arXiv:2512.21318v1 [math.CO] 24 Dec 2025

六边形网格图的独立复形

Himanshu Chandrakar* Anurag Singh†

摘要

图的独立复形是一个单纯复形，其面对应于图 G 的独立集。尽管独立复形已在许多图类中得到广泛研究，包括方形网格图，但对于平面六边形网格图，人们所知甚少。

本文研究六边形网格图$H_{1\times m\times n}$的独立复形的拓扑。对于 $m = 1$，2、3 和 $n \geq 1$，我们确定了它们的同伦类型。特别是，我们证明六边形线性铺砌 $H_{1\times 1\times n}$ 的独立复形同伦等价于两个 n-球面的楔和；并且 $m = 2$ 和 $m = 3$ 我们得到了递归描述，从而完全确定了同伦类型中出现的球面。我们的证明依赖于链接与删除操作、折叠引理，以及对诱导子图的详细分析。

1 引言

在拓扑组合学中，独立复形是基于图构造的单纯复形中一个核心且备受研究的类别。对于图 G，独立复形 Ind (G) 是以 $V(G)$ 为顶点集的单纯复形；当且仅当 σ 是 G 中的独立集时，子集 $\sigma \subseteq V(G)$ 才是 Ind (G) 的一个面。尽管定义简单明了，独立复形往往呈现出异常丰富而微妙的拓扑性质。它们与匹配复形的密切联系进一步凸显了其重要性：一个图的匹配复形可以实现为其线图的独立复形。因此，匹配复形研究中的许多进展都大量借鉴了独立复形理论中的成果与方法（例如参见 [4, 14]）。

多年来，众多作者对各类图族的独立复形进行了研究。著名的例子包括圈的幂 [1], 、三元图 [11, 19], 、完全图的广义 Mycielski 图以及完全图的范畴积 [17], 、森林和无爪图 [6, 10], ，以及有向树和相关图族 [5, 13]。与这些成果相伴，还发展出若干强有力的方法来分析独立复形的拓扑性质，包括匹配树算法、星簇方法、折叠引理，以及系统地运用链接与删除操作（例如参见 [2, 3, 5, 10, 15, 16]）。此外，在 [9], 中，Jonsson 在拟阵理论框架下研究森林的复形，由此得到了拟阵独立复形的推广。他的工作还为图所产生的各类单纯复形提供了系统的参考。

在具有几何结构的图族中，多边形网格图发挥了尤为重要的作用。方形网格图的独立复形已得到广泛研究，例如 Bousquet-M`elou 等人 [3], 、Benjamin 等人 [4], 以及 Matsushita 等人 [15, 16], ，他们在若干情形下详细描述了这些独立复形的同伦类型。

相比之下，人们对平面六边形网格图的独立复形所知甚少。六边形镶嵌的局部结构与方形网格截然不同，其顶点度数较低，且具有不同的邻接模式，从而产生了新的组合与拓扑现

*印度理工学院比莱分校, himanshuc@iitbhilai.ac.in
†印度理工学院比莱分校, anurags@iitbhilai.ac.in2020 *Mathematics Subject Classification.* 05C69, 55U10, 05E45, 55P15,57M15*Keywords and phrases.* 独立复形；六边形网格图；同伦类型；折叠引理；链接与删除。

象。这一方向的早期工作可以追溯到 Thapper [18], ，他使用匹配树算法研究了柱面情形下方形网格和六边形网格的独立复形。随后，Jonsson [8] 研究了由方形、三角形和六边形构成的周期网格的独立复形中一种称为交叉圈的特殊同调类的出现。

尽管这些研究为理解周期性网格和圆柱形网格的独立复形提供了宝贵见解，但平面六边形网格图对应的复形在很大程度上仍未得到探索。本文通过确定 $H_{1\times m\times n}$ 中 $m=1$、2 和 3（分别见图 2、图 7 和图 31）以及 $n\geq 1$的独立复形的同伦类型，开启了对这一问题的系统研究。图$H_{1\times m\times n}$ 构成了一类自然的平面六边形网格，而 $m=1$、2 和 3这几种情形已呈现出不同的同伦行为，以及更宽六边形网格中所包含的大部分复杂性。因此，它们为系统研究提供了一个自然的起点。

我们确定了上述每种情形下独立复形的同伦类型。特别是，对于 $m=1$，我们给出了完整且明确的描述。

定理 1.1（定理 3.1）。 对于 $n\geq 1$，六边形线性铺砌的独立复形 $H_{1\times 1\times n}$ 同伦等价于两个 n维球面的楔和，也就是说，

$$\mathrm{Ind}\left(H_{1\times 1\times n}\right)\simeq \mathbb{S}^n\vee\mathbb{S}^n.$$

对于 $m=2$ 和 $m=3$ 这两种情况，我们通过递归公式完整描述了其同伦类型。这些公式确定了同伦类型中出现的球面的数量及其维数。

我们的计算涉及对若干类中间诱导子图的系统分析，这些子图由连续进行链接与删除操作产生。对这些子图的详细研究，给出了 $H_{1\times 2\times n}$ 和 $H_{1\times 3\times n}$的独立复形的完整分类。所得同伦类型总结如下。

1. 对于 $m=2$ 这种情况，我们有如下同伦等价关系。

定理 1.2 (定理4.6)。 对于 $n\geq 1$，六边形网格图$H_{1\times 2\times n}$ 的独立复形具有如下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\left(H_{1\times 2\times n}\right)\simeq\begin{cases}\mathbb{S}^2\vee\mathbb{S}^2, & \text{if } n=1;\\ \mathbb{S}^4\vee\mathbb{S}^4\vee\mathbb{S}^4, & \text{if } n=2;\\ \mathbb{S}^5\vee\mathbb{S}^6, & \text{if } n=3;\\ \Sigma^6\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right)\vee\Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right)\vee\Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(H^2_{n-3}\right)\right), & \text{if } n\geq 4.\end{cases}$$

这里， Y_n （见图 8）是 $H_{1\times 2\times n}$ 的一个诱导子图，其独立复形的拓扑性质在定理 4.3 中计算得出。

2. 对于 $m=3$ 的情况，我们得到以下结果。

定理 1.3 (定理5.10)。 对于 $n\geq 1$，六边形网格图$H_{1\times 3\times n}$ 的独立复形具有以下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\left(H_{1\times 3\times n}\right)\simeq\begin{cases}\mathbb{S}^3\vee\mathbb{S}^3, & \text{if } n=1;\\ \mathbb{S}^4\vee\mathbb{S}^4\vee\mathbb{S}^4, & \text{if } n=2;\\ \mathbb{S}^7, & \text{if } n=3;\\ \mathbb{S}^6\vee\mathbb{S}^{10}\vee\mathbb{S}^{10}\vee\mathbb{S}^{10}\vee\mathbb{S}^{10}, & \text{if } n=4;\\ \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3}\right)\right)\vee\Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(2)}_{n-2}\right)\right)\vee\Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(1)}_{n-2}\right)\right), & \text{if } n\geq 5.\end{cases}$$

这里， $Z_n^{(1)}$（见图32）、 $Z_n^{(2)}$（见图33）和 $Z_n^{(3)}$（见图34）都是$H_{1\times 3\times n}$的诱导子图。此外，它们的独立复形的同伦类型分别由定理 5.3、定理 5.4 和定理 5.7 给出。

文章结构

在下一节中，我们将回顾图论和单纯复形的基本概念，以及全文所需的结果。我们还将正式定义六边形网格图。文章其余部分分为三个主要章节，分别致力于计算 $H_{1\times m\times n}$ 在 $m=1$，2，和 3 时的独立复形的同伦类型。

2 预备知识

本节将介绍讨论本文所需的关键概念和结果。

2.1 图论基础

一个 图 G 是一个有序对 $(V(G)\ E(G))$，其中 $V(G)$ 是顶点集，且

$$E(G)\subseteq\{\{u,v\}\mid u,v\in V(G),\ u\neq v\}$$

为边的集合。我们将图 G 中顶点 v 的（开）邻域 记作 $N_G(v)$，定义如下：

$$N_G(v)=\{u\in V(G)\mid u\neq v \text{ and } \{u,v\}\in E(G)\}.$$

Si类似地，图 G 中顶点 v 的闭邻域 记作 $N_G[v]$ ，定义如下： ，

$$N_G[v]=N_G(v)\sqcup\{v\}.$$

当底层 图在上下文中显而易见时，我们省略下标，写作 $N(v)$ 和 $N[v]$ t o 分别表示开邻域和 顶点 v 的闭邻域。

设 S 是 $V(G)$ 的子集。 G 在 S 上的诱导子图记作 $G[S]$，其顶点集为 S ，边集由 G 中两端顶点都属于 S 的所有边组成。我们将诱导子图 $G[V(G)\setminus H]$ 记作 $G\setminus H$，其中 $H\subset V(G)$。现在我们继续正式定义六边形网格图。

2.2 一般六边形网格图中顶点的标记。

为了理解六边形网格图的独立复形的拓扑，我们的计算很大程度上取决于其顶点的标记方式。对于整数 l、m、 $n\geq 1$，六边形网格图 $H_{l\times m\times n}$ 是六边形镶嵌的有限子图，对应于一个六边形区域；该区域有三对对边，长度分别为 l、 m 和 n，以六边形的数量计。

本文中，我们考虑 $l=1$、 $m\in\{1,2,3\}$ 和 $n\geq 1$。$(1\times m\times n)$-六边形网格图记作 $H_{1\times m\times n}$，定义为顶点集为 $V(H_{1\times m\times n})$ 且 $E(H_{1\times m\times n})$ 的图，其中

$$V(H_{1\times m\times n})\simeq\bigsqcup_{i=1}^{m+1}V_i^n;$$

$$E(H_{1\times m\times n})\simeq\left(\bigsqcup_{j=1}^{m+1}A_j\right)\sqcup\left(\bigsqcup_{k=1}^{m}B_k\right).$$

这里，对于 $i=1$，2，.....， $m+1$，

$$V_i^n=\begin{cases}\left\{v_1^i,v_2^i,\ldots,v_{2n+1}^i\right\}, & i=1 \text{ or } m+1;\\ \left\{v_1^i,v_2^i,\ldots,v_{2n+1}^i,v_{2n+2}^i\right\}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m+1,$

$$A_j=\begin{cases}\left\{\left\{v_r^j,v_{r+1}^j\right\}\ \middle|\ r\in[2n]\right\}, & j=1 \text{ or } m+1;\\ \left\{\left\{v_s^j,v_{s+1}^j\right\}\ \middle|\ s\in[2n+1]\right\}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

此外，对于 $m\geq 1,$ 以及 $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$

$$B_k=\begin{cases}\left\{\left\{v_{2t-1}^k,v_{2t}^{k+1}\right\}\ \middle|\ t\in[n+1]\right\}, & \text{if } k=1,2,\ldots,m-1;\\ \left\{\left\{v_{2t-1}^m,v_{2t-1}^{m+1}\right\}\ \middle|\ t\in[n+1]\right\}, & \text{if } k=m.\end{cases}$$

例如，图 $H_{1\times4\times5}$ 如图所示（见图1）。

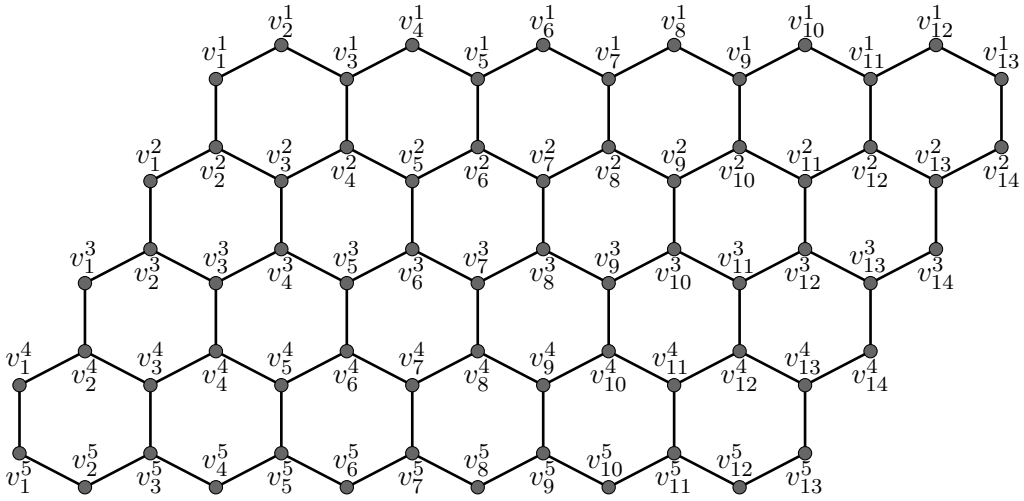

图1：图 $H_{1\times4\times6}$。

2.3 独立复形的拓扑预备知识与工具

我们主要参考 Hatcher 的代数拓扑 [7] 和 Kozlov 的组合代数拓扑 [12]，以采用标准定义和术语。

一个单纯复形 $\mathcal{K}$ 是有限集合 V 的一个非空子集族，V 称为顶点集；该子集族具有在取子集运算下封闭的性质，也就是说，对于每个 $\tau\in\mathcal{K}$ 和 $\sigma\subset\tau$，都有 $\sigma\in\mathcal{K}$。我们称元素 $\sigma\in K$ 为 K 的一个面。由 $k+1$ 个顶点组成的面称为 k 维面，而所有面中的最大维数称为该单纯复形的维数。单纯复形的极大面，即不被任何其他面真包含的面，称为极大面。若子集 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{K}$ 满足 $\mathcal{L}$ 本身是一个单纯复形，且 $\mathcal{L}$ 的每个面也是 $\mathcal{K}$ 的面，则称 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{K}$ 的一个子复形。现在我们讨论与给定单纯复形相关的一些重要子复形，它们将在本文中得到广泛应用。单纯复形中一个面的链接与删除定义如下。

定义 2.1 ([12, 定义 2.12 和 2.13])。设 $\mathcal{K}$ 是一个单纯复形，σ 是 $\mathcal{K}$的一个面。那么，

1. σ 在 $\mathcal{K}$中的链接，记作 $\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}(\sigma)$,

$$\mathrm{lk}_{\mathcal{K}}(\sigma)=\{\tau\in\mathcal{K}\mid\sigma\cap\tau=\emptyset,\ \sigma\cup\tau\in\mathcal{K}\}.$$

2. σ 在 $\mathcal{K}$中的删除，记作 $\mathrm{del}_{\mathcal{K}}(\sigma)$，是

$$\mathrm{del}_{\mathcal{K}}(\sigma)=\{\tau\in\mathcal{K}\mid\sigma\nsubseteq\tau\}.$$

注意到，当 K 是图 G 的独立复形，即 $K=\mathrm{Ind}(G)$ 时，顶点 $v\in V(G)$ 的链接与删除具有特别简单的描述。具体而言，

$$\mathrm{lk}_{\mathrm{Ind}(G)}(v)=\mathrm{Ind}(G\setminus N_G[v]);$$
$$\mathrm{del}_{\mathrm{Ind}(G)}(v)=\mathrm{Ind}(G\setminus\{v\}).$$

这些恒等式直接由单纯复形中顶点的链接与删除以及独立复形的定义得到。因此，以下用 $\mathrm{Ind}(G\setminus N_G[v])$ 和 $\mathrm{Ind}(G\setminus\{v\})$ 分别表示 $\mathrm{Ind}(G)$ 中 v 的链接与删除。采用这一记号后，我们给出下面的引理，该引理将在后文中被广泛使用。

引理 2.1 ([1,命题 3.1])。设 G 的一个顶点为 v。若包含映射

$$\mathrm{Ind}(G\setminus N_G[v])\hookrightarrow\mathrm{Ind}(G\setminus\{v\})$$

是零伦的，则

$$\mathrm{Ind}(G)\simeq\mathrm{Ind}(G\setminus\{v\})\vee\Sigma(\mathrm{Ind}(G\setminus N_G[v])).$$

定理 2.1 的关键之处在于，要求包含映射是零伦的，所述同伦等价才能成立。在本文中，我们采用两种方法来证明相关包含映射的零伦性。

第一种方法基于比较所选顶点的链接与删除的维数。更准确地说，如果删除的同伦类型中出现的球面维数严格大于链接的同伦类型中出现的球面维数，那么包含映射就是零伦的。

第二种方法依赖于同伦论中的一个基本结果：任何连续映射$f\colon X\to Y$若经过一个可缩空间分解，则与一个常值映射同伦等价，因而是零伦的。Hatcher 的书中将这一事实的一般表述作为一道习题（见 [7, 习题 0.10]）。具体而言，我们陈述下面的引理，并将利用它在此类情形中证明零伦性。

命题 2.2。设 $j\colon Y\hookrightarrow Z$ 和 $i\colon Z\hookrightarrow X$ 为包含映射。若 Z 是可缩的，则复合包含映射 $i\circ j\colon Y\hookrightarrow X$ 是零伦的。

若图 G 中的顶点 w 满足 $N(v)\subseteq N(w)$，则称其通过顶点 v 折叠。以下引理通常称为独立复形的折叠引理，它断言在此条件下，从图中移除一个顶点不会改变相应独立复形的同伦类型。

引理 2.3。*([6, 引理 2.4])* 对于图 G 中两个不同的顶点 v 和 w，若 $N(v)\subseteq N(w)$，则 $\mathrm{Ind}(G)$ 塌缩到 $\mathrm{Ind}(G\setminus\{w\})$，也就是说，

$$\mathrm{Ind}(G)\simeq\mathrm{Ind}(G\setminus w).$$

以下引理描述了可表示为两个图的不交并的图的独立复形。

引理 2.4 ([2, 注 2。2])。若图 G 是图 H_1 和 H_2 的不交并，则 G 的独立复形与 H_1 和 H_2 的独立复形的连接同伦等价，也就是说，

$$\mathrm{Ind}(G)\simeq\mathrm{Ind}(H_1)*\mathrm{Ind}(H_2).$$

特别地，如果 H_1 由单个顶点组成，那么 $\mathrm{Ind}(G)$ 是以 $\mathrm{Ind}(H_2)$ 为底的锥，因此是可缩的。类似地，如果 H_1 是具有两个顶点的路径图，即 P_2，那么 $\mathrm{Ind}(G)\simeq\Sigma\mathrm{Ind}(H_2)$。

