\mathbb{Z}$，甲板变换由映射 $(p,t) \to (p, t+T)$ 生成，具体如上文描述 (2.12) 所示。由 $\sim_M$ 诱导的、定义在 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 上的黎曼度量也提升到 $\mathcal{W}^{cu}(x)$，流 f^t、不稳定叶状结构 $\mathcal{W}^u$ 以及轨道叶状结构 $\sim_{\mathcal{W}^c}$ 亦然。于是，高度函数 $b_x : \mathcal{W}^{cu}(x)$ 简单地定义为 $b_x(p,t) = t$。与 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)}$ 上一段一样，$(\mathcal{W}^{cu}(x)\ b_x)$ 是一个扩张锥。我们统一记号，将两种情况下的扩张锥都记作 $\widetilde{\mathcal{X}_x} = (\mathcal{W}^{cu}(x)\ b_x)$。由此，定理 1.1 的第一项结论可通过将命题 2.12 应用于扩张锥 $\mathcal{X}_x$ 得出，而关于相对格罗莫夫边界的第二项结论则由命题 2.17 得出。□

推论 *1.2* 的证明。设 M 是一个带有 Anosov 测地流的光滑闭黎曼流形。记 T^1M 为赋予佐佐木度量的 M 的单位切丛，并记 $f^t : T^1M \to T^1M$ 为测地流。于是，定理 1.1 适用于 f^t 的每个中心-不稳定叶 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 的万有覆盖 $\sim_{\mathcal{W}^{cu}}(x)$。令 $\pi : T^1M \to M$ 表示将一个单位切向量投影到其基点的投影，并在 TT^1M 中记 $\mathbb{V} = \ker D\pi$ 为“竖直的”子丛。根据 Klingenberg 的一个结果，f^t 的稳定丛 E^s 和不稳定丛 E^u 都分别与 $\mathbb{V}$ 横截。加入测地喷流 f 后，这一点仍然成立，因此 E^{cs} 和 E^{cu} 都分别与 $\mathbb{V}$ 横截。

因此，投影的微分 $D\pi : TT^1M \to TM$ 限制为同构 $D\pi_x : E^{cu}_x \to TM_x$，对每个 $x \in T^1M$ 均如此。对于每个 $x \in T^1M$，投影 $\pi_x : \mathcal{W}^{cu}(x) \to M$ 因此是一个局部微分同胚；相对于 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 上的诱导黎曼度量和 M 上给定的度量，它还是局部双利普希茨的。由于 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 和 M 都是连通的，我们得出 π_x 是满射，因而是一个覆盖映射。于是我们可以转到万有覆盖 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)}$，并在这些空间赋予其提升的黎曼度量时，得到一个局部（从而也是全局）双利普希茨映射 $\widetilde{\mathcal{W}^{cu}(x)} \to \widetilde{M}$，其中 $\widetilde{M}$。由于根据定理 1.1，$\mathcal{W}^{cu}(x)$ 是一个 Gromov 双曲度量空间，M 也具有 Gromov 双曲性。根据米尔诺-施瓦茨引理 $\sim \pi_1(M)$ 与 M 准等距，因此我们得到 $\pi_1(M)$ 是 Gromov 双曲的。□

我们指出，在 [7] 具有弱扩张叶状结构的连续流 f^t 的更一般情形下，$M \to M$ 定理 1.1 的结论同样成立，证明也完全相同：$\mathcal{W}$ 其中 f^t 沿 $\mathcal{W}$ 一致地 C^r，但 f^t 甚至可能在其自身上都不可微。我们这里只是选择不引入这一情形所涉及的额外复杂性。

从此处起，我们还假设 (2.2) 中的上界对参数 A 成立。因此，我们将扩展关于符号 $\asymp$、$\lesssim$、$\gtrsim$ 和 $\doteq$ 的约定，使隐含常数也可以依赖于 A 以及 a。

我们用 d^u_x 表示由 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{W}^u(x)$ 上诱导的黎曼度量。采用此记号，我们有 $d^u_x = d^u_y$，其中 $y \in \mathcal{W}^u(x)$。不等式 (2.2) 意味着

$$e^{at} d^u_x(x,y) \le d^u_{f^t x}(f^t x, f^t y) \le e^{At} d^u_x(x,y), \tag{2.13}$$

对每个 x、$y \in \mathcal{X}$ 和 $t \ge 0$ 均成立；对于 $t \le 0$，不等式方向相反。我们用 ρ_x 表示 $\mathcal{W}^u(x)$ 上参数为 a 的 *Hamenstädt* 度量，其对 x、$y \in \mathcal{W}^u(x)$ 的定义为

$$\rho_x(x,y) = \exp(-a \sup\{t \in \mathbb{R} : d^u_{f^t x}(f^t x, f^t y) \le 1\}). \tag{2.14}$$

由 (2.13) 可知上确界有限，我们将 $\exp(-\infty)$ 理解为 $= 0$。在这些条件下，ρ_x 定义了一个度量，这一点可见于 [15]；同样的证明也适用于

在阿诺索夫流的背景下使用 (2.2) 的证明在这里同样适用。根据定义，我们得到共形缩放性质

$$\rho_{f^t x}(f^t x, f^t y) = e^{at}\rho_x(x,y) \tag{2.15}$$

对于每个 x、$y \in \mathcal{X}$ 和 $t \in \mathbb{R}$。

引理 2.20。对于 $x \in \mathcal{X}$、$t \in \mathbb{R}$ 和 y、$z \in \mathcal{W}^u(x)$，我们有如下比较关系

$$d(y,z) \le d_x^u(y,z) \le e^{Ad(y,z)} d(y,z), \tag{2.16}$$

d 与 d_x^u的比较。当 $d_x^u(y、z) \le 1$ 时，我们有如下比较关系

$$d_x^u(y,z) \le \rho_x(y,z) \le d_x^u(y,z)^{a/A}, \tag{2.17}$$

d_x^u 与 ρ_x的比较；而当 $d_x^u(y、z) \ge 1$ 时，我们得到

$$d_x^u(y,z)^{a/A} \le \rho_x(y,z) \le d_x^u(y,z) \tag{2.18}$$

对于 x、$y \in \mathcal{X}$，我们有

$$\rho_x(x, f^{b(x)-b(y)}y) \le \max\{e^{Ad(x,y)}d(x,y), e^{ad(x,y)}d(x,y)^{a/A}\}. \tag{2.19}$$

证明。由定义可知，(2.16) 中的界 $d \le d_x^u$ 显然成立。为证明上界，考虑在 $\mathcal{X}$ 中连接 y 与 z 的测地线 γ。由于 b 是 1-Lipschitz，γ 上的每一点 p 到 $\mathcal{W}^u(x)$ 的距离都不超过 $d(y,z)$。因此，γ 在 $\mathcal{W}^u(x)$ 上的投影 $P_x \circ \gamma$ 的长度至多为

$$\ell(P_x \circ \gamma) \le e^{Ad(y,z)}\ell(\gamma) = e^{Ad(y,z)}d(y,z),$$

由 (2.2) 得。

由定义可知，$d_x^u(y,z) = 1$ 当且仅当 $\rho_x(y,z) = 1$。对于一般情形，令 $\beta = a^{-1}\log \rho_x(y,z)$，使得 $e^{-a\beta} = \rho_x(y,z)$。于是由 (2.15) 得，

$$e^{a\beta}\rho_x(y,z) = \rho_x(f^\beta y, f^\beta z) = 1,$$

因此 $d_x^u(f^\beta y, f^\beta z) = 1$。若 $d_x^u(y,z) \le 1$（即 $\beta \ge 0$），则将 (2.2) 应用于此表达式，得到

$$e^{a\beta}d_x^u(y,z) \le 1 \le e^{A\beta}d_x^u(y,z),$$

这意味着

$$d_x^u(y,z) \le \rho_x(y,z) \le d_x^u(y,z)^{a/A}.$$

如果 $d_x^u(y,z) \ge 1$ 那么 $\beta \le 0$，我们就改为有

$$e^{A\beta}d_x^u(y,z) \le 1 \le e^{a\beta}d_x^u(y,z),$$

这意味着

$$d_x^u(y,z)^{a/A} \le \rho_x(y,z) \le d_x^u(y,z).$$

最后，任取 x，$y \in \mathcal{X}$。考虑连接 x 与 y 的一条测地线，并像建立 (2.16) 时那样将其投影到 $\mathcal{W}^u(x)$，我们得出

$$d_x^u(x, f^{b(x)-b(y)}y) \le e^{Ad(x,y)}d(x,y).$$

最后的比较式 (2.19) 随即由 (2.17) 和 (2.18) 得出。 □

在 $\partial_*\mathcal{X}$ 上的视觉度量，其参数为 a，是该空间上的一个度量 ρ，满足

$$\rho(\zeta,\xi) \asymp Ke^{-a(\zeta|\xi)_b}, \tag{2.20}$$

对所有 ζ，$\xi \in \partial_*\mathcal{X}$ 均一致成立，其中某个常数为 $K > 0$。我们施加的约束是，隐含常数只能依赖于 a 和 A。

在下面命题的陈述中，$d(y,z)$ 应解释为 ∞ 如果任一者$y \in \partial_*\mathcal{X}$ 或 $z \in \partial_*\mathcal{X}$（或两者）以及 $y \ne z$。

命题 2.21. 假设 $x \in \mathcal{X}$ 和 $y,\ z \in \mathcal{X} \cup \partial_* \mathcal{X}$ 满足 $d(y, z) \geq 1$。那么

$$e^{-a(y|z)_b} \asymp e^{-ab(x)} \rho_x(P_x(y), P_x(z)). \tag{2.21}$$

因此，在命题 *2.17* 的识别下，*Hamenstädt* 度量 ρ_x 定义了 $\rho_{*,\ x}$ 上的一个视觉度量，参数为 a。这些视觉度量满足关系

$$\rho_{*,y} = e^{a(b(y)-b(x))} \rho_{*,x}, \tag{2.22}$$

对于 x、$y \in \mathcal{X}$。

证明。只需证明命题在 $y,\ z \in \mathcal{X}$ 的情形，因为完整结论可由利用引理 2.14 的极限论证立即得到。设 $x,\ y,\ z \in \mathcal{X}$ 给定。我们先在 $b(y) = b(z)$ 的情形下证明估计 (2.21)，然后再以此推出一般情形。令 $\beta = a^{-1} \log \rho_y(y,\ z)$，于是 $\rho_y(y,\ z) = e^{-a\beta}$。由于 $d(y,\ z) \geq 1$，我们有 $d_y^u(y,\ z) \geq 1$，由此根据 (2.18) 可得 $\rho_y(y,\ z) \geq 1$。因此，由 (2.14) 得 $\beta \leq 0$。

我们先证明上界。设 γ_y 是连接 y 与 $f^\beta y$ 的竖直测地线，设 γ_z 是连接 z 与 $f^\beta z$ 的竖直测地线。由于

$$d^u_{f^\beta x}(f^\beta y, f^\beta z) = 1,$$

由 (2.16) 可得 $d(f^\beta y,\ f^\beta z) \leq 1$。因此，$f^\beta y$ 与 $f^\beta z$ 可由一条长度为 $\ell(\eta) \leq 1$ 的测地线 η 连接。于是复合路径 $\gamma_y \cup \eta \cup \gamma_z$ 的长度为 $\leq -2\beta + 1$，故有

$$d(y, z) \leq -2\beta + 1.$$

将两边同时除以 2，再在两边分别加上 $-b(y) = -\frac{1}{2}(b(y) + b(z))$，得到

$$-(y|z)_b \leq -b(y) - \beta + \frac{1}{2}.$$

然后取参数为 a 的指数，得到

$$e^{-a(y|z)_b} \lesssim e^{-ab(y)} \rho_y(y, z) = e^{-ab(x)} \rho_x(P_x(y), P_x(z)),$$

由 (2.15) 可得，从而得到上界。

对于下界，设 $\gamma\colon [0, k] \to Y$ 是连接 y 与 z 的测地线，$k = d(y,\ z)$。令 $n = \lfloor k \rfloor$，则 $n \geq 1$，因为 $k \geq 1$。对每个整数 $0 \leq j \leq n$，令 $y_j = \gamma(j)$，并令 $y_{n+1} = \gamma(k) = z$（注意，若 k 是整数，则可能有 $y_n = y_{n+1}$）。设 $p_j := P_y(y_j)$ 是这些点在 $\mathcal{W}^u(y)$ 上的竖直投影。于是，由 ρ_y 的三角不等式可得

$$\rho_y(y, z) \leq \sum_{j=0}^{n} \rho_y(p_j, p_{j+1}).$$

令 $1 \leq l \leq n$ 为一个稍后再调节的整数，并对 $0 \leq j \leq n+1$ 设定 $z_j = y_{n+1-j}$。于是，由于 b 是 1-Lipschitz，且 $b(y) = b(z)$，我们有 $b(y_j) \geq b(y) - j$，并且

$b(z_j) \geq b(y)$，对每个 j 都成立。因此，利用 (2.15) 和 (2.19)，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \rho_y(p_j, p_{j+1}) &\leq \sum_{j=0}^{l} e^{aj} \rho_{b(y_j)}(y_j, f^{b(y_j)-b(y_{j+1})} y_{j+1}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-l} e^{aj} \rho_{b(z_j)}(z_j, f^{b(z_j)-b(z_{j+1})} z_{j+1}) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{l} e^{aj} + \sum_{j=0}^{n-l} e^{aj} \\ &\lesssim e^{al} + e^{a(n-l)}.\end{aligned}$$

取 $l = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$，并回忆 $|k-n| \leq 1$ 和 $k = d(y, z)$，我们得出

$$\rho_y(y, z) \lesssim e^{a \frac{d(y,z)}{2}},$$

将两边乘以 $e^{-ab(y)}$，得到

$$e^{-ab(y)} \rho_y(y, z) \lesssim e^{-a(y|z)_b},$$

由 (2.15) 可将其改写为

$$e^{-ab(x)} \rho_x(P_x(y), P_x(z)) \lesssim e^{-a(y|z)_b},$$

正如所需。

现在考虑一般情形。不失一般性，可假设 $b(y) \geq b(z)$。接着令 $p = f^{b(z)-b(y)} y$。于是 $b(p) = b(z)$，并且由于 $P_x(y) = P_x(p)$，由上文可推得

$$e^{-ab(x)} \rho_x(P_x(y), P_x(z)) \asymp e^{-a(p|z)_b}.$$

为了处理右侧，我们将引理 2.8 应用于一条从 y 到 z 的测地线 γ，并注意到，沿着 γ 从 y 行进至 z 时，函数 b 在曲线到达高度 $b(z)$ 之前无法取得其最小值。因此，若令 $w \in \gamma$ 为从 y 出发沿 γ 行进时满足 $b(w) = b(z)$ 的第一个点，则 $d(w, p) \doteq 0$。因此

$$(p|z)_b \doteq (w|z)_b \doteq (y|z)_b,$$

第二个近似等式由引理 2.8 以及以下事实得出：从 w 到 z 的 γ 线段与完整测地线 γ 具有相同的最小高度点。不等式 (2.21) 随之成立。关于视觉度量的最终结论（其中 $K = e^{-ab(x)}$ 取自 (2.20)）则由以下事实得出：若从 $\mathcal{W}^u(x)$ 出发、分别表示点 ξ、$\zeta \in \partial_* \mathcal{X}$ 的两条不同上升测地射线 γ 和 η，那么当 t 足够大时，最终有 $d(\gamma(t), \eta(t)) \geq 1$，因此在 (2.21) 中可取满足 $y = \gamma(t)$ 且 $z = \eta(t)$ 的 $t \to \infty$。由 (2.15) 可立即得到关系 (2.22)，因为对于 $x, y \in \mathcal{X}$，标识链 $\mathcal{W}^u(x) \to \partial_* \mathcal{X} \to \mathcal{W}^u(y)$ 只是流 $f^{b(y)-b(x)} : \mathcal{W}^u(x) \to \mathcal{W}^u(y)$。□

我们以简要讨论扩张锥之间的一种等价概念作为本节的结尾；对于阿诺索夫流，这一概念对应于结构稳定性。考虑两个扩张锥 $f_i^t : \mathcal{X}_i \to \mathcal{X}_i$；我们用下标 $i = 1, 2$ 表示分别对应于每个扩张锥的对象。若存在连续函数 $\alpha : \mathbb{R} \times \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R}$，使得对于任意 $x \in \mathcal{X}_1$，同胚 $\varphi : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ 就是一个轨道等价，

$$\varphi(f_1^t(x)) = f_2^{\alpha(t,x)}(\varphi(x)), \tag{2.23}$$

并且存在连续生成元 $\dot{\alpha}\colon \mathcal{X}_1 \to \mathbb{R}$，使得

$$\int_0^t \dot{\alpha}(f_1^s x)\, ds = \alpha(t,x), \tag{2.24}$$

对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathcal{X}_1$。此函数 α 是一个关于 f_1^t 的加性余循环，其意义是

$$\alpha(s+t,x) = \alpha(t, f_1^s x) + \alpha(s,x). \tag{2.25}$$

注意，(2.23) 表明 $\dot{\alpha} \neq 0$处处成立，这意味着 $\dot{\alpha} > 0$或 $\dot{\alpha} < 0$处处成立。

下面的命题表明，在其局部行为满足温和的一致性条件时，扩张锥之间的轨道等价是拟等距的。在定理 1.1 的情形下，由结构稳定性诱导的、与阿诺索夫流相关的扩张锥之间的轨道等价总是满足这些条件。

