arXiv:2512.21449v1 [math.AC] 24 Dec 2025

由相邻二阶子式生成的理想的极小素理想与根性

TAKAYUKI HIBI、Francesco Navarra、Ayesha Asloob Qureshi 和 Sara Saeedi Madani

Abstract. 本文以所谓的可容许集及其对应的格理想为基础，完整描述了由相邻二阶子式生成的理想的极小素理想。我们证明，对于这些理想，无混合、Cohen–Macaulay、层、Gorenstein 和完全交这几种性质彼此等价。此外，我们给出一种组合刻画，描述所有具有上述任一等价性质的凸单元集。最后，我们研究这些理想的根式性，并基于极小非根配置推导出必要的组合条件。

Introduction

行列式理想是交换代数和代数几何中的经典研究主题，且已得到广泛研究（[1, 2, 11]）。在行列式理想的多种推广中，一个重要且广受研究的类别是由相邻2–子式生成的理想。

设 $X = (x_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ 是域 K 上的 $m \times n$ 元不定元矩阵。一个相邻二阶子式是形如 $x_{i,j}x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j}x_{i,j+1}$ 的二项式，它由 X 的一个 2×2 子矩阵的行列式给出。由相邻二阶子式生成的理想自然出现在若干背景中，包括格理想和环面理想的研究 [6]，以及代数统计学中的应用，尤其是列联表理论。列联表是行和列之和（称为边际和）固定的非负整数矩阵，参见 [5, 10]。从统计学角度看，一个基本问题是理解具有给定边际和的所有列联表所构成的空间，特别是确定该空间在适当的局部变换下是否连通。这类变换通常称为移动，是对表格进行的整数值修改，在保持所有元素非负的同时保留行和与列和。一类基本移动来自相邻 2×2 子矩阵：将两个对角线元素 (i, j) 和 $(i+1, j+1)$ 各增加一，同时将其余两个元素各减少一，即可得到一个行和与列和相同的新列联表，前提是所有元素仍然非负。在代数上，这类移动对应于相邻二阶子式，而由所有这些二项式生成的理想 $I_{\mathrm{adj}}(X)$ 则编码了列联表空间的连通性。根据 [5, 第 4]，节，两个边际和相同的表格能够通过相邻 2×2 移动相互连通，当且仅当相应的二项式属于 $I_{\mathrm{adj}}(X)$。

受这些联系的启发，人们对由相邻二阶子式生成的理想的代数结构，尤其是它们的主分解和极小素理想，进行了广泛研究。Ho ̧sten 和 Sullivant [13] 给出了 $I_{\mathrm{adj}}(X)$ 的极小素理想的完整组合描述。在这一视角的基础上，Herzog 和 Hibi [8] 开始系统研究由任意相邻二阶子式集合生成的理想。通过将这些理想解释为单元格集合，他们建立了一个组合框架，从而得以研究这些理想的素性、根式性和主分解，尤其是在凸情形下。

2020年 数学主题分类。 05B50, 05E40, 13F20, 13P10.关键词和短语。 相邻二阶子式、极小素理想、格理想、主分解、根式。

本文大幅拓展了 [8] 开创的研究方向。我们完整描述了与任意单元格集合相关、由相邻二阶子式生成的理想的极小素理想。由此，我们证明每个无混合相邻二阶子式理想都是完全交，并给出了满足这些等价条件的所有凸单元集的组合刻画。此外，我们还研究了这类理想的根式性，并建立了若干必要条件。

本文组织如下。第 1 节介绍全文所需的定义。第 2 节全面描述与单元格集合相关联的相邻二阶子式所生成理想的极小素理想。该描述以可容许集和格理想的形式给出（见 [8, 引理 3.1]）。我们的结果推广了先前已知的描述（见 [8, 引理 3.1]），并在证明第 3 节的一项主要结果中发挥核心作用。

定理 0.1（定理 3.1）。设 $\mathcal{C}$ 为一个单元集合，并设 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subset S_{\mathcal{C}} = K[x_v \mid v \text{ 是 } \mathcal{C}]$ 的一个顶点，记其相邻2–子式理想为。则以下条件等价：

(1) $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是完全交；*(2)* $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是 *Gorenstein*；*(3)* $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是层；*(4)* $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是 *Cohen–Macaulay*；*(5)* $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合。

M此外，若 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足上述条件，则 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}|$。

读者可参阅 [1]，了解这些性质的更多细节。从组合—代数的角度来看，我们研究单元集合的形状须满足哪些必要条件，才能使定理 3.1 中列出的等价性质成立。在引理 3.2 和引理 3.3 中，我们证明，要满足这些性质中的任意一项，单元集合都必须避开正方形四格骨牌和一个X—五格骨牌，见图 2。此外，当单元集合是凸的时，缺少这两种构型不仅是必要条件，也是定理 3.1 中性质成立的充分条件。由此得到一个完整的组合刻画，具体表述如下。

定理 0.2 (定理 3.5)。设 $\mathcal{C}$ 为一个凸单元集合。那么，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足定理 *3.1* 中的等价条件，当且仅当 $\mathcal{C}$ 既不包含正方形四格骨牌，也不包含X-五格骨牌。

然而，正如备注 3.7 中的一个反例所示，这一结果无法推广到凸情形之外。第 4 节致力于研究根式性，其动机是推论 4.1 中通过描述极小素理想给出的初级分量的组合解释。从计算的角度来看，我们使用计算机代数系统（见 [15]）探索实例，并验证与根式性相关的猜想模式。特别地，我们在定理 4.5 中证明，在所有秩大于 6 的单元格集合中，始终存在一个极小非根式的单元格集合，也就是说，该集合不是根式的，但其每个弱连通子集合都是根式的（见定义 4.2）。最后，我们在定理 4.8 中给出根式性的必要条件。

1. Preliminaries

设 $(i,j),(k,l) \in \mathbb{Z}^2$。我们定义偏序 $(i,j) \leq (k,l)$ 当且仅当 $i \leq k$ 且 $j \leq l$。给定 $a=(i,j)$ 和 $b=(k,l)$，属于 $\mathbb{Z}^2$ 且满足 $a \leq b$，集合

$$[a,b] = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : i \leq m \leq k,\ j \leq n \leq l\}$$

称为 $\mathbb{Z}^2$ 的区间。如果 $i<k$ 且 $j<l$，则称区间 $[a,b]$ 为真区间；此时，我们将 a 和 b 称为 $[a,b]$ 的对角顶点，并将 $c=(i,\ l)$ 和 $d=(k,\ j)$ 称为

反对角顶点。如果 $j = l$ （分别地， $i = k$），则称 a 和 b 处于水平（分别地，垂直）位置。满足 $b = a + (1,\ 1)$ 的真区间 $C = [a, b]$ 称为 $\mathbb{Z}^2$ 的单元。点 a、 b、 c 和 d 分别称为 C 的左下角、右上角、左上角和右下角。我们用

$$V(C) = \{a, b, c, d\} \quad \text{and} \quad E(C) = \{\{a, c\}, \{c, b\}, \{b, d\}, \{a, d\}\}$$

C的顶点集和边集，分别为。

对于 $\mathbb{Z}^2$中非空的单元集合 $\mathcal{C}$ ，我们分别将 $\mathcal{C}$的顶点集和边集定义为

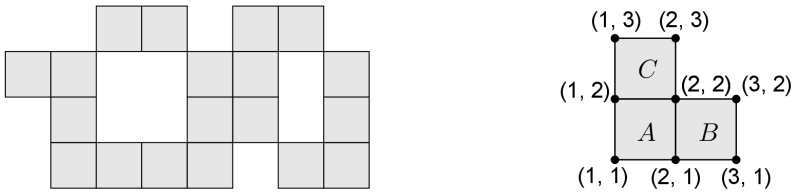
$$V(\mathcal{C}) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} V(C), \qquad E(\mathcal{C}) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} E(C).$$

$\mathcal{C}$的秩记为 $|\mathcal{C}|$，它等于 $\mathcal{C}$中所含单元的数量。

给定 $\mathcal{C}$中的两个不同单元 C 和 D ，在 $\mathcal{C}$ 中从 C 到 D 的游走（分别地，弱游走）是 $\mathbb{Z}^2$ 中的单元序列 $\mathcal{C}$： $C = C_1$、.....、 $C_m = D$，满足对于所有 $i = 1$、.....、 $m - 1$， $C_i \cap C_{i+1}$是 C_i和 C_{i+1}的公共边（分别地，公共边或顶点）。此外，如果序列中的所有单元都互不相同，即对于所有 $i \neq j$都有 $C_i \neq C_j$ ，那么 $\mathcal{C}$ 称为从 C 到 D的路径（分别地，弱路径）。

如果在 $\mathcal{C}$ 中存在一条从 C 到 D 的路径（分别地，弱路径），则称两个单元 C 和 D 在 $\mathcal{C}$ 中连通（分别地，弱连通）。多格骨牌 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{Z}^2$ 中的有限单元集合，其中任意两个单元在 $\mathcal{P}$中都连通。若有限非空单元集合 $\mathcal{C}$ 中的任意两个单元在 $\mathcal{C}$中都弱连通，则称 $\mathcal{C}$ 为弱连通。

集合 $\mathcal{C}$ 的一个连通分支 $\mathcal{C}'$ 是包含于 $\mathcal{C}$ 中且关于包含关系极大的多格骨牌；也就是说，若 $A \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{C}'$，则 $\mathcal{C}'\cup\{A\}$ 不是多格骨牌。例如，图 1 (A) 所示的弱连通单元集合由四个连通分支组成。注意，每个多格骨牌都是弱连通单元集合。此外，为了约定起见，我们也将空集视为单元集合。



(A) (B)

FIGURE 1. 弱连通单元集合与多格骨牌。

考虑 $\mathbb{Z}^2$ 中的两个单元 A 和 B，其左下角分别为 $a = (i,\ j)$ 和 $b = (k,\ l)$ ，且 $a \leq b$。单元区间 $[A, B]$，也称为矩形，是 $\mathbb{Z}^2$ 中所有单元构成的集合，其中左下角 $(r,\ s)$ 满足 $i \leqslant r \leqslant k$ 和 $j \leqslant s \leqslant l$。

如果 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合，那么 $\mathcal{C}$ 的极大矩形 是由 $\mathcal{C}$ 中的单元构成的矩形 $\mathcal{R}$ ，并且不存在另一个由 $\mathcal{C}$ 中的单元构成且真包含 $\mathcal{R}$的矩形。此外，如果区间 $[a, b]$ 是$\mathbb{Z}^2$ 的最小区间，且按照集合包含关系包含 $V(\mathcal{C})$，则称其为 $\mathcal{C}$ 的最小包围盒 。