除了这些结果之外，我们还需要知道路径和圈的独立复形的同伦类型，这些结果将在本文中得到广泛应用。

定理 2.5 ([13, 命题 4.5(3)])。 路径图的独立复形 P_n 具有以下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\,(P_n)=\begin{cases}\mathbb{S}^{k-1}, & n=3k;\\ *, & n=3k+1;\\ \mathbb{S}^{k}, & n=3k+2.\end{cases}$$

定理 2.6 ([13, 命题 5.2])。 圈图的独立复形 C_n 具有以下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\,(C_n)=\begin{cases}\mathbb{S}^{k-1}\vee\mathbb{S}^{k-1}, & n=3k;\\ \mathbb{S}^{k-1}, & n=3k+1;\\ \mathbb{S}^{k}, & n=3k+2.\end{cases}$$

3 $H_{1\times1\times n}$ 的独立复形

本节中，我们确定 $(1\times1\times n)$-六边形网格图（见图 2） $H_{1\times1\times n}$ （即六边形线性铺砌）的独立复形的同伦类型，也就是对于 $n\geq1$，$\mathrm{Ind}\,(H_{1\times1\times n})$。

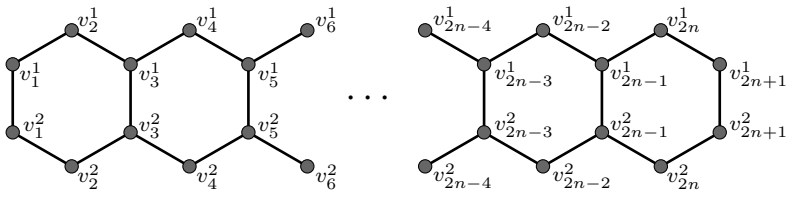

图 2：图 $H_{1\times1\times n}$。

首先，我们陈述本节的主要结果。

定理 3.1。 对于 $n\geq1$，六边形线性铺砌的独立复形 $H_{1\times1\times n}$ 同伦等价于两个 n维球面的楔和，也就是说，

$$\mathrm{Ind}\,(H_{1\times1\times n})\simeq\mathbb{S}^n\vee\mathbb{S}^n.$$

我们定义 $H_{1\times1\times n}$ 的以下诱导子图，它们将有助于计算 $\mathrm{Ind}(H_{1\times1\times n})$ 的同伦类型，

1. $X_n^{(1)}=H_{1\times1\times n}\setminus\left\{v_{2n+1}^1\right\}$ （见图 3）。
2. $X_n^{(2)}=H_{1\times1\times n}\setminus N\left[v_{2n+1}^1\right]$ （见图 4）。

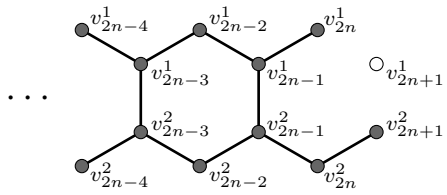

图 3：图 $X_n^{(1)}$

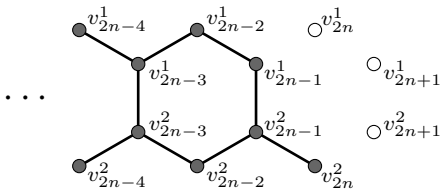

图 4：图 $X_n^{(2)}$。

这里的思路是考察 Ind（$H_{1\times1\times n}$）中顶点 v^1_{2n+1} 的链接与删除。它们恰好分别是 Ind $\left(H_{1\times1\times n}\setminus N\left[v^1_{2n+1}\right]\right)$ 和 Ind$\left(H_{1\times1\times n}\setminus\left\{v^1_{2n+1}\right\}\right)$。

引理 3.2. 对于 $n\geq 1$，$X_n^{(1)}$的独立复形Ind $\left(X_n^{(1)}\right)$ 具有以下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\left(X_n^{(1)}\right)\simeq\Sigma\left(\mathrm{Ind}\left(X_{n-1}^{(2)}\right)\right).$$

证明。注意，在 $X_n^{(1)}$（见图 3）中，我们使用 v^1_{2n} 将 v^1_{2n-2} 和 v^2_{2n-1} 折叠（见图 5 ）.

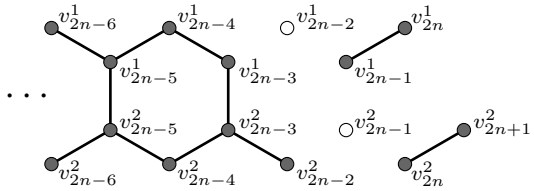

图 5：图 $X_n^{(1)}$中的折叠

应用折叠引理（见定理2.3），我们得到：

$$\mathrm{Ind}\left(X_n^{(1)}\right)\simeq\mathrm{Ind}\left(X_{n-1}^{(2)}\sqcup P_2\sqcup P_2\right)\simeq\Sigma^2\left(\mathrm{Ind}\left(X_{n-1}^{(2)}\right)\right).$$

定理 3.2 的证明至此完成。 □

引理 3.3. 对于 $n\geq 1$，$X_n^{(2)}$ 的独立复形 Ind $\left(X_n^{(2)}\right)$ 具有以下同伦类型：

$$\mathrm{Ind}\left(X_n^{(2)}\right)\simeq\mathbb{S}^{n-1}.$$

证明。我们对 n 使用归纳法来证明这一点。对于 $n=1$，结论显然成立，因为 $X_1^{(2)}$ 恰好是路径图 P_3，并且我们知道 Ind $(P_3)\simeq\mathbb{S}^0$（使用定理 2.5）。因此，我们有

$$\mathrm{Ind}\left(X_1^2\right)\simeq\mathbb{S}^0.$$

假设给定的结论对所有 $n\leq t$ 都成立，我们要证明它对 $n=t+1$ 也成立。注意，在X^2_{n+1}中，我们使用 v^2_{2t+2}折叠 v^1_{2t+1} 和 v^2_{2t}。折叠 v^1_{2t+1}后，我们使用 v^1_{2t}折叠 v^1_{2t-2} 和 v^2_{2t-1}（见图 6）。

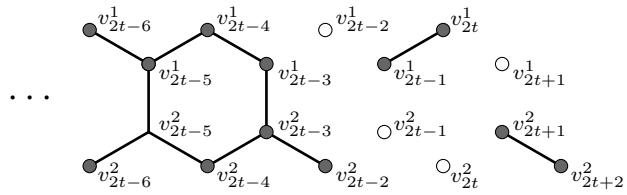

图 6：图 X^2_{t+1} 中的折叠。

因此，根据折叠引理（见定理2.3），我们有

$$\mathrm{Ind}\left(X^2_{t+1}\right) \simeq \mathrm{Ind}\left(X^2_{t-1} \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \simeq \Sigma^2\left(\mathrm{Ind}\left(X^2_{t-1}\right)\right).$$

因此，利用归纳假设，结论对 $n = t+1$ 成立，即

$$\mathrm{Ind}\left(X^2_{t+1}\right) \simeq \mathbb{S}^t.$$

定理 3.3 的证明到此完成。 □

由上述两个结果，我们得到以下推论。

推论 3.4。对于 $n \geq 1$，$\mathrm{Ind}\left(X^1_n\right) \simeq \mathbb{S}^n$。

有了这些结果，我们现在继续证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。 注意，只需证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(X^{(2)}_n\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(X^{(1)}_n\right)$$

是零伦的 ，因为由定理 2.1、定理 3.2 和定理 3.3 即可得到结论.

利用定理 3.3 和定理 3.4，显然 $\mathrm{Ind}\left(X^{(2)}_n\right)$ 与维数比 $\mathrm{Ind}\left(X^{(1)}_n\right)$ 少一的球面同伦等价。因此，上述包含映射是零伦的。于是，利用定理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(H_{1\times 1\times n}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(X^{(1)}_n\right) \vee \Sigma\left(\mathrm{Ind}\left(X^{(2)}_n\right)\right)\\ &\simeq \mathbb{S}^n \vee \Sigma\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\\ &\simeq \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n.\end{aligned}$$

定理 3.1 的证明至此完成。 □

4 $H_{1\times 2\times n}$的独立复形

本节中，我们确定（$1 \times 2 \times n$）六边形网格图（见图 7）的独立复形的同伦类型， $H_{1\times 2\times n}$ （或者说，双六边形线性铺砌），即对于 $n \geq 1$，Ind（$H_{1\times 2\times n}$）。为简便起见，我们记作 $H^2_n = H_{1\times 2\times n}$。

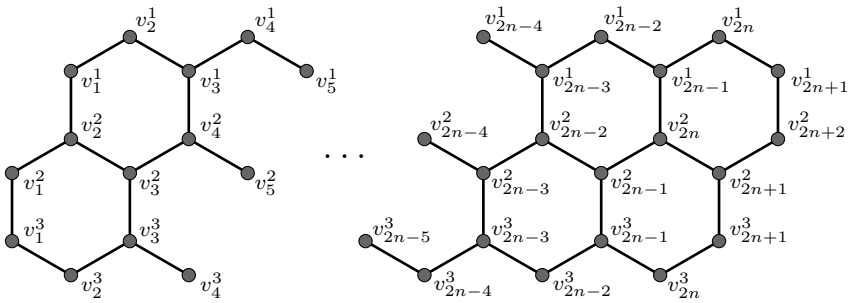

图 7：图 $H_{1\times 2\times n}$。

我们如下定义 H_n^2 的诱导子图 Y_n（见图 8），它将在确定 Ind（$H_{1\times 2\times n}$）的同伦类型时发挥作用：

$$Y_n = H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^1, v_{2n+1}^1, v_{2n+2}^2\right\}.$$

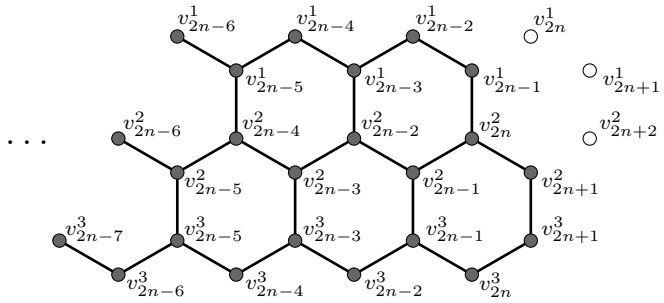

图 8：图 Y_n。

4.1 Y_n的独立复形

这里，我们将确定 Y_n的独立复形的同伦类型，记作 Ind (Y_n)。为此，我们首先讨论 Ind (Y_n) 中顶点 v_{2n-1}^2 的链接和删除的同伦类型，即分别为 $\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N\left[v_{2n-1}^2\right]\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)$。

引理 4.1。对于 $n \geq 3$，$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right)$。

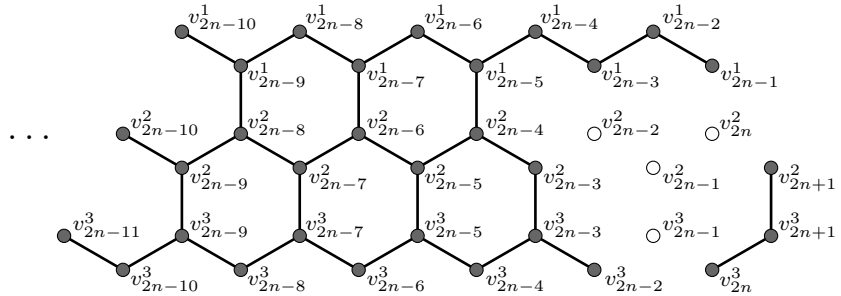

图 9：图 $Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]$。

证明。注意，在 $Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]$ 中（见图 9），我们使用 v_{2n+1}^2 将 v_{2n}^3 折叠。同样，我们使用 v_{2n-1}^1 将 v_{2n-3}^1 折叠。将 v_{2n-3}^1 折叠后，我们使用 v_{2n-4}^1 将 v_{2n-6}^1 和 v_{2n-4}^2 折叠。另一方面，折叠 v_{2n}^3 后，我们使用 v_{2n-2}^3 将 v_{2n-3}^2 和 v_{2n-4}^3 折叠（见图 10）。

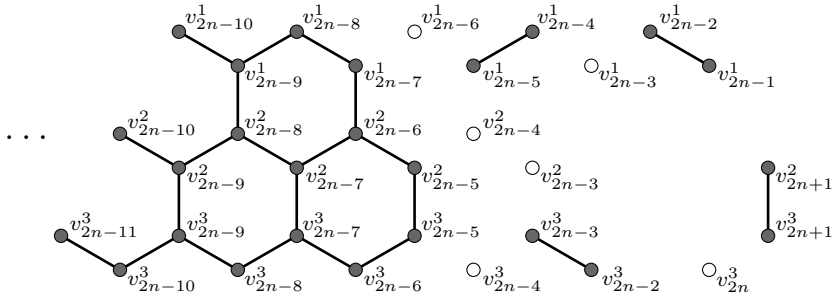

图 10：图 $Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(Y_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right).\end{aligned}$$

这就完成了定理 4.1 的证明。 □

引理 4.2。对于 $n \geq 5$,

$$\operatorname{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right) \vee \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right).$$

证明。设 $Y_{(1)n} = Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}$ （见图 11）。

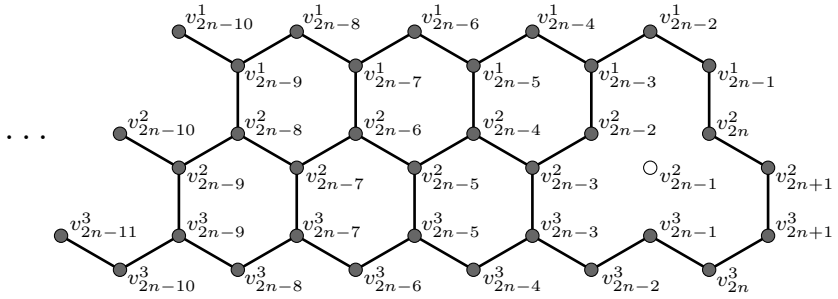

图 11：图 $Y_n^1 = Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}$。

我们首先讨论以下对象的同伦类型:
1. $\operatorname{Ind}\left(Y_{(1)n} \setminus N_{Y_n^{(1}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right)$
和 2. $\operatorname{Ind}\left(Y_n^{(1} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right)$。

稍后我们将证明包含映射

$$\operatorname{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus N_{Y_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow \operatorname{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right),$$

是零伦的。
Ind $\left(\boldsymbol{Y(1)}_n \setminus \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{Y}_n^{(1}} \left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2n-1}}^{\boldsymbol{3}}\right]\right)$ **的同伦类型：**

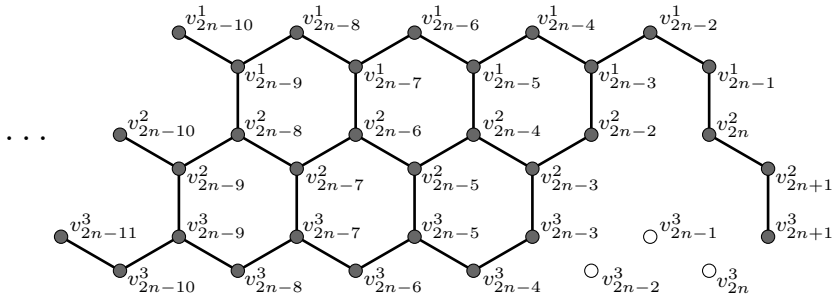

图12：图 $Y_{(2)n} = Y_{(1)n} \setminus N_{Y_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]$。

令 $Y_{(2)n} = Y_{(1)n} \setminus N_{Y_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]$（见图12）。注意，在 $Y_{(2)n}$ 中，我们使用 v_{2n+1}^3 折叠 v_{2n}^2。v_{2n}^2 折叠后，我们使用 v_{2n-1}^1 折叠 v_{2n-3}^1。折叠 v_{2n-3}^1 后，我们使用 v_{2n-4}^1 折叠 v_{2n-6}^1 和 v_{2n-4}^2，并使用 v_{2n-2}^2 折叠 v_{2n-3}^3。最后，折叠 v_{2n-3}^3 后，我们使用 v_{2n-4}^3 折叠 v_{2n-5}^2 和 v_{2n-6}^3（见图13）。

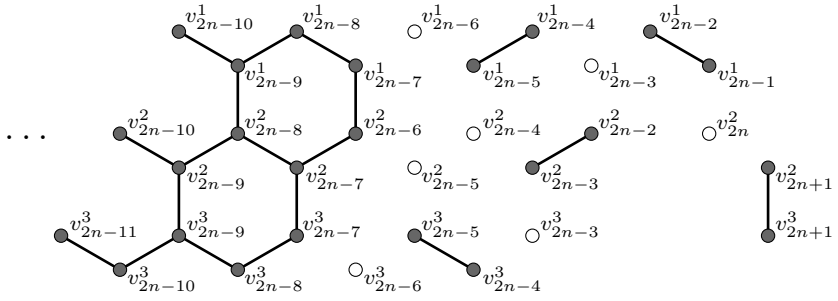

图13：图 $Y_n^{(2)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Y_n^{(2)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus N_{Y_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \simeq \Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right). \tag{1}$$

Ind $\left(\boldsymbol{Y(1)}_n \setminus \left\{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2n-1}}^{\boldsymbol{3}}\right\}\right)$ **的同伦类型：**

