arXiv:2512.21442v1 [math.OA] 24 Dec 2025

离散测度群胚到有限冯·诺伊曼代数的一致有界表示

A. Savini

Abstract. 设 $(\mathcal{G},\nu)$ 是一个 t-离散遍历群胚。考虑一个具有可分前对偶的有限冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$。我们证明，每个一致有界可测表示 $\rho\colon \mathcal{G}\to$GL($\mathcal{M}$) 到 $\mathcal{M}$ 的可逆元素中的表示，都相似于一个酉表示。

1. Introduction

Vasilescu 和 Zsid`o [VZ75] 证明，冯·诺伊曼代数的每个一致有界子群实际上都共轭于一个酉子群。Zimmer [Zim77] 以及 Bates 和 Giordano [BG01] 随后将这一结果推广到了可测余圈的情形。更确切地说，后两位作者证明，每个取值于有限冯·诺伊曼代数可逆元素中的一致有界博雷尔余圈，实际上都与一个酉余圈上同。

将可测余循环视为与可数群的遍历作用相关联的半直积群胚的表示，自然会让人思考 Bates 和 Giordano 的结果是否确实可以推广到更一般的遍历群胚情形。设 $(\mathcal{G},\ \nu)$ 是一个 t- 离散遍历群胚。固定一个冯 · 诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ ，并用 GL($\mathcal{M}$) 表示 $\mathcal{M}$ 中可逆元素在强算子拓扑下构成的集合。映射 $\rho\colon \mathcal{G}\to$ GL($\mathcal{M}$) 称为态射，若存在一个全测度的单位元子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$ ，使得其在某个非本质收缩 $\rho\colon \mathcal{G}|_U^{(1)}\to$ GL($\mathcal{M}$) 上的限制是可测同态。若存在 $C>0$ 使得

$$\|\rho(g)\|<C$$

对于某个 $\mathcal{G}$ 的非本质收缩中的每个 g，均成立。若存在一个全测度子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$ 和一个可测映射 $h:\ \mathcal{G}^{(0)}\to$ GL($\mathcal{M}$)，使得，则称两个态射 $\rho_1,\ \rho_2\colon \mathcal{G}\to$ GL($\mathcal{M}$)相似。

$$\rho_2(g)=h(t(g))\rho_1(g)h(s(g))^{-1}$$

这是合理的，并且对每个 $g\in\mathcal{G}|_U^{(1)}$ 都成立。

我们证明如下结论：

Date：2025年12月29日。© A. Savini。

定理 1. 设$(\mathcal{G},\nu)$ 是一个 t-离散遍历群胚，且 $\mathcal{M}$ 是一个具有可分前对偶的有限冯·诺伊曼代数。每个一致有界的可测表示 $\rho\colon \mathcal{G}\to \mathrm{GL}(\mathcal{M})$ 都相似于一个酉表示。

我们沿用 Boutonnet 和 Roydor [BR18] 的相同策略：利用 CAT(0) 空间中外接中心的几何性质，构造显式的相似变换。

2. Preliminary definitions

2.1. 离散遍历群胚。 群胚 $\mathcal{G}$ 是一个小范畴，其中每个态射都可逆。群胚 $\mathcal{G}$ 由对象集（即单位空间 $\mathcal{G}^{(0)}$）和态射集（记为 $\mathcal{G}^{(1)}$）共同确定。可复合元素 的集合为 $\mathcal{G}^{(2)}\subset \mathcal{G}^{(1)}\times\mathcal{G}^{(1)}$。我们将自然的源映射和目标 映射分别记为 $s:\ \mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(0)}$ 和 $t\colon\ \mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(0)}$。给定单位元 $x,\ y\in\mathcal{G}^{(0)}$，令

$$\mathcal{G}_x:=s^{-1}(x),\quad \mathcal{G}^y:=t^{-1}(y).$$

将 $\mathcal{G}^{(0)}$ 通过识别 $x\mapsto 1_x$ 视为 $\mathcal{G}^{(1)}$ 的子集，可得 $s(g)=g^{-1}g$ 且 $t(g)=gg^{-1}$。若单位元的子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$ 满足不变，则称其为 $\mathcal{G}$-不变的，或简称不变的；也就是说，对每个 $g\in\mathcal{G}^{(1)},\ \ s(g)\in U$ 当且仅当 $t(g)\in U$。给定子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$，限制群胚 $\mathcal{G}|_U$ 是对象为 U、态射由以下集合给出的子群胚