在确立了前述组合定义和记号之后，我们现在转向交换代数。在 [8]和 [16], 中，作者引入了单元集合的相邻二阶子式理想和内部 2-子式理想 的概念，我们在此简要回顾。

设 $\mathcal{C}$ 是一个有限且非空的单元集合， $S_{\mathcal{C}} = K[x_v \mid v \in V(\mathcal{C})]$ 是其多项式环，其中 K 是一个域。若真区间 $[a,b]$ 中包含的所有单元都属于 $\mathcal{C}$，则称 $[a,b]$ 为 $\mathcal{C}$ 的内部区间 。

若 $[a,b]$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个内部区间，其对角顶点为 a 和 b，反对角顶点为 c 和d，则考虑二项式 $x_ax_b - x_cx_d \in S_{\mathcal{C}}$，称其为 $\mathcal{C}$的内部 2-子式 。特别地，若 $[a,b]$ 是 $\mathcal{C}$的一个单元，则称 $x_ax_b - x_cx_d$ 为 $\mathcal{C}$的相邻 2-子式 。

由 $\mathcal{C}$的所有相邻二阶子式生成的 $S_{\mathcal{C}}$中的理想 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$，称为 $\mathcal{C}$的相邻二阶子式理想 。我们用 $\mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 表示 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$的所有形如$x_ax_b - x_cx_d$ 的二项式生成元组成的集合，其中 $[a,b]$ 是一个单元。

类似地，由 $\mathcal{C}$的所有内部 2-子式生成的 $S_{\mathcal{C}}$中的理想 $I_{\mathcal{C}}$ ，称为 $\mathcal{C}$的内部 2-子式理想 。显然，我们有 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq I_{\mathcal{C}}$。

例 1.1. 考虑图 1 (B) 中的多格骨牌 $\mathcal{P}$，并假设 $V(\mathcal{P}) = [(1,1),(3,3)]$。那么， $\mathcal{P}$ 的相邻二阶子式理想为

$$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}) = \big(x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2},\ x_{3,2}x_{2,1} - x_{3,1}x_{2,2},\ x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3}\big).$$

$\mathcal{P}$ 的内部 2-子式所生成的理想 $I_{\mathcal{P}}$ 为

$$x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2},\ x_{3,2}x_{1,1} - x_{3,1}x_{1,2},\ x_{3,2}x_{2,1} - x_{3,1}x_{2,2},\ x_{2,3}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,3},\ x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3}.$$

最后，让我们回顾一个重要性质。若 $\mathcal{C}$ 是可以表示为单元集合 $\mathcal{C}_1$，……，$\mathcal{C}_r$ 之并的单元集合，并且 $V(\mathcal{C})$ 是顶点集 $V(\mathcal{C}_j)$ 的不交并，其中 $j \in [r]$，则有以下同构：

$$S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \cong \bigotimes_{i=1}^{r} \left(S_{\mathcal{C}_i}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}_i)\right), \qquad S_{\mathcal{C}}/I_{\mathcal{C}} \cong \bigotimes_{i=1}^{r} \left(S_{\mathcal{C}_i}/I_{\mathcal{C}_i}\right).$$

许多常见研究的代数性质（如 Cohen–Macaulay 性和 Gorenstein 性）在张量积下保持不变。因此，只考虑弱连通单元集合并不失一般性。本文中，每当我们提到“单元集合”时，均指弱连通单元集合。

2. Minimal primes of adjacent 2-minor ideals

本节旨在研究由单元集合生成的相邻二阶子式理想的极小素理想。接下来，我们将 [8, 定理 3.2] 推广到更一般的情形。在此之前，我们先介绍一些预备性的代数和组合工具。首先回顾单元集合的格理想的定义，如 [16]中所给出。

设 $\mathcal{C}$ 为一个单元集合。对每个 $a \in V(\mathcal{C})$，记$\mathbf{v}_a$ 为 $\mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$ 中在以 a 为指标的坐标上取值为 1 、在所有其他坐标上取值为 0 的向量。若 $C = [a,b] \in \mathcal{C}$ 是一个单元，其对角顶点为 a, b，反对角顶点为 c, d，则令$\mathbf{v}^{[a,b]} = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b - \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_d \in \mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$。定义 $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 为由所有 $C \in \mathcal{C}$对应的向量$\mathbf{v}_C$ 生成的 $\mathbb{Z}^{|V(\mathcal{C})|}$ 的子格。注意， $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 的秩等于 $|\mathcal{C}|$。

设 $n = |V(\mathcal{C})|$。对于 $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$，我们用 $x^{\mathbf{v}}$ 表示 $S_{\mathcal{C}}$ 中的单项式，其指数向量为$\mathbf{v}$ 。对于$\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^n$，我们用$\mathbf{e}^+$ 表示由$\mathbf{e}$将所有负分量替换为零后得到的向量，并用$\mathbf{e}^- = -(\mathbf{e} - \mathbf{e}^+)$表示相应的非正部分。

设 $L_{\mathcal{C}}$ 为 $\Lambda_{\mathcal{C}}$的格理想，也就是说，它是 $S_{\mathcal{C}}$中的下列二项式理想：

$$L_{\mathcal{C}} = (\{x^{\mathbf{e}^+} - x^{\mathbf{e}^-} \mid \mathbf{e} \in \Lambda_{\mathcal{C}}\}).$$

给定一个单元集合 $\mathcal{C}$，理想 $L_{\mathcal{C}}$ 是素理想，参见 [16, 第 288] 页。此外， [16, 定理 3.6] 证明了， $I_{\mathcal{C}}$ 是素理想当且仅当 $I_{\mathcal{C}} = L_{\mathcal{C}}$。

命题 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合。那么 $L_{\mathcal{C}}$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的极小素理想。此外，高度$(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) \leq |\mathcal{C}|$。

证明。 假设存在一个素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq L_{\mathcal{C}}$. 我们证明 $L_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p}$。 令 $f \in L_{\mathcal{C}}$。 根据 [12, 命题 1.1], , 我们有

$$L_{\mathcal{C}} = I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) : \left(\prod_{a \in V(\mathcal{C})} x_a \right)^{\infty}.$$

因此，存在一个单项式 $u \in S_{\mathcal{C}}$ 使得 $uf \in I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$。由于 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}$，可得$uf \in \mathfrak{p}$。若 $f \notin \mathfrak{p}$，则根据 $\mathfrak{p}$ 的素性，我们必有 $u \in \mathfrak{p}$。同样，根据 $\mathfrak{p}$的素性，这意味着 u 中至少有一个变量属于 $\mathfrak{p}$。然而，由于 $\mathfrak{p} \subseteq L_{\mathcal{C}}$，这就意味着 $L_{\mathcal{C}}$ 包含一个变量，这与事实矛盾，因为 $L_{\mathcal{C}}$ 不包含任何变量。现在，根据 {17}定理 2.1 (b)] ，众所周知，若 Λ 是一个格，则其格理想 L_{Λ}的高度等于 Λ的秩。在本例中， $\Lambda_{\mathcal{C}}$ 的秩等于 $|\mathcal{C}|$。于是 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) \leq \mathrm{ht}(L_{\mathcal{C}}) = |\mathcal{C}|$。 □

现在我们回顾可容许集的概念，该概念由 [8], 引入，在描述相邻二阶子式理想的极小素理想时起着核心作用。

定义 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合。若子集 $W \subseteq V(\mathcal{C})$ 满足：对于 $\mathcal{C}$ 中的每个单元 C， $W \cap C = \emptyset$ 或 $W \cap C$ 至少包含 C 的一条边，则称 $W \subseteq V(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的可容许集 。

下面的例子说明这个定义。

例 2.3. 设 $\mathcal{P}$ 是图 1(B) 中所示的多格骨牌。考虑 $W = \{(1,3),(2,3)\}$. 那么W 是 $\mathcal{P}$ 的一个可容许集。事实上，我们有 $W \cap A = W \cap B = \emptyset$，且 $W \cap C$ 是 C 的一条边。现在考虑 $W' = \{(1,1),(2,1)\}$. 由于 $W' \cap B = \{(2,1)\}$，这个集合不是可容许集。

给定一个可容许集，我们可以为其关联一个细胞子集和一个自然定义的素理想，如下所示。

定义 2.4。 设 W 是 $\mathcal{C}$ 的一个可容许集。我们定义以下单元集合 s

$$\mathcal{C}_W = \{C \in \mathcal{C} : C \cap W = \emptyset\},$$

以及与之关联的理想

$$P_W(\mathcal{C}) = (x_w : w \in W) + L_{\mathcal{C}_W},$$

其中 $L_{\mathcal{C}_W}$ 是附属于 $\mathcal{C}_W$ 的格理想。

下面的评注记录理想 $P_W(\mathcal{C})$ 的两个基本性质，这些性质将在下文中反复使用。

注 2.5。 对于任意可容许集 $W \subseteq V(\mathcal{C})$，理想 $P_W(\mathcal{C})$ 都是素理想。这是因为 $(x_w : w \in W)$ 和格理想 $L_{\mathcal{C}_W}$ 是涉及互不相交变量集的素理想。此外，根据构造， $P_W(\mathcal{C})$ 包含 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$。最后，我们有

$$\mathrm{ht}\big(P_W(\mathcal{C})\big) = |W| + |\mathcal{C}_W|,$$

因为 $\mathrm{ht}\big(L_{\mathcal{C}_W}\big) = |\mathcal{C}_W|$，正如命题 2.1 证明的最后一部分所述。

下面的定 理显示， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的所有极小素理想都由可容许集产生 s.