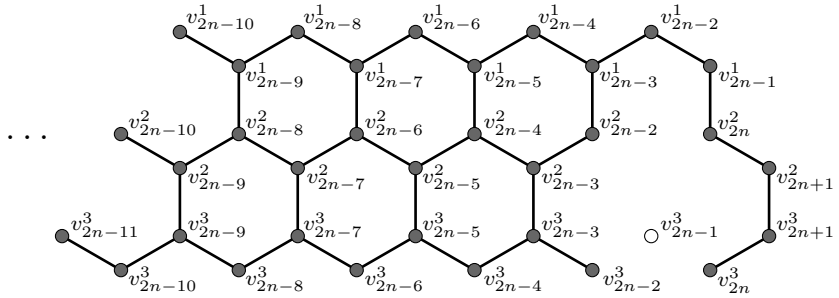

图14：图 $Y_n^{(3} = Y_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}$。

令 $Y_n^{(3)} = Y_{(1)n} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}$（见图14）。注意，在 $Y_{(3)n}$ 中，我们利用 v_{2n}^3 折叠 v_{2n+1}^2。同样，我们利用 v_{2n-2}^3 折叠 v_{2n-3}^2 和 v_{2n-4}^3。折叠 v_{2n-3}^2 后，我们利用 v_{2n-2}^2 折叠 v_{2n-4}^1 和 v_{2n-2}^1（见图15）。

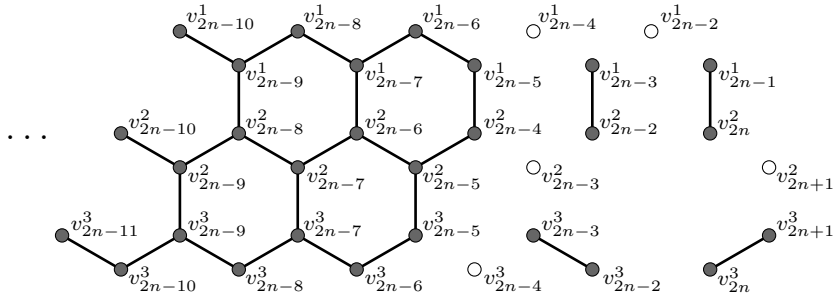

图15：图 $Y_n^{(3)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(Y_n^{(3)}\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(H_{n-3}^2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(H_{n-3}^2\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right) \simeq \Sigma^4\left(H_{n-3}^2\right). \tag{2}$$

包含映射 $\mathbf{Ind}\left(\boldsymbol{Y(1)_n \setminus N_{Y_n^{(1}}\left[v_{2n-1}^3\right]}\right) \hookrightarrow \mathbf{Ind}\left(\boldsymbol{Y(1)_n \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}}\right)$ 是零伦的：

为证明这一点，我们考虑诱导子图 $Y_n^{(4)} = Y_{(1)n} \setminus \left\{v_{2n-1}^3, v_{2n}^3\right\}$，也就是说，$Y_{(4)n}$ 恰好是 $Y_{(2)n} \cup \left\{v_{2n-2}^3\right\}$（见图16）。

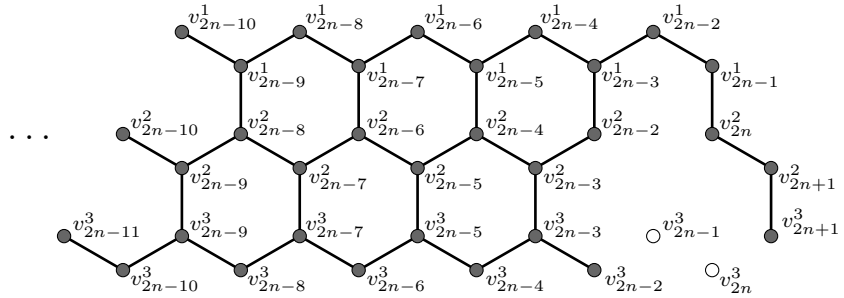

图16：图 $Y^{(4}_{n} = Y^{(1)}_{n} \setminus \left\{v^3_{2n-1},\ v^3_{2n}\right\})$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Y^{(1)}_{n} \setminus N_{Y^{(1)}_{n}}\left[v^3_{2n-1}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y^{(4)}_{n}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y^{(1)}_{n} \setminus \left\{v^3_{2n-1}\right\}\right).$$

注意，在 $Y^{(4)}_{n}$ 中，我们使用 v^3_{2n-2} 将 v^2_{2n-3} 和 v^3_{2n-4} 折叠。折叠 v^2_{2n-3} 后，我们使用 v^2_{2n-2} 将 v^1_{2n-4} 和 v^1_{2n-2} 折叠。最后，在折叠 v^1_{2n-2} 后，我们使用 v^1_{2n-1} 将 v^2_{2n+1} 折叠。整个过程使 v^3_{2n+1} 保持孤立（见图17）。

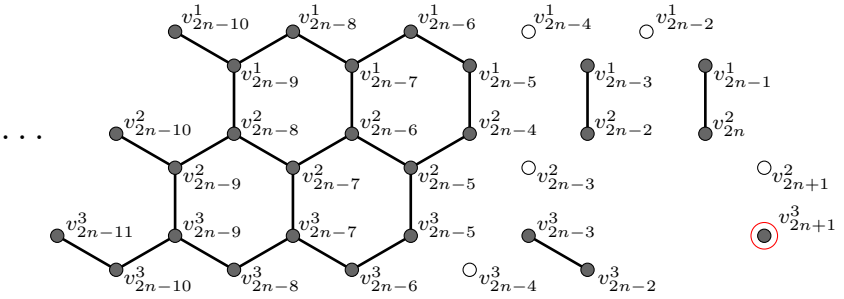

图17：图 $Y^{(4)}_{n}$ 中的折叠。

现在，应用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Y^{(4)}_{n}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(H^2_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup \left\{v^3_{2n+1}\right\}\right)\\ &\simeq \left(\Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(H^2_{n-3}\right)\right)\right) * \left\{v^3_{2n+1}\right\}\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换言之，$\mathrm{Ind}\left(Y^{(4}_{n}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Y^{(1)}_{n} \setminus N_{Y^{(1)}_{n}}\left[v^3_{2n-1}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y^{(4)}_{n}\right),$$

是零伦的。这进而意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(Y^{(1)}_{n} \setminus N_{Y^{(1)}_{n}}\left[v^3_{2n-1}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y^{(1)}_{n} \setminus \left\{v^3_{2n-1}\right\}\right),$$

是零伦的 -同伦等价。因此，利用定理 2.1、方程（1）和方程（2），我们有 e

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Y_n^{(1)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right) \vee \Sigma\left(\mathrm{Ind}\left(Y_n^{(1)} \setminus N_{Y_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right)\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right) \vee \Sigma\left(\Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right)\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right) \vee \Sigma^6\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right)\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right) \vee \Sigma^6\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right).$$

这就完成了定理 4.2 的证明。 □

有了这两个结果，我们现在陈述并证明以下定理，它确定了 Ind (Y_n) 的同伦类型。回顾一下，

$$Y_n = H_n^2 \setminus \left(v_{2n}^1, v_{2n+1}^1, v_{2n+2}^2\right).$$

定理 4.3。对于 $n \geq 1$,

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n\right) \simeq \begin{cases} \mathbb{S}^1, & \text{if } n = 1; \\ \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3, & \text{if } n = 2; \\ \mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^5, & \text{if } n = 3; \\ \mathbb{S}^6 \vee \mathbb{S}^6 \vee \mathbb{S}^6, & \text{if } n = 4; \\ \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right) \vee \Sigma^6\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-4}^2\right)\right) \vee \Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right), & \text{if } n \geq 5. \end{cases}$$

证明。对于 $n = 1$ 的情形，注意到 Y_1 与图 $X_2^{(2)}$ 同构（见图 4）。因此，结论直接由定理 3.3 得出。对于 $n = 2$, 3 和 4 的情形，我们略去证明细节，因为证明过程与定理 4.1 和定理 4.2 相同。也就是说，我们分析顶点 v_{2n-1} 的链接与删除，并在每种情形下进行一系列与前面相似的折叠。唯一的区别是，得到的中间子图略有不同，不过每个子图都足够简单，可以再次应用折叠引理来确定其同伦类型。此外，在这些情形下证明包含映射是零伦的更为容易，因为链接的同伦类型中的球面维数严格小于删除的同伦类型中的球面维数。

对于 $n \geq 5$ 的情形，注意到只需证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)$$

是零伦的，因为由此可根据定理 2.1、定理 4.1 和定理 4.2 得出结论。为此，我们考虑诱导子图 $Y_{(5)n} = Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2, v_{2n}^2, v_{2n-1}^3\right\}$ (见图 18)。

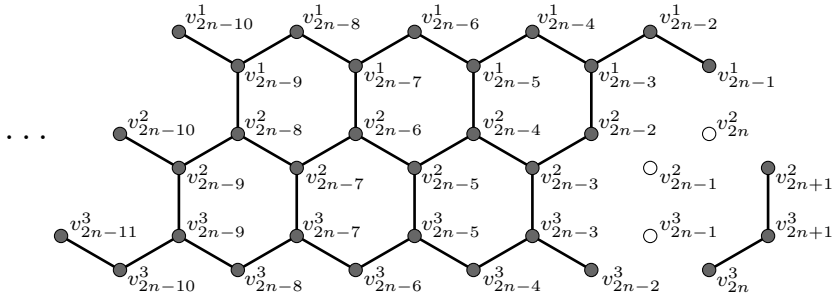

图 18：图 $Y_{(5)n} = Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2, v_{2n}^2, v_{2n-1}^3\right\}$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n^{(5)}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right).$$

首先，注意到我们在 $Y_n^{(5)}$ 中使用 v_{2n+1}^2 折叠 v_{2n}^3。另一方面，我们使用 v_{2n-2}^3 折叠 v_{2n-3}^2 和 v_{2n-4}^3。一旦 v_{2n-3}^2 被折叠，我们就使用 v_{2n-2}^2 折叠 v_{2n-4}^1 和 v_{2n-2}^1。注意，整个过程使 v_{2n-1}^1 保持孤立（见图19）。

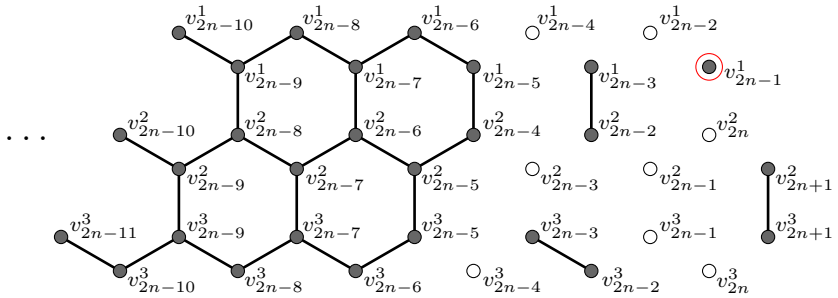

图19：图 $Y_n^{(5)}$ 中的折叠。

因此，根据折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Y_n^{(5)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup \left\{v_{2n-1}^1\right\}\right)\\ &\simeq \left(\Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right)\right) * \left\{v_{2n-1}^1\right\}\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换句话说，$\mathrm{Ind}\left(Y_{n}^{(5}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n^{(5)}\right),$$

是零伦的。这反过来意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus N_{Y_n}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right),$$

是零伦的。定理 4.3 的证明至此完成。 □

4.2 H_n^2的独立复形

现在讨论 H_n^2 的独立复形的同伦类型，记作 $\mathrm{Ind}\left(H_n^2\right)$。和之前一样，我们先讨论 $\mathrm{Ind}\left(H_n^2\right)$ 中顶点 v_{2n}^2 的链接与删除的同伦类型，即分别为 $\mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$。

引理4.4. 对于 $n \geq 4$，$\mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) \simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right)$。

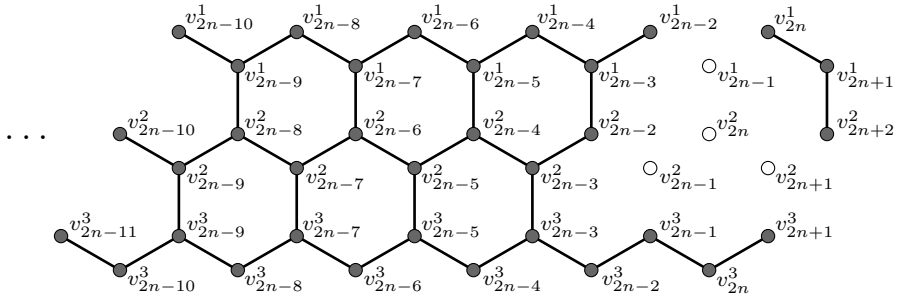

图20：图 $H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]$。

证明。注意，在$H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]$（见图20）中，我们使用 v_{2n+2}^2将 v_{2n}^1 折叠。同样，我们使用 v_{2n-2}^1将 v_{2n-4}^1 和 v_{2n-2}^2 折叠。另一方面，我们使用 v_{2n+1}^3将 v_{2n-1}^3 折叠。最后，在 v_{2n-1}^3 被折叠后，我们使用 v_{2n-2}^3 将 v_{2n-3}^2 和 v_{2n-4}^3 折叠（见图21）。

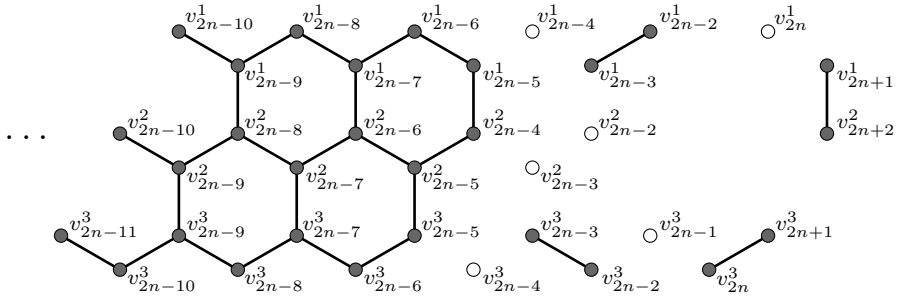

图 21：图 $H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]$中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(H_{n-3}^2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right).\end{aligned}$$

定理4.4 的证明至此完成。 □

引理4.5。对于 $n \geq 4$，$\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^6\left(Y_{n-3}\right) \vee \Sigma^4\left(Y_{n-2}\right)$。

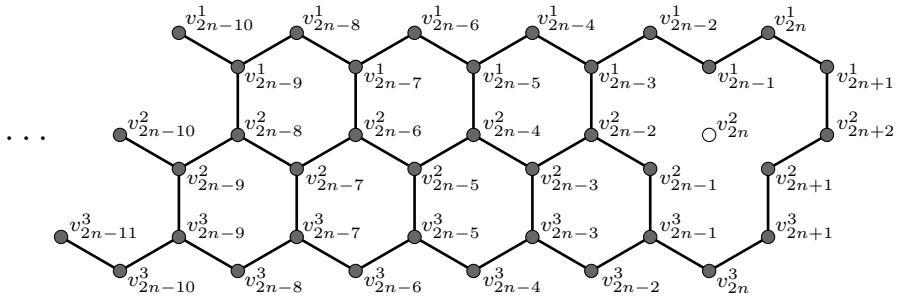

图 22：图 $H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}$。

证明。令 $T_n^{(1)} = H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}$（见图 22）。我们首先讨论其同伦类型

1. $\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right)$;
以及 2. $\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right)$。

稍后我们将证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right),$$

是零伦的。

Ind $\left(T(1)_n \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right)$ 的同伦类型：

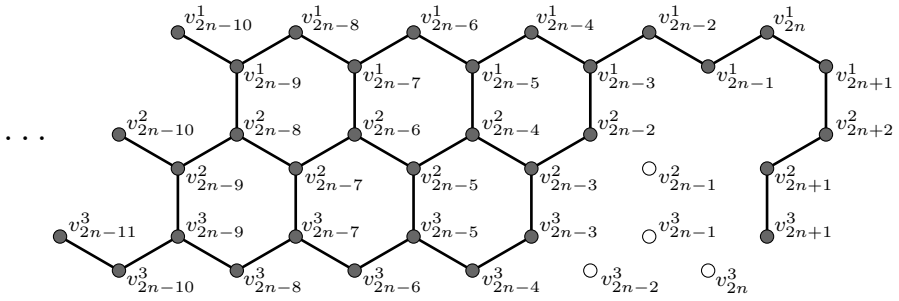

图 23：图 $T_{(2)n} = T_{(1)n} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]$。

令 $T_{(2)n} = T_{(1)n} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]$（见图 23）。注意，在 $T_{(2)n}$ 中，我们利用 v_{2n+1}^3 折叠 v_{2n+2}^2。v_{2n+2}^2 折叠后，我们利用 v_{2n+1}^1 折叠 v_{2n-1}^1。最后，在折叠 v_{2n-1}^1 后，我们利用 v_{2n-2}^1 折叠 v_{2n-4}^1 和 v_{2n-2}^2。

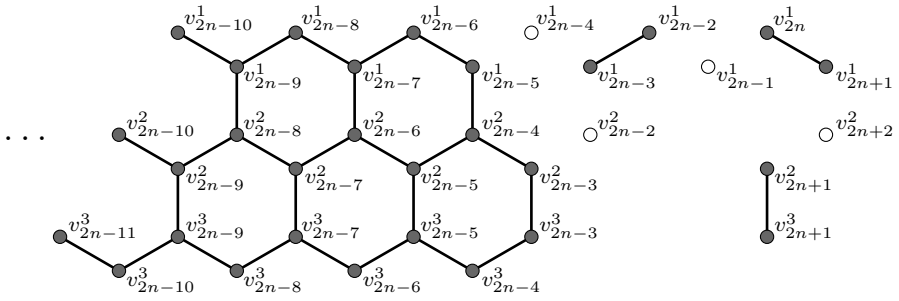

图 24：图 $T_n^{(2)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(T_n^{(2)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Y_{n-2} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\operatorname{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \simeq \Sigma^3\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-2}^2\right)\right). \tag{3}$$