命题 2.22。设 $\varphi\colon \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ 是一个轨道等价，并且处处满足 $\dot{\alpha} > 0$。设存在常数 K_0，使得若 $d(x,y) \le 1$，则 $d(\varphi(x)\ \varphi(y)) \le K_0$，并且 K_1，使得 $\max\{\dot{\alpha}, \dot{\alpha}^{-1}\} \le K_1$。那么，$\varphi$ 是一个(K,C)-拟等距映射，其(K,C)仅取决于式(2.2)中的膨胀参数 a_i、K_0和 K_1。

证明。为简化记号，若 $x \in \mathcal{X}_1$，则我们用 $x' = \varphi(x)$ 表示 $\mathcal{X}_2$ 中对应的点。对于 d_1、d_2 和 b_1、b_2，我们分别采用相同的记号 d 和 b，因为根据论证可以清楚地判断我们指的是哪一个。我们令 $a = \min\{a_1, a_2\}$。在本证明中，记号 $\doteq$ 和 $\asymp$ 表示相差一个仅取决于 a、K_0 和 K_1 的加法常数或乘法常数。我们可以利用三角不等式迭代关于 φ 的条件，从而对任意 $t \ge 0$ 和 $x, y \in \mathcal{X}_1$，得到

$$d(x,y) \le t \Rightarrow d(x',y') \le K_0(t+1) \tag{2.26}$$

方程 (2.23) 与关于 $\dot{\alpha}$ 的假设表明，将 φ 限制在竖直测地线上时，它是 K_1-双利普希茨的。现在任取 x、$y \in \mathcal{X}_1$，其中 y 不在经过 x 的竖直测地线上。设 γ 是连接 x 与 y 的测地线，并设 z 是 b 在 γ 上的唯一最小值。根据引理 2.8，我们可以找到点 p，它们位于经过 x 且在 x 下方的竖直测地线上；还可以找到点 q，它们位于经过 y 且在 y 下方的竖直测地线上，使得 $d(p,z) \doteq 0$ 且 $d(q,z) \doteq 0$（因此 $d(p,q) \doteq 0$ 也成立）。于是 $d(x,y) \doteq d(x,p) + d(q,y)$。由于 φ 在竖直测地线上是 K_1-双利普希茨的，因此有 $d(x',p') \asymp d(x,p)$，且 $d(y',q') \asymp d(y,q)$。因此

$$d(x,p) + d(q,y) \asymp d(x',p') + d(y',q').$$

由于处处有 $\dot{\alpha} > 0$，我们得到 p' 和 q' 分别位于各自竖直测地线上的 x' 和 y' 下方。由 (2.26) 可得 $d(p', q')$，因为 $d(p, q) \doteq 0$。由引理 2.9 以及 $d(p', q') \doteq 0$，我们有

$$b(p') \doteq b(q') \doteq (p'|q')_b \le (x'|y')_b.$$

因此，存在一个加性常数 $c = c(a, K_0, K_1)$，使得 $b(p') \le (x'|y')_b + c$，q' 也同样成立。于是 $d(x', p') \doteq b(x') - b(p')$，且 $d(y', q') \doteq b(y') - b(q')$，这意味着

$$\begin{aligned} d(x',p') + d(y',q') &\doteq b(x') + b(y') - 2b(p') \\ &\ge b(x') + b(y') - 2(x'|y')_b - c \\ &= d(x',y') - c. \end{aligned}$$

这给出了式 (2.11) 中的上界。对于下界，我们只需注意到 $d(x',\ q') \doteq d(x',\ p')$，因为 $d(p',\ q') \doteq 0$，因此根据三角不等式

$$d(x',p') + d(y',q') \le d(x',y') + c,$$

对于某个加性常数 $c = c(a,\ K_0,\ K_1)$。 □

注 2.23。 由于 Gromov 双曲空间的拟等距映射会在格罗莫夫边界上诱导拟对称映射（详见 [9, 第 5] 章及相关术语），命题 2.22 证明了，轨道等价通过命题 2.21 将其与 $\partial_*\mathcal{X}$ 上的视觉度量相对应，从而在 Hamenst¨adt 度量之间诱导拟对称映射。作者此前已在 [7, 命题 6.7] 中通过一种更直接的方法确立了这一结论。

3. Uniformization

本节将对扩张锥 $(\mathcal{X},\ b)$ 的一致化过程作出自包含的阐述。该过程在作者此前的一篇预印本 [6]以及 Zhou-Saminathan-Antti 的工作 [24]中以更一般的形式进行了阐述。然而，对于扩张锥而言，可以简化这一构造，使其思想更加清晰。

我们首先定义一致度量空间。设 $(\Omega,\ d)$ 是一个度量空间。对于点 $x \in \mathcal{X}$ 和闭集 K，记

$$d(x,K) := \inf_{y\in K} d(x,y),$$

¯表示从 x 到 y 的距离。进一步假设 Ω 不完备，并记 $\partial\Omega = \Omega\backslash\bar{\Omega}$ 表示 Ω 在其完备化 Ω 中的补集。接着记

$$d_\Omega(x) = d(x,\partial\Omega),$$

¯表示 $x \in \Omega$。对于曲线 $\gamma:\ I \to \Omega$，记 γ_- 和 γ_+ 为 $\gamma(t)$ 在 Ω 中分别当 t趋近于 I 的左端点和右端点时的极限，假设这些极限存在。

定义 3.1. 对于常数 $L \ge 1$ 和闭区间 $I \subset \mathbb{R}$，若可求长曲线 $\gamma:\ I \to \Omega$ 满足以下条件，则称其为 L-一致 曲线：对每个 $t \in I$，都有

$$\min\{\ell(\gamma_{\le t}), \ell(\gamma_{\ge t})\} \le L d_\Omega(\gamma(t)), \tag{3.1}$$

并且满足不等式

$$\ell(\gamma) \le L d(\gamma_-,\gamma_+), \tag{3.2}$$

若 Ω 中任意两点都能用一条 L-一致曲线连接，则称度量空间 Ω 为 L-一致 空间。

注意，第一个条件 (3.1) 意味着第二个条件中的极限存在。此外，回顾第 2 节开头介绍的记号 $\gamma_{\le t} = \gamma|_{I\le t}$ with $I_{\le t} = I \cap (-\infty, t]$ （ $\gamma_{\ge t}$ 的定义与此类似）。

我们将通过对 $\mathcal{X}$ 上的黎曼度量进行共形变形，把扩张锥 $\mathcal{X}$ 转化为一致度量空间。具体而言，假设 (2.2) 成立，若令 g 表示 $\mathcal{X}$ 上的黎曼度量张量，则令 $\mathcal{X}_b$ 为其黎曼度量张量为 $g_b = e^{-ab}g$的黎曼流形；也就是说，我们在 $x \in \mathcal{X}$处将度量张量 g_x 按 $e^{-ab(x)}$缩放。于是，对于曲线 $\gamma: I \to \mathcal{X}$，记

$$\ell_b(\gamma) = \int_0^{\ell(\gamma)} e^{-ab(\gamma(t))}\|\gamma'(t)\|\,dt,$$

表示在 $\mathcal{X}_b$中测得的 γ 的长度。因此，随着高度增加，长度会呈指数级缩短。记 d_b 为 $\mathcal{X}_b$上的黎曼距离，则根据定义有

$$d_b(x,y) = \inf_{\gamma} \ell_b(\gamma),$$

其中下确界取遍所有连接 x 和 y的曲线 γ。由于假设 b 为 C^{r+1}，度量张量保持 C^r，因此 $\mathcal{X}_b$ 仍是一个 C^{r+1}-黎曼流形。很容易看出，经过这种变形后，$\mathcal{X}_b$ 现在是不完备的：事实上，$\mathcal{X}$ 中的任意上升测地射线在 $\mathcal{X}_b$中的长度现在都是有限的。这里还值得指出，参数 a并非由规范方式确定（任何满足（2.2）的 $a > 0$ 都可以使用），而且记号中省略了一致化 $\mathcal{X}_b$ 对 a 的依赖。

将共形变形中使用的密度记作函数 $\kappa(x) = e^{-ab(x)}$很方便。于是，b 的1-Lipschitz性质推出以下Harnack型不等式：

$$e^{-ad(x,y)} \le \frac{\kappa(x)}{\kappa(y)} \le e^{ad(x,y)}. \tag{3.3}$$

本小节中关于 $\doteq$等的约定与上一小节末尾讨论Hamenst¨adt度量时相同，也就是说，我们允许隐含常数仅依赖于 a 和 A。关键结果是我们的第一个引理，它用 d 估计 d_b，并证明 $\mathcal{X}$ 中的测地线是 $\mathcal{X}_b$中的一致双Lipschitz曲线。

引理 3.2. 对于任意 x、$y \in \mathcal{X}$，有

$$d_b(x,y) \asymp e^{-a(x|y)_b} \min\{d(x,y), 1\}. \tag{3.4}$$

因此，若 γ 是 $\mathcal{X}$ 中的一条测地线，连接 x 与 y，则

$$\ell_b(\gamma) \asymp d_b(x,y) \tag{3.5}$$

证明。由于当 $x = y$ 时结论显然成立，因此我们可以假设 $x \neq y$。对于任意 x、$y \in \mathcal{X}$，令 γ 为一条连接 x 与 y 的测地线。于是

$$\begin{aligned} d_b(x,y) &\le \int_\gamma \kappa \, ds \\ &\le e^{-ab(x)} \int_0^{d(x,y)} e^{at} \, dt \\ &\le e^{-ab(x)} a^{-1} (e^{ad(x,y)} - 1). \end{aligned}$$

现在改令 γ 为 $\mathcal{X}_b$ 中的一条测地线，连接 x 与 y，并以$\mathcal{X}$中的弧长为参数。于是

$$\begin{aligned} d_b(x,y) &= \int_\gamma \kappa \, ds \\ &\ge e^{ab(x)} \int_0^{\ell(\gamma)} e^{-at} \, dt \\ &\ge e^{ab(x)} a^{-1} (1 - e^{-a\ell(\gamma)}) \\ &\ge e^{ab(x)} a^{-1} (1 - e^{-ad(x,y)}), \end{aligned}$$

其中在最后一行我们使用了 $d(x,y) \le \ell(\gamma)$。由此我们得出

$$e^{-ab(x)} a^{-1} (e^{-ad(x,y)} - 1) \le d_b(x,y) \le e^{-ab(x)} a^{-1} (e^{ad(x,y)} - 1). \tag{3.6}$$

对于 $0 \le t \le 1$，我们有以下不等式

$$1 - e^{-at} \ge a^{-1} e^{-a} t,$$

and

$$e^{at} - 1 \le a e^{a} t,$$

注意到在 $t = 0$ 处等号成立，并对两边分别求导即可验证。因此，对于 $d(x, y)$，(3.6) 蕴含

$$d_b(x, y) \lesssim e^{-ab(x)} d(x, y) \asymp e^{-a(x|y)_b} d(x, y),$$

注意到 $(x|y)_b \doteq b(x)$。为了给出 $d_b(x, y)$ 的下界，注意若有一条曲线$\gamma : I \to Y$ 连接 x 和 y，那么在 $\mathcal{X}$ 中的球 $B(x, d(x, y))$ 内，必有一段起始弧 $\hat{\gamma}$ 连接 x 与球的边界 $\partial B(x, d(x, y))$。于是必有

$$\ell_b(\hat{\gamma}) \gtrsim e^{-a(x|y)_b} \ell(\hat{\gamma}) \ge e^{-a(x|y)_b} d(x, y).$$

取 γ 为 $\mathcal{X}_b$ 中连接 x 和 y 的测地线，则下界由此得出，因为 $\hat{\gamma}$ 是 γ 的一个子段。

因此，在证明余下部分中，我们可以假设 $d(x, y) \ge 1$。我们先证明 (3.4) 中的上界。设 γ 是连接 x 和 y 的测地线。应用引理 2.8，设 γ_1 是 γ 上从 x 到唯一点 z 的弧，在该点处 b 在 γ 上取得最小值；设 γ_2 是 γ 上从 z 到 y 的弧（注意，如果 γ 是竖直测地线，γ_1 或 γ_2 可能是平凡的）。然后利用引理 2.8 的估计，

$$\begin{aligned}
\ell_b(\gamma) &= \ell_b(\gamma_1) + \ell_b(\gamma_2) \\
&= \int_{\gamma_1} \kappa \, dt + \int_{\gamma_2} \kappa \, dt \\
&\asymp e^{-a(x|y)_b} \left(\int_0^{d(x,z)} e^{-at} \, dt + \int_0^{d(y,z)} e^{-at} \, dt \right) \\
&= a^{-1} e^{-a(x|y)_b} \big(2 - e^{-ad(x,z)} - e^{-ad(y,z)}\big).
\end{aligned}$$

由此立即可得

$$\ell_b(\gamma) \lesssim e^{-a(x|y)_b},$$

因此，相应的 d_b 上界成立。

对于下界，令 γ 为连接 x 与 y 的任意可求长路径，并在 $\mathcal{X}$ 中以弧长为参数。令 $m = \lfloor \ell(\gamma) \rfloor$，注意到 $m \ge 1$，因为 $\ell(\gamma) \ge d(x, y) \ge 1$。我们选取时刻 $0 = t_0$、t_1、…、t_m、$t_{m+1} = \ell(\gamma)$，将区间 $[0, \ell(\gamma)]$ 划分为 $m + 1$ 个等长的子区间 $r = \ell(\gamma)/(m+1)$。我们有 $\frac{1}{2} \le r \le 1$，因此 $r \asymp 1$。记 $\gamma_j = \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ 为 $0 \le j \le m$，则 $\ell(\bar{\gamma}_j) \asymp 1$，因此 $\ell_b(\gamma_j) \asymp e^{-ab(\gamma(t_j))} \ell(\gamma_j)$。

令 $x_j = \gamma(t_j)$ 以及 $p_j = P_x(x_j)$。然后，利用 $\ell(\gamma_j) \asymp 1$ 和 (2.19)，

$$\begin{aligned}\rho_x(P_x(x), P_x(y)) &\leq \sum_{j=0}^{m} \rho_x(p_j, p_{j+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{m} e^{a(b(x)-b(x_j))} \rho_{x_j}(x_j, f^{b(x_j)-b(x_{j+1})} x_{j+1}) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{m} e^{a(b(x)-b(x_j))} \ell(\gamma_j) \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{m} e^{ab(x)} \ell_b(\gamma_j) \\ &= e^{ab(x)} \ell_b(\gamma).\end{aligned}$$

由命题 2.21，我们得出

$$\ell_b(\gamma) \gtrsim e^{-a(x|y)_b}.$$

由于 γ 是任意的，我们得到 (3.4) 中的下界。最后，对于比较式 (3.5)，根据定义，下界成立；而上界则源于我们在 $\mathcal{X}$ 中使用测地线来得到 (3.4) 中的上界。□

给定 $x \in \mathcal{X}$，令 $\gamma_x \colon [0, \infty) \to \mathcal{X}$ 为从 x 出发的上升测地射线。根据引理 3.2 中的估计可以直接验证

$$\ell_b(\gamma_x) \asymp e^{-ab(x)} \asymp 1.$$

因此，γ_x 在 $\mathcal{X}_b$ 中长度有限，所以 $\gamma_x(t)$ 必须收敛到 $\mathcal{X}_b$ 中的一个点 ζ，当 $t \to \infty$ 时。显然，ζ 不可能属于 $\mathcal{X}_b$，因为测地线 γ_x 最终会离开 $\mathcal{X}$ 的每个紧子集（因而也会离开 $\mathcal{X}_b$ 的每个紧子集），所以我们有 $\zeta \in \partial \mathcal{X}_b$。因此，对每个 $x \in \mathcal{X}$，我们可以定义一个映射 $\Psi_x \colon \mathcal{W}^u(x) \to \partial X_b$，将点 $y \in \mathcal{W}^u(x)$ 映到 $\partial \mathcal{X}_b$ 中上升测地射线 γ_y 的端点。

现在我们证明，映射 Ψ_x 诱导出一个双利普希茨同胚，将 $\mathcal{W}^u(x)$上的哈门施泰特度量 ρ_x 与 $\partial \mathcal{X}_b$ 识别起来，前提是对 ρ_x 进行适当的缩放。因此，由命题 2.17 可知，我们可以将 $\partial \mathcal{X}_b$ 自然地识别为相对于 $*$的格罗莫夫边界 $\partial_* \mathcal{X}$。简记 $d_b(x) = d_{\mathcal{X}_b}(x)$为 $\mathcal{X}_b$ 中到边界的距离，并将 $\bar{x} = \Psi_x(x)$记为 ∂X_b 中从 x出发的上升测地射线 γ_x 的端点。

命题 3.3。存在一个常数 $K = K(a, A)$，使得对每个 $x \in \mathcal{X}$，都存在度量空间 $\Psi_x : (\mathcal{W}^u(x) \ e^{-ab(x)}\rho_x) \to (\partial \mathcal{X}_b, d_b)$之间的一个 K-双利普希茨同胚。引理 *3.2* 的估计可推广至 $\mathcal{X}_b$，并且有

$$d_b(x) \asymp \ell_b(\gamma_x) \asymp d_b(x, \bar{x}) \asymp e^{-ab(x)}, \tag{3.7}$$

对于任意 $x \in \mathcal{X}$。

证明。根据命题陈述之前的讨论可知，Ψ_x 定义良好。由于定义 Ψ_x 的方法与命题 2.17 中用于定义 $\mathcal{W}^u(x)$与 $\partial_* \mathcal{X}$ 之间识别的方法一致，对于 $y \in \mathcal{W}^u(x)$，我们可以将 $\Psi_x(y)$既视为 $\partial \mathcal{X}_b$ 中的一点，也视为 $\partial_* \mathcal{X}$中的一点。我们的首要目标是证明 $\Psi_x \colon \mathcal{W}^u(x) \to \partial \mathcal{X}_b$ 是一个双射。