定理 2.6。 设 $\mathcal{C}$ 为单元集合，且 $\mathfrak{p}$ 为 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想。那么存在 $\mathcal{C}$ 的一个可容许集 W，使得 $\mathfrak{p} = P_W(\mathcal{C})$。

证明。 根据命题 2.1， $L_{\mathcal{C}}$ 是 $I_{\text{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想。若 $\mathfrak{p} = L_{\mathcal{C}}$，则令 $W = \emptyset$，可得 $\mathfrak{p} = P_W(\mathcal{C})$。现在假设 $\mathfrak{p} \neq L_{\mathcal{C}}$。令

$$W = \{a \in V(\mathcal{C}) : x_a \in \mathfrak{p}\}.$$

我们首先证明 $W \neq \emptyset$。反设 $W = \emptyset$，即 $\mathfrak{p}$ 不含变量。令 $f \in L_{\mathcal{C}}$。根据 [12, 命题 1.1], ，存在一个单项式 u 属于 $S_{\mathcal{C}}$，使得$uf \in I_{\text{adj}}(\mathcal{C})$，因此 $uf \in \mathfrak{p}$。若 $f \notin \mathfrak{p}$，则由 $\mathfrak{p}$的素性可得 $u \in \mathfrak{p}$，这意味着 $\mathfrak{p}$含有变量，与假设 $W = \emptyset$矛盾。因此， $f \in \mathfrak{p}$，即 $L_{\mathcal{C}} \subseteq \mathfrak{p}$。根据命题 2.1 以及 $\mathfrak{p}$的极小性，必有 $\mathfrak{p} = L_{\mathcal{C}}$，这与假设$\mathfrak{p} \neq L_{\mathcal{C}}$矛盾。因此， $W \neq \emptyset$。

现在我们证明 W是 $\mathcal{C}$的可容许集。设 C是 $\mathcal{C}$中的一个单元，其 $V(C) = \{a, b, c, d\}$满足 a， b和 c, d分别为对角顶点和反对角顶点，并且 $W \cap C \neq \emptyset$。不失一般性，假设 $a \in W \cap C$。注意, $x_a x_b - x_c x_d \in I_{\text{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}$，且由于 $a \in W$，我们有 $x_a \in \mathfrak{p}$，这意味着 $x_c x_d \in \mathfrak{p}$。由于 $\mathfrak{p}$ 是素的，因此 $x_c \in \mathfrak{p}$ 或 $x_d \in \mathfrak{p}$，也就是说， $c \in W$或 $d \in W$。因此， $\{a, c\} \subseteq W \cap C$或 $\{a, d\} \subseteq W \cap C$。这意味着 $W \cap C$含有一条边，因此 W 是 $\mathcal{C}$的可容许集。

现在我们证明 $\mathfrak{p} = P_W(\mathcal{C})$。由于 $I_{\text{adj}}(\mathcal{C}_W) \subseteq L_{\mathcal{C}_W}$，我们有

$$I_{\text{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq (x_w : w \in W) + L_{\mathcal{C}_W} = P_W(\mathcal{C}).$$

由于 $P_W(\mathcal{C})$ 是素理想（见注 2.5），要得出 $\mathfrak{p} = P_W(\mathcal{C})$，只需证明 $P_W(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}$，特别是证明 $L_{\mathcal{C}_W} \subseteq \mathfrak{p}$。令 $f \in L_{\mathcal{C}_W}$。根据命题 1.1], ，由 [12, 我们有

$$L_{\mathcal{C}_W} = I_{\text{adj}}(\mathcal{C}_W) : \left(\prod_{a \in V(\mathcal{C}) \setminus W} x_a \right)^{\infty}.$$

因此，存在一个单项式 u 属于 $K[x_a : a \in V(\mathcal{C}) \setminus W]$，使得 $uf \in I_{\text{adj}}(\mathcal{C})$。由于 $I_{\text{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}$, 可知 $uf \in \mathfrak{p}$。因为 $\mathfrak{p}$ 是素理想且 $u \notin \mathfrak{p}$，我们推得 $f \in \mathfrak{p}$。总之， $P_W(\mathcal{C})$ 是一个满足 $I_{\text{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq P_W(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}$ 的素理想。由 $\mathfrak{p}$ 的极小性，我们得到 $P_W(\mathcal{C}) = \mathfrak{p}$，证毕。□

下面的注记表明，定理 2.6 的逆命题不成立；也就是说，并非每个可容许集都定义了相应相邻二阶子式理想的极小素理想。

注 2.7. 考虑图 1 (B) 中所示的多格骨牌 $\mathcal{P}$。集合 $W = \{(1, 3), (2, 3)\}$ 是 $\mathcal{P}$ 的一个可容许集。我们简要说明， $P_W(\mathcal{P})$ 不是 $I_{\text{adj}}(\mathcal{P})$ 的极小素理想。事实上，根据 [4, 定理 3.3], ，理想 $I_{\mathcal{P}\setminus\{C\}}$ 是素理想; 等价地，根据 [16, 定理 3.6], ，我们有 $I_{\mathcal{P}\setminus\{C\}} = L_{\mathcal{P}\setminus\{C\}}$。另一方面， $P_W(\mathcal{P}) = (x_1, 3, x_2, 3) + I_{\mathcal{P}\setminus\{C\}}$。由于 $I_{\text{adj}}(\mathcal{P}) \subset I_{\mathcal{P}} \subset P_W(\mathcal{P})$，并且 $I_{\mathcal{P}}$ 根据 [4, 定理 3.3] 是一个素理想（更准确地说，根据命题 2.1， $I_{\mathcal{P}}$ 是 $I_{\text{adj}}(\mathcal{P})$ 的一个极小素理想），因此 $P_W(\mathcal{P})$ 不是 $I_{\text{adj}}(\mathcal{P})$ 的极小素理想。

然而，借助*Macaulay2* ([7])，特别是*Poly-ominoIdeals* ([3])中的函数 `adjacent2MinorIdeal` 以及*Binomials* ([14])中的 `binomialMinimalPrimes` ，我们可以计算出 $I_{\text{adj}}(\mathcal{P})$的所有极小素理想。它们列于下方，可以看到 $P_W(\mathcal{P})$并未出现在其中。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= (x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2},\ x_{2,3}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,3},\ x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3},\ x_{3,2}x_{1,1} - x_{3,1}x_{1,2},\\
&\quad x_{3,2}x_{2,1} - x_{3,1}x_{2,2}) = I_{\mathcal{P}} = P_{\emptyset}(\mathcal{P}),\\
\mathfrak{p}_2 &= (x_{1,2},\ x_{2,1},\ x_{2,2}) = P_{W_1}(\mathcal{P}),\ \text{where } W_1 = \{(1,2),(2,1),(2,2)\},\\
\mathfrak{p}_3 &= (x_{2,1},\ x_{2,2},\ x_{2,3}) = P_{W_2}(\mathcal{P}),\ \text{where } W_2 = \{(2,1),(2,2),(2,3)\},\\
\mathfrak{p}_4 &= (x_{1,2},\ x_{2,2},\ x_{3,2}) = P_{W_3}(\mathcal{P}),\ \text{where } W_3 = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}.
\end{aligned}$$

3. From Unmixedness to Complete Intersection for adjacent 2-minor ideals

定理 2.6 中对极小素理想的描述，给出了相邻二阶子式理想的若干著名代数性质之间的如下等价关系。

定理 3.1。 *Le*令 t $\mathcal{C}$ 为一个单元集合。则以下条件等价：

(1) $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$是完全交；*(2)* $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是 *Gorenstein*；*(3)* $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$是层；

(4) $S_{\mathcal{C}}/I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$是 *Cohen–Macaulay*；*(5)* $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$是无混合的。

此外，若 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足上述条件，则 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}|$。

证明。 对于分次理想，蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) 总是成立。现在我们证明其逆向蕴含关系 (5) $\Rightarrow$(1)。假设 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 无混合，即它的所有极小素理想具有相同的高度。根据命题 2.1，我们有 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}|$。该值与 $|\mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))|$相同。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是完全交。

假设 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足所给条件中的任意一个。那么 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合理想，由命题 2.1 可知，$\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}|$。 □

作为定理 3.1 的推论，我们得出关于 $\mathcal{C}$ 形状的两个必要组合条件：每当 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 具有其中列出的任一等价性质时，这些条件都必须成立。

我们回顾一下，图 2 左侧和右侧所示的多格骨牌在文献中分别称为正方形四格骨牌 和*X*形五格骨牌。



Figure 2. 一个正方形四格骨牌和一个 X-五格骨牌

接下来我们引入以下定义。若区间 $[a, b]$ 满足 $a = (i, j)$、 $b = (k, j)$ 和 $i < k$，且对所有 $\ell \in i, \ldots, k-1$，数对 (ℓ, j)、$(\ell + 1, j)$ 均构成 $\mathcal{C}$ 中单元的边，则称其为 $\mathcal{C}$ 的水平边区间。此外，如果 $(i-1, j)$、(i, j) 以及 (k, j)、$(k+1, j)$ 不属于 $E(\mathcal{C})$，则称 $[a, b]$为 $\mathcal{C}$的极大水平边区间。垂直边区间和极大垂直边区间可以类似地定义。

在接下来的两个引理中，我们给出相邻二阶子式理想满足定理 3.1 中等价条件的两个必要条件。

引理3.2. 设 $\mathcal{C}$ 为一个单元集合。如果 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足定理 *3.1* 中的等价条件，那么 $\mathcal{C}$ 不包含正方形四格骨牌。

证明。 我们证明，若 $\mathcal{C}$ 包含一个正方形四格骨牌，则 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$无混合。根据命题 2.1，我们知道 $L_{\mathcal{C}}$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$的一个极小素理想，且 $\mathrm{ht}(L_{\mathcal{C}}) = |\mathcal{C}|$。现在，我们构造 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$的另一个极小素理想，其高度严格小于 $|\mathcal{C}|$，这说明 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$无混合。我们先引入一些记号，这些记号将在整个证明过程中使用，参见图 3。

设 $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ 是包含于 $\mathcal{C}$ 中的正方形四格骨牌。设 $[a_1, a_r] = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_r\}$（其中 $r \geq 3$）为 $\mathcal{C}$ 中包含边 $A \cap C$ 和 $B \cap D$ 的极大水平边区间。

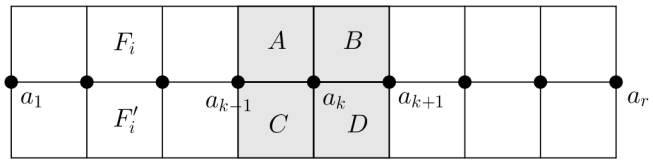


FIGURE 3. 引理3.2的证明所用记号

那么存在一个指标 $k \in [r-1]$，使得 a_k 是 A、B、C 和 D 的公共顶点。对于所有 $i = 1$、.....、$r-1$，我们用 F_i 和 F_i' 表示以 $\{a_i, a_{i+1}\}$ 为公共边的单元。特别地，$F_{k-1} = A$、$F_{k-1}' = C$、$F_k = B$ 和 $F_k' = D$。

令 $W = [a_1, a_r]$。注意，W 是 $\mathcal{C}$的可容许集。借助图 3，我们观察到以下几点：

- 这四个单元 F_{k-1}，F_{k-1}'，F_k 和 F_k' 都属于 $\mathcal{C}$；
- 对于所有 $i \in \{1, \ldots, k-2, k+1, \ldots, r-1\}$，$F_i$ 或 F_i' 至少有一个属于 $\mathcal{C}$，因为 $[a_1, a_r]$ 是 $\mathcal{C}$的边区间。注意，它们也可能同时属于 $\mathcal{C}$；
- 对于所有 $i = 1$，.....，$r-1$，根据 $\mathcal{C}_W$的定义，F_i 和 F_i' 都不属于 $\mathcal{C}_W$。