Ind $\left(T(1)_n \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right)$的同伦类型:

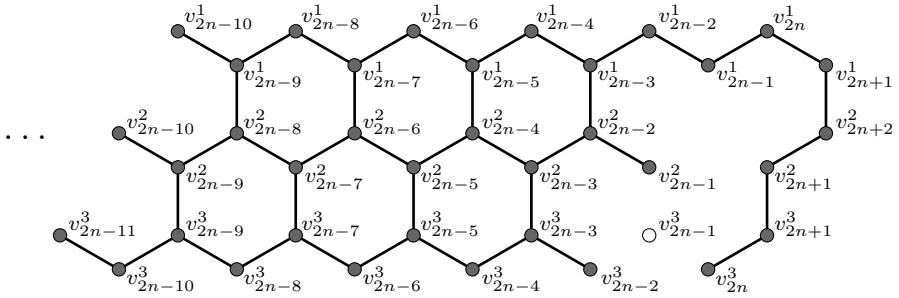

图 25：图 $T_{n}^{(3} = T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\})$。

设 $T_{(3)n} = T_{(1)n} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}$（见图 25）。注意，在 $T_n^{(3)}$ 中，我们使用 v_{2n-2}^3 折叠 v_{2n-3}^2 和 v_{2n-4}^3。v_{2n-3}^2 折叠后，我们使用 v_{2n-1}^2 折叠 v_{2n-3}^1。折叠 v_{2n-3}^1 后，我们使用 v_{2n-4}^1 折叠 v_{2n-6}^1 和 v_{2n-4}^2。此外，折叠 v_{2n-3}^1 后，我们使用 v_{2n-2}^1 折叠 v_{2n}^1。最后，v_{2n}^1 折叠后，我们使用 v_{2n+1}^1 折叠 v_{2n+1}^2（见图 26）。

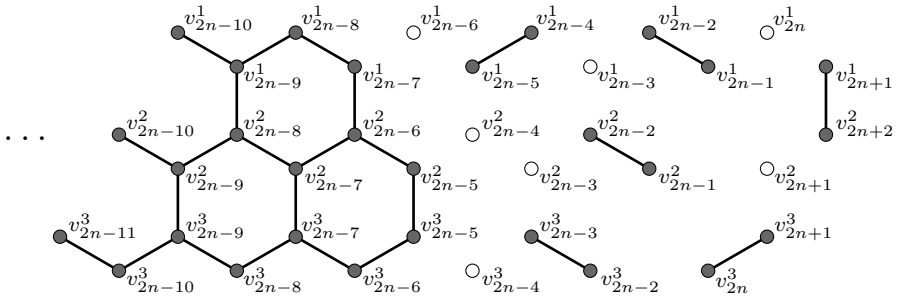

图26：图 $T_{n}^{(3} = T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\})$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(T_n^{(3)}\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(Y_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\operatorname{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right) \simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right). \tag{4}$$

包含映射 Ind $\left(T(1)_n \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow$ Ind $\left(T(1)_n \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right)$ 是零伦的:

为证明这一点，我们考虑诱导子图 $T_{(4)n} = T_{(1)n} \setminus \left\{v_{2n-1}^3, v_{2n}^3\right\}$，也就是说， $T_n^{(4)}$恰好是 $T_n^{(2)} \cup \left\{v_{2n-1}^2, v_{2n-2}^3\right\}$（见图27）。

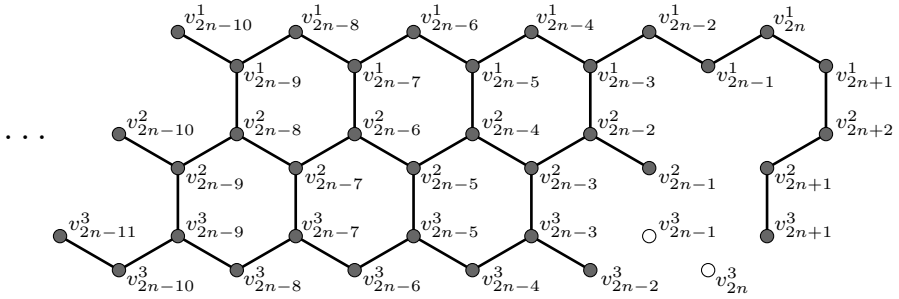

图27：图 $T_n^{(4} = T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3, v_{2n}^3\right\}$。

于是我们得到如下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(T_n^{(4)}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right).$$

上面用于确定 $\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-3}^1\right\}\right)$ 同伦类型的相同过程在这里同样适用。唯一的例外是，在这里该过程会留下一个孤立顶点 v_{2n+1}^3 （见图28）。

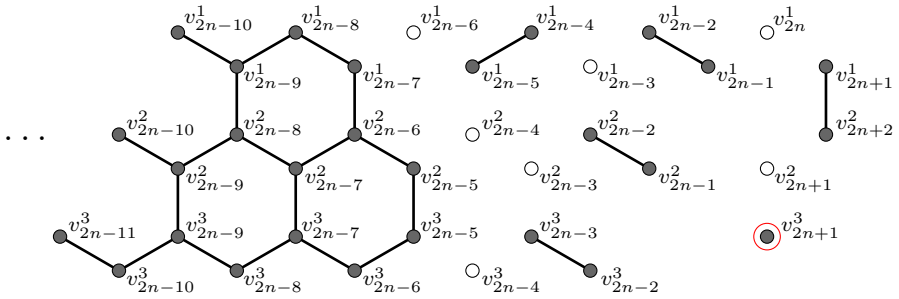

图28：图 $T_n^{(4)}$中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(T_n^{(4)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Y_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right) \\ &\simeq \left(\Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right)\right) * \left\{v_{2n+1}^3\right\} \\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换句话说，$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(4)}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(T_n^{(4)}\right),$$

是零伦的。这进而意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right),$$

为空 -同伦等价。因此，利用定理 2.1、方程（3）和方程（4），我们有 e

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(T_n^{(1)}\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^3\right\}\right) \vee \Sigma\left(\operatorname{Ind}\left(T_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^3\right]\right)\right) \\ &\simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right) \vee \Sigma\left(\Sigma^3\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right)\right) \\ &\simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right).$$

定理 4.5 的证明至此完成。 □

现在我们可以确定双六边形线性铺砌的独立复形的同伦类型，即 $\operatorname{Ind}\left(H_n^2\right)$。回想一下，此处 $H_n^2 = H_{1\times 2\times n}$。

定理4.6. 对于 $n \geq 1$，双六边形线性铺砌的独立复形，即 $\operatorname{Ind}\left(H_n^2\right)$，具有如下同伦类型，

$$\operatorname{Ind}\left(H_n^2\right) \simeq \begin{cases} \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2, & \text{if } n = 1; \\ \mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^4, & \text{if } n = 2; \\ \mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^6, & \text{if } n = 3; \\ \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-3}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(Y_{n-2}\right)\right) \vee \Sigma^5\left(\operatorname{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right), & \text{if } n \geq 4. \end{cases}$$

证明. 对于 $n = 1$ 的情形，图 H_2^1 与图 $H_{1\times 1\times 2}$ 同构（见图 2），因此结论由定理 3.1 得出。对于其余情形，定理 4.3 证明中对初始情形所给出的论证同样适用。

对于 $n \geq 4$，注意到只需证明包含映射

$$\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) \hookrightarrow \operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$$

是零同伦的，因为由此可根据定理 2.1、定理4.4 和定理 4.5 得出结论 .

为此，我们考虑诱导子图 $T_n^{(5)} = H_n^2 \setminus \left\{v_{2n-1}^2, v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$（见图 29）。

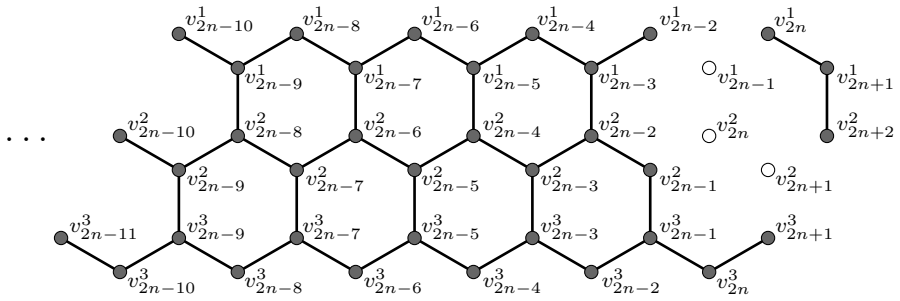

图 29：图 $T_n^{(5)} = H_n^2 \setminus \left\{v_{2n-1}^2, v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$。

于是得到如下包含映射，

$$\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) \hookrightarrow \operatorname{Ind}\left(T_n^{(5)}\right) \hookrightarrow \operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right).$$

在定理4.4的证明中，用于确定 $\operatorname{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right)$ 同伦类型的相同步骤在此处也适用。唯一的不同之处在于，此处该步骤会留下一个孤立顶点 v_{2n-1}^2（见图30）。

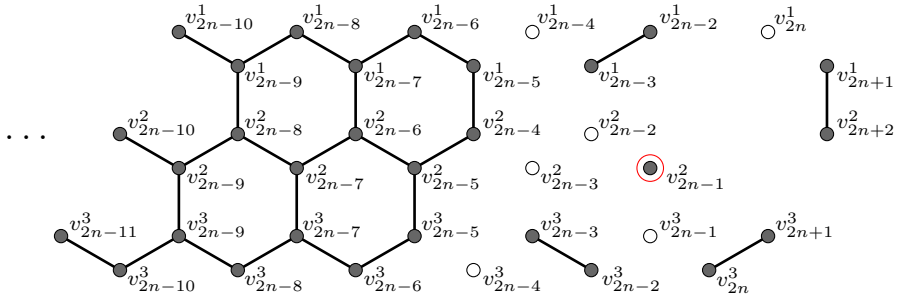

图 30：图 $H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(T_n^{(5)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \ \sqcup P_2 \sqcup \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)\\ &\simeq \left(\Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-3}^2\right)\right)\right) * \left\{v_{2n-1}^2\right\}\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换句话说，$\mathrm{Ind}\left(T_n^{(5)}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Y_n^{(5)}\right),$$

是零伦的。这进而意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus N_{H_n^2}\left[v_{2n}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(H_n^2 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right),$$

是零伦的。定理4.6的证明至此完成。 □

5 $H_{1\times 3\times n}$ 的独立复形

在本节中，我们确定（$1\times 3\times n$）-六边形网格图的独立复形的同伦类型（见图31），$H_{1\times 3\times n}$（或称三重六边形线状铺砌），即 $n \geq 1$ 的 $\mathrm{Ind}\left(H_{1\times 3\times n}\right)$。为简便起见，记 $H_n^3 = H_{1\times 3\times n}$。

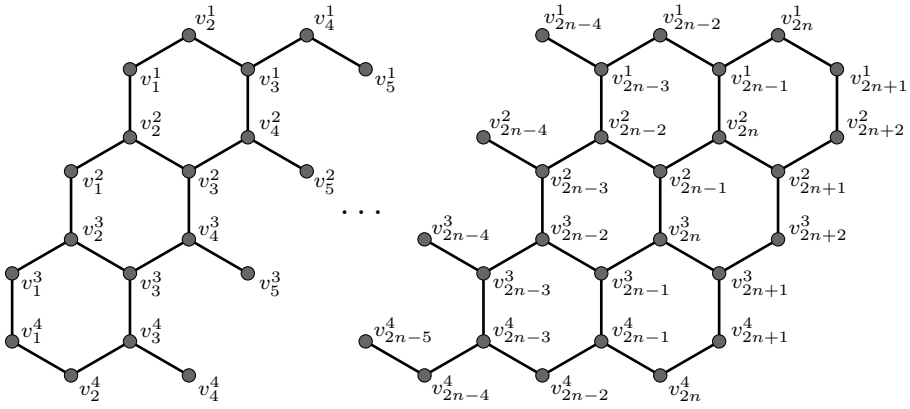

图31：图 $H_{1\times 3\times n}$。

以下 H_n^3 的诱导子图将有助于计算 Ind $\left(H_n^3\right)$ 的同伦类型。

1. $Z_n^{(1)} = H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^1, v_{2n+1}^1, v_{2n+2}^2\right\}$ （见图32）。

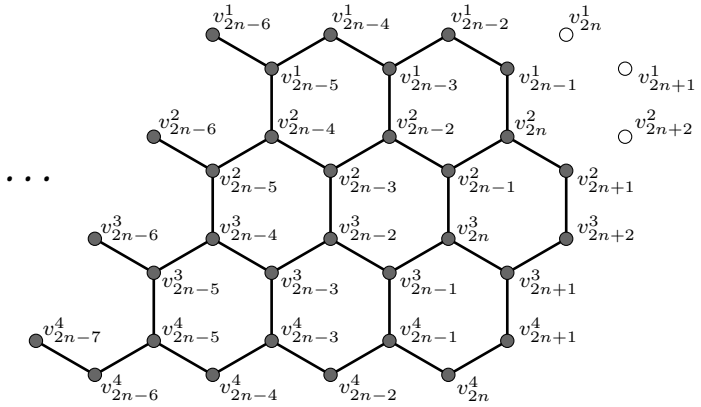

图 3 2：图 $Z_n^{(1)}$。

2. $Z_n^{(2)} = H_{n+1}^3 \setminus \left\{v_{2n+2}^1, v_{2n+3}^1, v_{2n+4}^2, v_{2n+3}^3, v_{2n+4}^3, v_{2n+2}^4, v_{2n+3}^4\right\}$ （见图33）。

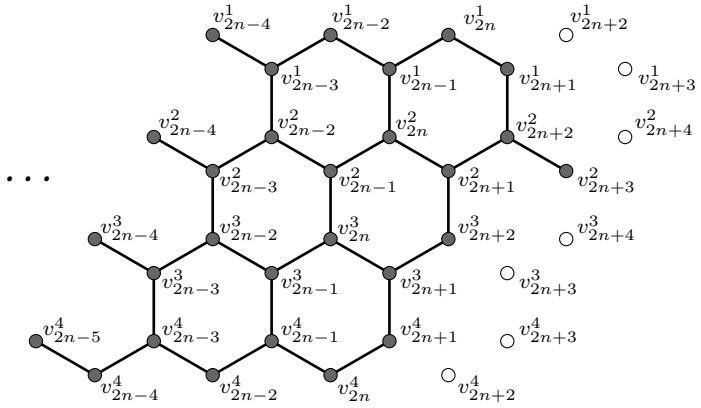

图 3 3：图 $Z_n^{(2)}$。

3. $Z_n^{(3)} = H_n^3 \setminus \left\{v_{2n-4}^1, v_{2n-3}^1, v_{2n-2}^1, v_{2n-1}^1, v_{2n}^1, v_{2n+1}^1, v_{2n-2}^2, v_{2n+2}^2\right\}$ （见图34）

.

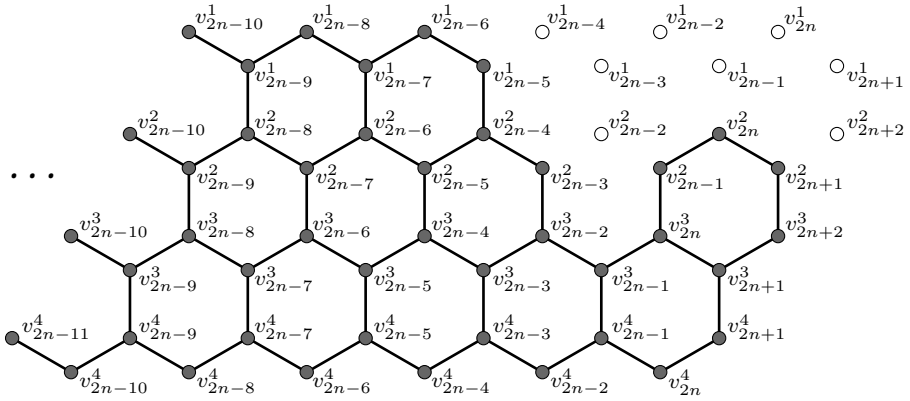

图 3：图 $Z_n^{(3)}$。

注意，上面对 $Z_n^{(3)}$ 的描述处理了 $n \geq 3$ 的情况。对于 $n = 1$，2，我们以类似的方式定义 $Z_n^{(3)}$，如下所示。

$$Z_1^{(3)} = H_1^3 \setminus \left\{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^2\right\};$$
$$Z_2^{(3)} = H_2^3 \setminus \left\{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_2^2, v_6^2\right\}.$$

我们先简要概述确定 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right)$ 同伦类型所涉及的步骤，为接下来的计算提供指引。

步骤概述：

1. 我们首先分析 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right)$ 中顶点 v_{2n}^2 的链接与删除，即 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus N\left(v_{2n}^2\right)\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$。确定 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus N\left(v_{2n}^2\right)\right)$ 的同伦类型（见定理5.8）需要知道 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right)$ 的同伦类型。同样，计算 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$ 的同伦类型（见定理5.9）需要知道 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(2)}\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)}\right)$ 的同伦类型。

2. $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(2)}\right)$ 的同伦类型具有一个闭式公式（见定理 5.4）。该公式是通过反复应用折叠引理，并结合对 n 的归纳法得到的。

3. $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)}\right)$ 的同伦类型通过递归关系计算得到（见定理 5.3 和定理 5.7）。这些公式将 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)}\right)$ 表示为 n 的较小取值所对应复形的形式。

5.1 $Z_n^{(1)}$ 的独立复形

在这里，我们将确定 $Z_n^{(1)}$ 的独立复形的同伦类型，记作 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right)$。我们计划考察 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right)$ 中顶点 v_{2n-1}^2 的链接与删除，即分别为 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N\left[v_{2n-1}^2\right]\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)$，然后分析这两个复形之间的包含映射。