$$\mathcal{G}|_U^{(1)}:=\{g\in\mathcal{G}^{(1)}\ |s(g),t(g)\in U\}.$$

若一个标准博雷尔空间 $(X,\ \mathcal{B})$与某个波兰空间的博雷尔子集同构，则称其为标准博雷尔空间。带有一个 σ-有限博雷尔测度的标准博雷尔空间称为勒贝格空间。若测度有限且归一化为 1，则称其为标准概率空间。若群胚$(\mathcal{G},\ \mathcal{B})$，或简称 $\mathcal{G}$，满足 $\mathcal{G}^{(0)}$ 和 $\mathcal{G}^{(1)}$ 是标准博雷尔空间，且乘法映射 $\mathcal{G}^{(2)}\to\mathcal{G}^{(1)}$ 和逆映射 $\mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{G}^{(1)}$ 都是博雷尔映射，则称其为博雷尔群胚。两个博雷尔群胚 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 之间的可测态射是一个可测映射$\varphi\colon \mathcal{G}\to\mathcal{H}$，且该映射是范畴之间的函子。在此语境下，映射$\varphi^{(0)}:\ \mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{H}^{(0)}$ 和 $\varphi^{(1)}:\ \mathcal{G}^{(1)}\to\mathcal{H}^{(1)}$ 都是博雷尔映射。

若群胚的目标映射具有可数纤维，则称其为t-离散的。对于一个 t-离散的博雷尔群胚，给定其上的概率测度 $\mu\ \mathcal{G}^{(0)}$，我们可以如下定义 $\mathcal{G}^{(1)}$ 上的测度 ν：对于 $E\subset\mathcal{G}^{(1)}$，令

$$\nu(E)=\int_{\mathcal{G}^{(0)}}|\mathcal{G}^x\cap E|d\mu(x).$$

若测度 μ 在逆映射 $g\mapsto g^{-1}$ 下不变，我们称其为不变（若测度 ν 不变，或其测度类在逆映射下不变，则分别称其为准不变）。当 μ 为准不变时，我们称二元组 $(\mathcal{G},\ \nu)$ 为 t-离散测度群胚。有时，我们可能需要使用三元组 $(\mathcal{G},\ \nu,\ \mu)$ 来指定定义在单位元 $\mathcal{G}^{(0)}$ 上的测度。若对于任意不变子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$，都有 $\mu(U)=0$ 或 $\mu(\mathcal{G}^{(0)}\setminus U)=0$，则称 t-离散测度群胚 $(\mathcal{G},\ \nu,\ \mu)$ 为遍历的。

对于一个测度群胚 $(\mathcal{G},\ \nu)$，给定一个全测度子集 $U\subset\mathcal{G}^{(0)}$，我们将非本质收缩到 U 称为限制群胚 $\mathcal{G}|_U$，并赋予其受限

测度。从一个 t-离散遍历群胚 $(\mathcal{G},\ \nu)$ 到另一个博雷尔群胚 $\mathcal{H}$ 的态射 $\varphi:\ \mathcal{G}\to\mathcal{H}$，就是定义在 $\mathcal{G}$ 的某个非本质收缩上的可测态射 $\varphi:\ \mathcal{G}|_U\to\mathcal{H}$。若存在可测映射 $\psi:\mathcal{G}^{(0)}\to\mathcal{H}$，且存在一个全测度子集$U\subset\mathcal{G}^{(0)}$，使得两个态射 $\varphi_1,\ \varphi_2:\ \mathcal{G}\to\mathcal{H}$ 满足