对于不同的点 w、 $z \in \mathcal{W}^u(x)$和 $n \in \mathbb{N}$ ，令 $w_n = \gamma_w(n)$和 $z_n = \gamma_z(n)$。那么，当 n足够大时，引理 3.2 给出

$$d_b(w_n, z_n) \asymp e^{-a(w_n|z_n)_b}.$$

由引理 2.14 和命题 2.21，我们得到

$$d_b(\Psi_x(w), \Psi_x(z)) \asymp e^{-a(\Psi_x(w)|\Psi_x(z))_b} \asymp e^{-ab(x)}\rho_x(w, z).$$

这意味着，作为从 $(\mathcal{W}^u(x),\ e^{-ab(x)}\rho_x)$ 到 $(\partial\mathcal{X}_b,\ d_b)$ 中其像的映射， Ψ_x 是 K-双利普希茨的，且满足 $K = K(a,\ A)$。特别地， Ψ_x 是单射。

为证明满射性，我们注意到，如果 $\{x_n\}$ 是 $\mathcal{X}_b$ 中的一个柯西序列，且不收敛到 $\mathcal{X}_b$ 中的某个点，那么引理 3.2 表明，当 $m,\ n \to \infty$ 时，必有 $(x_m|x_n)_b \to \infty$ ；因为如果存在一个子序列，使得这些格罗莫夫积沿该子序列有上界，那么 (3.4) 表明 $\{x_n\}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个柯西序列，它收敛到某个点 $x \in \mathcal{X}$，因此 $x_n \to x$ 也属于 $\mathcal{X}_b$。于是，根据命题 2.15，序列 $\{x_n\}$ 定义了 $\partial_*\mathcal{X}$ 中的一个点；由命题 2.17，该点是从 $\mathcal{W}^u(x)$ 中某一点出发的一条上升测地射线的端点。由此得出， Ψ_x 是满射。随后，根据连续性和引理 2.14，引理 3.2 的估计也可延拓至 $\mathcal{X}_b$。

如前所述，我们有 $\ell_b(\gamma_x) \asymp e^{-ab(x)}$。这意味着 $d_b(x,\ \bar{x}) \asymp e^{-ab(x)}$。对于任意 $\zeta \in \partial\mathcal{X}_b$ ，我们有（利用上面建立的恒等 $\partial\mathcal{X}_b \cong \partial_*\mathcal{X}$ ）

$$d_b(x, \zeta) \asymp e^{-a(x|\zeta)_b} \gtrsim e^{-ab(x)},$$

根据（2.8），并对 $b(\zeta) = \infty$ 作自然解释。由于这对所有 $\zeta \in \partial\mathcal{X}_b$ 都成立，证明完成。□

点 $*$ 不在 $\mathcal{X}_b$ 的闭包中：事实上，根据引理 3.2， $\mathcal{X}$ 中的任意下降测地射线在 $\mathcal{X}_b$ 中的长度都是无限的。特别地， $\mathcal{X}_b$ 具有无限直径，这与 Bonk-Heinonen-Koskela 的标准一致化过程形成鲜明对比，后者 [3] 产生一个有界空间。现在只需确立一致性性质即可；既然到边界的距离（3.7）已经计算出来，这一点很容易完成。

命题 3.4. 度量空间 $(\mathcal{X}_b, d_b)$ 是 L-一致的，且具有 $L = L(a, A)$。更确切地说， $\mathcal{X}_b$中的任意测地线 γ *in* $\mathcal{X}$ 都是一条 L-一致曲线。

证明。 设 $\gamma : I \to \mathcal{X}$ 为任意一条测地线。由 (3.5) 可立即推出第二个性质 (3.2)。对于第一个性质，注意到当 $t \in I$ 时，由 (3.7) 和 (3.2)，条件 (3.1) 等价于不等式

$$\min\{\ell_b(\gamma_{\le t}), \ell_b(\gamma_{\ge t})\} \le Le^{-ab(\gamma(t))}, \tag{3.8}$$

对于 $L = L(a, A)$。计算分为两种情形：当 γ 是竖直测地线时，直接计算可得，若 γ 是上升的，则有 $\ell_b(\gamma_{\ge t}) \lesssim e^{-ab(\gamma(t))}$ ；若γ 是下降的，则有 $\ell_b(\gamma_{\le t}) \lesssim e^{-ab(\gamma(t))}$ 。两种情形下，(3.8) 均成立。

当 γ 不是竖直的时，我们使用引理 2.19，并令 $t_0 \in I$ 为 γ上 b取到下确界的时刻。于是，再次通过直接计算，并利用该引理关于 $t \in I$ 的估计可得，若 $t \le t_0$ ，则有 $\ell_b(\gamma_{\le t}) \lesssim e^{-ab(\gamma(t))}$ ；若$t \ge t_0$，则有 $\ell_b(\gamma_{\ge} t) \lesssim e^{-ab(\gamma(t))}$ 。因此，在所有情形下，不等式 (3.8) 均成立。□

注记 3.5. 命题 3.4 实际上给出了更精确的结论：除去一个仅依赖于 a 和 A 的乘法常数，在 (3.1) 中达到最小值的 γ 受控线段仅凭 γ 上高度函数 b 的取值便可确定。

¯总体空间 $\mathcal{X}_b$ 很少是带边界的黎曼流形，主要的例外是 $\mathcal{X}$ 具有常负曲率 $K \equiv -a^2$ 的情形。尤其是， $\mathcal{X}_b$ 上的黎曼结构通常无法以有意义的方式延拓到 $\partial\mathcal{X}_b$。常负曲率情形 $K \equiv -1$ 对应于上半空间 $\mathbb{R}^n_{>0}$ 上的双曲度量与欧几里得度量之间的关系，其中 $\mathbb{R}^n$ 为 $n \geq 2$；简单计算可知， $\mathbb{R}^n_{>0}$ 上的欧几里得度量是参数为 $a = 1$ 的标准双曲度量的一致化。

¯一致化所用的度量空间 $(\mathcal{X}_b, d_b)$ 在 $\mathcal{X} \cup \partial_*\mathcal{X}$ 上度量化了锥拓扑 。该拓扑利用以 b 为基点的格罗莫夫积，为 $\partial_*\mathcal{X}$ 中的每个点定义邻域基。我们尚未发现这种拓扑此前曾用于相对格罗莫夫边界；不过，锥拓扑是普通格罗莫夫边界理论中的标准工具，它将 $\mathcal{X}\cup\partial\mathcal{X}$ 拓扑化为一个边界为 $\partial\mathcal{X}$ 的闭球。若能更精确地描述以 $\partial\mathcal{X}_b \cong \partial_*\mathcal{X}$ 中的点为中心、适配于流 f^t 的锥，以及以边界上的点为中心的球，将会有所助益。对于 $x \in \bar{\mathcal{X}}_b$，我们用 $B_b(x, r)$ 表示度量 d_b 中以 x 为中心、半径为 r 的球。除非另有说明，关于 ¯ 度量 d_b 的球通常取在 $\mathcal{X}_b$ 中。对于 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$，定义

$$\mathcal{C}(x, r) = \bigcup_{t>0} f^t(B_\rho(x, r)) \cup \Psi_x(B_\rho(x, r)), \tag{3.9}$$

whe对 $B_\rho(x, r)$ 而言，它是 $\mathcal{W}^u(x)$ 上 Hamenst¨adt 度量 ρ_x 下半径为 r 的球。我们还y set

$$\mathcal{C}_*(x, r) = \mathcal{C}(x, r) \cap \partial\mathcal{X}_b = \Psi_x(B_\rho(x, r)).$$

¯集合 $\mathcal{C}(x, r)$ 在 $\mathcal{X}_b$ 中是开集，并且很容易看出，它们构成 $\partial\mathcal{X}_b$ 中每个点的邻域基。同样，对于 $x \in \mathcal{X}_b$，我们写作

$$B_*(x, r) = B_b(x, r) \cap \partial\mathcal{X}_b,$$

表示球 $B_b(x, r)$ 的边界部分。

在下述命题中，我们确立 $\mathcal{X}_b$ 中锥与球之间的一个关键关系。引入参数 L 是为了使比较具有一定的灵活性。

命题 3.6. 设 $x \in \mathcal{X}_b$ 和 $r > 0$ 满足 $r \asymp_L d_b(x)$， $L \geq 1$。那么存在常数 $L_* = L_*(a, A, L)$ 和 $t_* = t_*(a, A, L)$，使得

$$\mathcal{C}(f^{t_*}x, L_*^{-1}) \subset B_b(\bar{x}, r) \subset \mathcal{C}(f^{-t_*}x, L_*). \tag{3.10}$$

证明。 给定 $x \in \mathcal{X}_b$ 和 $r \asymp_L d_b(x)$。令 $\bar{x} \in \partial\mathcal{X}_b$ 为从 x 出发的上升垂直测地线 γ_x 的端点。将 L 增大一个仅取决于 a 和 A 的量后，可利用 (3.7) 假设 $r \asymp_L e^{-ab(x)}$ 也成立。根据命题 3.3，存在一个 $K \geq 1$，满足 $K = K(a, A)$，使得

$$\mathcal{C}_*(x, K^{-1}re^{ab(x)}) \subset B_*(\bar{x}, r) \subset \mathcal{C}_*(x, Kre^{ab(x)}), \tag{3.11}$$

这意味着根据我们对 r 的条件，

$$\mathcal{C}_*(x, L_*^{-1}) \subset B_*(\bar{x}, r) \subset \mathcal{C}_*(x, L_*), \tag{3.12}$$

其中有 $L_* = KL$。将 L 替换为 $2L$，得到（3.12），其中用 $2L$ 替换了 L，并用$r/2$替换了 r。为简化记号，我们假设在 L_* 中已经完成了这一替换（现在设$L_* = 2KL$），因此（3.12）成立，其中有 $r/2$ 和 r。

因此，为了证明（3.10）中的左侧包含关系，根据三角不等式，只需证明存在一个 $t_* = t_*(a, A, L) \geq 0$，使得若 $y \in B_\rho(x, L_*^{-1})$ 且 $\gamma_y\colon \mathbb{R} \to \mathcal{X}$

是经过 y 且满足 $\gamma_y(0) = y$ 的竖直测地线，那么 $\ell_b(\gamma_y|_{[t_*,\infty)}) < r/2$。由（3.7）以及关于 r 的假设可知，这可由下式推出

$$e^{-ab(\gamma_y(t_*))} = e^{-a(b(x)+t_*)} \leq \frac{1}{2}CLe^{-ab(x)},$$

其中 $C = C(a, A)$ 是式 (3.7) 中的比较常数。只要

$$t_* \geq -a^{-1}\log\frac{1}{2}CL,$$

由于右侧只依赖于 a、 A和 L，我们便证明了这一断言。类似地，为了证明式 (3.10) 中右侧的包含关系，只需证明存在一个 $t_* = t_*(a, A, L) \geq 0$，使得若 $y \in B_{\rho_x}(x, L_*)$，且 γ_y 如上定义，则 $\ell_b(\gamma_y|_{[t_*,\infty)}) > Cr$，其中某个比较常数 $C = C(a, A)$ 来自式 (3.7)（这是因为任意点 $z \in B_b(\bar{x}, r)$ 都必须满足 $d_b(z) < r$）。证明方法与前一种情况完全相同，只需反转不等式。□

当我们考虑 $\mathcal{X}_b$ 中相对于自身半径而言远离边界的球时，可以自然地将其与 $\mathcal{X}$中的共形缩放球进行比较。下面两个引理改述了 [1]中的结论。第一个引理改述了 [1, 定理 2.10]。

引理 3.7。 存在常数 $C_* = C_*(a, A) \geq 1$，使得对于任意 $x \in \mathcal{X}$ 以及任意 $0 < r \leq \frac{1}{2}d_b(x)$，都有以下包含关系：

$$B(x, C_*^{-1}re^{ab(x)}) \subset B_b(x, r) \subset B(x, C_*re^{ab(x)}). \tag{3.13}$$

证明。 令 $y \in B(x, C_*^{-1}re^{ab(x)})$，其中常数 $C_* \geq 1$ 待定。设 γ 是 $\mathcal{X}$ 中连接 x 与 y 的一条测地线，并令 $z \in \gamma$。于是，由于 $r \leq \frac{1}{2}d_b(x)$，根据 (3.7) 可得：

$$d(x, z) \leq C_*^{-1}e^{ab(x)}d_b(x) \leq C_*^{-1}C,$$

其中 $C = C(a, A) \geq 1$。于是根据 (3.3) 可得：

$$e^{-ab(z)} \asymp_{e^{C_*^{-1}Ca}} e^{-ab(x)}.$$

取 C_* 足够大，使得 $e^{C_*^{-1}Ca} < 2$，于是我们得到

$$e^{-ab(z)} \asymp_2 e^{-ab(x)},$$

对于 $z \in \gamma$。我们得出

$$\begin{aligned} d_b(x, y) &\leq \int_\gamma e^{-ab(\gamma(s))}\,ds \\ &\leq 2e^{-ab(x)}d(x, y) \\ &\leq 2C_*^{-1}r \\ &< r, \end{aligned}$$

只要取 $C_* > 2$ 即可。这就得到了 (3.13) 左侧的包含关系。

对于（3.13）右侧的包含关系，令 $y \in B_b(x, r)$，并令 η 为连接 x 与 y 的 $\mathcal{X}_b$ 中的一条测地线。对于 $z \in \eta$，我们有 $z \in B_b(x, r)$，因此根据三角不等式，由于 $r \leq \frac{1}{2}d_b(x)$，有 $d_b(z) \geq \frac{1}{2}d_b(x)$。应用（3.7），我们得到

$$\begin{aligned} e^{-ab(z)} &\geq C^{-1}d_b(z) \\ &\geq \frac{1}{2}C^{-1}d_b(x) \\ &\geq C^{-1}e^{-ab(x)}, \end{aligned}$$

对于某个常数 $C = C(a,\ A) \geq 1$。利用这一点，我们得到

$$r > d_b(x,y) = \int_\eta e^{-ab(\eta(s))}\, ds \geq C^{-1} e^{-ab(x)} d(x,y),$$

因为 $\ell(\eta) \geq d(x,\ y)$。取 C_* 大于该不等式右侧的常数 C，于是我们得到

$$d(x,y) < C_* r e^{ab(x)},$$

这就得到了 (3.13) 中右侧的包含关系。 □

第二个断言是将 [1, 引理 4.8] 调整到我们的情形。扩张锥的附加结构使我们能够得到稍强一些的结论。

引理 3.8。存在一个常数 $c_0 = c_0(a,\ A) < 1$，使得对于任意 $x \in \mathcal{X}_b$ 以及任意 $r > 0$，我们都能找到一个球 $B_b(z,\ c_0 r) \subset B_b(x,\ r)$，满足 $d_b(z) \geq 2c_0 r$。此外，可以选取 z，使其与 x 位于同一条竖直测地线上。

证明。设 $x \in \mathcal{X}_b$ 和 $r > 0$ 已给定，并令 $0 < c_0 < 1$ 为待定常数。令 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$ 为经过 x 的上升垂直测地线（若为情形 $\partial\mathcal{X}_b$，则其端点为 x）。由于当 $t \to \infty$ 时，$d_b(\gamma(t)) \to 0$；而当 $t \to -\infty$ 时，$d_b(\gamma(t)) \to \infty$，由介值定理可知，我们可以在 γ 上找到一点 z_0，使得 $d_b(z_0) = r$。

现在考虑从 x 到 z_0 的 η of γ 线段，以 d_b-弧长参数化。我们首先假设 $\ell_b(\eta) \geq \frac{2}{3} r$。在这种情况下，我们令 $z = \eta(\frac{1}{3} r)$。于是，由于 η 是一条 L-一致曲线（其中 $L = L(a,\ A)$），我们有 $d_b(z) \geq \frac{r}{3L}$，并且

$$B_b\left(z, \frac{r}{6L}\right) \subset B_b\left(x, \frac{r}{3} + \frac{r}{6L}\right) \subset B_b(x,r).$$

因此，在这种情况下，我们可以任取一个 $c_0 \leq \frac{1}{6L}$。

现在考虑 $\ell_b(\eta) < \frac{2}{3} r$ 的情形。于是我们令 $z = z_0$，并注意到

$$B_b\left(z_0, \frac{r}{3}\right) \subset B_b\left(x, \ell_b(\eta) + \frac{r}{3}\right) \subset B_b(x,r).$$

根据构造，我们有 $d_b(z) = r$。因此，在这种情况下，任意一个 $c_0 \leq \frac{1}{3}$ 都可以。结合这两种情形，我们可以令 $c_0 = \frac{1}{6L}$，注意到 $L \geq 1$。□

具有如下形式的球：$B_b(z,\ c_0 r)$，其中 $d_b(z) \geq 2c_0 r$，称为 子惠特尼球。在下面的第 4 节中，我们将始终使用记号 $c_0 = c_0(a,\ A)$ 表示引理 3.8 中的常数。

4. Doubling Measures

本节证明一些技术性结果，这些结果与上一小节构造的扩张锥 $\mathcal{X}$ 一致化 $\mathcal{X}_b$ 上的测度重标度有关。这些结果将专门用于定理 1.5 的证明。只关注定理1.3证明的读者，在留意定义 4.1 和重标度测度的定义（4.3）后，可以跳过本节。