引理 5.1. 对于 $n \geq 3$，$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \simeq \Sigma^6\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right)$。

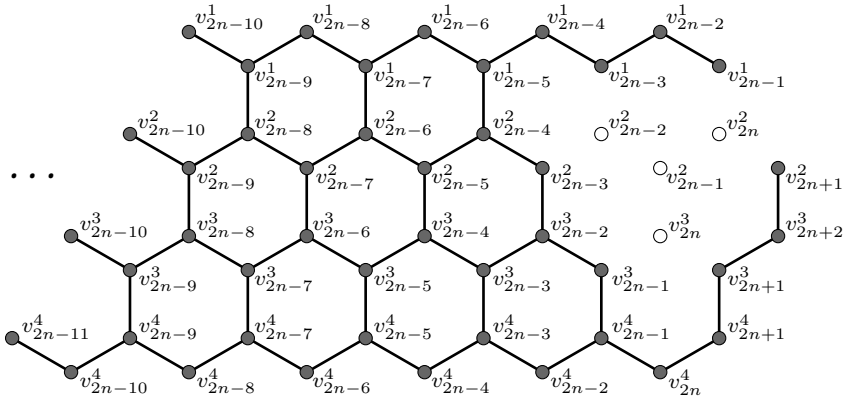

图 35：图 $Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]$。

证明。在 $Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]$（见图 35）中，我们使用 v_{2n-1}^1 折叠 v_{2n-3}^1。折叠 v_{2n-3}^1 后，我们使用 v_{2n-4}^1 折叠 v_{2n-6}^1 和 v_{2n-4}^2。折叠 v_{2n-4}^2 后，我们使用 v_{2n-3}^2 折叠 v_{2n-3}^3 和 v_{2n-1}^3。另一方面，我们使用 v_{2n+1}^2 折叠 v_{2n+1}^3。折叠 v_{2n+1}^3 后，我们使用 v_{2n+1}^4 折叠 v_{2n-1}^4。最后，折叠 v_{2n-1}^4 后，我们使用 v_{2n-2}^4 折叠 v_{2n-4}^4（见图 36）。

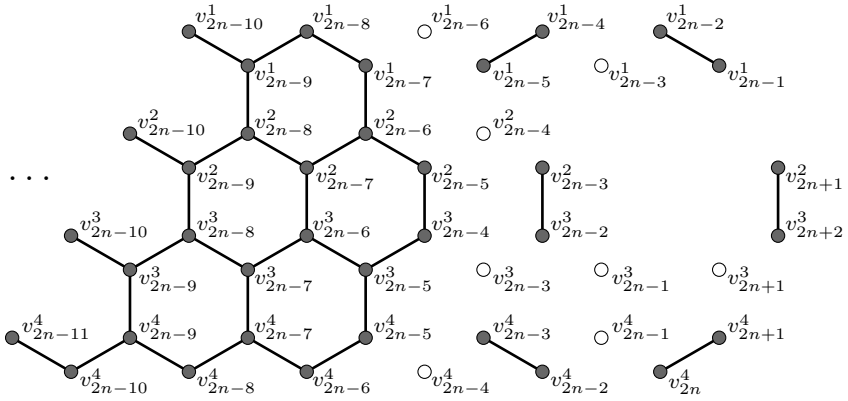

图 36：图 $Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^6\left(\operatorname{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

这就完成了定理 5.1 的证明。 □

引理 5.2. 对于 $n \geq 2$,

$$\operatorname{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^7\left(\operatorname{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\operatorname{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).$$

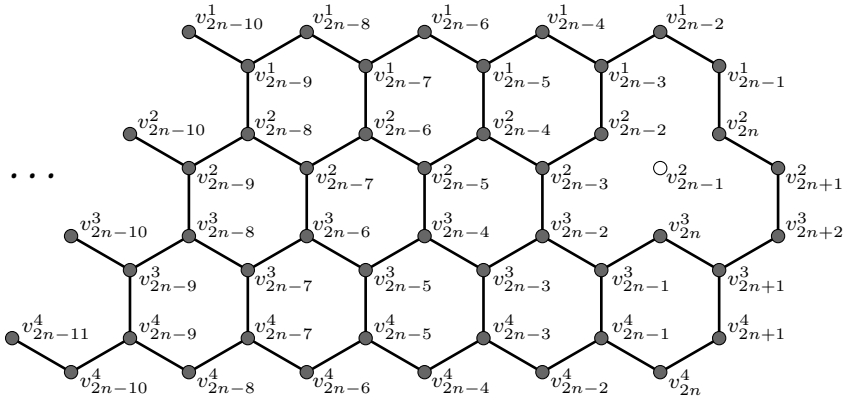

图37：图 $W_n^{(1)} = Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}$。

证明。设 $W_n^{(1)} = Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}$ （见图37）。我们首先讨论其同伦类型

1. $\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^{(3)}\right]\right)$；
以及 2. $\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^{(3)}\right\}\right)$。

稍后，我们将证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^{(3)}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^{(3)}\right\}\right),$$

是零伦的。

$\mathbf{Ind}\left(\boldsymbol{W}\mathbf{(1)}_{\boldsymbol{n}} \setminus \boldsymbol{N}_{\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{n}}^{(1)}}\left[\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2n+1}}^{\mathbf{3}}\right]\right)$ 的同伦类型：

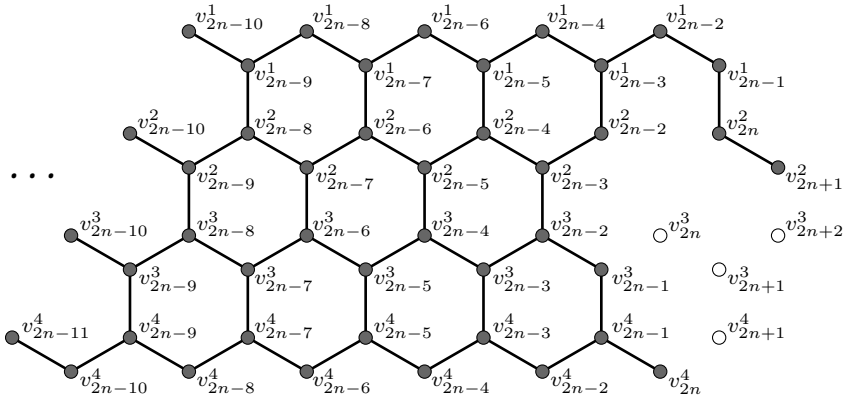

图38：图 $W_{(2)n} = W_{(1)n} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]$。

令 $W_{(2)n} = W_{(1)n} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]$ （见图38）。注意，在 $W_{(2)n}$ 中，我们使用v_{2n}^4将 v_{2n-1}^3和 v_{2n-2}^4折叠。另一方面，我们使用 v_{2n+1}^2将 v_{2n-1}^1 折叠。最后，在折叠 v_{2n-1}^1之后，我们使用 v_{2n-2}^1 将 v_{2n-4}^1 和v_{2n-2}^2 折叠（见图39）。

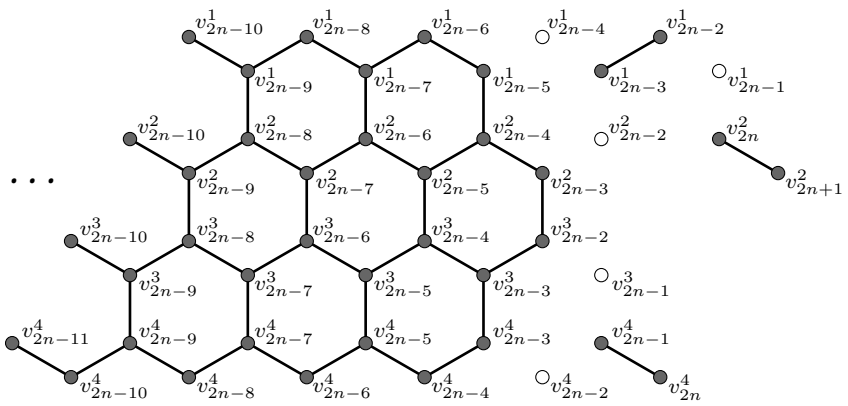

图39： $W_n^{(2)}$中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(2)}\right) \simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right). \tag{5}$$

$\mathrm{Ind}\left(W(1)_n \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right)$ 的同伦类型：

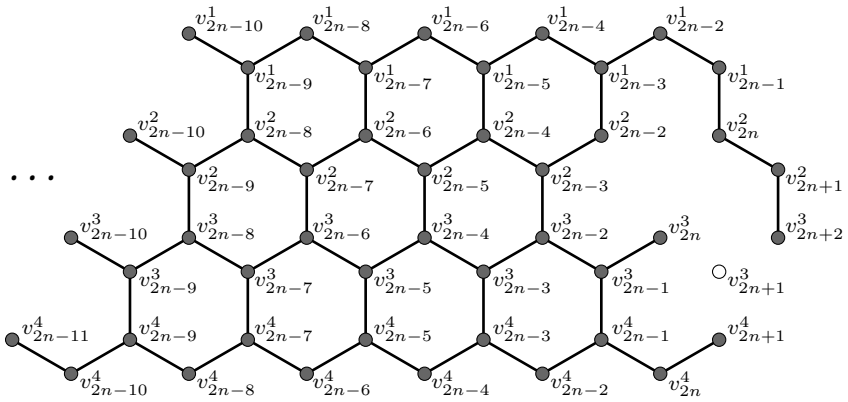

图40：图 $W_{(3}^{}{}_n = W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\})$。

令 $W_{(3}^{}{}_n = W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\})$（见图40）。注意，在 $W_{(3)n}$ 中，我们利用 v_{2n}^3 折叠 v_{2n-2}^3 和 v_{2n-1}^4。折叠 v_{2n-1}^4后，我们利用 v_{2n-2}^4 折叠 v_{2n-3}^3 和 v_{2n-4}^4。另一方面，我们利用v_{2n+2}^3折叠 v_{2n}^2。折叠 v_{2n}^2 后，我们利用 v_{2n-1}^1折叠 v_{2n-3}^1。最后，折叠 v_{2n-3}^1后，我们利用 v_{2n-4}^1 折叠v_{2n-6}^1 和 v_{2n-4}^2 （见图41）。

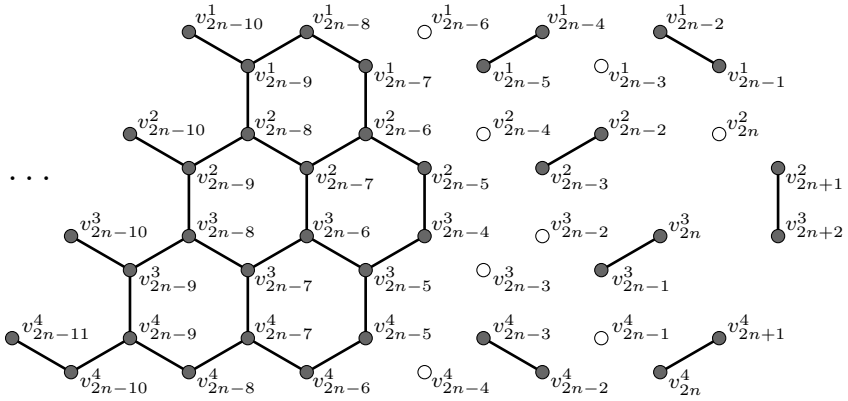

图41： $W_n^{(3)}$中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(3)}\right) \simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right).$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right) \simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right). \tag{6}$$

包含映射 $\mathbf{Ind}\left(W(1)_n \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathbf{Ind}\left(W(1)_n \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right)$是零伦的：为证明这一点，考虑诱导子图 $W_{(4)n} = W_{(1)n} \setminus \left\{v_{2n+1}^3, v_{2n+2}^3, v_{2n+1}^4\right\}$，也就是说，$W_n^{(4)}$恰好是 $W_{(2)n} \sqcup \left\{v_{2n}^3\right\}$（见图42）。回顾一下，$W_{(2}{}_n = W_n^{(1)} \setminus \left[v_{2n+1}^3\right]$

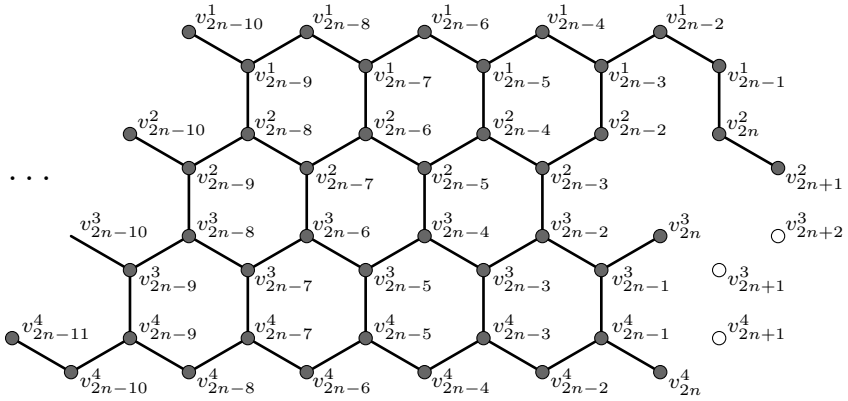

图42：图 $W_{(4}{}_n = W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3, v_{2n+2}^3, v_{2n+1}^4\right\}$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(4)}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right).$$

这里也将采用与上文确定 $\mathrm{Ind}\left(W_n^{(2)}\right)$ 的同伦类型相同的步骤。唯一的例外是，这一过程会在此处留下 v_{2n}^3 作为一个孤立顶点（见图 43）。

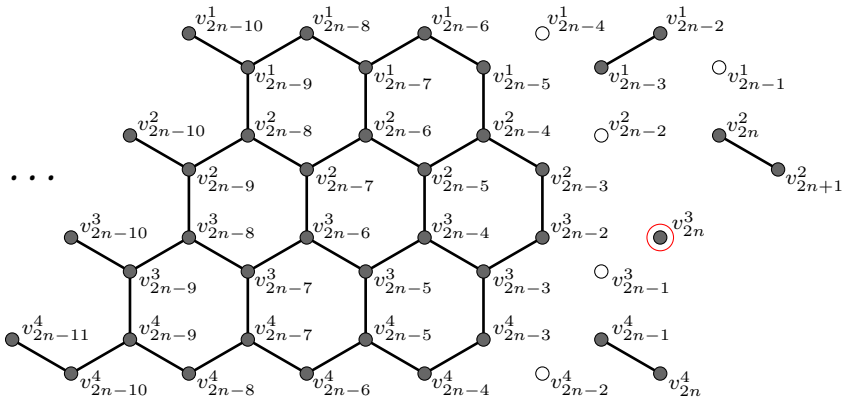

图 43： $W_n^{(4)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(W_n^{(4)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup \left\{v_{2n}^3\right\}\right)\\ &\simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right) * \left\{v_{2n}^3\right\}\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换言之，$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(4)}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(4)}\right),$$

是零伦的。进而，这意味着包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{W_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right),$$

是零伦的。因此，利用定理 2.1、方程（5）和方程（6），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2t+1}^3\right\}\right) \vee \Sigma\left(\mathrm{Ind}\left(W_n^{(1)} \setminus N_{T_n^{(1)}}\left[v_{2t+1}^3\right]\right)\right)\\ &\simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma\left(\Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right)\right)\\ &\simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).$$

定理 5.2 的证明至此完成。 □

定理 5.3。对于 $n \geq 1$,

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)}\right) \simeq \begin{cases}\mathbb{S}^2, & \text{if } n = 1;\\ \mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^5, & \text{if } n = 2;\\ \mathbb{S}^6, & \text{if } n = 3;\\ \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right) \vee \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right), & \text{if } n \geq 4.\end{cases}$$

证明。对于情形 $n=1$，图 $Z_1^{(1)}$ 与图 $X_3^{(2)}$ 同构（见图 4）。因此，结论可由定理 3.3 立即推出。情形 $n=2,\ 3$ 可用与定理 4.3 中初始情形相同的推理得出。

对于 $n \geq 4$，注意到只需证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)$$

是零伦的，因为由此即可根据定理 2.1、定理 5.1 和定理 5.2 得出结论。为此，我们考虑诱导子图 $W_n^{(5)} = Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-2}^2, v_{2n-1}^2, v_{2n}^2\right\}$。

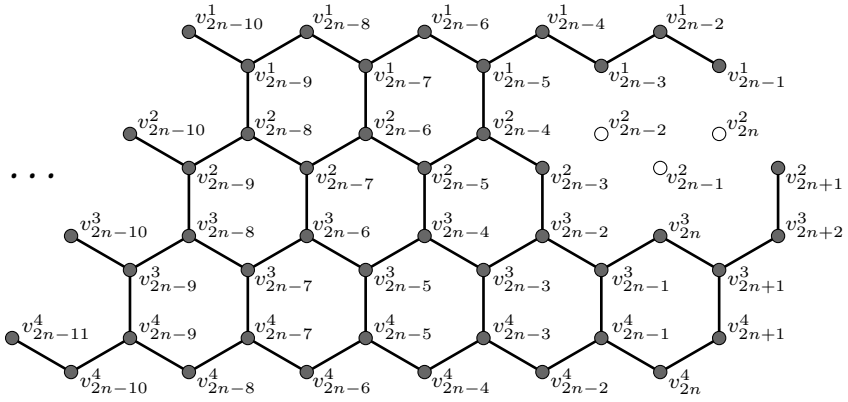

图 44：图 $W_n^{(5)} = Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-2}^2, v_{2n-1}^2, v_{2n}^2\right\}$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(5)}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right).$$

证明定理 5.1 中确定 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right)$ 的同伦类型所用的相同步骤也适用于此处。唯一的例外是，此处该步骤会留下 v_{2n}^3 作为一个孤立顶点（见图 45）。