$$s(\psi(x))=\varphi_1(x),\quad t(\psi(x))=\varphi_2(x),$$

对每个 $x\in U$，且

$$\varphi_2(g)=\psi(t(g))\varphi_1(g)\psi(s(g))^{-1}$$

对每个 $g\in\mathcal{G}|_U^{(1)}$。

2.2. 非正曲率下的外接中心。 给定度量空间 (X,d)，考虑其非空有界子集 B。 B 的外接半径 定义为

$$r(B):=\inf_{x\in X}\sup_{y\in B}d(x,y).$$

若以 x 为中心、半径为$r(B)$的闭球包含集合 B，则称点 $x\in X$ 为外接中心。

测地度量空间 (X,d) 称为 CAT(0) 空间，若其满足以下不等式：对每个 $x_1,x_2\in X$，存在 $z\in X$，使得对每个 $x\in X$，均有

$$d(x_1,x_2)^2+4d(z,x)^2\le 2d(x,x_1)^2+2d(x,x_2)^2. \tag{1}$$

在完备 CAT(0) 空间中，每个有界集都有唯一的外接中心，且该外接中心位于该集合的闭凸包中 [AB08，定理 11.26，定理 11.27]。

现在设 $\mathcal{M}$ 为带有迹 τ的有限冯·诺伊曼代数。给定一个元素$x\in\mathcal{M}$，其 L_2-范数定义为 $\|x\|_2:=\tau(x^*x)^{1/2}$。我们用 $\mathrm{GL}^+(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$中的正可逆元集合。给定 $a,\ b\in\mathrm{GL}^+(\mathcal{M})$，我们定义

$$d(a,b):=\|\ln(a^{1/2}ba^{1/2})\|_2.$$

This d 实际上是 $\mathrm{GL}^+(\mathcal{M})$ 上的一个度量，并满足以下性质 [Mig14]:

- 对于任意 $g\in\mathrm{GL}(\mathcal{M})$，都有 $d(a,\ b)=d(g^*ag,\ g^*bg)$。
- 度量 d 满足不等式 (1)。
- 对于每个 $c>1$，度量 d 等价于集合上由范数$\|\cdot\|_2$ 给出的度量

$$\mathrm{GL}_c(\mathcal{M}):=\{x\in\mathrm{GL}^+(\mathcal{M}):1/c\le x\le c\}.$$

对于每个 $c>1$，空间 $\mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$ 都是一个有界、完备且可分的 CAT(0)空间。

3. Proof of the main theorem

我们从一个一致有界的可测表示 ρ: $\mathcal{G}\to$GL($\mathcal{M}$) 开始。对于每个 $x\in\mathcal{G}^{(0)}$，我们定义集合

$$B_x:=\{\rho(g)^*\rho(g)\mid g\in\mathcal{G}_x\}.$$

由 ρ 的一致有界性可知，我们可以假设存在 $c > 1$ 和一个全测度子集 $U \subset \mathcal{G}^{(0)}$，使得

$$B_x \subset \mathrm{GL}_c(\mathcal{M}), \quad \rho(g)^* B_{t(g)} \rho(g) = B_{s(g)},$$

对所有 $x \in U$ 以及所有 $g \in \mathcal{G}|_U^{(1)}$。令 $\sigma(x)$ 为 $\mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$ 中集合 B_x 的外接中心。正如 Abramenko 和 Brown 在 [AB08，定理 11.27，引理 11.28] 中所指出的，元素 $\sigma(x)$ 也是 B_x 在 $\mathrm{GL}(\mathcal{M})$ 中唯一的外接中心。利用 $\mathrm{GL}^+(\mathcal{M})$ 上距离 d 的性质以及外接中心的唯一性，我们得到

$$\rho(g)^* \sigma(t(g)) \rho(g) = \sigma(s(g)),$$

对所有 $g \in \mathcal{G}|_U^{(1)}$。

我们声称，映射 $x \mapsto \sigma(x)^{1/2} \in \mathcal{M}$ 几乎处处与一个博雷尔映射 ψ 重合。我们仿照 [AD05，引理 3.18] 来证明这一断言。由于 $\mathcal{G}$ 是 t-离散的，对于所有 $\vartheta \in \mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$，映射

$$x \in \mathcal{G}^{(0)} \mapsto r(\vartheta, B_x) := \sup_{g \in \mathcal{G}_x} d(\vartheta, \rho(g)^* \rho(g))$$