我们从一个一般定义开始。设 (X, d, μ) 是一个度量测度空间，即 (X, d) 是一个配备了博雷尔测度 μ 的度量空间，并且其中所有球 B 的测度 $0 < \mu(B) < \infty$均有限且非零。我们用 $B(x, r)$ 表示以 $x \in X$为中心、半径为$r > 0$ 的开球。

定义 4.1. 若存在一个常数 $C_\mu \geq 1$，使得对任意$x \in X$ 和 $r > 0$，都有

$$\mu(B(x,2r)) \leq C_\mu \mu(B(x,r)). \tag{4.1}$$

如果不等式 (4.1) 仅对半径至多为 R_0 的球成立，那么我们称 μ 在半径至多为 R_0的球上满足倍增条件。也可以说，如果存在一个 $R_0 > 0$，使得 μ 在半径至多为 R_0的球上满足倍增条件，那么 μ就是一致局部倍增的。

在没有测度μ的情况下，倍增条件的一个变体也很有用。若度量空间 (X,d) 满足：任意半径为 $2r$的球 $B(x,2r)$ 都能被至多 N 个半径为 r的球覆盖，则称该空间满足倍增性质，其倍增常数为 $N \in \mathbb{N}$。于是，关于半径至多为 R_0 的球上的倍增性质，以及一致局部倍增性质，都可按显然的方式推广。

很容易看出（利用 $\operatorname{supp}\mu = X$），上文定义 4.1 中关于 μ 的倍增性质蕴含了关于 X的相应倍增性质。

我们将经常使用倍增估计 (4.1) 的以下推论：若 μ 在半径不超过 R_0 的球上是倍增的，倍增常数为 C_μ，且 $0 < r \leq R \leq R_0$，则

$$\mu(B(x,R)) \asymp_C \mu(B(x,r)), \tag{4.2}$$

其中常数 C 仅取决于 C_μ 和比值 R/r。此估计可通过反复应用估计 (4.1)，并注意到 $\mu(B(x,\ R)) \geq \mu(B(x,\ r))$，因为 $B(x,\ r) \subset B(x,\ R)$，从而得到。

我们将用到 [1], 中的以下命题；该命题在那里以更一般的形式给出。

命题 4.2。 [1, 命题 3。2] 设 $(X,\ d)$ 是一个测地度量空间，且 μ 是 X 上的博雷尔测度，在半径不超过 R_0 的球上倍增，倍增常数为C_μ。那么，对于任意 $R_1 > 0$，测度 μ 在半径不超过 R_1的球上倍增，其倍增常数仅取决于 R_1/R_0 和 C_μ。

因此，只要 X 是测地线，任意一致局部倍增测度 μ 都可以在我们所需的任意大尺度上视为倍增测度，只要该尺度最终固定即可。因此，假设 $R_0 \geq 1$ 并无妨碍，接下来我们将作此假设。

现在，令 $(\mathcal{X},\ b)$ 为一个扩张锥，其流为 $f^t\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，如上一节所述。令 μ 为 $\mathcal{X}$ 上的博雷尔测度，它局部有限、全支撑且一致局部倍增，从而 $(\mathcal{X},\ d,\ \mu)$ 是一个度量测度空间。然而，除非 μ 随着 $^-$在 $\mathcal{X}$ 中的高度足够快地衰减，否则 $(\mathcal{X}_b,\ d_b,\ \mu)$（其中 μ 扩展为 $\mu(\partial\mathcal{X}_b) = 0$）不一定是度量测度空间，因为在 $\mathcal{X}_b$ 中与 $\partial\mathcal{X}_b$ 相交的球可能具有无限测度。

我们可以通过对 $\sigma > 0$ 定义以下内容来尝试解决这个问题：

$$d\mu_\sigma(x) = e^{-\sigma b(x)}\, d\mu(x), \tag{4.3}$$

也就是说，μ_σ 是一个测度，它与 μ 等价，且密度为 $x \to e^{-\sigma b(x)}$。这定义了 $\mathcal{X}_b$ 上的一个博雷尔测度 $^-$，我们通过令 $\mu_\sigma(\partial\mathcal{X}_b) = 0$ 将其扩展为 $\mathcal{X}_b$ 上的博雷尔测度。我们将证明，在对 μ_σ 施加一些额外假设的条件下，三元组 $(\mathcal{X}_b,\ d_b,\ \mu_\sigma)$ 定义了一个倍增度量测度空间。我们指出，如果 σ 足够大，则无需额外假设也能证明这一点（见 [5]）；然而，当关注 σ 的具体取值时，这并无帮助。

我们关于 $\asymp$等的约定将扩展为允许隐含常数还依赖于 σ、局部倍增常数 C_μ 和半径 R_0，以及 μ。当我们说某个量依赖于“数据”时，意指它仅依赖于 a、 A、 C_μ、 R_0和 σ。依赖于 σ 的常数应理解为：当 σ 的取值限制在 $(0,\infty)$ 的紧子集内时，这些常数是一致的。尽管我们拓宽了这一约定，许多隐含常数仍将仅依赖于 $\asymp$和 σ；至于何时适用、何时不适用，我们大多留给感兴趣的读者自行判断。

常数仍将仅依赖于 a和 A；至于何时适用、何时不适用，我们大多留给感兴趣的读者自行判断。

我们首先利用引理 3.7 和引理 3.8，为 μ_σ 建立一些不需要额外假设的估计。我们从引理 3.7 的以下推论开始。

引理 4.3。设 $x \in \mathcal{X}$ 和 $0 < r \leq \frac{1}{2} d_b(x)$。那么

$$\mu_\sigma(B_b(x,r)) \asymp e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, re^{ab(x)})).$$

证明。由 (3.3) 和 (3.7)，对所有 $y \in B_b(x,r)$，我们有

$$e^{-\sigma b(y)} \asymp d_b(y)^{\sigma/a} \asymp d_b(x)^{\sigma/a} \asymp e^{-\sigma b(x)}, \tag{4.4}$$

其中比较关系 $d_b(y) \asymp d_b(x)$ 由关于 r 的条件得出。应用引理 3.7 以及比较链 (4.4)，我们得到

$$\mu_\sigma(B_b(x,r)) \asymp e^{-\sigma b(x)} \mu(B_b(x,r)) \leq e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, C_* r e^{ab(x)})),$$

其中 C_* 是引理 3.7 中的常数。利用引理 3.7 的另一个包含关系进行类似论证，可得

$$\mu_\sigma(B_b(x,r)) \gtrsim e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, C_*^{-1} r e^{ab(x)})).$$

因此我们得出

$$e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, C_*^{-1} r e^{ab(x)})) \lesssim \mu_\sigma(B_b(x,r)) \lesssim e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, C_* r e^{ab(x)})). \tag{4.5}$$

r 上的条件意味着

$$r e^{ab(x)} \leq \frac{1}{2} d_b(x) e^{ab(x)} \leq C, \tag{4.6}$$

根据 (3.7)，$C = C(a, A)$ 是一个一致常数。由命题 4.2 可知，只需付出将 μ 的局部倍增常数 C_μ 增大一个仅依赖于数据的量这一代价，我们可以假设，对于不等式 (4.6) 中的常数 C 以及引理 3.7 中的常数 C_*，$R_0 > C C_*$。然后，比较 (4.2) 使我们能够得出

$$\mu(B(x, C_*^{-1} r e^{ab(x)})) \asymp \mu(B(x, re^{ab(x)})) \asymp \mu(B(x, C_* r e^{ab(x)})).$$

将这一比较与不等式 (4.5) 结合起来即可证明该引理。 □

我们可以在子惠特尼球上得到关于 μ_σ 的更精确估计。

引理 4.4。给定 $L \geq 1$，设 $z \in Y$ 和 $r > 0$ 满足 $2c_0 r \leq d_b(z) \leq Lr$。则

$$\mu_\sigma(B_b(z, c_0 r)) \asymp r^{\sigma/a} \mu(B(z,1)), \tag{4.7}$$

隐含常数仅依赖于数据和 L。

证明。在整个证明过程中，“数据”还将包括常数 L，类似地，来自 $\asymp$ 的隐含常数还将依赖于 L。由假设可知$d_b(z) \asymp r$，因此由 (3.7) 得到 $e^{-\sigma b(z)} \asymp r^{\sigma/a}$，其中比较常数仅依赖于数据，因为 c_0 仅依赖于数据。因此，由引理 4.3 可得

$$\mu_\sigma(B_b(z, c_0 r)) \asymp r^{\sigma/a} \mu(B(z, c_0 r e^{-ab(z)})),$$

比较常数仅取决于数据。由于 $e^{-ab(z)} \asymp d_b(z) \asymp r$，我们有$c_0 r e^{-ab(z)} \asymp_C 1$，其中常数 C 仅取决于数据。利用命题 4.2，我们可以假设 μ 在半径至多为 C的球上满足倍增性质，但代价是倍增常数增加一个仅取决于数据的量。由此可得比较式 (4.7) 成立。□

现在我们可以证明：如果关于以点 $\xi \in \partial\mathcal{X}_b$ 为中心的球 $B_b(\xi,\ r)^-$的 μ_σ测度有某些估计，那么 μ_σ 在 $\mathcal{X}_b$上满足倍增性质。更确切地说，我们将假设：将引理 3.8 和 4.4 结合应用于以 $\partial\mathcal{X}_b$ 为中心的球时，关于 μ_σ 的测度不等式反向也成立。我们回顾命题 3.3 中关于 $z \in \mathcal{X}$ 的记号，即$\bar{z} = \Psi_z(z)$。

命题 4.5. 存在一个常数 $L = L(a, A)$ 使得以下结论成立：假设存在一个常数 K，使得对于任意 $z \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$，若满足 $c_0 r \le d_b(z) \le Lr$，则有

$$\mu_\sigma(B_b(\bar{z}, Lr)) \le K r^{\sigma/a} \mu(B(z,1)), \tag{4.8}$$

那么，μ_σ 在 $(\mathcal{X}_b, d_b)$ 上具有倍增性质，其倍增常数仅取决于数据和 K。

证明。为证明 $\mathcal{X}_b$ 上的倍增性质，我们根据球心 $x \in \mathcal{X}_b$ 到边界的距离分两种情况。第一种情况是 $0 < r \le \frac{1}{4} d_b(x)$，这尤其意味着 $x \in \mathcal{X}_b$。于是，我们可以对 $B_b(x,r)$ 和 $B_b(x, 2r)$ 分别应用引理 4.3。由此可得

$$\mu_\sigma(B_b(x,r)) \asymp e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, re^{ab(x)})) \asymp e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x, 2re^{ab(x)})) \asymp \mu_\sigma(B_b(x,2r)), \tag{4.9}$$

其中比较常数仅取决于数据。为证明 (4.9) 中间的比较，我们注意到，由于 $2r \le \frac{1}{2} d_b(x)$，根据 (3.7)，$\mathcal{X}$ 中不等式右侧 (4.9) 的中间两个球的半径均至多为 C，其中某个常数为 $C = C(a, A)$。根据命题 4.2，我们可以假设 μ 在半径至多为 C 的球上具有倍增性质，代价是将 μ 的倍增常数增加一个仅取决于 a 和 A 的量。这就在此情形下给出了所需的倍增估计。

第二种情形是 $d_b(x) < 4r$。于是令 $\bar{x} \in \partial\mathcal{X}_b$ 为从 x 出发的上升测地射线的端点。根据 (3.7)，我们有 $B_b(x,r) \subset B_b(\bar{x}, Lr)$，其中 $L = L(a, A)$。然后我们使用引理 3.8，选取与 x 位于同一条竖直测地线上的点 $z \in \mathcal{X}_b$，使得 $B_b(z, c_0 r) \subset B_b(x,r)$ 且 $d_b(z) \ge 2c_0 r$。于是 $\bar{z} = \bar{x}$，并且由于 $z \in B_b(\bar{x}, Lr)$，必有 $d_b(z) < Lr$。由于 $B_b(z, c_0 r) \subset B_b(\bar{x}, Lr)$ 且 $2c_0 r \ge c_0 r$，由引理 4.4 和假设的不等式 (4.8)，我们得到

$$\mu_\sigma(B_b(x,r)) \asymp \mu_\sigma(B_b(z, c_0 r)), \tag{4.10}$$

比较常数仅取决于数据和 K。由于我们还有 $B_b(x,2r) \subset B_b(\bar{x}, 2Lr)$以及 $2c_0 r = c_0 \cdot 2r$，引理 4.4 与(4.8)的同样组合还表明

$$\mu_\sigma(B_b(x,2r)) \asymp \mu_\sigma(B_b(z, c_0 r)), \tag{4.11}$$

比较常数仅取决于数据和 K。结合(4.10)和(4.11)，即可在第二种情形下得到所需的倍增估计。□

由命题 3.6，只需在锥上建立一个类似于(4.8)的估计。这就是下一小节中使用命题 4.5的形式。

命题4.6。存在一个常数 $L' = L'(a, A) \ge 1$，使得若存在一个常数 K，对任意 $x \in \mathcal{X}$ 均有

$$\mu_\sigma(\mathcal{C}(x, L')) \le K e^{-\sigma b(x)} \mu(B(x,1)), \tag{4.12}$$

则存在一个仅取决于数据和 K 的常数 K'，使得对任意 $z \in \mathcal{X}$ 和$r > 0$，若满足 $Lr \ge d_b(z) \ge c_0 r$，则有

$$\mu_\sigma(B_b(\bar{z}, Lr)) \le K' r^{\sigma/a} \mu(B(z,1)), \tag{4.13}$$

其中 $L = L(a, A)$ 是 (4.8) 中的常数。

证明。结合命题 3.6 和估计 (3.7)，并追踪各参数的依赖关系，即可立即得出这一结论；注意，当 $r \asymp d_b(x)$ 时，$r^{\sigma/a} \asymp e^{-\sigma b(x)}$。□

虽然命题 4.5 和 4.6 的措辞略显别扭，但由此得到的倍增判据很容易验证。

本节余下部分将讨论度量测度空间上的庞加莱 ´不等式，并将其应用于上文讨论的均匀化测度 μ_σ on $\mathcal{X}_b$。我们先给出一般定义。设 (X, d, μ) 为一个度量测度空间。对于满足 $0 < \mu(E) < \infty$ 的可测子集$E \subset X$ 以及在 E 上 μ可积的函数 u，我们记

$$u_E = \fint_E u \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u \, d\mu \tag{4.14}$$

表示 u 在 E 上的平均值。设 $u\colon X \to \mathbb{R}$。若博雷尔函数 $g\colon X \to [0, \infty]$ 满足以下条件，则称其为 u 的上梯度：对于连接两点 $x, y \in X$ 的每条可求长曲线 γ，都有

$$|u(x) - u(y)| \le \int_\gamma g \, ds.$$

若可测函数 $u : X \to \mathbb{R}$ 满足：对每个球 $B \subset X$，u 在 B 上可积，则称其在球上可积。若存在常数$\lambda \ge 1$ 和 $C_{\mathrm{PI}} > 0$，使得对于每个在球上可积的可测函数 u：$X \to \mathbb{R}$、每个球 $B \subset X$ 以及 u 的每个上梯度 g，均有以下不等式成立，则称 X 支持庞加莱 ´不等式

$$\fint_B |u - u_B| \, d\mu \le C_{\mathrm{PI}} \operatorname{diam}(B) \fint_{\lambda B} g \, d\mu. \tag{4.15}$$

常数 λ 称为膨胀常数。这里我们用记号 $\lambda B = B(x, \lambda r)$ 表示将球的半径按 λ 倍缩放。若 (X, d) 是测地度量空间 [16, 定理 4.18]，则膨胀常数 λ 总可以改进为 $\lambda = 1$；均匀化扩张锥 $\mathcal{X}_b$就是这种情况。不过，在下文研究局部庞加莱不等式时，我们需要允许存在这种膨胀因子。

注 4.7。当 $\lambda = 1$ 时，不等式 (4.15) 是度量测度空间所能满足的最强形式的庞加莱不等式。更一般地，对于固定的 $p \ge 1$，可以用上梯度的 L^p-范数替代 (4.15) 右侧的项，从而得到一个 p-庞加莱 ´不等式。当 $\lambda > 1$ 时，不等式 (4.15) 有时也称为弱庞加莱 ´不等式。参考文献 [17]对这一主题有更为详尽的论述。

如果存在常数 $R_{\mathrm{PI}} > 0$，使得（4.15）仅在半径至多为 R_{PI} 的球上成立，那么我们称 X 支持一个 *Poincar´é* 不等式，且球的半径至多为 R_{PI}。我们还称 X 支持一个一致局部 *Poincar´é* 不等式。

现在我们专门讨论配备了如上所述一致局部加倍测度 μ 的扩张锥 $\mathcal{X}$ 的情形。我们将假设对于固定的 σ，μ_σ 在 $\mathcal{X}_b$ 上满足倍增性质，且倍增常数为 C_{μ_σ}，然后证明这两个度量测度¯空间（$\mathcal{X}_b$，d_b，μ_σ）和（$\mathcal{X}_b$，d_b，μ_σ）都支持庞加莱不等式。在定理 1.5 的情形下，这一倍增性质将由上面的命题4.6推出。我们还将假设（$\mathcal{X}$，d，μ）支持一致局部庞加莱不等式。当 μ 是 $\mathcal{X}$上的黎曼体积时，这个条件并不难验证。在这种情况下，C^1 函数 u：$\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ 的上梯度 g 可以取为 u的梯度的范数 $g = \|\nabla u\|$；只要任意给定 $x \in \mathcal{X}$ 周围的单位球都能映射到欧几里得单位球，且双利普希茨常数在 X中一致有界，那么一致局部庞加莱不等式便可由欧几里得空间中的通常庞加莱不等式推出（例如参见 [16, 第 4]章）。一个简单的紧性论证表明，这总是如此