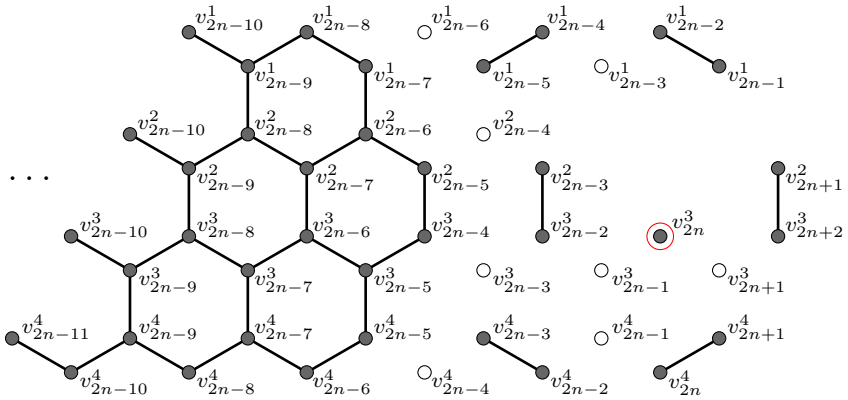

图 45：图 $W_n^{(5)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(W_n^{(5)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup \left\{v_{2n}^3\right\}\right) \\ &\simeq \left(\Sigma^6\left(Z_{n-3}^{(1)}\right)\right) * \left\{v_{2n}^3\right\} \\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

换句话说，$\mathrm{Ind}\left(W_n^{(5)}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射,,

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(W_n^{(5)}\right),$$

是零伦的。这又意味着,

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right),$$

是零伦的。至此，定理 5.3 的证明完成。 □

5.2 $Z_n^{(2)}$ 的独立复形

这里，我们将确定 $Z_n^{(2)}$ 的独立复形的同伦类型，记作 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(2)}\right)$。回忆,

$$Z_n^{(2)} = H_{n+1}^3 \setminus \left\{v_{2n+2}^1, v_{2n+3}^1, v_{2n+4}^2, v_{2n+3}^3, v_{2n+4}^3, v_{2n+2}^4, v_{2n+3}^4\right\},$$

其中 $n \geq 1$。主要结果如下述定理所述。

定理 5.4. 对于 $n \geq 1$，当 n 为奇数时，$Z_n^{(2)}$ 的独立复形是可缩的；当 n 为偶数时，它与一个 $2n+1$ 维球面同伦等价。换言之，我们有

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(2)}\right) \simeq \begin{cases} pt, & \text{if } n \text{ is odd}; \\ \mathbb{S}^{2n+1}, & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

证明. 我们将分别证明 n 为奇数和 n 为偶数的情形。我们将对 n 使用归纳法，并结合折叠引理。

当 n 为奇数时：

对于基本情形，即 $n = 1$，注意到我们使用 $Z_1^{(2)}$ 中的 v_5^2 折叠 v_3^1 和 v_3^2。折叠 v_3^2 后，我们使用 v_4^3 折叠 v_2^3 和 v_3^4。这一过程留下两个诱导的 P_2，以及各一个诱导的 P_3 和 P_4（见图 46）。

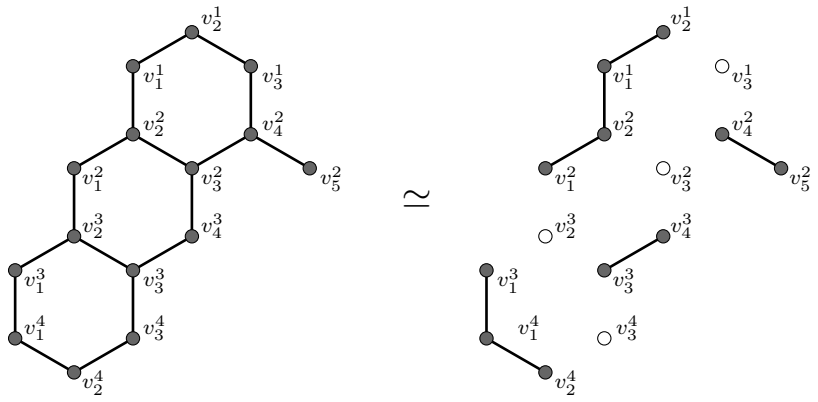

图 46：图 $Z_1^{(2)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3）和定理 2.5，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Z_1^{(2)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(P_4 \sqcup P_3 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^2\left(\mathrm{Ind}\left(P_3\right)\right) * \mathrm{Ind}\left(P_4\right)\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

因此，该结论对 $n=1$ 成立。假设给定的结论对所有奇数 $n \leq 2t+1$ 都成立，我们要证明它对 $n=2t+3$ 也成立。

在 $Z_{2t+3}^{(2)}$ 中，我们利用 v_{4t+9}^2 折叠 v_{4t+7}^1 和 v_{4t+7}^2。折叠 v_{4t+7}^1 后，我们利用 v_{4t+6}^1 折叠 v_{4t+4}^1 和 v_{4t+6}^2。另一方面，折叠 v_{4t+7}^2后，我们利用 v_{4t+8}^3 折叠 v_{4t+6}^3 和 v_{4t+7}^4。最后，折叠v_{4t+7}^4 后，我们利用 v_{4t+6}^4 折叠 v_{4t+5}^3 和 v_{4t+4}^4（见图 47）。

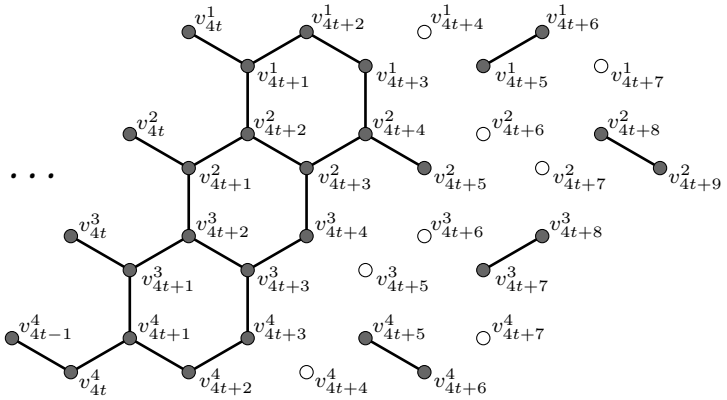

图 47：图 $Z_{2t+3}^{(3)}$中的折叠。

因此，根据折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Z_{2t+3}^{(2)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{2t+1}^{(2)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{2t+1}^{(2)}\right)\right)\\ &\simeq pt.\end{aligned}$$

这就完成了 n 为奇数时的证明。

当 n 为偶数时：

对于基本情形，即 $n=2$，注意到我们在 $Z_2^{(2)}$ 中使用 v_7^2 折叠 v_5^1 和 v_5^2。折叠 v_5^1 后，我们使用 v_4^1 折叠 v_2^1 和 v_4^2。折叠 v_2^1 后，我们使用 v_1^1 折叠 v_1^2 和 v_3^2。另一方面，利用对 v_5^2 的折叠，我们使用 v_6^3 折叠 v_4^3 和 v_5^4。最后，折叠 v_5^4 后，我们使用 v_4^4 折叠 v_3^3 和 v_2^4。这一过程留下五个诱导的 P_2 和一个诱导的 P_3（见图 48）。

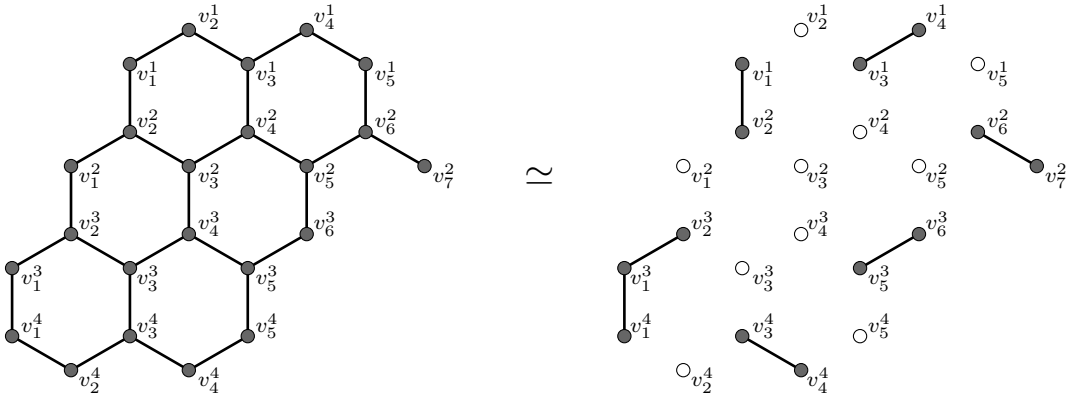

图 48：图 $Z_2^{(2)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3）和定理 2.5，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(Z_2^{(2)}\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(P_3 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^5\left(\operatorname{Ind}\left(P_3\right)\right) \\ &\simeq \Sigma^5\left(\mathbb{S}^0\right) \\ &\simeq \mathbb{S}^5.\end{aligned}$$

因此，该结果对 $n=2$成立。假设给定的结果对所有偶数 $n \leq 2t$都成立，我们要证明它对 $n=2t+2$成立，也就是说，要证明 $\mathbf{Ind}\left(Z_{2t+2}^{(2)}\right) \simeq \mathbb{S}^{4t+5}$。

该步骤与 n 为奇数时所用的步骤类似，只是在标记上略有变化（见图 49）。

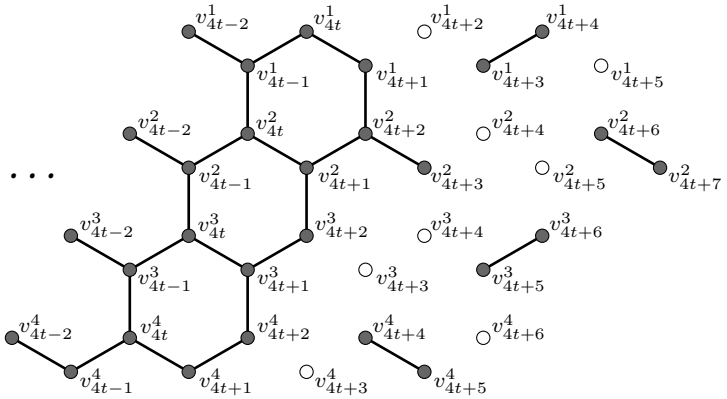

图 49：图 $Z_{2t+2}^{(2)}$中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Z_{2t+2}^{(2)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{2t}^{(2)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{2t}^{(2)}\right)\right)\\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathbb{S}^{4t+1}\right)\\ &\simeq \mathbb{S}^{4t+5}.\end{aligned}$$

这就完成了 n 为偶数时的情形，从而完成了定理 5.4 的证明。 □

5.3 $Z_n^{(3)}$ 的独立复形

这里，我们将确定 $Z_n^{(3)}$ 的独立复形的同伦类型，记作 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)}\right)$。回顾一下，对于 $n \geq 3$,

$$Z_n^{(3)} = H_n^3 \setminus \left\{v_{2n-4}^1, v_{2n-3}^1, v_{2n-2}^1, v_{2n-1}^1, v_{2n}^1, v_{2n+1}^1, v_{2n-2}^2, v_{2n+2}^2\right\}.$$

类似地，对于 $n = 2$, 3,

$$\begin{aligned}Z_1^{(3)} &= H_n^3 \setminus \left\{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^2\right\};\\ Z_2^{(3)} &= H_n^3 \setminus \left\{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_5^1, v_2^2, v_6^2\right\}.\end{aligned}$$

我们再次通过仔细考察 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)}\right)$ 中 v_{2n}^2 的链接与删除来完成这一工作，也就是分别考察 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus N\left[v_{2n}^2\right]\right)$ 和 $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$，然后分析这两个复形之间的包含映射。

引理 5.5. 对于 $n \geq 3$, $\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]\right) \simeq \Sigma^2\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right)$。

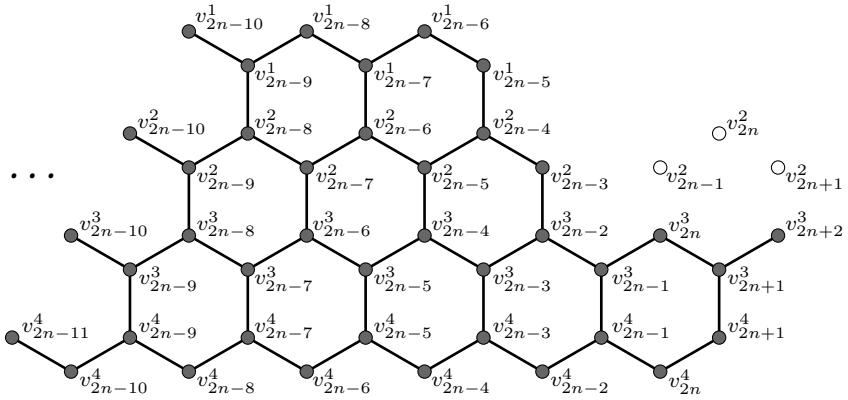

图 50：图 $Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]$。

证明。注意，在 $Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]$（见图 50）中，我们使用 v_{2n+2}^3 折叠 v_{2n}^3 和 v_{2n+1}^4。折叠 v_{2n+1}^4 后，我们使用 v_{2n}^4 折叠 v_{2n-1}^3 和 v_{2n-2}^4（见图 51）。

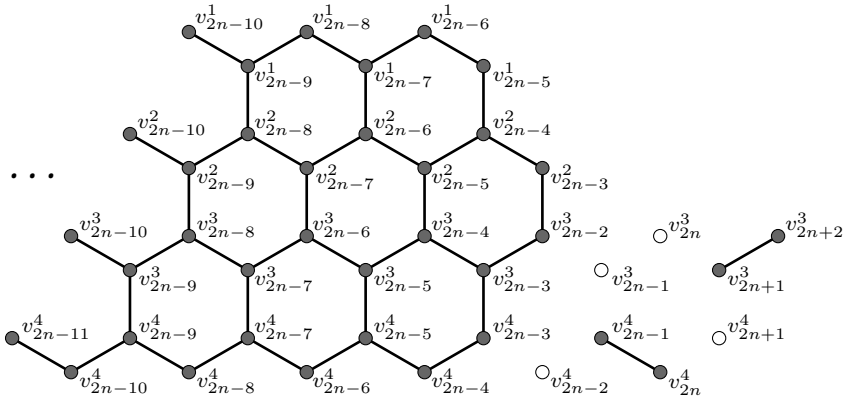

图 51：图 $Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]$中的折叠。

因此，根据折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]\right) &\simeq \operatorname{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^2\left(\operatorname{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

定理 5.5 的证明至此完成。 □

引理 5.6。对于 $n \geq 3$,

$$\operatorname{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^7\left(\operatorname{Ind}\left(Z_{n-2}^{(3)}\right)\right).$$

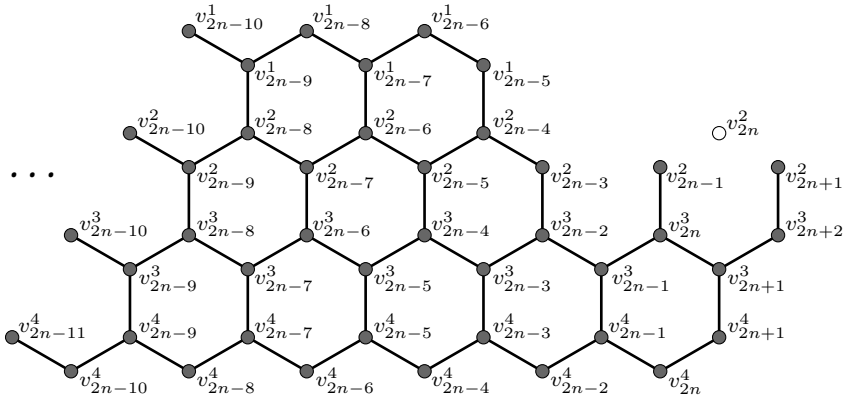

图 52：图 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}$。

证明。我们按照下述步骤对 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}$ 的顶点进行折叠（见图 52）。

(i) 首先，我们使用 v_{2n-1}^2 将 v_{2n-1}^3 和 v_{2n+1}^3 折叠。
(ii) v_{2n+1}^3 折叠后，我们使用 v_{2n+1}^4 将 v_{2n-1}^4 折叠。

(iii) 在 v^4_{2n-1} 折叠后，我们使用 v^4_{2n-2} 将 v^4_{2n-4} 和 v^3_{2n-3} 折叠。(iv) 在（步骤 (i) 中的） v^3_{2n-3} 和 v^3_{2n-1} 折叠后，我们使用 v^3_{2n-2} 将 v^2_{2n-4} 折叠。(v) v^2_{2n-4} 折叠后，我们使用 v^1_{2n-5} 将 v^1_{2n-7} 折叠。(vi) 最后，在 v^1_{2n-7} 折叠后，我们使用 v^1_{2n-8} 将 v^1_{2n-10} 和 v^2_{2n-8} 折叠。

经过这一过程，我们得到了七个由 P_2 诱导的副本，以及 $Z^{(3)}_{n-3}$ （见图 53）。

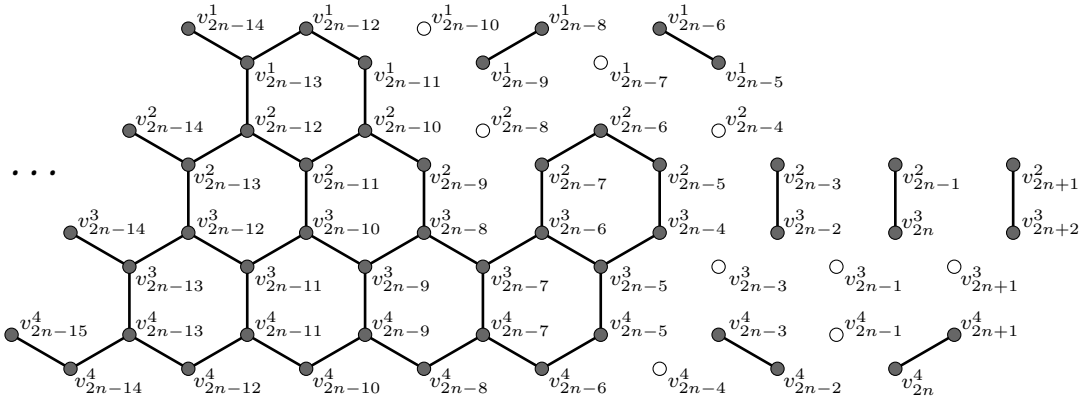

图 53：图 $Z^{(3)}_n \setminus \{v^2_{2n}\}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_n \setminus \{v^2_{2n}\}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3}\right)\right).\end{aligned}$$