考虑 $P_W(\mathcal{C}) = L_{\mathcal{C}_W} + (x_v \colon v \in W)$。我们证明 $P_W(\mathcal{C})$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的极小素理想，且 $\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) < |\mathcal{C}|$。首先证明 $\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) < |\mathcal{C}|$。注意，正如注 2.5 中所述，$\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}_W| + |W|$。

现在，我们将 $W = [a_1, a_r]$ 的每个顶点分配到 $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \{F_i, F_i'$中的一个单元：$i \in [r-1]\}$。定义如下映射 $\phi \colon W \to \mathcal{F}$：

$$\phi(a_i) = \begin{cases} F_i, & \text{if } F_i \in \mathcal{C} \text{ and } F_i' \notin \mathcal{C}, \\ F_i', & \text{if } F_i \notin \mathcal{C} \text{ and } F_i' \in \mathcal{C}, \\ F_i, & \text{if } F_i \in \mathcal{C} \text{ and } F_i' \in \mathcal{C}, \end{cases} \qquad \text{for } i \in [r-1], \quad \text{and let } \phi(a_r) = D = F_k'.$$

映射 ϕ 显然是单射，但不是满射，因为在 W 中不存在顶点 v 使得$\phi(v) = C$。因此 $|W| < |\mathcal{F}|$。此外，由于 $\mathcal{C}_W = \{C \in \mathcal{C} \colon C \cap W = \emptyset\}$ 且 $\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \colon C \cap W \neq \emptyset\}$，我们有 $|\mathcal{C}_W| + |\mathcal{F}| = |\mathcal{C}|$。因此，

$$|\mathcal{C}_W| + |W| < |\mathcal{C}_W| + |\mathcal{F}| = |\mathcal{C}|,$$

从而 $\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) < |\mathcal{C}|$，如所需。

为完成证明，我们证明 $P_W(\mathcal{C})$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想。由注 2.5 可知，$P_W(\mathcal{C})$ 是素理想。假设 $P_W(\mathcal{C})$ 不是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的极小素理想，那么存在一个素理想 $\mathfrak{p}'$ 使得 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{p}' \subset P_W(\mathcal{C})$。不妨假设 $\mathfrak{p}'$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想。由定理 2.6，存在 $\mathcal{C}$ 的一个可容许集 W'，使得$\mathfrak{p}' = P_{W'}(\mathcal{C}) = L_{\mathcal{C}_{W'}} + (x_v \colon v \in W') \subset L_{\mathcal{C}_W} + (x_v \colon v \in W)$。因此，包含在 $\mathfrak{p}'$中的变量构成 $\{x_v \colon v \in W\}$的真子集，即 $W' \subset W$。由于 W'是一个可容许集，唯一的可能性是 $W' = \emptyset$。于是 $\mathfrak{p}' = L_{\mathcal{C}}$，但这会导致矛盾，因为$\mathfrak{p}' \subset P_W(\mathcal{C})$ 蕴含 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') < \mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) < |\mathcal{C}|$，而 $\mathfrak{p}' = L_{\mathcal{C}}$给出 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = |\mathcal{C}|$。

这表明，$P_W(\mathcal{C})$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想，且 $\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) < |\mathcal{C}|$；而极小素理想 $L_{\mathcal{C}}$ 的高度等于 $|\mathcal{C}|$。证明至此完成。□

引理 3.3。设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合。如果 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足定理 *3.1* 中的等价条件，那么 $\mathcal{C}$ 不包含一个 X-五连块。

证明。我们证明，若 $\mathcal{C}$ 包含一个 X-五格骨牌，则 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$不是无混合的。设 $\mathcal{P}$ 是包含在 $\mathcal{C}$中的一个X-五格骨牌，并采用图 4 所示的记号。

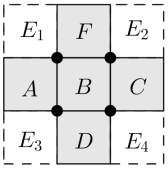


FIGURE 4. 引理 3.3 的证明中所用的 X-五格骨牌的记号。

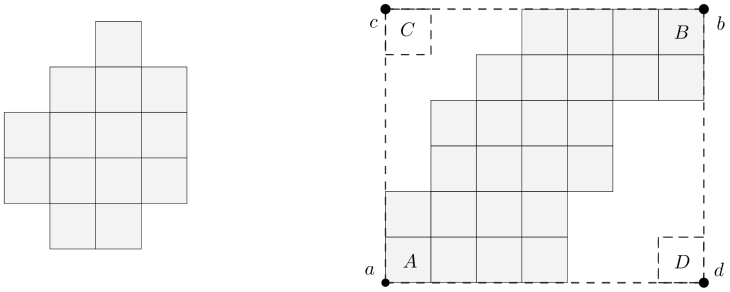
注意，若对于某个 $i \in [4]$有 $E_i \in \mathcal{C}$ ，则 $\mathcal{C}$ 包含一个正方形四格骨牌。由引理3.2可知， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是无混合的。因此，我们可以假设对所有 $i \in [4]$都有 $E_i \notin \mathcal{C}$ 。此时， $V(B)$是 $\mathcal{C}$的一个可容许集。

令 $W = V(B)$，并考虑 $P_W(\mathcal{C})$。注意，$\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}_W| + |W|$。另一方面，我们有 $|\mathcal{C}_W| + 5 = |C|$和 $|W| = 4$。因此，$\mathrm{ht}(P_W(\mathcal{C})) = |\mathcal{C}| - 1 < |\mathcal{C}|$。按照引理3.2中的相同论证，可以验证 $P_W(\mathcal{C})$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合的，这正是所需结论。由此，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不满足定理 3.1 中列出的任何等价性质。□

现在我们证明，对于凸单元集，不含正方形四格骨牌和 X-五格骨牌，可以刻画相邻二阶子式理想何时满足定理 3.1 中的某个等价性质。

我们首先回顾凸性的定义及一些相关概念。若单元集合$\mathcal{C}$ 中任意两个位于同一行（分别地，同一列）的单元 A 和 B 之间的单元区间 $[A, B]$ 包含于 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$ 为行凸（分别地，列凸）。若 $\mathcal{C}$ 既行凸又列凸，则称 $\mathcal{C}$ 为凸的（见图5 (A)）。

在凸多联骨牌中，有一个对我们的研究特别有用的著名子类。设 $\mathcal{C}$是一个凸多联骨牌， $[a, b]$ 是 $\mathcal{C}$的最小包围盒（其中 c, d为反对角顶点）。若 V（$\mathcal{C}$）包含a, b 这一对，或包含 c, d 这一对（见图5 (B)），则称 $\mathcal{C}$ 为平行四边形。



(A) (B)

FIGURE 5. 一个凸多联骨牌和一个平行四边形。

现在我们描述既不含正方形四格骨牌也不含 X-五格骨牌的凸多格骨牌可能具有的形状。为便于以下讨论，我们回顾一下：若多格骨牌 $\mathcal{P}$满足以下条件之一： $\mathcal{P} = \emptyset$，或 $\mathcal{P}$ 由一个单元构成；或者存在 $\mathcal{P}$ 中的两个不同单元 Q和 R ，使得 $\mathcal{P}$ 与连接 Q 和 R的路径重合，则称 $\mathcal{P}$为路径多联骨牌。此外，平行四边形路径多格骨牌是形状为平行四边形的路径多联骨牌；图 6 (A) 给出了示例。

讨论 3.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个不包含正方形四格骨牌或 X- 五格骨牌的凸多联骨牌，而 $[a, b]$ 是 $\mathcal{C}$的最小包围盒（其中 c， d为反对角顶点）。

首先注意，为避免出现正方形四格骨牌， $\mathcal{C}$ 的每个极大区间都必须具有 $\mathcal{R}=[C_1,C_2]$ 的形式，其中 C_1 和 C_2 的位置要么是水平的，要么是垂直的。
(1) 如果 $a,b\in V(\mathcal{C})$（或 $c,d\in V(\mathcal{C})$), 那么 $\mathcal{C}$ 具有平行四边形形状；特别地， $\mathcal{C}$ 是一个平行四边形路径多格骨牌（见图 6 (A)）。
(2) 假设 $a\notin V(\mathcal{C})$ 且 $b\in V(\mathcal{C})$。由于 $[a,b]$ 是 $\mathcal{C}$的最小包围盒， $\mathcal{C}$中存在两个单元 W和 S，使得 $E(W)\cap[a,c]\neq\emptyset$且 $E(S)\cap[a,d]\neq\emptyset$。包含 W 和 S 的 $\mathcal{C}$ 的极大竖直区间与极大水平区间交于一个单元，记为 A；由于 $\mathcal{C}$的凸性，交集不可能为空。令 $\mathcal{T}_W=[W,A]$ 和 $\mathcal{T}_S=[S,A]$, 分别将其称为西尾 和南尾。

如果 $b\in A$，那么 $\mathcal{C}$ 是一条由两个极大区间组成的平行四边形路径。现在假设 $b\notin A$。与 A 相邻、位于其北侧和东侧的单元不可能同时属于 $\mathcal{C}$，否则 $\mathcal{C}$ 将包含一个 X五格骨牌。令 A' 表示 A 中与 $\mathcal{C}$相邻且位于北侧或东侧的唯一单元，并令 a' 为其左下角。那么区间 $[a',b]$ 是 $\mathcal{P}$ 的最小包围盒：$=\mathcal{C}\setminus(\mathcal{T}_W\cup\mathcal{T}_S)$。多格骨牌 $\mathcal{P}$ 是凸的，并满足$a',b\in V(\mathcal{P})$；因此，它是一条平行四边形路径。因此，在这种情况下， $\mathcal{C}$ 要么是平行四边形路径，要么由两个区间 $\mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_S$ 以及一个平行四边形路径多格骨牌组成（见图 6 (B)）。

(3) 情形 $a\in V(\mathcal{C})$ 和 $b\notin V(\mathcal{C})$ 可类似处理。存在两个单元 E和N属于 $\mathcal{C}$，使得 E在 $[d,b]$ 中有一条边，且 N在 $[c,b]$中有一条边。包含 E 和 N 的 $\mathcal{C}$ 的极大垂直区间与极大水平区间交于一个单元，记作 B。若 $a\in B$，则 $\mathcal{C}$ 是由两个极大区间组成的平行四边形路径。否则，分别将 $\mathcal{T}_N=[B,N]$ 和$\mathcal{T}_E=[B,E]$ 记为北尾部 和东尾部。于是 $\mathcal{P}:=\mathcal{C}\setminus(\mathcal{T}_N\cup\mathcal{T}_E)$ 是一条平行四边形路径。因此，在这种情况下， $\mathcal{C}$ 要么是平行四边形路径，要么由区间 $\mathcal{T}_N$ 和$\mathcal{T}_E$ 以及一块平行四边形路径多格骨牌组成。
(4) 最后，假设 a， $b\notin V(\mathcal{C})$。如上所述，存在尾部 $\mathcal{T}_S$、 $\mathcal{T}_N$、 $\mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_E$，满足 $\mathcal{T}_S\cap\mathcal{T}_W=\{A\}$ 和 $\mathcal{T}_N\cap\mathcal{T}_E=\{B\}$。由于 $\mathcal{C}$ 不包含 X-五格骨牌，因此单元 A 和 B互不相同。