对于定理 1.5 设定中由阿诺索夫流的中心-不稳定流形产生的扩张锥 $\mathcal{X}_x = (\mathcal{W}^{cu}(x)\ \ b_x)$，情形也是如此。

我们首先证明，庞加莱不等式 (4.15) 在度量测度空间 $(\mathcal{X}_b,\ d_b,\ \mu_\sigma)$ 中足够小的子惠特尼球上成立。证明与 [1, 引理 6.1] 基本相同。在引理 4.8 的陈述和证明中，“数据”指增长率 a 和 A，以及常数 R_0、 C_μ、 λ、 R_{PI} 和 C_{PI}。对于这个特定引理，我们实际上不需要假设 μ_σ 是倍增的。

引理 4.8。 假设$(\mathcal{X}$、d、$\mu)$满足一致局部庞加莱不等式。那么存在仅依赖于数据的 $c_1 > 0$ 和 $R_1 > 0$，使得对于所有 $x \in \mathcal{X}_b$ 和所有$0 < r \le c_1 d_b(x)$，关于 μ_σ 的庞加莱不等式(4.15) 在球 $B_b(x、\ r)$ 上成立，其膨胀ˆ ˆ常数为 λ，常数为 C_{PI}，且二者仅依赖于数据。

证明。 令 $B_b = B_b(x,\ r)$，其中 $0 < r \le c_1 d_b(x),\ \ 0 < c_1 \le \frac{1}{2}$ 是一个待定常数。令 C_* 为引理 3.7 中的常数。我们将 $c_1 > 0$ 取足够小，使得$c_1 C_*^2 \le \frac{1}{2}$。由引理 3.7 应用两次可得

$$B_b \subset B := B(x, C_* r e^{ab(x)}) \subset B_b(x, C_*^2 r) = \hat{\lambda} B_b, \tag{4.16}$$

对于ˆ $\lambda = C_*^2$，因为

$$C_*^2 r \le c_1 C_*^2 d_b(x) \le \frac{1}{2} d_b(x).$$

此外，由 (4.4) 可知，对于所有 $y \in \hat{\lambda} B_b$，我们都有 $e^{-\sigma b(y)} \asymp e^{-\sigma b(x)}$，其比较常数仅取决于数据。

现在，设 u 是定义在 $\mathcal{X}_b$ 上的一个在球上可积的函数，且 g_b 是 u 在 $\mathcal{X}_b$ 上的一个上梯度。通过与 [1, (6.3)] 中相同的基本计算可得， $g := g_b \kappa$ 是 u 在 $\mathcal{X}$ 上的一个上梯度，其中回忆一下， $\kappa(x) = e^{-ab(x)}$ 是一致化中使用的密度。对于足够小的 c_1 （仅取决于 a、 A 和 R_{PI}），由 (3.7) 可得

$$C_* r e^{ab(x)} \le C_* c_1 d_b(x) e^{ab(x)} \le R_{\mathrm{PI}}.$$

因此，Poincar´e 不等式 (4.15)（对于 μ）在 B 上成立。由于 $e^{-\sigma b(y)} \asymp e^{-\sigma b(x)}$ 在ˆ λB_b 上的比较常数仅取决于一致化数据（由 (4.4) 可知），我们有

$$\mu_\sigma(B) \asymp e^{-\sigma b(x)} \mu(B), \tag{4.17}$$

比较常数仅取决于数据，而且以 B_b 或ˆ λB_b 替换 B时，同样的比较关系也成立。写作 $u_{B,\ \mu} = \fint_B u \, d\mu$，利用 (4.16) 中的包含关系、测度比较 (4.17)，以及 B上关于 μ 的 p-Poincar´e 不等式，我们得出

$$\begin{aligned}
\fint_{B_b} |u - u_{B,\mu}| \, d\mu_\sigma &\lesssim \fint_B |u - u_{B,\mu}| d\mu \\
&\le 2 C_{\mathrm{PI}} C_* r e^{ab(x)} \fint_B g \, d\mu \\
&\asymp r e^{ab(x)} \fint_B g_b \kappa \, d\mu_\sigma \\
&\lesssim r \fint_{\hat{\lambda} B_b} g_b^p \, d\mu_\sigma,
\end{aligned}$$

其中所有隐含常数仅取决于数据。由于根据三角不等式

$$\fint_{B_b} |u - u_{B_b,\mu_\sigma}| \, d\mu \le 2 \fint_{B_b} |u - u_{B,\mu}| \, d\mu,$$

我们可以将 $u_{B,\mu}$ 替换为 $u_{B_b,\mu_\sigma} = \fint_{B_b} u\, d\mu_\sigma$ ，从而完成引理的证明。 □

我们还需要以下关键命题。我们将使用情形 $p = 1$。

命题 4.9. [1, 命题 6.3] 设 Ω 是一个 L-一致度量空间，并配备倍增测度 ν ，且存在常数 $0 < c_1 < 1$，使得对于固定常数 C_{PI} 和 λ ，所有形如$B = B_\Omega(x, r)$、满足 $x \in \Omega$ 且 $0 < r \leq c_1 d_\Omega(x)$的子惠特尼球 B 上均成立 *Poincar´é* 不等式 (4.15)。那么度量测度空间 (Ω d, ν)满足一个 p-*Poincar´é* 不等式，其膨胀常数为 L，常数为 C'_{PI} ，且仅依赖于 L、c_1、 p、 C_{PI}、 λ以及 ν的倍增常数 C_ν 。

该命题在 [1]中针对有界 L-一致度量空间进行了陈述，但对于无界 L-一致度量空间，证明无需修改即可成立，前提是 ν 的倍增性质在所有尺度上成立，并且子惠特尼球上的 Poincar´é 不等式在所有适当尺度上成立。

现在我们可以验证 $\mathcal{X}_b$ and 下支中全局 Poincaré 不等式，中的所有常数，以及 μ_σ 的倍增常数 C_{μ_σ} 。

命题4.10。 假设 μ_σ 是倍增的，倍增常数为 C_{μ_σ} ，并且假设 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 支持一致局部 *Poincaré* 不等式。那么，$(\mathcal{X}_b, d_b, \mu_\sigma)$ 和 $\bar{}(\mathcal{X}_b, d_b, \mu_\sigma)$ 均支持 *Poincaré* 不等式，其膨胀常数为 $\lambda = 1$ ，乘法常数为 C_{PI} ，二者取决于数据和 C_{μ_σ}。

证明。 根据引理 4.8，存在一个仅由数据决定的 $c_1 > 0$ ，使得 Poincaré 不等式在形如 B_b (x, r) 的子惠特尼球上成立，其中 $x \in \mathcal{X}$ 满足 $0 < r \leq c_1 d_b(x)$，且常数 C_{PI} 和 λ 一致。由于 $(\mathcal{X}_b, d_b)$ 是一个 L-一致度量空间，具有 $L = L(a, A)$，并且我们假设 μ_σ 在 $\mathcal{X}_b$ 上全局倍增，倍增常数为 μ_σ，由命题 4.9 可知，度量测度空间 $(\mathcal{X}_b, d_b, \mu_\sigma)$ 支持 Poincaré 不等式，其常数 C'_{PI} 仅取决于数据和膨胀常数 L。由于 $\mathcal{X}_b$ 是测地的，因此 Poincaré 不等式 (4.15) 实际上在膨胀常数为 1 时成立，其常数 C^*_{PI} 仅取决于数据 [16, 定理 4.18]。

根据 [17, 引理 8.2.3] 我们得出 $\mathcal{X}_b$ 完备化 $\bar{}$ 也满足一个 Poincar´é 不等式，其常数仅取决于 $\bar{}$上的 Poincar´é 不等式的常数以及 μ_σ的倍增常数。由于 $\mathcal{X}_b$ 也是测地空间，因此按照之前的相同推理，在此情形下我们同样可以将膨胀常数取为 1。□

5. Construction of Measure of Maximal Entropy

现在我们回到阿诺索夫流的情形。设 M 是一个 C^{r+1} 闭黎曼流形，且 f^t: $M \to M$ 是 M 上的一个 C^r 传递 Anosov 流， $r \geq 2$。我们对之前在定理1.3陈述之前所描述的子丛和叶状结构使用相同的记号。我们用 d^M 表示 M 上的黎曼度量。对于叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 的每个叶 $\mathcal{W}^*(x)$，我们用 d^*_x 表示从 M 诱导在 $\mathcal{W}^*(x)$ 上的黎曼度量。我们用 $B^*(x, r)$ 表示在度量 d^*_x 下以 x 为中心、半径为 r 的 $\mathcal{W}^*(x)$ 中的球（相应地，自然地用 $B^M(x, r)$ 表示 d^M 的相应球）。我们假设不等式 (1.1) 和 (1.2) 对某些常数 $C_u = C_s = 1$ 成立。如果这些常数出现在这些不等式中，则我们改为假设 $r \geq 3$ ，并利用命题 2.2 引入新的黎曼度量将其消去。必须满足限制条件 $C_u = 1$ ，才能应用前面各

小节的结果，而必须满足 $C_s = 1$，才能断言 f^t 不会沿着 $\mathcal{W}^{cs}$ 扩张距离：对于任意 $x \in M$、$y \in \mathcal{W}^{cs}(x)$，对所有 $t \geq 0$，我们有

$$d^{cs}_{f^t x}(f^t x, f^t y) \leq d^{cs}_x(x, y). \tag{5.1}$$

To 为简化记号，我们用 $a = a_u$ 和 $A = A_u$ 表示增长的下界和上界 h rate在 E^u 上。

如同我们在定理 1.1 的证明中、接近第 2 节末尾时所做的那样，对于 $x \in M$，我们用 $\mathcal{X}_x = (\mathcal{W}^{cu}(x)\ b_x)$ 表示与点 x 相关的扩张锥；该点由叶 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 的万有覆盖以及高度函数 b_x 组成，且该高度函数满足 $b_x(x) = 0\widetilde{\qquad\qquad}$，其水平集是不稳定流形 $\mathcal{W}^u(y)$、$y \in \mathcal{W}^{cu}(x)$。我们回顾一下，除非 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 包含一个周期轨道，否则 $\mathcal{W}^{cu}(x) = \mathcal{W}^{cu}(x)$。

对于 $x \in M$，我们用 $\mathcal{W}^*_{\mathrm{loc}}(x)$ 表示经过 x 的 $\mathcal{W}^*$ 的局部叶，其定义为叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 中经过 x 、且大小一致的任意叶片；该叶片位于 $\mathcal{W}^*$ 的叶状图中。下面我们很快会进一步说明“一致大小”的含义。我们用 h^*_{xy} 表示叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 在局部横截面之间的局部全纯映射（下标标示每个横截面中的两个点 x 和 y，且满足 $y \in \mathcal{W}^*_{\mathrm{loc}}(x)$）。例如，若 $x \in M$，$y \in \mathcal{W}^s_{\mathrm{loc}}(x)$，则$h^s_{xy}$：$\mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(x) \to \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y)$ 是 s-全纯映射，它将每个 $z \in \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(x)$ 映到 $\mathcal{W}^s_{\mathrm{loc}}(z)$ 与 $\mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y)$ 的唯一交点 $h^s_{xy}(z)$。这些叶状结构的 f^t-不变性带来了等变性</style}, 下文将特别针对 s-全纯加以陈述：对于任意 $y \in \mathcal{W}^s_{\mathrm{loc}}(x)$ 和任意 $t \geq 0$,

$$h^s_{f^t x f^t y} = f^t \circ h^s_{xy} \circ f^{-t} : f^t(\mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(x)) \to f^t(\mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y)). \tag{5.2}$$

将上述的 cu 替换为 u 、将 s 替换为 cs，即可得到关于 cs-全纯的类似结论。将f^t替换为 f^{-t}，并将 s与 u互换，即可得到关于 u-全纯和 cu-全纯的相应结论。另请注意， c-全纯只需沿f^t流动即可得到。式 (5.2) 应理解为： $f^t \circ h^s_{xy} \circ f^{-t}$对应于 $f^t(\mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(x))$ 内 $\mathcal{W}^{cu}$ 的任意局部叶上的局部稳定整体映射。

对于 (5.2) 中的 $t < 0$，我们将此表达式视为对 s-全纯定义的扩展，适用于那些可能不在同一局部稳定叶上、但在整体尺度上仍位于同一稳定叶上的点（其他全纯映射也同理）。请注意，在这一整体尺度上， h^*_{xy} 中的基点标记对于明确所指的全纯映射至关重要，因为这些叶状结构的各个叶通常在 M 中稠密（对于 $\mathcal{W}^{cs}$ 和 $\mathcal{W}^{cu}$，情况总是如此；如果 f^t 是拓扑混合的，那么对于 $\mathcal{W}^s$ 和 $\mathcal{W}^u$ 也如此）。

由 M 的紧致性以及叶状结构的连续性，存在一个 $R > 0$，使得对于任意 $x \in M$ 和任意 $* \in \{u, c, s, cu, cs, M\}$，球 $B^*(x,\ R)$ 都包含在每个叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 的某个叶状图内（并且，若 $* \neq M$，则包含在其对应叶状结构的某个叶状图的叶片内）。将 M 上的黎曼度量乘以一个常数因子进行缩放（这不会影响 (1.1) 或 (1.2)），我们可以假设 $R = 1$；本节余下部分都将采用这一假设。

对于每个 $x \in M$，我们用 ρ_x 表示 $\mathcal{W}^u(x)$ 上的 Hamenst¨adt 度量，其定义公式为 ⌢(2.14)。容易验证，在 $\mathcal{X}_x$ 内， $\mathcal{W}^u(x)$ 上该度量的提升是扩张锥意义下的 Hamenst¨adt 度量，并由同一公式定义。与第3节一样，我们用 $B_\rho(x,\ r)$ 表示以 x 为中心、半径为 r 的度量 ρ_x 中的球。

为避免记号过于繁杂，在上下文足以确定基点时，我们会省略诸如 d^u_x、 ρ_x、 h^{cs}_{xy}等对象中的基点。通常可以直接根据传入对象的参数推断出所指的基点，例如， $d^u(x,\ y) = d^u_x(x,\ y)$对应 $y \in \mathcal{W}^u(x)$。

我们首先考虑不稳定叶之间的局部中心稳定全纯映射。附加结论 $K_R \to 1$ 当 $R \to 0$ 时成立，仅在命题 5.11 中才需要。

引理 5.1. 对于每个 $R > 0$，存在一个常数 $K = K_R \geq 1$，使得若 $x \in M$ 且 $y \in \mathcal{W}^{cs}(x)$ 满足 $d^{cs}(x, y) \leq R$，则全纯映射 $h^{cs} \colon B_\rho(x, R) \to \mathcal{W}^u(y)$ 在 *Hamenst¨adt* 度量下是 K-双利普希茨的。常数 K_R 可选取为满足当 $R \to 0$时，$K_R \to 1$。

证明。我们首先注意到，对于满足 $\rho(x, z) = 1$ 的 $x \in M$, $z \in \mathcal{W}^u(x)$，以及满足 $d^{cs}(x, y) \leq R$ 的 $y \in \mathcal{W}^{cs}(x)$，由 M 的紧致性、Hamenst¨adt 度量 ρ_x 对基点 x 的连续依赖性，以及相应叶状结构的全纯映射的连续性，存在一个仅依赖于 R 的统一常数 $K \geq 1$，使得 $\rho(y, h^{cs}(z)) \asymp_K 1$。接下来注意，在此配置中，如果我们改为有 $\rho(x, z) < R$，那么可以找到 $t > 0$，使得

$$\rho(f^t x, f^t z) = e^{at} \rho(x, z) = R.$$

由于根据 (5.1)，f^t不会在 $\mathcal{W}^{cs}(x)$ 上扩大距离，因此 $d^{cs}(f^t x,\ f^t y)$ 也成立。于是 $\rho(f^t y,\ h^{cs}(f^t z)) \asymp_K R$。利用等变性 (5.2)，我们得出

$$e^{at} \rho(y, h^{cs}(z)) = \rho(f^t y, f^t(h^{cs}(z))) \asymp_K 1,$$

这意味着

$$\rho(y, h^{cs}(z)) \asymp_K \rho(x, z).$$

最后，我们进一步考察当 $R \to 0$ 时，K 对 R 的依赖关系。常数 K 由 $x \in M$、$y \in \mathcal{W}^{cs}(x)$、$z \in \mathcal{W}^u(z)$ 上 $\rho(y, h^{cs}(z))$ 在 $\rho(x, z) = 1$ 且 $d^{cs}(x, y) \leq R$ 时的最大值和最小值确定。M 的紧致性意味着，函数 $(x, y, z) \to \rho(y, h^{cs}(z))$ 在所有满足 $y \in \mathcal{W}^{cs}(x)$ 且 $d^{cs}(x, y) \leq 1$，以及满足 $z \in \mathcal{W}^u(x)$ 且 $\rho(x, z) = 1$ 的三元组 $(x, y, z) \in M^3$ 上一致连续。此外，若 $d^{cs}(x, y) = 0$，则 $x = y$, $z = h^{cs}(z)$，因此 $\rho(y, h^{cs}(z)) = 1$。于是给定 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\delta > 0$，使得若 $d^{cs}(x, y) < \delta$，则

$$(1 + \varepsilon)^{-1} < \rho(y, h^{cs}(z)) < 1 + \varepsilon.$$

因此，若 $R < \delta$，则可取 $K_R = 1 + \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，这意味着我们可以选择 K_R，使得当 $R \to 0$时，$K_R \to 1$。□