定理 5.6 的证明至此完成。 □

现在，我们已经具备讨论 $Z^{(3)}_n$ 的同伦类型所需的全部结果。我们在下面的定理中陈述这一结果。

定理 5.7。对于 $n \geq 1$,

$$\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_n\right) \simeq \begin{cases}\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2, & \text{if } n = 1;\\ \mathbb{S}^4, & \text{if } n = 2;\\ \mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^5, & \text{if } n = 3;\\ \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8 \vee \mathbb{S}^8, & \text{if } n = 4;\\ \Sigma^7\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3}\right)\right) \vee \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(1)}_{n-2}\right)\right), & \text{if } n \geq 5.\end{cases}$$

证明。 当 $n = 1$ 时，此处的图 $Z^{(3)}_1$ 同构于 $H_{1\times1\times2}$ （见图 2），因此结论由定理 3.1 得出。其余所有情形均可沿用定理 4.3 证明中初始情形所给出的相同论证。

对于 $n \geq 5$，注意到只需证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_n \setminus N_{Z^{(3)}_n}\left[v^2_{2n}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_n \setminus \{v^2_{2n}\}\right)$$

是零伦的，因为此时结论可由定理 2.1、定理 5.5 和定理 5.6 得出。

为此，考虑 $Z_n^{(3)}$ 的诱导子图 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$ （见图54）。

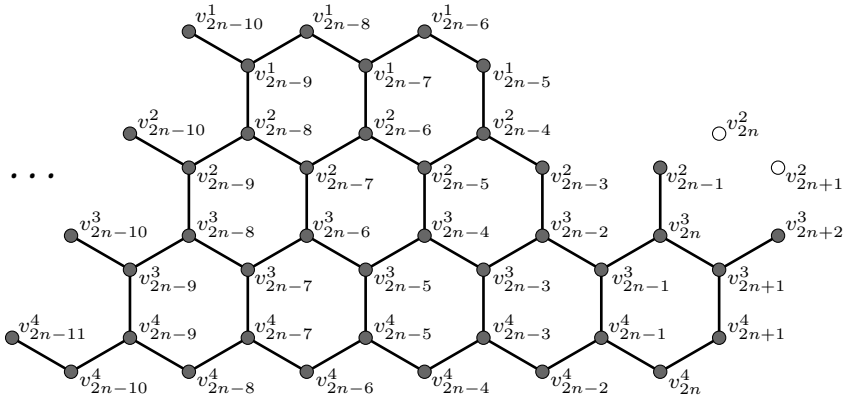

图54：图 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus N_{Z_n^{(3)}}\left[v_{2n}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right).$$

在 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$ 中，我们使用 v_{2n-1}^2 折叠 v_{2n+1}^3。这一过程使 v_{2n+2}^3 成为一个孤立顶点（见图55）。

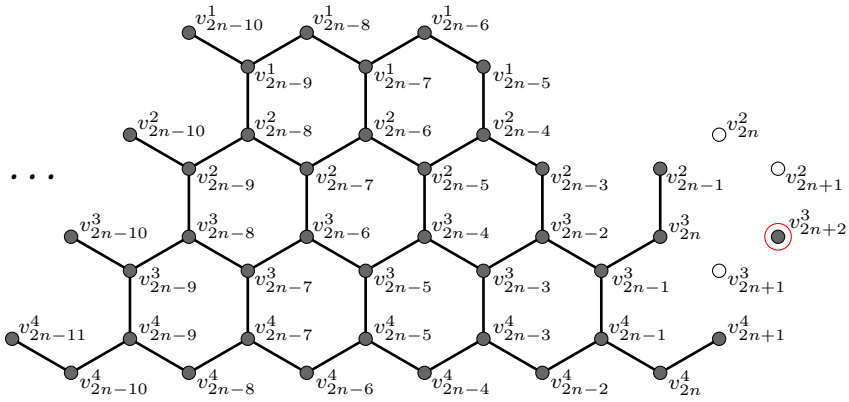

图55：图 $Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(\left(Z_{n-3}^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2, v_{2n+1}^3, v_{2n+2}^3\right\}\right) \sqcup \left\{v_{2n+2}^3\right\}\right) \\
&\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2, v_{2n+1}^3, v_{2n+2}^3\right\}\right) * \left\{v_{2n+2}^3\right\} \\
&\simeq pt.
\end{aligned}$$

换言之，$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}\right)$ 是可缩的。结合定理2.2，这意味着包含映射，，

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(3)} \setminus \left\{v_{2n}^2, v_{2n+1}^2\right\}\right),$$

是零伦的。这进而意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus N_{Z_n^{(1)}}\left[v_{2n-1}^2\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(Z_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n-1}^2\right\}\right),$$

是零伦的。定理 5.7 的证明至此完成。 □

5.4 H_n^3的独立复形

现在我们讨论 H_n^3的独立复形的同伦类型，记作 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right)$。回忆一下， $H_n^3 = H_{1\times 3\times n}$。我们通过考察 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right)$中 v_{2n}^2 的链接与删除，即分别考察 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)$和 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right)$，然后分析这两个复形之间的包含映射。

引理 5.8. 对于 $n \geq 3$，$\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right) \simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right)$。

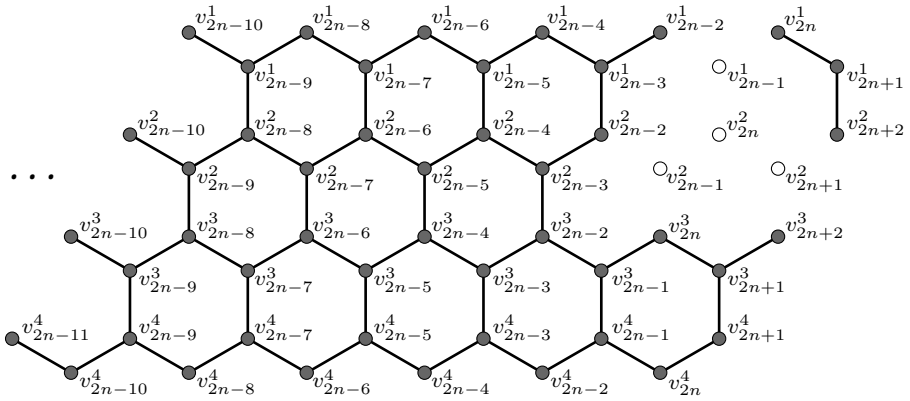

图 56：图 $H_n^3 \setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]$。

证明。 注意，在 $H_n^3 \setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]$ （见图 56）中，我们使用 v_{2n-2}^1 将 v_{2n-4}^1 和 v_{2n-2}^2 折叠。另一方面，我们使用 v_{2n+2}^3 将 v_{2n}^3 和 v_{2n+1}^4 折叠。折叠 v_{2n+1}^4 后，我们使用 v_{2n}^4 将 v_{2n-1}^3 和 v_{2n-2}^4 折叠。最后，我们使用 v_{2n+2}^2 折叠 v_{2n}^1 （见图 57）。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \\ &\simeq \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right).\end{aligned}$$

由此完成定理5.8的证明。 □

引理 5.9。对于 $n \geq 4$,

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right).$$

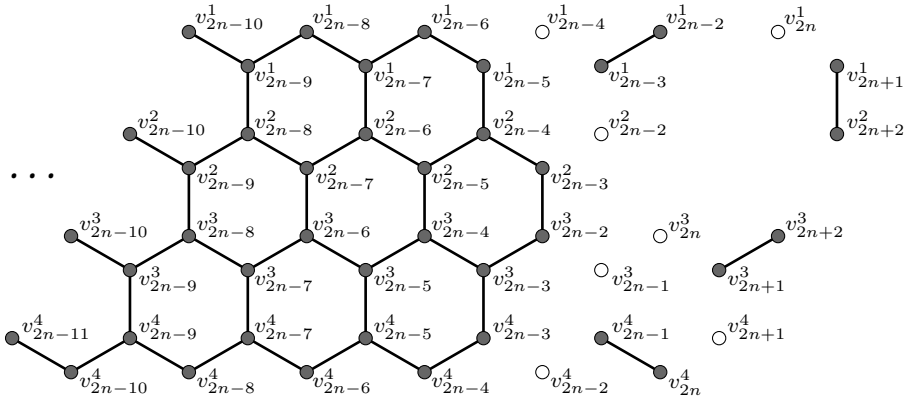

图 57：图 $H^3_n \setminus N_{H^3_n}\left[v^2_{2n}\right]$ 中的折叠。

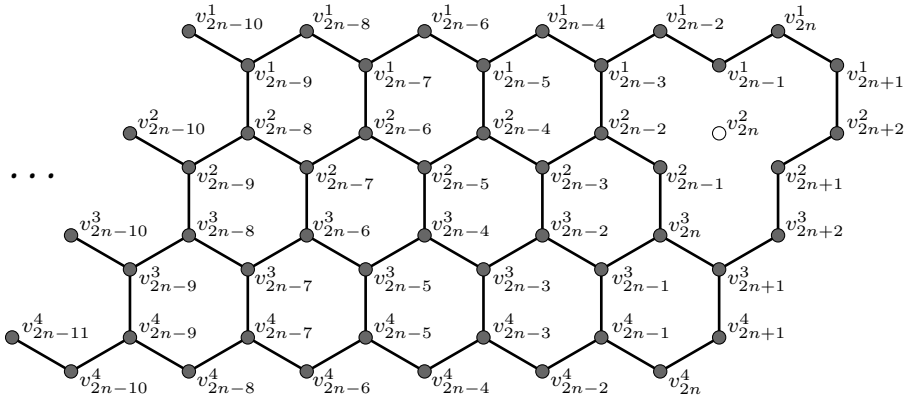

图58：图 $U^{(1)}_n = H^3_n \setminus \left\{v^2_{2n}\right\}$。

证明。令 $U^{(1)}_n = H^3_n \setminus \left\{v^2_{2n}\right\}$（见图58）。我们首先讨论其同伦类型

1. $\mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus N_{U^{(1)}_n}\left[v^3_{2n+1}\right]\right)$；以

及 2. $\mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\}\right)$。

稍后我们将证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus N_{U^{(1)}_n}\left[v^3_{2n+1}\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\}\right),$$

是零伦的。

$\mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus N_{U^{(1)}_n}\left[v^3_{2n+1}\right]\right)$ 的同伦类型：

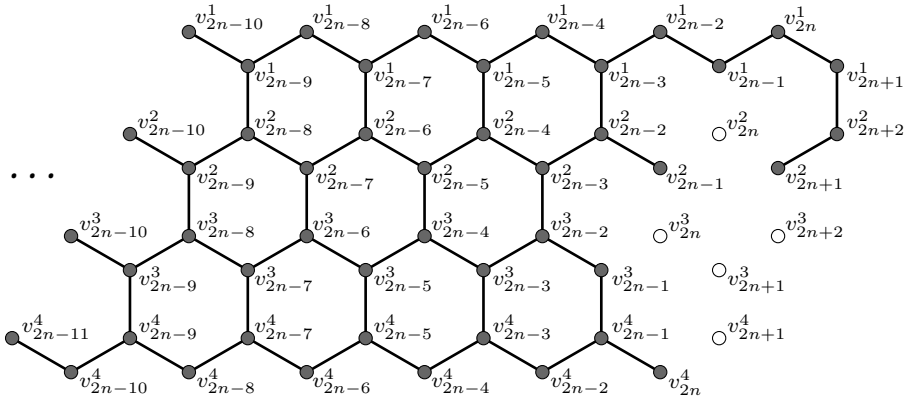

图59：图 $U_{(2}_{n} = U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right])\circ$

设 $U_{(2}_{n} = U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right])$（见图59）。在 $U_{(2)n}$ 中，我们使用 v_{2n+1}^2 折叠 v_{2n+1}^1；随后，按照对 v_{2n+1}^1 的折叠方式，我们使用 v_{2n}^1 折叠 v_{2n-2}^1。另一方面，我们使用 v_{2n}^4 折叠 v_{2n-1}^3 和 v_{2n-2}^4（见图60）。

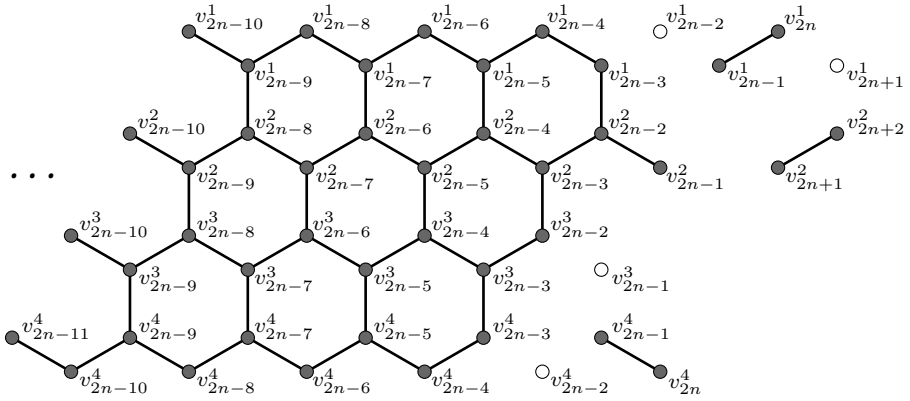

图60：图 $U_n^{(2)}$ 中的折叠。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有：

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(2)}\right) \simeq \mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right) \simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right).$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \simeq \Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right). \tag{7}$$

Ind $\left(U(1)_n \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right)$ 的同伦类型：

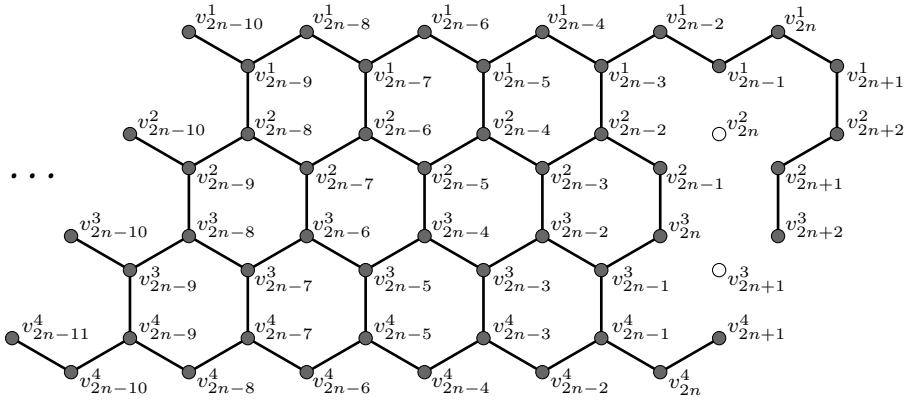

图 6: 图 $U^{(3}_{n} = U^{(1)}_{n} \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\})$.