根据 ρ 的可测性，它是可测的。若固定 $x \in \mathcal{G}^{(0)}$，映射 $\vartheta \mapsto r(\vartheta, B_x)$ 是连续的。由于 $\mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$ 是可分的，该映射

$$x \in \mathcal{G}^{(0)} \mapsto r(B_x) := \inf_{\vartheta \in \mathrm{GL}_c(\mathcal{M})} r(\vartheta, B_x)$$

实际上是对一个可数稠密子集取下确界，因此是可测的。对于任意自然数 $n \geq 1$，我们定义可测丛 $\mathcal{D}_n$ over $\mathcal{G}^{(0)}$ 如下：

$$\mathcal{D}_n := \{(x, \vartheta) \in \mathcal{G}^{(0)} \times \mathrm{GL}_c(\mathcal{M}) \mid r(\vartheta, B_x)^2 \leq r(B_x)^2 + 1/n\}.$$

根据 [Zim84 定理 A.9]，，对于每个 $n \geq 1$，存在一个可测截面 $\xi_n : \mathcal{G}^{(0)} \to \mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$，使得 $(x, \xi_n(x)) \in \mathcal{D}_n$ 对每个 $x \in V \subset \mathcal{G}^{(0)}$ 都成立，其中 V 是余零集。由不等式 (1)，必定存在 $z \in \mathrm{GL}_c(\mathcal{M})$，使得

$$d(\sigma(x), \xi_n(x))^2 + 4d(z, \vartheta)^2 \leq 2d(\sigma(x), \vartheta)^2 + 2d(\xi_n(x), \vartheta)^2$$

对所有 $\vartheta \in B_x$ 都成立。对 B_x 取上确界，得到

$$d(\sigma(x), \xi_n(x))^2 + 4r(z, B_x)^2 \leq 2r(\sigma(x), B_x)^2 + 2r(\xi_n(x), B_x)^2 \leq 4r(B_x)^2 + 2/n.$$

不等式 $r(z, B_x) \geq r(B_x)$ 表明 $\lim_n \xi_n = \sigma$ 几乎处处成立，因此 $x \mapsto \sigma(x)^{1/2}$ 几乎处处与一个博雷尔映射 ψ 重合。

现在只需注意到

$$g \mapsto \psi(t(g)) \rho(g) \psi(s(g))^{-1}$$

是一个与 ρ 相似的酉表示。证明完毕。

References

[AB08] P. Abramenko 和 K. S. Brown, *Buildings, theory and applications*, Springer New York, 2008 3, 4。引用页码：AD C. Anantharaman-Delaroche, [05] *Cohomology of property T groupoids and applications*, 《遍历理论与动力系统》 **25** 2005 4, 977 1013 4 ( ), 第 – 期。引用页码：BG T. Bates 和 [01] *Bounded cocycles on finite von neumann algebras* T. Giordano, , 国际数学杂志 **46** 2001 743 750 1 ( ), –。引用页码：BR R. Boutonnet 和 J. [18] *A note on uniformly bounded cocycles into finite von neumann* Roydor, *algebras* **61** 2018 236 239 , 《加拿大数学通报》( ), –。 2 引用页码：[14] Mig M. Miglioli, *Unitarization of uniformly bounded subgroups in finite von neumann algebras*, 《伦敦数学会通报》 **46** 2014 1264 1266 3 ( ), –。引用页码：VZ F. H. Vasilescu 和 L. Zsido, [75] *Uniformly bounded groups in finite w*-algebras*, 《数学科学学报》 **36** 1975 189 192 1 ( ), –。 [77] 引用页码：Zim R. J. Zimmer, *Compactness conditions on cocycles of ergodic transformation groups*, 《伦敦数学会杂志》 **15** 1977 2, 155 163 1 ( ), 第 – 期。引用页码：Zim R. J. Zimmer, , 数学专著丛书, [84] *Ergodic theory and semisimple groups* 第 81 卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1984 年。引用页码：4

Department of Mathematics, University of Milano-Bicocca, Milan, Italy
Email address: alessio.savini@unimib.it