接下来的断言说明，任意两个单位 Hamenstädt 球都包含大小一致且双 Lipschitz 等价的子球。下文特别强调，所述子球的中心 z 不一定能选为较大球的中心 x，甚至子球 $B_\rho(z,\ R)$ 也未必包含 x。同样，y 也未必属于 cs-全纯映射 $B_\rho(z,\ R)$ 的像。

引理 5.2。 存在一致的常数 $K \geq 1$ 和半径 $0 < R \leq 1$，使得对于任意 x、$y \in M$，都存在一点 $z \in B_\rho(x,\ 1)$，满足 $B_\rho(z,\ R) \subset B_\rho(x,\ 1)$；并且存在一个中心稳定全纯映射 $h^{cs} \colon B_\rho(z,\ R) \to B_\rho(y,\ 1)$，它在 *Hamenstädt* 度量下是到其像上的 K-双利普希茨同胚。

证明。若 f^t是拓扑混合的，则 f^t的稳定叶在 M中一致稠密；这只是对拓扑混合流所满足的规范性质的一种改述 [12, 第 8 章。3]。因此，存在一个 $L > 0$ 和 $r > 0$，使得对于任意两点 x、$y \in M$，都存在 $T_{xy} \in \mathbb{R}$满足 $|T_{xy}| \leq 1$，以及点 $p \in f^{T_{xy}}(B_\rho(x,\ 1))$ 和$q \in B_\rho(y,\ 1)$，使得 $B_\rho(p,\ r) \subset f^{T_{xy}}(B_\rho(x,\ 1))$、$\rho(y,\ q) < \frac{1}{4}$、$q \in \mathcal{W}^s(p)$ 且 $d^s(p,\ q) \leq L$。当 f^t不是拓扑混合时，这一断言的一个变体同样成立：此时，根据 Plante 的定理，f^t是一个具有常数屋顶函数的悬挂流 [12, 定理 9.1。1]

（特别是，稳定叶状结构和不稳定叶状结构共同积分为一个叶状结构 $\mathcal{W}^{su}$），而稳定叶则在每个叶 $\mathcal{W}^{su}(x)$ 内一致稠密；这是阿诺索夫微分同胚相应规范性质的结果。由于 f^t 是一个悬挂流，这种一致稠密性可在所有叶上统一成立 $\mathcal{W}^{su}(x)$。此外，所有叶 $\mathcal{W}^{su}(x)$ 在流 f^t作用下均由 d^c-全纯相关联，且这些 c-全纯线段的 $T>0$ 长度有一个统一常数上界，该上界由 f^t屋顶函数的常数值决定。结合以上所有断言（此时取 $|T_{xy}|\le T$），即可推出存在这样的 $L>0$ 和 $R>0$，满足 $T_{xy}\in\mathbb{R}$，且存在点 $p,\ q$，如上所述。

因此，在这两种情况下，我们都有一个 $L>0$、$R>0$和 $T_{xy}\in\mathbb{R}$，满足 $p\in f^T(B_\rho(x,1))$ 以及 $q\in B_\rho(y,1)$，使得 $B_\rho(p,r)\subset f^{T_{xy}}(B_\rho(x,1))$，$\rho(y,q)\asymp\frac14$，$q\in\mathcal{W}^s(p)$，$d^s(p,q)\le L$ 以及 $|T_{xy}|\le T$，其中某个 T 与 x 和 y 无关。于是存在一个 $j=j(L)>0$，使得 $d^s(f^jp,f^jq)\le 1$，这意味着 $d^{cs}(f^jp,f^jq)\le 1$。将 r 替换为 $\min\{r,e^{-aj}\}$ 后，不妨设 $e^{aj}r\le 1$。随后，我们可以应用引理 5.1（取 $R=1$），并利用 $j=j(L)$ 得出：存在一个常数 $C=C(L)$，使得 cs-全纯h^{cs}：$B_\rho(f^jp,e^{aj}r)\to\mathcal{W}^u(f^jy)$ 在 Hamenst¨adt 度量下是 C-双利普希茨的。应用 f^{-j} 后，我们得出全纯 h^{cs}：$B_\rho(p,r)\to B_\rho(y,1)$ 是 C'-双利普希茨的，$C'=e^{aj}C$。此外，p 的像是一个点 q，满足 $\rho(q,y)<\frac14$。因此，通过进一步缩小 r（缩小量仅取决于 C'，因而仅取决于 L），我们可以假设，cs-全纯像 $B_\rho(p,r)$ 在 $\mathcal{W}^u(y)$ 中的像完全包含于 $B_\rho(y,1)$ 内。最后，在 $f^{-T_{xy}}(B_\rho(p,r))$ 上用 $f^{T_{xy}}=h^c$ 对全纯 h^{cs} 作前复合，得到一个 cs-全纯映射 h^{cs}：$B_\rho(z,R)\to B_\rho(y,1)$，该映射到其像是 K-双利普希茨的，且满足 $R=e^{-aT}r$ 和 $K=e^{aT}C'$（利用 $|T_{xy}|\le T$）。根据构造，R 和 K 只依赖于量 L、r和 T; 我们在证明开始时选择这些量时，已使其与 x和 y无关。□

引理 5.2 将与以下关于 Hamenstädt 度量的一致倍增性质的结果结合使用。回顾定义 4.1。

引理 5.3。 [7, 引理 6。2] 对于每个 $x\in M$，度量空间 $(\mathcal{W}^u(x)\ \rho_x)$ 均具有倍增性质，其倍增常数为 N，且可取为与 x 无关。

对于 $x\in M$，令 $V_{s,l}(x)$ 表示 $B_\rho(x,e^{-al}),l\le s$ 中一个极大的 e^{-as}-分离子集的基数。对于 $t\in\mathbb{R}$，由 (2.15) 可得，

$$V_{s+t,l+t}(f^{-t}x)=V_{s,l}(x). \tag{5.3}$$

我们定义

$$V_{s,l}=\sup_{x\in M}V_{s,l}(x), \tag{5.4}$$

并由 (5.3) 注意到

$$V_{s+t,l+t}=V_{s,l}, \tag{5.5}$$

对于 $t\in\mathbb{R}$。在 $l=0$ 的情形下，我们记 $V_s(x):=V_{s,0}(x)$，$V_s:=V_{s,0}$。注意，这意味着 $s\ge 0$。

在下文中，对于 $\asymp$、$\lesssim$等，我们约定隐含常数与点 $x\in M$ 无关，也与待比较量所依赖的任何参数无关（例如，对于$V_{s,l}$，s 和 l）。

引理 5.4。 对于任意 x、$y\in M$ 以及任意 $s\ge 0$，有 $V_s(x)\asymp V_s(y)$，因此$V_s(x)\asymp V_s$。

证明。 只需证明 $V_s(x)\lesssim V_s(y)$，因为 x 和 y 的作用是对称的。根据引理 5.2，我们可以找到一致半径 $r>0$ 和常数 $K\ge 1$，使得存在一个

点 $p \in B_\rho(x, 1)$ 以及 K-双利普希茨 cs-全纯映射 h^{cs}：$B_\rho(p, r) \to B_\rho(y, 1)$，其中$B_\rho(p, r) \subset B_\rho(x, 1)$。令 $r = e^{-al}$ 表示 $l = -a^{-1}\log$ 和 $k = -a^{-1}\log$，则这意味着 $V_{s+k,\, l}(p) \leq V_{s,\, 0}(y)$。然而，由于根据引理 5.3，Hamenst¨adt 度量是倍增的，且具有一致的倍增常数，因此我们有

$$V_{s,0}(y) \leq CV_{s,l}(y), \tag{5.6}$$

对于任意 $y \in M$ 和 $s \geq 0$，其中常数 C 仅取决于 l、 a和倍增常数 N。这是通过将定义 4.1 的倍增条件迭代 $m = m(a, l)$ 次得到的结果，其中 m 是满足 $e^{-a(l+1)} < 2^{-m} \leq e^{-al}$ 的最小整数。因此，(5.6) 蕴含 $V_{s+k,l}(p) \lesssim V_{s,l}(p)$。又由于 $B_\rho(p, r) \subset B_\rho(x, 1)$，再次利用 (5.6) 可得 $V_{s,0}(x) \lesssim V_{s,l}(p)$。由于 r （因而 l）与 x、 y及 s无关，将这些结论汇总可得 $V_{s,0}(x) \lesssim V_{s,0}(y)$。□

我们还有如下次乘性性质。

引理 5.5。 序列 V_s 关于 s是次乘性的，即对于任意 $s, t > 0$,

$$V_{s+t} \leq V_s V_t.$$

证明。 取定 $x \in M$，并考虑 $B_\rho(x, 1)$ 的一个极大 $e^{-a(s+t)}$-分离子集 P。接着取 P 的一个极大 e^{-as}-分离子集 Q （注意，这本身是 $B_\rho(x, 1)$ 的一个 e^{-as}-分离子集）。于是，球 $B_\rho(y, e^{-as})$（ $y \in Q$）覆盖 P。随后可将每个 $z \in P$ 分配给包含它的某个球 $B_\rho(y, e^{-as})$。因此，对每个 $y \in Q$，我们都有 $B_\rho(y, e^{-as})$ 的一个 $e^{-a(s+t)}$-分离子集 Q_y，且每个 $z \in P$ 都属于某个 Q_y。由于 P 的基数为 $V_{s+t}(x)$,

$$\begin{aligned} V_{s+t}(x) &\leq \sum_{y \in Q} \sum_{z \in Q_y} 1 \\ &\leq \sum_{y \in Q} V_{s+t,s}(y) \\ &\leq V_s(x) V_{s+t,s} \\ &= V_s(x) V_t, \end{aligned}$$

最后一行用到了 (5.5)。先对右侧所有 $x \in M$ 取上确界，再对左侧取上确界，即得结论。□

对 $T \geq 0$ 定义：

$$d^T(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} d^M(f^t x, f^t y)$$

设 N_T 是度量 d^T 下 M 的最大 L 分离子集的基数，其中 $L \leq 1$；回顾一下，我们已对 M 上的度量进行了重新缩放，使得 M 中任意两点满足 $d^M(x, y) \leq 1$ 时，都包含在叶状结构 $\mathcal{W}^*$ 各自的一个叶状图中，因此特别地， M 中任意两点在流 f^t 作用下最终都会分离至距离 $> L$。于是，只要 L 足够小，无论选择何种 L，流 f^t 的拓扑熵都可以计算为

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log N_T = h_{\mathrm{top}}(f). \tag{5.7}$$

为简化记号，我们令 $h = h_{\mathrm{top}}(f)$。只要 L 小于 f^t 的膨胀常数的某个倍数，等式 (5.7) 就成立，参见 [12, 定理 4.2.19] （其中也给出了该极限存在的论证）。我们假设已固定选取了满足上述条件的 L。我们还将 L 取足够小，使得若 $\rho(x, y) = 1$

对于某个 $x \in M$, $y \in \mathcal{W}^u(x)$，则 $d^M(x,\ y) \geq L$。要证明这样的 L 存在，可以利用 M 的紧致性，也可以援引引理 2.20。选定这个 L 后，由类似的论证可知，必存在某个一致的 $l \geq 0$ （仅由 L 决定），使得若 $d^M(x,\ y) \geq L/2$，则 $\rho(x,\ y) \geq e^{-al}$。

引理 5.6. 我们有

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} \log V_s = \inf_{s>0} \frac{1}{s} \log V_s = h. \tag{5.8}$$

证明。由引理 5.5，序列 $\{\log V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 n 是次可加的。因此，根据 Fekete 引理，存在一个 $h_* \in \mathbb{R}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log V_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \log V_n = h_*.$$

由引理 5.3 的倍增性质可轻易推出，我们可以将上面的 $n \in \mathbb{N}$ 替换为 $s > 0$。因此，只需证明 $h_* = h$。

对于 $x \in M$ 和任意 $T > 0$，$B_\rho(x, 1)$ 中任意一个在 Hamenstädt 度量 ρ 下的 e^{-aT}-分离子集，都是度量 d^T 下 M 的 L-分离子集，这是由我们对 L 的选择所致。这是因为，对于任意一对点 y、$z \in B_\rho(x, 1)$，若 $\rho(y, z) \geq e^{-aT}$，则存在某个 t，使得 $0 \leq t \leq T$，且 $\rho(f^t y, f^t z) = 1$（根据 (2.15)），因此 $d^M(f^t y, f^t z) \geq L$。由此可得 $V_T(x) \leq N_T$。对 $x \in M$ 取上确界，即可得到每个 $T > 0$ 下的 $V_T \leq N_T$，进而推出 $h_* \leq h$。

另一方面，由于 M 的紧致性，我们可以用有限个 n 叶状结构盒 U_i 覆盖 M，这些叶状结构盒对应于叶状结构 $\mathcal{W}^u$，由 Hamenst¨adt 度量球 $B_i = B_\rho(x_i,1)$的中心点 x_i 构成，随后在局部由半径为$L/4$的 $\mathcal{W}^{cs}$叶中的球饱和。用符号表示，我们有

$$U_i = \bigcup_{y\in B_i} B^{cs}(y, L/4).$$

由于叶状结构 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^{cs}$ 彼此具有局部乘积结构[12, （第 6 章），2], 不难看出，正如所声称的，U_i 实际上是 M中的一个开邻域 x_i。

由于根据 (5.1)，f^t 在 $\mathcal{W}^{cs}$ 叶上不会扩张距离，因此我们看到，在 U_i 上，d^T 限制在每个球 $B^{cs}(y, L/4)$上时就是 d^M。因此，对于每个 $x \in U_i$，存在一点 $z \in B_\rho(x_i, 1)$，使得 $d^T(x, z) \leq L/4$，且与 T的取值无关。我们得出结论：对于固定的 T，如果 $\{y_{ij}\}$ 是 d^T在球 $B_\rho(x_i, 1)$中的点所构成的一个极大 $L/4$-分离集，那么以这些 y_{ij} 为中心、半径为 $L/4$ 的 d^T-球覆盖 U_i。令 k_i 表示每个集合 $\{y_{ij}\}$ 的基数（当 j 变化时），并设 $k = \sum_{i=1}^n k_i$，我们得出结论：M 可以由半径为 $L/2$的 k d^T-球覆盖。这意味着 $N_T \leq k$，回忆一下，N_T 是度量 d^T下 M 中 L-分离子集的最大基数。

另一方面，对于任意 $x \in M$以及任意 $y, z \in B_\rho(x, 1)$，若 $d^T(y, z) \geq L/2$，则

$$\sup_{0\leq t\leq T} d^M(f^t y, f^t z) \geq \frac{L}{2}.$$

但由于 f^t在 $\mathcal{W}^u(x)$ 上一致扩张，量 $d^M(f^t y, f^t z)$ 是 t 的递增函数。因此我们得出

$$d^M(f^T y, f^T z) \geq \frac{L}{2}$$

因此，根据我们在引理陈述之前对 L 和 l 的选择，

$$\rho(f^T y, f^T z) \geq e^{-al}.$$

这意味着 $\rho(y,\ z) \geq e^{-a(l+T)}$。由此可知，$\{y_{ij}\}$ 是度量 ρ 下 $B_\rho(x_i,\ 1)$ 中的一个 $e^{-a(l+T)}$-分离子集，因此其基数为 $k_i \leq V_{l+T}$。对所有 i 求和可得 $N_T \leq nV_{l+T}$。由于 l 和 n 都独立于 T，因此直接得到 $h \leq h_*$，从而完成证明。□

从目前为止的工作可以直接看出，每个度量空间 $(\mathcal{W}^u(x),\ \rho_x)$ 的豪斯多夫维数都是 h/a。我们希望将最大熵测度的条件测度取为每个叶 $\mathcal{W}^u(x)$ 上的 h/a 维豪斯多夫测度 ρ_x。然而，极限 (5.8) 本身并未提供足够的信息，无法确保这些豪斯多夫测度具有理想的性质，例如在球上有限且为正。为获得这些额外信息，我们可以采用第3节和第4节中的构造。

对于 $p \in M$，我们令 μ_p 为扩张锥 $\mathcal{X}_p = \widetilde{\mathcal{W}^{cu}(p)}$ 上的黎曼体积，具体如本小节开头所述。注意，若 $q \in \mathcal{W}^{cu}(p)$，则 $\mu_p = \mu_q$。我们用 μ_p^u 表示 $\mathcal{W}^u(p)$ 上的黎曼体积。对于 $\sigma > 0$，我们按照 (4.3) 中的定义，利用 b_p 定义 $\mu_{\sigma,\ p}$。

最后定义 $\sigma > 0$,

$$G(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} V_t \, dt. \tag{5.9}$$

于是，G 关于 σ 单调递减，因此当 $\sigma \to h$ 从上方趋近时单调递增。从 (5.8) 可知，$G(\sigma) < \infty$ 当且仅当 $\sigma > h$，因此当 $\sigma \to h$时，$G(\sigma) \to \infty$。我们强调，这一断言需要利用 Fekete 引理给出的 $h = \inf_{t>0} t^{-1} \log V_t$ 描述，以获得所需的发散性 $G(h) = \infty$。

对于涉及 $\sigma > h$ 的常数，如果当 $\sigma \to h$ 时它们始终有界且远离零，我们就将其视为隐式常数（更准确地说，视为 $\asymp h$）。量 $G(\sigma)$ 概括了常数中当 $\sigma \to h$ 时趋于无穷的例外部分。我们指出，G 是函数 $t \to V_t$ 的拉普拉斯变换。