如果 $E(A)\cap E(B)\neq\emptyset$，那么 $\mathcal{C}$仅由四个尾部 $\mathcal{T}_S$、 $\mathcal{T}_N$、 $\mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_E$组成。在这种情况下，剩余的平行四边形路径为空；按照惯例，空集视为单元集合。

如果 $E(A)\cap E(B)=\emptyset$，那么 $\mathcal{C}$由四个尾部 $\mathcal{T}_S$、 $\mathcal{T}_N$、 $\mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_E$以及$\mathcal{P}$组成：$=\mathcal{C}\setminus($ $\mathcal{T}_S\cup\mathcal{T}_N\cup\mathcal{T}_W\cup\mathcal{T}_E)$，其中 $\mathcal{P}$是平行四边形路径（见图 6 (C)）。
对于既不包含正方形四格骨牌也不包含 X-五格骨牌的凸单元格集合 $\mathcal{C}$ ，同样的论证也适用。特别地，假设 $\mathcal{C}$ 由 $n\geq2$ 个连通分支$\mathcal{C}_1$，…， $\mathcal{C}_n$组成，且从左下向右上排列。那么：

- $\mathcal{C}_1$ 是一条平行四边形路径，可能还带有一个西尾和一个南尾；
- $\mathcal{C}_i$对所有 $i=2$、.....、 $n-1$都是平行四边形路径；
- $\mathcal{C}_n$ 是一条平行四边形路径，也可能带有东尾部和北尾部。

图 6 (D) 展示了一个例子。

现在我们可以给出所有凸单元集的组合刻画：它们的相邻二阶子式理想满足定理 3.1 中列出的任一等价性质。在陈述结果之前，我们先回顾一些术语。

设 $\mathcal{C}$ 为单元集合。对于任意具有对角顶点 a 和 b、反对角顶点 c和 d的单元 $C\in\mathcal{C}$，我们将 x_ax_b 称为 C的对角项，将 x_cx_d 称为 C的反对角项。此外，若 $<$ 表示 $S_{\mathcal{C}}$上的单项式序，则对于多项式 $f\in S_{\mathcal{C}}$，我们将初始单项式记为 in$_<$(f)，并将与 f 相关联的 S-多项式记为 $S(f,\ g)$，$g\in S_{\mathcal{C}}$。

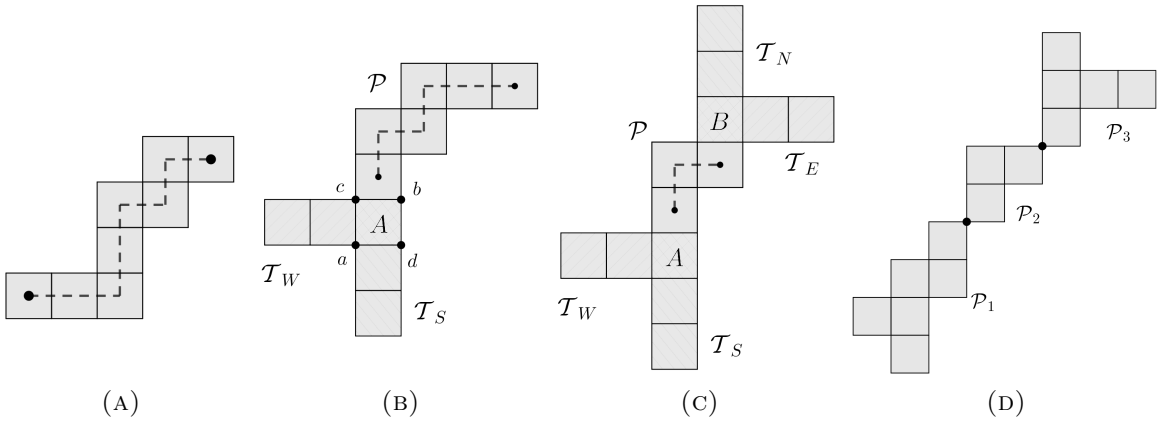


FIGURE 6. 不含正方形四格骨牌或 X-五格骨牌的单元格集合的可能形状。

定理 3.5。 设 $\mathcal{C}$ 为凸单元格集合。当且仅当 $\mathcal{C}$ 既不包含正方形四格骨牌，也不包含 X-五格骨牌时，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 满足定理 *3.1* 中的等价条件。

证明。 $\Rightarrow$) 该蕴含关系由引理 3.2 和引理 3.3 得出。

$\Leftarrow$) 假设 $\mathcal{C}$ 既不含正方形四格骨牌，也不含 X-五格骨牌。我们首先假设$\mathcal{C}$ 是一个多格骨牌，并根据其形状（如讨论 3.4 所述）分析两种情形。**情形 A**。 $\mathcal{C}$ 是一条平行四边形路径。

令 $[a,b]$ 为其最小包围盒。经过关于 x轴的反射后，不妨假设 $V(\mathcal{C})$ 同时包含 a 和 b，也就是说， $\mathcal{C}$ 具有图 6 (A) 所示的形状。若 $j > l$，则考虑由 $x_{ij} > x_{kl}$ 诱导的字典序；若 $j = l$，则考虑由 $i < k$ 诱导的字典序。于是， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的每个生成元的首项单项式都是相应的反对角项。

由于 $\mathcal{C}$ 的特殊形状，对于所有 f， $g \in \mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$，我们有 $\gcd(\mathrm{in}_<(f), \mathrm{in}_<(g)) = 1$。因此，每个 $S(f, g)$ 模 $\mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 均化简为零，从而 $\mathrm{in}_<(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 是一个完全交。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 本身是一个完全交。同样， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 本身也是一个完全交，因而满足定理 3.1 中的等价条件。特别地，在此情形下，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合的，这一事实将在下面的情形中使用。

情形 B。 $\mathcal{C}$ 不是一条平行四边形路径。

根据讨论 3.4，共有三种可能的情形，我们将在下文进行分析。

情形 I。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个平行四边形多格骨牌 $\mathcal{P}$ 与尾部 $\mathcal{T}_S$ 和 $\mathcal{T}_W$ 的并（例如参见图 6（B））。设 A 是 $\mathcal{T}_S \cap \mathcal{T}_W$ 中的单元，并将其左下角记为 a。令 $b = a + (1,\ 1)$、 $c = a + (0,\ 1)$ 和 $d = a + (1,\ 0)$。

我们证明 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合的。根据命题 2.1，格理想 $L_{\mathcal{C}}$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个高度为 $|\mathcal{C}|$ 的极小素理想。设 $\mathfrak{p}$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个满足 $\mathfrak{p} \neq L_{\mathcal{C}}$ 的极小素理想。根据定理 2.6，存在 $\mathcal{C}$ 的一个非空可容许集 U，使得 $\mathfrak{p} = P_U(\mathcal{C})$；根据注 2.5，我们得到 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = |U| + |\mathcal{C}_U|$。要证明 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合的，只需证明 $|U| + |\mathcal{C}_U| = |\mathcal{C}|$。

情形 *I.1.* 假设 $U \cap \{a, d\} = \emptyset$。令 $\mathcal{P}' = \mathcal{T}_W \cup \mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'' = \mathcal{T}_S \setminus \{A\}$，并定义

$$U_1 = U \cap V(\mathcal{P}') \quad \text{and} \quad U_2 = U \cap V(\mathcal{P}'').$$

于是， U_1 和 U_2 分别是 $\mathcal{P}'$ 和 $\mathcal{P}''$的可容许集。由于 $\mathcal{P}'$ 是一条平行四边形路径，情形 A 蕴含 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}')$是无混合的。我们断言， $P_{U_1}(\mathcal{P}')$是$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}')$的极小素理想。反设并非如此。则存在一个极小素理想 $\mathfrak{p}'$，使得 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}') \subset \mathfrak{p}' \subset P_{U_1}\mathcal{P}'$。 根据定理 2.6，对于某个可容许集 U'，有 $\mathfrak{p}' = P_{U'}(\mathcal{P}')$

$\mathcal{P}'$。于是 $U' \subset U_1$。现在， $U := U' \cup U_2$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个可容许集，并且有 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subset P_U \mathcal{C} \subset \mathfrak{p} = P_U(\mathcal{C})$，这与 $\mathfrak{p}$ 的极小性矛盾。因此， $P_{U_1}(\mathcal{P}')$ 确实是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}')$ 的一个极小素理想，由定理 3.1 和注 2.5，我们得到

$$|\mathcal{P}'_{U_1}| + |U_1| = |\mathcal{P}'|. \tag{1}$$

由于 $\mathcal{P}''$ 是一条平行四边形路径，同样的论证也适用于 U_2 和 $\mathcal{P}''$，从而得到

$$|\mathcal{P}''_{U_2}| + |U_2| = |\mathcal{P}''|. \tag{2}$$

将 (1) 和 (2) 相加，并注意到 $|\mathcal{P}'_{U_1}| + |\mathcal{P}''_{U_2}| = |\mathcal{C}_U|$，我们得到 $|\mathcal{C}_U| + |U| = |\mathcal{C}|$，这正是所需结论。若 $U \cap \{a, c\} = \emptyset$，则可用类似的论证。

情形 *I.2.* 假设 $U \cap \{a, d\} = \{d\}$。如果 $c \notin U$，则属于前一种情形，此时 $U \cap \{a, c\} = \emptyset$。因此，假设 $c \in U$；我们将证明这会导致矛盾。由于 U 是 $\mathcal{C}$ 和 c， $d \in U$ 的一个可容许集，而 $a \notin U$，可容许性迫使 $b \in U$。出于同样的原因，图 7 中的顶点 s 和 w 属于 U。根据 A' 位于 A 的北侧还是东侧，我们分两种情形讨论。

(i) A' 位于 A 的北侧（见图 7 (A)）。
令 $U' = U \cap (V(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_W) \setminus \{d\})$。那么 $P_{U'}(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_W) + L_{\mathcal{T}_S \setminus \{A\}}$ 是一个素理想，并且