设 $U^{(3}_{n} = U^{(1)}_{n} \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\})$（见图61）。我们按照下述步骤对 $U_{(3)n}$ 的顶点进行折叠。

(i) 在 $U^{(3)}_n$ 中，我们使用 v^4_{2n+1} 折叠 v^4_{2n-1}。(ii) 折叠 v^4_{2n-1} 后，我们使用 v^4_{2n-2} 折叠v^3_{2n-3} 和v^4_{2n-4}。(iii) 另一方面，我们使用 v^3_{2n+2} 折叠 v^2_{2n+2}。(iv) v^2_{2n+2} 折叠后，我们使用 v^1_{2n+1} 折叠 v^1_{2n-1}。

(v) 折叠 v^1_{2n-1} 后，我们使用 v^1_{2n-2} 折叠 v^1_{2n-4} 和 v^2_{2n-2}。

(vi) v^2_{2n-2} 折叠后，我们使用 v^2_{2n-1} 折叠v^3_{2n-1}。

(vii) 注意， v^3_{2n-3} 已在（步骤 (ii)）中折叠；折叠 v^3_{2n-1} 后，我们使用v^3_{2n-2} 折叠 v^2_{2n-4}。

(viii) 同样，由于 v^1_{2n-4} 已在步骤 (v) 中折叠，在折叠 v^2_{2n-4} 后，我们使用 v^1_{2n-5} 折叠 v^1_{2n-7}。

(ix) 最后，在折叠 v^1_{2n-7} 后，我们使用 v^1_{2n-8} 折叠 v^1_{2n-10} 和 v^2_{2n-8} （见图62）。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(U^{(3)}_n\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3} \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2 \sqcup P_2\right)\\ &\simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3}\right)\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(U^{(1)}_n \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\}\right) \simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z^{(3)}_{n-3}\right)\right). \tag{8}$$

包含映射 $\mathbf{Ind}\left(U(1)_n \setminus N_{U^{(1)}_n}\left[v^3_{2n+1}\right]\right) \hookrightarrow \mathbf{Ind}\left(U(1)_n \setminus \left\{v^3_{2n+1}\right\}\right)$ 是零伦的：

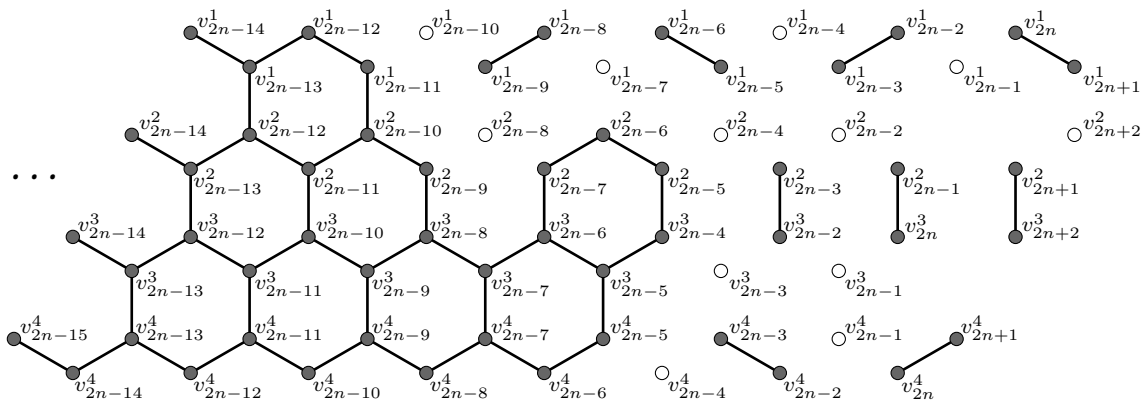

图 6：对图 $U_n^{(3)}$ 进行折叠。

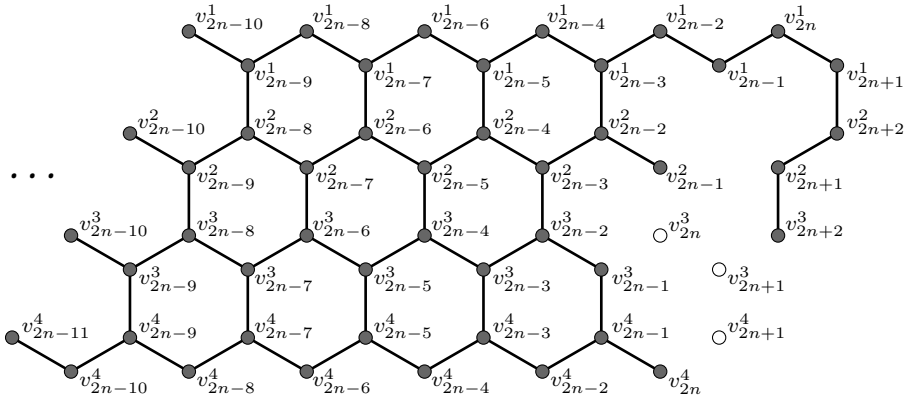

图63：图 $U_{n}^{(4}=U_n^{(1)}\setminus\left\{v_{2n}^3,v_{2n+1}^3,v_{2n+1}^4\right\})$。

为证明这一点，我们考虑诱导子图 $U_{n}^{(4}=U_n^{(1)}\setminus\left\{v_{2n}^3,v_{2n+1}^3,v_{2n+1}^4\right\})$，也就是说，$U_{(4)n}$恰好是 $U_n^{(2)}\sqcup\left\{v_{2n+2}^3\right\}$（见图63）。于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)}\setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(U_n^{(4)}\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)}\setminus\left\{v_{2n+1}^3\right\}\right).$$

在 $U_n^{(4)}$中，我们使用 v_{2n-1}^2折叠 v_{2n-3}^1 和 v_{2n-3}^2。另一方面，我们使用 v_{2n}^4折叠 v_{2n-1}^3 和 v_{2n-2}^4。完成此过程后，剩下两个诱导子图 P_2 的副本和一个诱导子图 P_7 的副本（见图 6），以及 $H_{n-2}^3\setminus\left\{v_{2n-3}^1,v_{2n-3}^2,v_{2n-2}^2\right\}$。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(U_n^{(4)}\right)&\simeq\mathrm{Ind}\left(\left(H_{n-2}^3\setminus\left\{v_{2n-3}^1,v_{2n-3}^2,v_{2n-2}^2\right\}\right)\sqcup P_2\sqcup P_2\sqcup P_7\right)\\&\simeq\Sigma^2\left(\mathrm{Ind}\left(H_{n-2}^3\setminus\left\{v_{2n-3}^1,v_{2n-3}^2,v_{2n-2}^2\right\}\right)\right)*\mathrm{Ind}\left(P_7\right).\end{aligned}$$

利用定理 2.5，我们知道 $\mathrm{Ind}(P_7)\simeq pt$。因此，

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(4)}\right)\simeq pt.$$

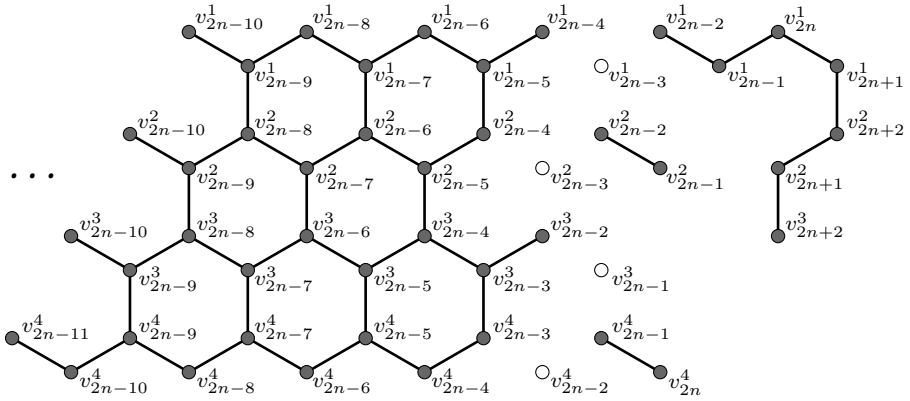

图64：图 $U_n^{(4)}$ 中的折叠。

换言之，$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(4)}\right)$ 是可缩的。这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(U_n^{(4)}\right),$$

是零伦的。这进而意味着包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right) \hookrightarrow \mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right),$$

is n伦的。因此，利用定理 2.1、方程（7）和方程（8），我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)}\right) &\simeq \mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus \left\{v_{2n+1}^3\right\}\right) \vee \Sigma\left(\mathrm{Ind}\left(U_n^{(1)} \setminus N_{U_n^{(1)}}\left[v_{2n+1}^3\right]\right)\right) \\
&\simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)}\right)\right) \vee \Sigma\left(\Sigma^3\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right)\right) \\
&\simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3 \setminus \left\{v_{2n}^2\right\}\right) \simeq \Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right).$$

这就完成了定理5.9的证明。 □

现在我们已经具备了确定 $\mathrm{Ind}\left(H_n^{(3)}\right)$ 的同伦类型所需的全部结果。我们在以下定理中陈述这一结果。

定理5.10。 对于 $n \geq 1$，三重六边形线状铺砌的独立复形，即 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right)$，具有以下同伦类型，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3\right) \simeq \begin{cases}
\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^3, & \text{if } n = 1; \\
\mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^4, & \text{if } n = 2; \\
\mathbb{S}^7, & \text{if } n = 3; \\
\mathbb{S}^6 \vee \mathbb{S}^{10}, \vee \mathbb{S}^{10} \vee \mathbb{S}^{10}, \vee \mathbb{S}^{10}, & \text{if } n = 4; \\
\Sigma^9\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-3}^{(3)}\right)\right) \vee \Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(2)}\right)\right) \vee \Sigma^5\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right), & \text{if } n \geq 5.
\end{cases}$$

证明。显然，H_1^3 和 H_2^3 分别同构于图 $H_{1\times1\times3}$（见图 2）和 $H_{1\times2\times3}$（见图 7）。因此，情形 $n=1$ 和 2 的结论可由定理 3.1 和定理 4.6 得出。其余情形的证明从略，因为证明思路与 $n\geq5$ 的论证相同。这里通过链接与删除操作得到的中间图更为简单，其同伦类型可直接利用折叠引理计算。此外，链接到删除的包含映射是零伦的，因为链接的同伦类型中出现的球面维数严格低于删除的同伦类型中出现的球面维数。

对于 $n\geq5$ 的情形，注意到只需证明包含映射

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus\left\{v_{2n}^2\right\}\right)$$

是零同伦的，因为这样便可由定理5.8、定理5.9和定理 2.1 得出结论。

为此，考虑 $H_n^{(3)}$ 的诱导子图 $U_n^{(5)}=H_n^{(3)}\setminus\left\{v_{2n-1}^1,v_{2n}^2,v_{2n+1}^2\right\}$（见图65）。

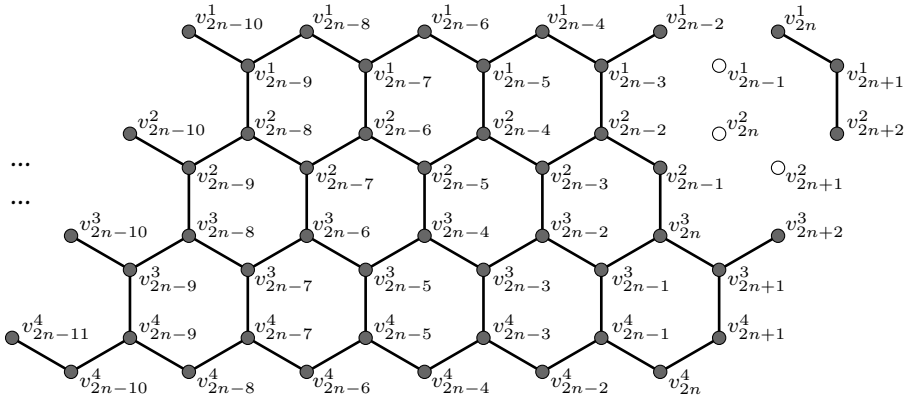

图65：图 $U_n^{(5)}=H_n^{(3)}\setminus\left\{v_{2n-1}^1,v_{2n}^2,v_{2n+1}^2\right\}$。

于是我们得到以下包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(U_n^{(5)}\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus\left\{v_{2n}^2\right\}\right)\right).$$

在定理5.8的证明中用于确定 $\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)$ 的同伦类型的相同步骤在此处同样适用。唯一的例外是，在这里，该步骤会留下 v_{2n-1}^2 作为一个孤立顶点（见图66）。

因此，利用折叠引理（定理2.3），我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\left(U_n^{(5)}\right)&\simeq\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\sqcup P_2\sqcup P_2\sqcup P_2\sqcup P_2\sqcup\left\{v_{2n}^3\right\}\right)\\&\simeq\Sigma^4\left(\mathrm{Ind}\left(Z_{n-2}^{(1)}\right)\right)*\mathrm{Ind}\left(\left\{v_{2n-1}^2\right\}\right)\\&\simeq pt.\end{aligned}$$

换句话说，$\mathrm{Ind}\left(U_n^{(5)}\right)$ 是可缩的。这意味着包含映射，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(U_n^{(5)}\right),$$

是零伦的。这进而意味着，

$$\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus N_{H_n^3}\left[v_{2n}^2\right]\right)\hookrightarrow\mathrm{Ind}\left(H_n^3\setminus\left\{v_{2n}^2\right\}\right),$$

是零伦的。这就完成了定理5.10的证明。 □

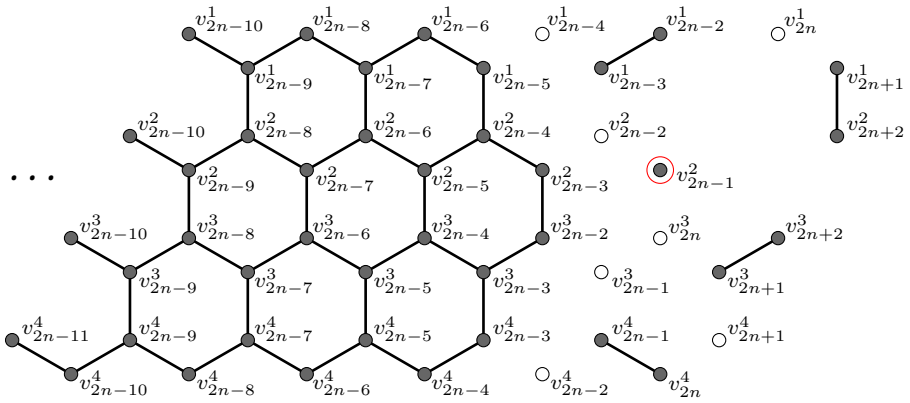

图66：图 $U_n^{(5)}$ 中的折叠。

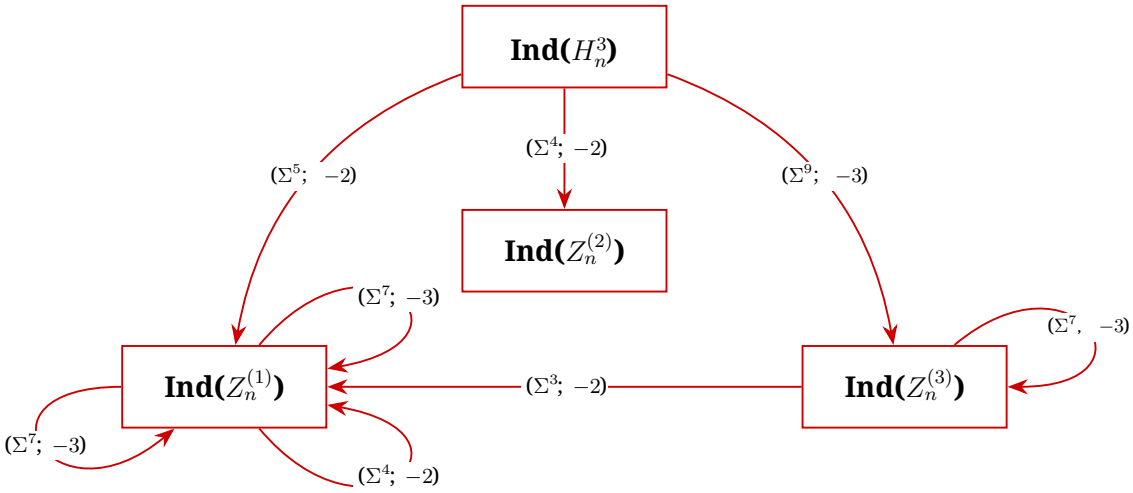

图67：流程图，展示了用于计算 H_n^3 的同伦类型的约简步骤和同伦等价。

图67中的流程图总结了所得结果以及计算 H_n^3的同伦类型的步骤。每个从方框发出的箭头都表示该方框中的独立复形与箭头所指方框中的独立复形同伦等价。箭头表示楔和分解，其标记（$\Sigma^r; s$）指定了同伦类型中出现的悬挂平移 Σ^r，而整数 s 记录了相应步骤中变量 n 变化的量。

致谢

Himanshu Chandrakar 衷心感谢科学与工业研究委员会（CSIR）印度分会通过资助项目 09/1237(15675)/2022-EMR-I 提供的帮助。

参考文献

[1] Micha-l Adamaszek.《独立复形的分解与圈的幂》。载于：《组合理论杂志》A辑 119.5 (2012)，第 1031–1047 页。[2] Jonathan Ariel Barmak.《图的独立复形中的星簇》。载于：Adv. Math. 241 (2013)，第 33–57 页。[3] Mireille Bousquet-M´elou、Svante Linusson 和 Eran Nevo.《方形网格的独立复形》。载于：《代数组合学杂志》27.4 (2008)，第 423–450 页。[4] Benjamin Braun 和 Wesley K. Hough.《与小型网格相关的匹配复形与独立复形》。载于：Electron. J. Combin. 24.4 (2017)，论文编号 4.18，共 20 页。[5] Alexander Engstr¨om.《有向树复形与独立复形》。载于：《离散数学》309.10 (2009)，第 3299–3309 页。[6] Alexander Engstr¨om.《无爪图的独立复形》。载于：《欧洲组合学杂志》29.1 (2008)，第 234–241 页。[7] Allen Hatcher.《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年，第 xii+544 页。[8] Jakob Jonsson.《网格独立复形的某些同调循环》。载于：《离散与计算几何》43.4 (2010)，第 927–950 页。[9] Jakob Jonsson.《图的单纯复形》。第 1928 卷。施普林格，2008 年。[10] Kazuhiro Kawamura.《森林独立复形的同伦类型》。载于：Contrib. Discrete Math. 5.2 (2010)，第 67–75 页。[11] Jinha Kim.《不含长度为 3 的倍数的诱导圈的图的独立复形的同伦类型》。载于：《欧洲组合学杂志》104 (2022)，第 103534 页。[12] Dmitry Kozlov.《组合代数拓扑》。第 21 卷。《算法与计算数学》。施普林格，柏林，2008 年，第 xx+389 页。[13] Dmitry N. Kozlov.《有向树复形》。载于：《组合理论杂志》A辑 88.1 (1999)，第 112–122 页。[14] Takahiro Matsushita.《小型网格的匹配复形》。载于：Electron. J. Combin. 26.3 (2019)，论文编号 3.1，共 8 页。[15] Takahiro Matsushita 和 Shun Wakatsuki.《($n\times4$) 与 ($n\times5$) 网格图的独立复形》。载于：Topology Appl. 334 (2023)，论文编号 108541，共 18 页。[16] Takahiro Matsushita 和 Shun Wakatsuki.《($n \times 6$) 网格图的独立复形》。载于：Homology Homotopy Appl. 26.1 (2024)，第 15–27 页。[17] Samir Shukla、Shuchita Goyal 和 Anurag Singh.《若干图族的独立复形的同伦类型》。载于：Contributions to Discrete Mathematics 16.3 (2021)。[18] Johan Thapper.《由方形网格图和六边形网格图构造的柱面的独立复形》。载于：arXiv 预印本 arXiv:0812.1165 (2008)。[19] Wentao Zhang 和 Hehui Wu.《三元图的独立复形的贝蒂数总和》。载于：《欧洲数学学会杂志》27.1 (2025)，第 269–278 页。