为简化接下来几个断言中的记号，我们省略 $\mu_\sigma = \mu_{\sigma,p}$ 和 $\mu = \mu_p$ 中的下标 x，以及扩张锥 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_p$ 和高度函数 $b = b_p$ 的下标。为清楚起见，我们会在各断言的表述中补上这些下标。回顾定义 (3.9)：扩张锥的一致化中锥 $\mathcal{C}$ 的定义。在本引理及后续内容中，为便于我们使用紧致性论证，我们将开球和锥改为闭球和锥。由 Ψ_x 映射的连续性，显然可得

$$\bar{\mathcal{C}}(x,r) := \overline{\mathcal{C}(x,r)} = \bigcup_{t>0} f^t(\bar{B}_\rho(x,r)) \cup \Psi_x(\bar{B}_\rho(x,r)),$$

正如我们所预期的，闭包取于一致化 $\mathcal{X}_b$，而 $B_\rho(x,\ r)$ 是 Hamenstädt 度量 ρ_x 下半径为 r 的闭球。对于 $T > 0$，我们还引入截断锥

$$\bar{\mathcal{C}}_T(x,r) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} f^t(\bar{B}_\rho(x,r))$$

引理 5.7。对于每个 $x \in \mathcal{X}_p$ 和 $\sigma > 0$，我们都有

$$\mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}(x,1)) \asymp e^{-\sigma b(x)} G(\sigma). \tag{5.10}$$

隐含常数与 σ无关，并且在(5.10)中一侧为无穷大，当且仅当另一侧也为无穷大。

证明。由于用于定义 (4.3) 中 μ_σ 的密度在 $\mathcal{X}$ 的叶状结构$\mathcal{W}^u$ 的各叶上为常数，我们有

$$\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}_T(x,1)) = \int_0^T e^{-\sigma(b(x)+t)} \mu^u_{f^t x}(B_\rho(f^t x, e^{at}))\, dt.$$

这里我们利用了如下事实：扩张锥的分裂 $T\mathcal{X} = E^u \oplus E^c$ 是正交的，因此黎曼体积 μ 也正交分解为沿 f^t 的流线 dt的弧长，以及在 $\mathcal{W}^u$的叶上 μ^u 的部分。

¯量 $\mu^u_p(B_\rho(p,\ 1))$ 对 $p \in M$为正，且随 p连续变化。因此，由于 M的紧致性， $\mu^u_p(B_\rho(p,$ 1)) $\asymp_C 1$，其中某个一致常数 $C \geq 1$ 将在后续表达式中作为隐含常数。用同样的推理，我们¯有 $\mu^u_p(B_\rho(p,\ 1/2)) \asymp 1$。

固定 $t \geq 0$，令 $\{x_i\}_{i=1}^N$为 $\bar{B}_\rho(f^t x, e^{at})$的一个极大 1-分离子集，令$\{y_i\}_{i=1}^{N'}$为 $\bar{B}_\rho(f^t x,$ $\frac{1}{2}e^{at})$的一个极大 $1/2$-分离子集。于是，由(5.3)和引理 5.3 可得 $N \asymp V_t \asymp N'$，其隐含常数与 t无关，因为 $\bar{B}_\rho(f^t x, e^{at})$的极大 1-分离子集与 $\bar{B}_\rho(x, e^{al})$的极大 e^{-at}-分离子集具有相同的基数（将 1 替换为 $1/2$ 时也同样成立）。闭球 $\bar{B}_\rho(x_i, 1)$ 覆盖 $\bar{B}_\rho(f^t x, e^{at})$，而闭球$\bar{B}_\rho(y_i,$ $1/2)$覆盖 $\bar{B}_\rho(f^t x, \frac{1}{2}e^{at})$，并且包含于 $\bar{B}_\rho(f^t x, e^{at})$之内，因为 $e^{at} \geq 1$。我们由此得出

$$\mu^u_{f^t x}(\bar{B}_\rho(f^t x, e^{at})) \asymp V_t$$

对于每个 $x \in M$ 和 $t \geq 0$。因此

$$\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}_T(x,1)) \asymp e^{-\sigma b(x)} \int_0^T e^{-\sigma t} V_t\, dt.$$

由于两边关于 T 都是单调递增的，我们可以令 $T \to \infty$，从而得到

$$\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(x,1)) \asymp e^{-\sigma b(x)} \int_0^\infty e^{-\sigma t} V_t\, dt,$$

同时注意到两边都可能为无穷大。这就得到了（5.10）。 □

¯我们将引理 5.7 扩展到锥 $\mathcal{C}$（$x,\ r$），其中 $r \neq 1$，如下所示。为清晰起见，我们在陈述中将情形 $l \geq 0$ 和 $l \leq 0$ 分开。

引理 5.8。对于每个 $x \in \mathcal{X}_p$、$\sigma > 0$ 和 $l \geq 0$，我们有

$$\mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{al})) + \mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}_l(f^{-l}x, 1)) \asymp e^{-\sigma(b(x)-l)} G(\sigma), \tag{5.11}$$

对于 $l \leq 0$，以及

$$\mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{al})) - \mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}_{-l}(x, e^{al})) \asymp e^{-\sigma(b(x)-l)} G(\sigma). \tag{5.12}$$

隐含常数与 σ无关，而且在(5.11) 和(5.12) 中，一边无穷大当且仅当另一边也无穷大。因此，对于 $x \in \mathcal{X}_p$和 $l \in \mathbb{R}$，我们有$\mu_{\sigma,\ p}(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{al})) < \infty$ 当且仅当 $\sigma > h$，并且$\mu_{\sigma,\ p}(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{al})) \to \infty$ 当 $\sigma \to h$ 时。

证明。(5.11) 和 (5.12) 的左端分别就是 $\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(f^{-l}x,\ 1))$，因为 μ_σ 对 $\mathcal{X}$ 内的每个不稳定叶 $\mathcal{W}^u(y)$ 都赋予零测度。由此，所需的比较关系可由 (5.10) 和 $b(f^{-l}x) = b(x) - l$ 得出。最后的断言则由上文讨论的 G 的性质，以及 (5.11) 和 (5.12) 左端的第二项在 $\sigma \to h$ 时保持有界这一事实得出（事实上，在第一种情形下它收敛到 $\mu_h(\bar{\mathcal{C}}_l(f^{-l}x,\ 1))$，在第二种情形下则收敛到 $\mu_h(\bar{\mathcal{C}}_{-l}(x,\ e^{al}))$）。□

现在我们可以证明定理1.3。首先，我们将仔细讨论重整化过程，然后再将其用于证明下文的命题 5.9，从而完成定理1.3的证明。

对于 $\sigma > h$、$l \in \mathbb{R}$ 和 $x \in \mathcal{X}$，我们在 $\mathcal{X}_b$ 上定义归一化测度，

$$\check{\mu}_{\sigma,l,x} = e^{\sigma l}(\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{al})))^{-1}\mu_\sigma|_{\bar{\mathcal{C}}(x,e^{al})}, \tag{5.13}$$

其支撑于 $\bar{\mathcal{X}}_b$ 中的闭锥 $\bar{\mathcal{C}}(x,\ e^{al})$，且总质量为 $e^{\sigma l}$。固定 $x \in \mathcal{X}$ 和 $l \in \mathbb{R}$，根据具有共同紧支撑的概率测度的弱*紧性（此处应用于概率测度 $e^{-\sigma l}\check{\mu}_{\sigma,\ l,\ x}$），我们可以找到一个序列 $\sigma_n \to h$，使测度 $\check{\mu}_{\sigma_n,\ l,\ x}$ 在弱*拓扑下收敛到测度 $\theta_{l,\ x}$，其支撑于$\bar{\mathcal{C}}(x,\ e^{al})$。由引理 5.8，既然当 $\sigma \to h$ 时，$\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(x,\ e^{al})) \to \infty$，我们有

$$\check{\mu}_{\sigma,l,x}\left(\bigcup_{0\le t\le T}\bar{B}_\rho(f^t x, e^{a(t+l)})\right) \to 0, \tag{5.14}$$

对于每个 $T > 0$，均有 $\sigma \to h$。因此，$\theta_{l,\ x}$ 实际上完全支撑于 $\bar{\mathcal{C}}_*(x,\ e^{al}) = \bar{\mathcal{C}}(x,\ e^{al}) \cap \partial\mathcal{X}_b$。此外，由于 $\check{\mu}_{\sigma,\ l,\ x}$ 的总质量为 $e^{\sigma l}$，令 $\sigma \to h$，即可推出 $\theta_{l,\ x}$ 的总质量为 e^{-hl}。

现在我们专门讨论 $b(x) = 0$ 的情形。由引理 5.8 可知，对于任意 $k,\ l \in \mathbb{R}$,$x \in \mathcal{X}$ 和 $y \in \mathcal{W}^u(x)$，我们有

$$\limsup_{\sigma\to h}\frac{e^{-\sigma k}\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(x, e^{ak}))}{e^{-\sigma l}\mu_\sigma(\bar{\mathcal{C}}(y, e^{al}))} \lesssim 1, \tag{5.15}$$

因为当 $\sigma \to h$ 时，$G(\sigma) \to \infty$，且 (5.11) 和 (5.12) 左侧的附加项在 $\sigma \to h$ 时保持有界。通过将对 $(x,\ k)$ 与对 $(y,\ l)$ 互换，(5.15) 中隐含了带下极限的反向不等式。回顾 $\check{\mu}_{\sigma,\ l,\ x}$ 的定义 (5.13)，对 (5.15) 取倒数可得：若 $\varphi : \mathcal{X}_b \to \mathbb{R}$ 是一个支撑在 $\bar{\mathcal{C}}(x,\ e^{ak}) \cap \bar{\mathcal{C}}(y,\ e^{al})$ 上的连续函数，则

$$\limsup_{\sigma\to h}\int_{\bar{\mathcal{X}}_b}\varphi\, d\check{\mu}_{\sigma,k,x} \lesssim \int_{\bar{\mathcal{X}}_b}\varphi\, d\check{\mu}_{\sigma,l,y}, \tag{5.16}$$

因为在 φ 的支撑集上，测度 $\check{\mu}_{\sigma,\ k,\ x}$ 与 $\check{\mu}_{\sigma,\ l,\ y}$ 仅相差一个常数乘法因子，而该因子由 (5.15) 控制，当 $\sigma \to h$ 时成立。

现在假设沿某些子序列（这些子序列不必相同）有弱*收敛 $\check{\mu}_{\sigma_n,k,x} \rightharpoonup \theta_{k,x}$ 和 $\check{\mu}_{\sigma_{n'},l,\ y} \rightharpoonup \theta_{l,y}$，并利用极限必定支撑在 $\partial\mathcal{X}_b$ 上这一事实，我们得到估计

$$\int_{\partial\mathcal{X}_b}\varphi\, d\theta_{l,y} \asymp \int_{\partial\mathcal{X}_b}\varphi\, d\theta_{k,x}, \tag{5.17}$$

只要$\theta_{k,\ x}$ 和 $\theta_{l,\ y}$ 分别是 $\check{\mu}_{\sigma,\ k,\ x}$ 和 $\check{\mu}_{\sigma,\ k,\ y}$ 的某些子序列的弱*极限，并且 $\sigma \to h$ 和 φ 支撑在 $\bar{\mathcal{C}}(x, e^{ak}) \cap \bar{\mathcal{C}}(y, e^{al})$ 上，该结论便成立。由于任意一个支撑在 $\bar{\mathcal{C}}_*(x, e^{ak}) \cap \bar{\mathcal{C}}_*(y, e^{al})$ 上的 $\partial\mathcal{X}_b$ 上的连续函数 φ_*，都可以表示为支撑在 $\bar{\mathcal{C}}(x, e^{ak}) \cap \bar{\mathcal{C}}(y, e^{al})$ 上的 $\bar{\mathcal{X}}_b$ 上某个连续函数φ的限制，因此我们得出，对于任何支撑在 $\bar{\mathcal{C}}_*(x, e^{ak}) \cap \bar{\mathcal{C}}_*(y, e^{al})$ 上的连续函数 φ：$\partial\mathcal{X}_b \to \mathbb{R}$，(5.17) 均成立。

我们来考察 $y = x$ 和 $k \le l \in \mathbb{N}$的情形下的 (5.17)。此时可得

$$\int_{\partial\mathcal{X}_b}\varphi\, d\theta_{l,x} \asymp \int_{\partial\mathcal{X}_b}\varphi\, d\theta_{k,x}, \tag{5.18}$$

对于任意一个支撑于 $\bar{\mathcal{C}}_*(x, e^{ak})$ 上的连续函数 φ。我们将 $\{\theta_{l,x}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 视为 $C_c(\partial\mathcal{X}_b)$ 上的一列正线性泛函，其中 $C_c(\partial\mathcal{X}_b)$ 是 $\partial\mathcal{X}_b$ 上紧支撑连续函数构成的空间。我们注意到，这列泛函逐点有界：对于任意选取的$\varphi \in C_c(\partial\mathcal{X}_b)$，当 k 足够大时，都有 $\operatorname{supp}\varphi \subset \bar{\mathcal{C}}_*x, e^{ak})$，此时 (5.18) 对任意 $k \le l$ 都给出所需的界。因此，根据季赫诺夫定理，序列 $\{\theta_{l,x}\}_{l\in\mathbb{N}}$ 在 $C_c(\partial\mathcal{X}_b)$ 上线性泛函的逐点收敛拓扑中是预紧的。令θ_x 表示该序列的任意一个极限点；它同样是 $C_c(\partial\mathcal{X}_b)$ 上的正线性泛函，因而根据黎斯表示定理，在 $\partial\mathcal{X}_b$ 上定义了一个博雷尔测度。测度 θ_x 由如下性质定义：存在某个序列 $n_k \to \infty$ 使得

$$\int_{\partial\mathcal{X}_b} \varphi \, d\theta_{n_k,x} \to \int_{\partial\mathcal{X}_b} \varphi \, d\theta_x,$$

对于每个 $\varphi \in C_c(\partial\mathcal{X}_b)$。对于任何其他具有相关极限点 $y \in \mathcal{W}^u(x)$ 的 $\theta_{m_k,\,y} \to \theta_y$ 我们注意到，对于任意给定的 $\varphi \in C_c(\mathcal{X}_b)$，一旦 $\varphi \subset \mathcal{C}_*(x,\ e^{an_k})$ 足够大，我们将有 $\operatorname{supp} \cap \mathcal{C}_*(y,\ e^{am_k})$ k。因此，在极限情况下 (5.17) 成立，从而得到

$$\int_{\partial\mathcal{X}_b} \varphi \, d\theta_y \asymp \int_{\partial\mathcal{X}_b} \varphi \, d\theta_x, \tag{5.19}$$

对于任意 $\varphi \in C_c(\partial\mathcal{X}_b)$。

我们将 (5.19) 总结如下：给定同一空间上的两个测度 μ 和 ν，我们记作$\mu \asymp_K \nu$，如果 μ 与 ν 等价，且拉东-尼科迪姆导数满足 $d\mu/d\nu \asymp_K 1$。然后由 (5.19) 可得，对于 $y \in \mathcal{W}^u(x)$，有 $\theta_x \asymp \theta_y$。

度量测度空间 $(X,\ d,\ \mu)$ 对某个指数 $Q > 0$ 和常数 $C \ge 1$ 是阿尔福斯 Q-正则的，如果对任意 $x \in X$ 和 $r > 0$，都有

$$\mu(B(x,r)) \asymp_C r^Q. \tag{5.20}$$

阿尔福斯 Q-正则度量测度空间的豪斯多夫维数为 Q，且 X 上的 Q-豪斯多夫测度与 μ一致等价。若度量空间 $(X,\ d)$ 配备其 Q-豪斯多夫测度后成为阿尔福斯 Q-正则度量测度空间，则称其为阿尔福斯Q-正则。

命题 5.9。对每个 $x \in M$，$\mathcal{W}^u(x)$ 上的 *Hamenstädt* 度量 ρ_x 都是阿尔福斯 h/a-正则的，其常数 K 与 x 无关。h/a-豪斯多夫测度 ν_x 满足

$$f_*^t \nu_x = e^{ht} \nu_{f^t x}, \tag{5.21}$$

对每个 $x \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$。

证明。对于 $y \in \mathcal{W}^u(x)$，在 $\partial\mathcal{X}_b$ 上构造的测度 $\theta_{y,\,l}$ 根据构造总质量为 e^{hl}。由于根据 (5.17) 的极限情形 $k \to \infty$，有 $\theta_{y,\,l} \asymp \theta_x|_{\bar{\mathcal{C}}_*(y,\ e^{al})}$，我们得出$\theta_x(\bar{\mathcal{C}}_*(y,\ e^{al})) \asymp e^{hl}$。由带有 $r = e^{al}$ 的估计 (3.11)（注意，这不需要引理对 r 所施加的条件），存在常数 $K = K(a,\ A) \ge 1$，使得

$$\bar{\mathcal{C}}_*(y, K^{-1}e^{al}) \subset \bar{B}_*(\bar{y}, e^{al}) \subset \bar{\mathcal{C}}_*(y, Ke^{al}),$$