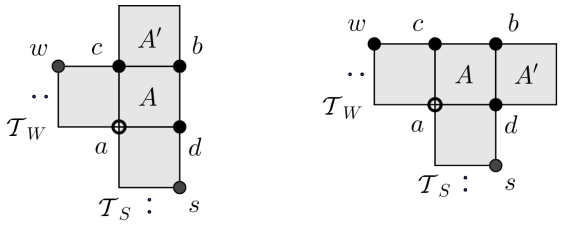
$$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subset P_{U'}(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_W) + L_{\mathcal{T}_S \setminus \{A\}} \subsetneq P_U(\mathcal{C}),$$

这与 $P_U(\mathcal{C})$ 的极小性矛盾。

(ii) A' 位于 A的东侧（见图 7 (B)）。
令 $U'' = U \cap \big(V(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_S) \setminus \{c\}\big)$.那么 $P_{U''}(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_S) + L_{\mathcal{T}_W \setminus \{A\}}$ 是一个素理想，并且

$$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subset P_{U''}(\mathcal{P} \cup \mathcal{T}_S) + L_{\mathcal{T}_W \setminus \{A\}} \subsetneq P_U(\mathcal{C}),$$

再次与 $P_U(\mathcal{C})$ 的极小性矛盾。



(A) (B)

FIGURE 7. 与 $\mathcal{T}_S$ 和 $\mathcal{T}_W$的交。

情形 *I.3.* 假设 $U \cap \{a, d\} = \{a, d\}$。在这种情形下，我们区分四个子情形来证明等式 $|\mathcal{C}_U| + |U| = |\mathcal{C}|$。令 A_S和 A_W分别表示位于 A南侧和西侧的 $\mathcal{C}$的单元，并令 A' 表示 $\mathcal{C}$ 中与 A共享 $\{c, b\}$ 或 $\{b, d\}$ 的单元；见图 8。

(i) $c \in U$ 和 $b \notin U$ （见图 8）。设 $\mathcal{C}(W) := \mathcal{T}_W \setminus \{A, A_W\}$ 和 $\mathcal{C}(S) := \mathcal{T}_S \setminus \{A, A_S\}$。注意到

$$U_W := U \cap V(\mathcal{C}(W)), \quad U_S := U \cap V(\mathcal{C}(S)) \quad \text{and} \quad U' := U \cap V(\mathcal{P})$$

分别是 $\mathcal{C}(W)$、 $\mathcal{C}(S)$ 和 $\mathcal{P}$ 的可容许集。因此，理想 $P_{U_W}(\mathcal{C}(W))$、$P_{U_S}(\mathcal{C}(S))$ 和 $P_{U'}(\mathcal{P})$ 定义良好。由于 $\mathcal{C}(W)$、 $\mathcal{C}(S)$ 和 $\mathcal{P}$ 是平行四边形路径，

相应的相邻 2-子式理想如情形 A 中所述是无混合的。因此，按照<style id='1'>情形 I.1中的论证，我们得到如下结果：

$$|\mathcal{C}(W)_{U_W}| + |U_W| = |\mathcal{C}(W)|, \qquad |\mathcal{C}(S)_{U_S}| + |U_S| = |\mathcal{C}(S)|, \qquad |\mathcal{P}_{U'}| + |U'| = |\mathcal{P}|. \tag{3}$$

由于 $\mathcal{C} = \mathcal{C}(W) \sqcup \mathcal{C}(S) \sqcup \mathcal{P} \sqcup \{A, A_W, A_S\}$，我们有

$$|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}(W)| + |\mathcal{C}(S)| + |\mathcal{P}| + 3. \tag{4}$$

结合 (3) 和 (4)，我们得到

$$|\mathcal{C}| = (|\mathcal{C}(W)_{U_W}| + |\mathcal{C}(S)_{U_S}| + |\mathcal{C}_{U'}|) + (|U_W| + |U_S| + |U'| + 3).$$

此时，很容易看出 $U_W \sqcup U_S \sqcup U' \sqcup \{a, c, d\} = U$和

$$\mathcal{C}(W)_{U_W} \sqcup \mathcal{C}(S)_{U_S} \sqcup \mathcal{C}_{U'} = (\mathcal{C} \setminus \{A, A_S, A_W\})_{U_W \sqcup U_S \sqcup U'} = \mathcal{C}_{U_W \sqcup U_S \sqcup U' \sqcup \{a,c,d\}} = \mathcal{C}_U.$$

因此，我们得出 $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}_U| + |U|$，这就证明了该结论。

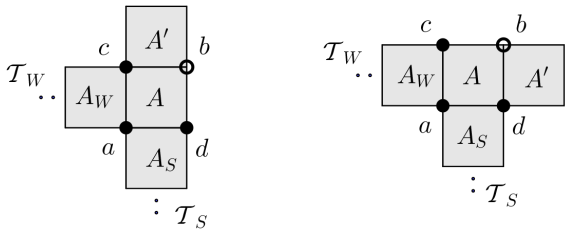


FIGURE 8. $c \in U$ 和 $b \notin U$。

(ii) $c \notin U$ 和 $b \in U$。此情形可通过互换 b 和 c 的角色，由子情形 (i) 得出。**(iii)** $c \in U$ 和 $b \in U$。此情形与子情形 (i) 类似，只是现在由 $\mathcal{P} \setminus \{A'\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$ 分别扮演 $\mathcal{P}$ 和 $\{a, b, c\}$ 的角色，并注意到 $\mathcal{C}_{\{a,b,c,d\}} = \mathcal{C} \setminus \{A, A_W, A_S, A'\}$。**(iv)** $c \notin U$ 和 $b \notin U$。在此情形下，$U \cap \{b, c\} = \emptyset$，我们按照情形 *I.1*中的论证方法处理，并考察 $\mathcal{T}_W \cup \mathcal{T}_S$ 和 $\mathcal{P} \setminus \{A'\}$；它们都是平行四边形路径，因此，根据情形 A，相应的相邻二阶子式理想都是无混合的。

情形 *I.4*。假设 $U \cap \{a, d\} = \{a\}$。由于 U 是可容许的，因此可得 $c \in U$，进而有 $U \cap \{a, c\} = \{a, c\}$。结论可通过类似于情形 *I.3*的论证得出。

这就完成了当 $\mathcal{C}$ 是平行四边形多格骨牌 $\mathcal{P}$ 与尾部 $\mathcal{T}_S$ 和 $\mathcal{T}_W$的并集时的证明，因此 $I_{\text{adj}}(\mathcal{C})$ 是无混合的。

情形 II. $\mathcal{C}$ 由东尾部、北尾部以及一个平行四边形多格骨牌组成的情形，与情形 I 类似，只差一个对称变换（反射/旋转）。

情况 III. 更一般地，假设 $\mathcal{C}$ 由全部四个尾部与一个平行四边形多格骨牌 $\mathcal{P}$ 组成（例如参见图 6 (C)）。设 A 和 B 分别是 $\mathcal{T}_S \cap \mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_N \cap \mathcal{T}_E$中的单元。记 a 为 A的左下角，并令 $b = a +$ (1,1)、$c = a +$ (0, 1)以及$d = a+$(1, 0)。类似地，设 a' 为 B的左下角，并定义 $b' = a'+$(1,1)、$c' = a'+$(0, 1)以及 $d' = a' +$ (1,0)。

- 若 $\mathcal{P} \neq \emptyset$，则我们可以将 $\mathcal{C}$ 视为由两条尾部 $\mathcal{T}_W$ 和 $\mathcal{T}_S$以及多格骨牌 $\mathcal{P}'$组成：$= \mathcal{P} \cup \mathcal{T}_N \cup \mathcal{T}_E$. 根据情形 I，我们知道 $I_{\text{邻接理想}}(\mathcal{P}')$ 是无混合的。仿照情形 I 的论证即可得到所述结论，只需将该情形中的 $\mathcal{P}$ 替换为 $\mathcal{P}'$。

• 若 $\mathcal{P}=\emptyset$，则 A 和 B 相邻。对 $\mathcal{C}$进行旋转或反射后，不妨设 B 位于 A的北侧，因此 $A\cap B$ 是边 $\{b,c\}$。在这种情况下，证明过程与情形 I 完全相同：考察 b 或 c 是否属于 U，然后根据 a、d、c'、d' 是否属于 U来考虑相应的子情形。为避免进一步拉长证明，我们省略这一直接验证；显式示例另见 [15] 中的文件夹`Examples CaseIII` 。

这就完成了 $\mathcal{C}$ 是多格骨牌情形下的证明。

为完成论证，我们现在考虑 $\mathcal{C}$ 是一个非多格骨牌的单元集合的情形。根据讨论 3.4 的最后一段，我们可以假设 $\mathcal{C}$ 由若干连通分支组成，这些分支从左下向右上排列：首先是一个由至多带有西向和南向尾部的平行四边形路径构成的多格骨牌 $\mathcal{P}_1$，接着是有限个平行四边形路径 $n-2$ $\mathcal{P}_2$，……，$\mathcal{P}_{n-1}$，最后是一个由至多带有东向和北向尾部的平行四边形路径构成的多格骨牌 $\mathcal{P}_n$（例见图 6 (D)）。

情形 A。 假设所有连通分支都是平行四边形路径。

设 $[a_1,b_1]$ 和 $[a_n,b_n]$ 分别为 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_n$ 的最小包围盒，并将它们的反对角顶点记为 c_1，d_1 和 c_n，d_n。

情形 *A.1.* 如果 $V(\mathcal{P}_1)$ 和 $V(\mathcal{P}_n)$ 分别包含 a_1，b_1 和 a_n，b_n，那么相对于情形 A 中引入的同一单项式序 $<$，$<(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 是完全交。因此，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 本身也是完全交，正如所需。

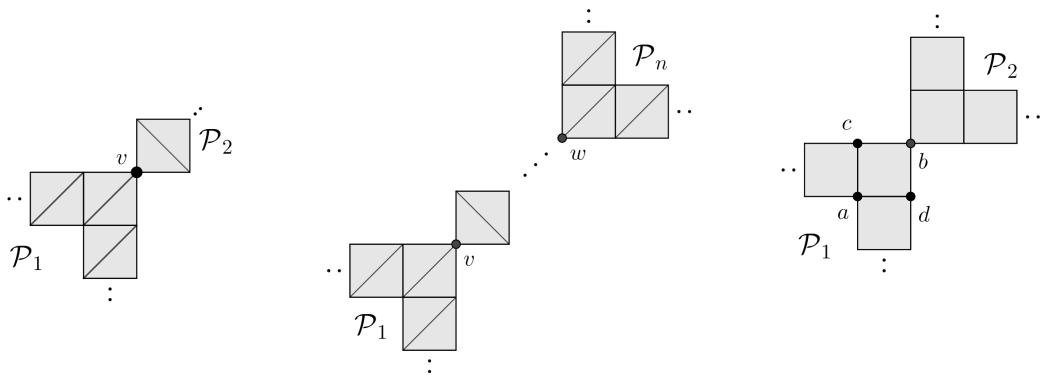


FIGURE 9. $\mathcal{C}$的可能的形状。

情况 *A.2.* 如果 $V(\mathcal{P}_1)$ 包含 c_1，d_1（见图 9 (A)），且 $V(\mathcal{P}_n)$ 包含 a_n，b_n，那么我们令$V(\mathcal{P}_1)\cap V(\mathcal{P}_2)=\{v\}$，并在 $\mathbb{Z}^2$ 上定义以下全序：

如果 $k<i$，则为$\bullet(k,\ l)<^1(i,\ j)$；或者当 $i=k$ 时为 $l<j$。

如果 $i<k$，则为$\bullet(k,\ l)<^2(i,\ j)$；或者当 $i=k$ 时为 $l<j$。

考虑由以下变量排列所诱导的字典序 $<$：

$$x_p<x_q \iff \begin{cases} p\in V(\mathcal{P}_1),\ q\in V(\mathcal{C}\setminus\mathcal{P}_1)\setminus\{v\}, \\ p,q\in V(\mathcal{P}_1) \text{ and } p<^1 q, \\ p,q\in V(\mathcal{C}\setminus\mathcal{P}_1)\setminus\{v\} \text{ and } p<^2 q. \end{cases}$$

按照此顺序，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}_1)$ 的生成元的初始项是对角线上的项，而 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}\setminus\mathcal{P}_1)$ 的初始项是反对角线上的项。因此，$\mathrm{in}_<(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 是一个完全交，从而 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 本身也是一个完全交，证毕。

情形 *A.3.* 如果 $V(\mathcal{P}_1)$ 包含 a_1，b_1，且 $V(\mathcal{P}_n)$ 包含 c_n，d_n，那么，反射 $\mathcal{C}$ 并重新标记连通分支后，我们就归结为情况 A.2 中讨论的情形。

情形 *A.4.* 如果 $V(\mathcal{P}_1)$ 包含 c_1，d_1 并且 $V(\mathcal{P}_n)$ 包含 c_n，d_n，那么我们需要根据 $\mathcal{C}$ 的连通分支数区分两种子情形。

- 如果 $n > 2$（见图 9（B）），令 $V(\mathcal{P}_1) \cap V(\mathcal{P}_2) = \{v\}$ 以及 $V(\mathcal{P}_{n-1}) \cap V(\mathcal{P}_n) = \{w\}$，并按情况 A.2 中的方式定义 $<^1$ 和 $<^2$。考虑由以下变量排序所诱导的字典序 $<$，其中 $p,\ q \in V(\mathcal{C})$:

$$x_p < x_q \iff \begin{cases} p \in V(\mathcal{P}_1),\ q \in V(\mathcal{C} \setminus \mathcal{P}_1) \setminus \{v\}, \\ p \in V(\mathcal{C} \setminus \mathcal{P}_n),\ q \in V(\mathcal{P}_n) \setminus \{w\}, \\ p, q \in V(\mathcal{P}_1) \text{ and } p <^1 q, \\ p, q \in V(\mathcal{C} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_n)) \setminus \{v\} \text{ and } p <^2 q, \\ p, q \in V(\mathcal{P}_n) \setminus \{w\} \text{ and } p <^1 q. \end{cases}$$

  关于此序，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}_1)$ 和 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{P}_n)$ 的生成元的初始项是对角线形式，而 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C} \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_n)$ 的生成元的初始项是反对角线形式。因此，$\mathrm{in}_<(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 是一个完全交。于是，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 本身是一个完全交，正如所需。

- 若 $n = 2$（见图 9 (C)），则容易看出，对于任意单项式序 $<$，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})_<$ 都不是完全交。在此情形下，令 V 和 H 表示构成 $\mathcal{P}_1$ 的垂直和水平极大区间，并令 $V \cap H = \{A\}$。若 $\mathfrak{p}$ 是 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想，则必须证明 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = |\mathcal{C}|$，即对于某个由 $\mathcal{C}$ 构成的可容许集 U，有 $|U| + |\mathcal{C}_U| = |\mathcal{C}|$。证明方法与情形 I 中对 A 的顶点所作的论证相同，同时注意到，如前所示，包含于 $H \cup \mathcal{P}_2$ 或 $V \cup \mathcal{P}_2$ 中的单元格集合的相邻二阶子式理想都是无混合的。

情况 B. 假设 $\mathcal{C}$ 的并非所有连通分支都是平行四边形路径。根据第一个和最后一个连通分支的形状，我们区分以下子情形。

情况 *B.1.* 设 $\mathcal{P}_1$ 由一条仅带有西向和南向尾部的平行四边形路径组成，而 $\mathcal{P}_n$ 是一条平行四边形路径。在此情形下，论证与情形 I 中的论证完全相同，只是该情形中的情形 (A)（即 $\mathcal{C}$ 本身是一条平行四边形路径）现在由情形 A 所取代。

情况 *B.2.* 假设 $\mathcal{P}_1$ 是平行四边形路径，且 $\mathcal{P}_n$ 由一条仅带有北向和东向尾部的平行四边形路径组成。对 $\mathcal{C}$进行适当的旋转和反射后，这种情况可归结为情况 B.1。

情况 *B.3.* 如果 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_n$ 都不是平行四边形路径，那么论证过程与情况 III 完全相同。

证明至此完成。 □

注 3.6. 读者可以在 [15], 中的文件夹`Example minimal prime convex` 里找到几个示例，说明与凸多联骨牌的极小素理想相关联的可容许集；这些凸多联骨牌既不包含正方形四格骨牌，也不包含 X-五格骨牌。

注 3.7。 我们通过展示一个简单的非凸多格骨牌，给出非凸情形下的一个反例。该骨牌既不含正方形四格骨牌，也不含 X-五格骨牌，但其相邻 2-子式理想不是无混合的。考虑图 10 中所示的多格骨牌 $\mathcal{P}$ 。

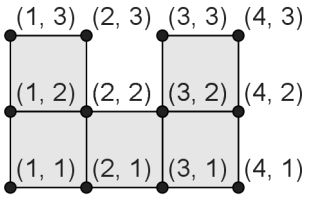


FIGURE 10. 一个非凸多连方。

使用 *Macaulay2* ([3, 7, 14])，我们可以高效地计算出 $\mathcal{P}$ 的相邻 2-子式理想的所有极小素理想，列举如下：

$\mathfrak{p}_1 = I_{\mathcal{P}} = (x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2}, x_{2,3}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,3}, x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3}, x_{3,2}x_{1,1} - x_{3,1}x_{1,2}, x_{3,2}x_{2,1} - x_{3,1}x_{2,2}, x_{4,2}x_{1,1} - x_{4,1}x_{1,2}, x_{4,2}x_{2,1} - x_{4,1}x_{2,2}, x_{4,2}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,2}, x_{4,3}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,3}, x_{4,3}x_{3,2} - x_{4,2}x_{3,3})$, $\mathfrak{p}_2 = (x_{4,2}x_{1,1} - x_{4,1}x_{1,2}, x_{4,2}x_{2,1} - x_{4,1}x_{2,2}, x_{4,2}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,2}, x_{4,3}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,3}, x_{4,3}x_{3,2} - x_{4,2}x_{3,3})$, $\mathfrak{p}_3 = (x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{4,2}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,2}, x_{4,3}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,3}, x_{4,3}x_{3,2} - x_{4,2}x_{3,3})$, $\mathfrak{p}_4 = (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{4,2}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,2}, x_{4,3}x_{3,1} - x_{4,1}x_{3,3}, x_{4,3}x_{3,2} - x_{4,2}x_{3,3})$, $\mathfrak{p}_5 = (x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2}, x_{2,3}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,3}, x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3})$, $\mathfrak{p}_6 = (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3})$, $\mathfrak{p}_7 = (x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, x_{4,2})$, $\mathfrak{p}_8 = (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{3,2}, x_{4,2})$, $\mathfrak{p}_9 = (x_{3,1}, x_{3,2}, x_{4,2}, x_{2,2}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,2}, x_{2,3}x_{1,1} - x_{2,1}x_{1,3}, x_{2,3}x_{1,2} - x_{2,2}x_{1,3})$。

我们注意到，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_6) = 5$ 和 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_7) = 4$，因此理想 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是无混合的，故它不满足定理 3.1 中任一等价条件。

4. On the radicality of adjacent 2-minor ideals

本节旨在给出相邻二阶子式理想具有根式性的必要条件。我们首先介绍定理 2.6 的以下推论，并利用理想的根式等于其所有极小素理想之交这一事实。

推论 4.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合，则

$$\sqrt{I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})} = \bigcap_{W \subseteq V(\mathcal{C})} P_W(\mathcal{C}),$$

其中，交遍历所有可容许集 $W \subseteq V(\mathcal{C})$。

上述结果给出了 $\sqrt{I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})}$ 的一个主分解，但它不一定是极小的。事实上，并非 $\mathcal{C}$ 的每个可容许集都对应于 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的一个极小素理想，注 2.7 中给出了例证。

给定一个单元集合 $\mathcal{C}$，我们的策略是找出 $\mathcal{C}$ 的子集，这些子集的存在足以保证 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的非根性。

定义 4.2。若单元集合 $\mathcal{C}$ 满足：$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的每个单元 C，只要 $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ 是弱连通的，则 $\mathcal{C} \setminus \{C\}$ 的相邻二阶子式理想是根式的，就称其为极小非根式。

以下备注中所描述的计算设置和脚本，使我们能够将极小非根式的单元格集合可视化并加以识别，从而推导出根式性的必要条件。

备注 4.3。 我们已实现相关脚本，公开发布于 [15]，其内容简述如下。

(1) 使用 *SageMath* [17], 我们提供了一个程序，该程序针对固定的秩 n，计算所有秩为 n 的单元格集合 L 。生成的数据集由纯文本文件组成，其中列出了所有经过测试的单元格集合。每个集合都编码为一个列表的列表，其中每个单元由对应于其对角顶点的两个列表表示。例如，顶点集为 $[(1,1),(3,3)]$ 的正方形四格骨牌编码为

$$\{\{\{1,1\},\{2,2\}\},\{\{2,1\},\{3,2\}\},\{\{1,2\},\{2,3\}\},\{\{2,2\},\{3,3\}\}\}.$$