令 $r = e^{al}$，即可得到，

$$\theta_x(\bar{B}_*(\bar{y}, r)) \asymp r^{h/a}.$$

由于 $\bar{y} \in \partial\mathcal{X}_b$ 是任意的，我们得出度量空间 $(\partial\mathcal{X}_b,\ d_b)$ 是 Ahlfors h/a-正则的，其常数 C 与 x 无关，并且 h/a-豪斯多夫测度与 θ_x 一致等价。因此，利用命题 3.3 中的双利普希茨同胚 $\Psi_x : \mathcal{W}^u(x) \to \partial\mathcal{X}_b$，我们得出度量空间 $(\mathcal{W}^u(x)\ \rho_x)$ 是 Ahlfors h/a-正则的，其常数同样

C 与 x 无关。由此， h/a-豪斯多夫测度的缩放关系 (5.21) 立即由 (2.15) 得出。□

这就完成了定理1.3证明的核心部分。作为命题 5.9的推论，我们得到乘法渐近关系

$$V_t \asymp e^{ht}. \tag{5.22}$$

因此，对于 $\sigma > h$,

$$G(\sigma) \asymp \int_0^\infty e^{(h-\sigma)t}\, dt = \frac{1}{\sigma - h},$$

这表明当 $v > 0$ 较小时， $G(h+v) \asymp v^{-1}$，从而得到 $G(\sigma)$到 ∞ as $\sigma \to h$ 的乘法发散速率，并对锥 $\mathcal{C}$ 在引理5.7和5.8中的 μ_σ-测度施加相应的速率估计。

由于 cs-全纯映射在 Hamenst¨adt 度量下是局部双利普希茨的，因此很容易证明， cs-全纯映射关于豪斯多夫测度 ν_x是绝对连续的。

命题 5.10。 如果 $U \subset \mathcal{W}^u(x)$、 $V \subset \mathcal{W}^u(y)$ 是具有紧闭包的开子集，并且存在一个 cs-全纯同胚 h^{cs}： $U \to V$，那么 $h^{cs}_*(\nu_x|_U) \asymp_K \nu_y|_V$，其中$K = K_R$ 仅取决于 $R =$ 上确界$_{x\in U}\, d^{cs}(x, h^{cs}(x))$ 以及 $K_R \to 1$ *as* $R \to 0$。

证明。 令 $R = \sup_{x\in U} d^{cs}(x, h^{cs}(x))$。由引理 5.1 可知，存在常数 $K = K_R$（其中 $K_R \to 1$ 取作 $R \to 0$），使得全纯映射 $h^{cs}: U \to V$ 在 Hamenstädt 度量下局部为 K-双利普希茨映射。由于 $\nu_x|_U$ 和 $\nu_y|_V$ 分别是 (U, ρ_x) 和 (V, ρ_y) 上的 h/a 维豪斯多夫测度，这意味着 $h^{cs}_*(\nu_x|_U) \asymp \nu_y|_V$，其比较常数可由 K 明确确定。□

我们通过沿流线解体来定义 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 上的 ***Margulis***测度 m_x，

$$dm_x(y) = d\nu_{f^t x}(y)dt, \tag{5.23}$$

注意，对于 $y \in \mathcal{W}^{cu}(x)$，以及任意 $t \in \mathbb{R}$，缩放关系 (5.21) 蕴含如下缩放关系： $m_x = m_y$

$$f^t_* m_x = e^{ht} m_{f^t x} = e^{ht} m_x. \tag{5.24}$$

我们还可由 (5.21) 得知， m_x 不是乘积测度：如果按相反顺序积分，最终得到的密度为

$$dm_x(y) = e^{ht} dt\, d\nu_x(y), \tag{5.25}$$

其中 $y \in \mathcal{W}^u(x)$。

接下来我们考虑 s-全纯映射 $h^s: \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(x) \to \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y)$、 $y \in \mathcal{W}^s_{\mathrm{loc}}(x)$。我们注意到，轨道之间的 s-全纯映射 h^s： $\mathcal{W}^c_{\mathrm{loc}}(x) \to \mathcal{W}^c_{\mathrm{loc}}(y)$ 是 C^r；事实上，它们是等距且保定向的。根据我们对$\mathcal{W}^{cu}(x)$的描述（因此，通过取逆 f^{-t}，也能得到对 $\mathcal{W}^{cs}(x)$ 的描述），并利用 s-全纯是保高度的这一事实，便可直接看出这一点。

若我们考虑 Hamenst¨adt 球经$d^s(x, y) \le 1$和 $0 < r \le 1$得到的 s-全纯像 $h^s: B_\rho(x, r) \to \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y)$，那么，沿着 f^t 的流线将 $P_y(h^s(B_\rho(x, r))$ 投影到 $\mathcal{W}^u(y)$ 上，所得投影与 cs- 全纯映射 h^{cs}: $B_\rho(x, r) \to \mathcal{W}^u_{\mathrm{loc}}(y)$ 重合。引理 5.1 表明， h^{cs} 在 Hamenst¨adt 度量下是双利普希茨的，因此特别是单射。因此， P_y: $h^s(B_\rho(x, r) \to \mathcal{W}^u(y)$ 是单射，所以我们可以将 $h^s(B_\rho(x, 1))$ 视为其在 $\mathcal{W}^u(y)$ 上的投影的图像。

注意到这些性质后，我们可以证明以下命题。

命题 5.11. 如果 $U \subset \mathcal{W}^{cu}(x)$、$V \subset \mathcal{W}^{cu}(y)$ 是开子集，并且存在一个稳定的¯ ¯全纯同胚 $h^s : U \to V$，那么 $h^s_*(m_x|_U) = m_y|_V$。

证明。我们从特殊情形开始

$$U = \bigcup_{t\in(-v,v)} f^t(B_\rho(x,r)), \tag{5.26}$$

满足 $0 < r,\ v \le 1$，并且 $d^s(z,\ h^s(z)) \le R$ 对某个 $0 < R \le 1$ 及所有 $z \in U$成立。根据命题陈述之前的讨论，U 的 s-全纯像 V 具有如下形式

$$V = \bigcup_{t\in(-v,v)} f^t(h^s(B_\rho(x,r))),$$

因为 s-全纯在流线上是等距的。令 $Q = P_y(h^s(B_\rho(x,\ r)))$，我们看到存在连续函数 $\psi : Q \to \mathcal{W}^c(y)$，使得可以将 V 写成 ψ的图像的平移之间的区域，

$$V = \{(z,t) \in \mathcal{W}^{cu}_{\mathrm{loc}}(y) : z \in Q, \psi(z) - v \le t \le \psi(z) + v\},$$

其中，局部坐标由 $\mathcal{W}^{cu}(y)$ 中 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^c$ 的局部乘积结构给出，因此我们取 $z \in \mathcal{W}^u_{\mathrm{loc}}(y)$、$t \in \mathcal{W}^c_{\mathrm{loc}}(y) \cong [-T,T]$。由于投影 $P_y = f^{-t}:\mathcal{W}^u(f^t y) \to \mathcal{W}^u(y)$ 将测度 $\nu_{f^t y}$ 映射为 $e^{-ht}\nu_y$，如同 (5.25) 中那样，我们可以计算 V 的m_y-测度：

$$\begin{aligned} m_y(V) &= \int_Q \int_{\psi(z)-v}^{\psi(z)+v} e^{ht}\, dt d\nu_y(z) \\ &= h^{-1} \int_Q e^{h(\psi(z)+v)} - e^{h(\psi(z)-v)}\, d\nu_y(z). \end{aligned}$$

另一方面，对 U 进行相同的计算可得

$$m_x(U) = h^{-1}(e^{hv} - e^{-hv})\nu_x(B_\rho(x,r)).$$

通过类似于引理 5.1 末尾所用的论证，我们看到，在此构形中，当 $R \to 0$ 时，函数 ψ 必须一致收敛到零映射 $\psi(z) = 0$。同样，由命题 5.10 可知，当 $R \to 0$ 时，投影 Q 的 ν_y-测度将一致收敛到 $\nu_x(B_\rho(x,\ r))$。将这些事实与上面的公式结合起来，我们看到，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得若 $R < \delta$，则

$$m_x(U) \asymp_{1+\varepsilon} m_y(V),$$

其中 U 对某个 $0 < r,\ v \le 1$ 具有形式 (5.26)，并且对所有 $z \in U$，我们有 $d^s(z,\ h^s(z)) \le R$。由于形如 (5.26) 的集合 U 构成任意开集 $W \subset \mathcal{W}^{cu}(x)$ 中每一点的邻域基，我们得出结论：若给定 $\varepsilon > 0$，且对于某个 $R < \delta$ 及所有 $z \in W$，有 $d^s(z,\ h^s(z)) \le R$，则

$$h^s_*(m_x|_W) \asymp_{1+\varepsilon} m_y|_{h^s(W)}. \tag{5.27}$$

现在，设 U 和 V 如命题所述。显然，只需证明在 U 在 $\mathcal{W}^{cu}(x)$ 中有紧闭包时该结论成立，因为我们可以用在 U 中有紧闭包的开子集 U_i 穷尽 U，从而推广到一般情形。于是$L = \sup_{z\in U} d^s(z,\ h^s(z))$ 是有限的，因此给定任意 $\varepsilon > 0$，我们可以选取 $\delta > 0$，使得对于距离 $R < \delta$，(5.27) 成立。然后，由于 f^t 一致收缩稳定叶状结构 $\mathcal{W}^s$，我们可以将 $T > 0$ 取得足够大，使得

$$\sup_{z\in U} d^s(f^T(z), f^T(h^s(z))) = \sup_{z\in U} d^s(f^T(z), h^s(f^T(z))) < \delta.$$

因此，由 (5.27) 可得

$$h_*^s(m_{f^T x}|_{f^T(U)}) \asymp_{1+\varepsilon} m_{f^T y}|_{f^T(V)}.$$

但根据 (5.24)，我们便有

$$h_*^s(m_x|_U) \asymp_{1+\varepsilon} m_y|_V.$$

由于这对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们可以令 $\varepsilon \to 0$，从而完成证明。 □

既已确立 Margulis测度 m_x、 $x \in M$ 的这些性质，我们可以将它们分别记为 m_x^u 和 ν_x^u，再用 f^t 替换 f^{-t}，得到定义在 $\mathcal{W}^{cs}(x)$ 和 $\mathcal{W}^s(x)$ 上的相应测度 m_x^s 和 ν_x^s，其缩放律分别为 $f_*^t m_x^s = e^{-ht} m_{f^t x}$ 和 $f_*^t \nu_x^s = e^{-ht} \nu_{f^t x}^s$。这里我们用到了这样一个事实：流 f^t 的逆流 f^{-t} 具有相同的拓扑熵 $h_{\mathrm{top}}(f) = h_{\mathrm{top}}(f^{-1})$。由于这些测度与 Margulis构造中的 Margulis测度具有完全相同的性质，我们可以用标准方法局部地将最大熵测度构造为乘积测度；例如，可以从引理 8.6.17 开始，参照 [12, 第 8 章6]。这种构造广为人知，因此这里不再详述。

现在回到第 4 节中配有测度 $\mu_{\sigma,p}$ 的扩张锥$\mathcal{X}_p$, $\sigma > h$这一情形，并且现在还知道 $V_t \asymp e^{ht}$。由 M的紧致性可知，对于 $x \in M$，配备 $\mathcal{W}^{cu}(x)$上的黎曼叶度量的球 $(B^{cu}(x, 1)\ d_x^{cu})$ 均与 $\mathbb{R}^n$ 中的标准欧几里得单位球 L-双利普希茨等价，其中 L 与 x 无关。因此，根据引理 4.8 陈述之前的讨论，我们得出度量测度空间 $(\mathcal{X}_p, d_p, \mu_p)$ 一致地局部倍增，并且满足一致的局部 Poincar´e 不等式，其常数和半径均与 p 无关。由此我们可以证明定理 1.5。

定理 *1.5* 的证明。 对于每个 $x \in \mathcal{X}_p$，我们应用引理 5.8，并选取 $l \geq 0$ 使得$e^{al} = L'$，其中 $L' = L(a, A)$ 是命题4.6中的常数，从而 $l = l(a, A)$。于是由 (5.11) 得

$$\mu_{\sigma,p}(\bar{\mathcal{C}}(x, L)) \lesssim e^{-\sigma b(x)} G(\sigma),$$

由于 (5.11) 左侧的第二项为正，且 $G(\sigma) < \infty$ 因为 $\sigma > h$。由于通过紧致性，对所有 $x \in M$，我们有一致估计 $\mu_x(B^{cu}(x,\ 1)) \asymp 1$，因此可得估计 (4.12) 对某个与 $G(\sigma)$ 成正比的一致常数 K 成立。于是由命题4.6 得出，度量空间 $(\mathcal{X}_{b,\ p},\ d_{b,\ p},\ \mu_{\sigma,\ p})$ 满足倍增条件，且具有一致的¯倍增常数。进而由命题4.10 可知，$(\mathcal{X}_{b,\ p},\ d_p,\ \mu_{\sigma,\ p})$ 满足 Poincar´é 不等式，其常数仅取决于 σ，且依赖关系通过 $G(\sigma)$ 给出。□

定理 1.5 的结论无法推广至 $\sigma = h$。事实上，命题 3.6 表明，对任意 $\xi \in \partial\mathcal{X}_b$ 和 $r > 0$，$\mu_h(B_b(\xi,\ r)) = \infty$，因为根据乘法渐近关系 (5.22)，对任意 $x \in \mathcal{X}_p$ 和 $r > 0$，$\mu_h(\mathcal{C}_\infty(x,\ r)) = \infty$。因此，$\mu_h$ 对以 $\mathcal{X}_b$ 的边界点为中心的任意球赋予无限测度¯，这使得 μ_h 无法在 $\mathcal{X}_b$ 上满足任何形式的倍增条件¯，甚至无法在 $\mathcal{X}_b$ 上满足。

References

[1] Anders Bj¨orn、JanaBj¨orn 和 Nageswari Shanmugalingam。有界几何与一致化和双曲化下的 p-调和函数。 *J. Geom. Anal.*，31(5):5259–5308，2021。[2] Anders Bj¨orn、Jana Bj¨orn 和 Nageswari Shanmugalingam。倍增度量测度空间及其双曲填充的延拓与迹结果。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，159:196–249，2022。[3] M. Bonk、J. Heinonen 和 P. Koskela。Gromov 双曲空间的一致化。 *Astérisque*，(270):viii+99，2001。[4] R. Bowen。双曲流的符号动力系统。 *Amer. J. Math.*，95:429–460，1973。

[5] C. Butler。Gromov 双曲空间上一致化测度的倍增性质与 Poincar´e 不等式。arXiv:2101.03092。[6] C. Butler。利用布塞曼函数一致化 Gromov 双曲空间。2020。arXiv:2007.11143。[7] Clark Butler。根据李雅普诺夫谱刻画对称空间。arXiv:1709.08066，已投稿。[8] Clark Butler。非紧倍增空间的延拓与迹定理。2021。arXiv:2009.10168。[9] Sergei Buyalo 和 Viktor Schroeder。 *Elements of asymptotic geometry*。EMS 数学专著。欧洲数学会（EMS），Z¨urich，2007。[10] Vaughn Climenhaga、Yakov Pesin 和 Agnieszka Zelerowicz。通过几何测度论研究动力系统中的平衡态。 *Bull. Am. Math. Soc.， New Ser.*，56(4):569–610，2019。[11] Vaughn Climenhaga、Yakov Pesin 和 Agnieszka Zelerowicz。若干部分双曲系统的平衡测度。 *J. Mod. Dyn.*，16:155–205，2020。[12] Todd Fisher 和 Boris Hasselblatt。 *Hyperbolic flows*。Zur. Lect. Adv. Math. 柏林：欧洲数学会（EMS），2019。[13] ´E. Ghys 和 P. de la Harpe，编。 *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*， *Progress in Mathematics*第83卷。Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990。收录了1988年在伯尔尼举行的瑞士双曲群研讨会论文。[14] U. Hamenst¨adt。Bowen-Margulis测度的新描述。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，9 3 455 464，1989 ( ): – 。[15] B. Hasselblatt。阿诺索夫流的 Margulis 测度的一种新构造。 *Ergodic Theory Dynam.*， ( ): *Systems* 9 3 465 468, 1989 – 。[16] J. Heinonen。 *Lectures on analysis on metric spaces*。Universitext。Springer-Verlag，纽约，2001。[17] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T.Tyson。 *Sobolev spaces on metric measure spaces* 27 *New Mathematical Monographs* ，第 卷，。剑桥大学出版社，剑桥，2015。基于上梯度的方法。[18] E. Heintze 和 H.-C. Im Hof。horosphere 的几何。 *J. Differential Geom.*，12(4):481–491 (1978)，1977。[19] Wilhelm Klingenberg。测地流为阿诺索夫型的黎曼流形。 *Ann. Math. (2)*，99:1–13，1974。[20] Thibault Lefeuvre。双曲动力学与几何中的微局部分析。 *Cours spécialisés of the SMF* 。即将出版。[21] G. A. Margulis。与紧流形上的 U-流相关的某些测度。 *Funkcional.*， ( ): *Anal. i Prilož en.* 4 1 62 76, 1970 – 。[22] Fr´ed´eric Paulin 、 Mark Pollicott 和 Barbara Schapira。 *Equilibrium states in negative curvature*， *Astérisque*第373卷。巴黎：法国数学会（SMF），2015。[23] Thomas Roblin。 *Ergodicité et équidistribution en courbure négative* 95 *Mém. Soc. Math.*，第 *Fr. Nouv. Sér.* 2003 卷，法国数学会（ SMF ），巴黎，。[24] Qingshan Zhou 、 Saminathan Ponnusamy 和 Antti Rasila。布塞曼函数与 Gromov 双曲空间的一致化。 *Math. Nachr.*，298(7):2152–2176，2025。

E-MAIL: butlerphi@gmail.com