该实现还包含一个程序，用于筛除包含指定子构形的单元格集合。

(2) 在 *Macaulay2* [7], 中，我们提供了一个简洁的过程，用于定义单元格集合的相邻二阶子式理想（最近已以 `adjacent2MinorIdeal` 之名纳入*Macaulay2* 软件包 *PolyominoIdeals* [3] ），并筛除其对应理想为非根式的集合。**(3)** 最后，我们提供了一个*Python* 脚本，用于可视化生成的单元格集合，从而为这些构型提供几何解释。

下面的结果 引入了一个极小非根式单元集合的无限族。

命题 4.4。设 $\mathcal{D}_t$ 为图 ***11*** 所示的单元集合，其中 $t \geq 2$。那么 e

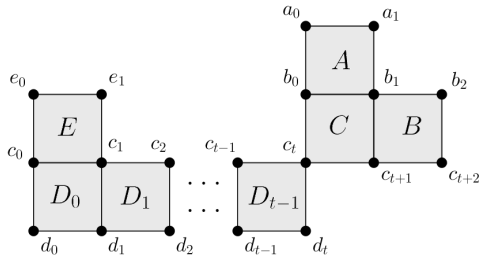


FIGURE 11. $\mathcal{D}_t$

以下结论成立：

(1) 设 $<$ 为由以下变量排序所诱导的字典序：

$$e_1 < e_0 < c_t < \cdots < c_0 < d_t < \cdots < d_0 < c_{t+2} < c_{t+1} < b_2 < b_1 < b_0 < a_1 < a_0.$$

关于 $<$， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 的约化 *Gr¨obner* 基为

$$\mathcal{G}\left(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)\right) \cup \left\{x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}} - x_{b_0}x_{a_1}x_{c_{t+2}}, x_{a_1}x_{b_0}^2x_{c_{t+2}} - x_{a_1}x_{b_0}x_{b_2}x_{c_t}\right\}.$$

(2) 该构形 $\mathcal{D}_t$ 是极小非根式的。(3) 理想 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 是完全交。

证明。**(1)** 关于 $<$，与单元 $E, D_0, \ldots, D_{t-1}$ 对应的相邻二阶子式的初始单项式是对角项，而与单元 $A, B,$ 和 C 对应的相邻二阶子式的初始单项式是反对角项。见图 12，其中标出了与每个单元关联的初始单项式。

我们应用经典的 Buchberger 算法来确定关于 $<$的 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 的约化 Gr¨obner 基。

唯一需要计算的非平凡 S-多项式是 $f_A = x_{a_0}x_{b_1} - x_{a_1}x_{b_0}$和 $f_B = x_{b_1}x_{c_{t+2}} - x_{b_2}x_{c_{t+1}}$的，因为 $\gcd(\mathrm{in}_<(f_A), \mathrm{in}_<(f_B)) = x_{b_1}$。在这种情况下，我们有

$$S(f_A, f_B) = x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}} - x_{b_0}x_{a_1}x_{c_{t+2}} \quad \text{and} \quad \mathrm{in}_<(S(f_A, f_B)) = x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}}.$$

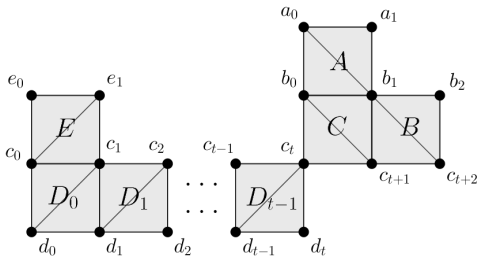


FIGURE 12. 首项的表示。

这个二项式不能模 $\mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t))$ 化简为 0。令 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)) \cup \{x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}} - x_{b_0}x_{a_1}x_{c_{t+2}}\}$，并设 $g = x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}} - x_{b_0}x_{a_1}x_{c_{t+2}}$。现在注意到

$$S(g, f_A) = x_{a_1}x_{b_0}x_{b_1}x_{c_{t+2}} - x_{a_1}x_{b_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}} \quad \text{and} \quad \mathrm{in}_<(S(g, f_A)) = x_{a_1}x_{b_0}x_{b_1}x_{c_{t+2}},$$

因此， $S(g, f_A)$ 模 $\mathcal{G}_0$ 化简为 0，因为 $\mathrm{in}_<(f_B) = x_{b_1}x_{c_{t+2}}$ 且 $S(g, f_A) = x_{a_1}x_{b_0}(x_{b_1}x_{c_{t+2}} - x_{b_2}x_{c_{t+1}})$。另一种情形涉及

$$S(g, f_C) = x_{c_{t+2}}x_{b_0}^2x_{a_1} - x_{a_0}x_{b_1}x_{b_2}x_{c_t} \quad \text{where} \quad \mathrm{in}_<(S(g, f_C)) = x_{a_0}x_{b_1}x_{b_2}x_{c_t}.$$

直接计算可得， $S(g, f_C)$ 模 $\mathcal{G}_0$ 化简为 $x_{a_1}x_{b_0}^2x_{c_{t+2}} - x_{a_1}x_{b_0}x_{b_2}x_{c_t}$。现在我们令

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 \cup \{x_{a_1}x_{b_0}^2x_{c_{t+2}} - x_{a_1}x_{b_0}x_{b_2}x_{c_t}\},$$

并记为 $h = x_{a_1}x_{b_0}^2x_{c_{t+2}} - x_{a_1}x_{b_0}x_{b_2}x_{c_t}$。读者可轻易验证，经过常规计算可知，非平凡的 S-多项式 $S(h, g)$、$S(h, f_B)$ 和 $S(h, f_C)$ 模 $\mathcal{G}_1$ 均化简为 0。因此， $\mathcal{G}_1$ 是关于 $<$ 的 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 的约化 Gr¨obner 基。

(2) 令 $t \geq 2$，并定义以下二项式：

$$f_t = x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}}x_{d_1}^2x_{d_2}\cdots x_{d_{t-1}}x_{e_0} - x_{a_0}x_{b_2}x_{c_{t+1}}x_{d_0}x_{d_1}\cdots x_{d_{t-1}}x_{e_1}.$$

用 $\mathcal{G}_1$ 表示式 (1) 中给出的 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 的约化 Gr¨obner 基。通过直接计算可知， f 模 $\mathcal{G}_1$ 无法约化为 0，而 f^2 模$\mathcal{G}_1$ 可约化为 0。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 不是根式。此外，要通过从 $\mathcal{D}_t$ 中移除一个单元来得到弱连通的单元集合，必须移除 A、 B、 E 或 D_0。我们区分以下两种情况：

(a) 用 $\mathcal{C}$ 表示移除 A 或B 后得到的弱连通单元集合（见图 13 (A)）。注意，式 (1) 中定义的字典序 $<$保证了 $\mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$ 构成 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 的约化 Gr¨obner 基，因为对于所有 $f, g \in \mathcal{G}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}))$，都有 $\gcd(\mathrm{in}_<(f), \mathrm{in}_<(g)) = 1$。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是根式。

(b) 将 $\mathcal{C}'$ 中的 E 或 D_0 移除后，所得集合为弱连通集合（见图 13(B)）。令 $<'$ 为由以下变量次序诱导的字典序：

$$d_t < \cdots < d_0 < c_t < \cdots < c_0 < e_0 < e_1 < c_{t+1} < c_{t+2} < b_0 < b_1 < b_2 < a_0 < a_1.$$

于是， $\mathcal{C}'$ 的所有相邻二阶子式构成了 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$ 关于 $<'$ 的约化 Gröbner 基。因此， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}')$ 是根式。

总之， $\mathcal{D}_t$ 是极小非根式。

(3) 现在我们证明 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$是完全交，即 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)) = |\mathcal{D}_t|$。由命题 2.1，我们知道 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)) \leq |\mathcal{D}_t|$。现在，令 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathcal{D}_t$的一个极小素理想。由定理 2.6，存在 $\mathcal{D}_t$的一个可容许集，使得 $\mathfrak{p} = P_W(\mathcal{D}_t)$。由注 2.5，$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = |W| + |(\mathcal{D}_t)_W|$。由于 $\mathcal{D}_t$的形状，很容易验证，对于每个可容许集 W，都有 $|W| + |(\mathcal{D}_t)_W| \geq |\mathcal{D}_t|$，

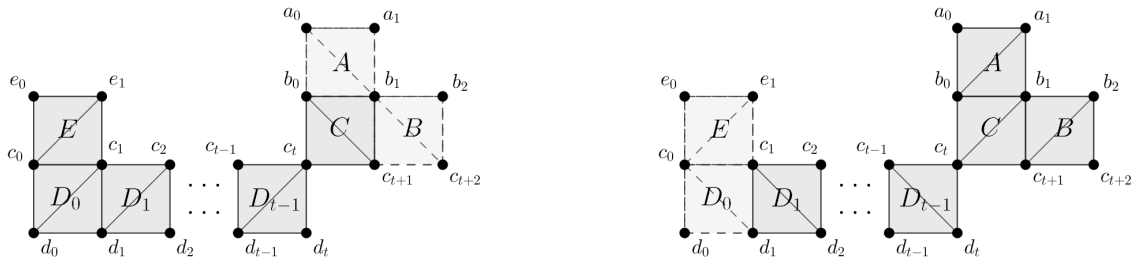


FIGURE 13. 命题 4.4 第（2）部分的证明情形。

因此 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq |\mathcal{D}_t|$。综上可得 $\mathrm{ht}(I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)) = |\mathcal{D}_t|$，所以 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{D}_t)$是完全交。□

结合上述显式构造与计算证据，我们得到以下关于按秩划分的极小非根式单元集合存在性的结果。

定理 4。 **5.** 令 $\mathfrak{C}(n)$ 表示秩为 $n \geq 1$ 的所有单元集合构成的集合。那么：
(1) 对于每个 $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}(1) \cup \mathfrak{C}(2) \cup \mathfrak{C}(3)$，理想 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 都是根式。*(2)* $\mathfrak{C}(5)$ 中不存在极小非根式单元集合。*(3)* 对于 $n = 4$，且对于每个 $n \geq 6$，在$\mathfrak{C}(n)$中存在一个极小非根式单元集合。

证明。结论（1）和（2）可由 [15] 中的计算得出。下面证明结论（3）：

- 若 $n = 4$，只需考虑正方形四格骨牌 $\mathcal{S}$（见图 2）。事实上，使用*Macaulay2*（[3, 7]），可以验证 $I_{\text{相邻}}(\mathcal{S})$ 不是根式的；从 $\mathcal{S}$中移去任意一个单元，都会得到图 1（B）所示的多格骨牌，其相邻二阶子式理想是根式的。

- 若 $n \geq 6$，则结论由命题 4.4 的第 (2) 点得出。

证明至此完成。 □

现在我们转而讨论根式性的必要条件。以下引理和命题为此提供了一个有用的工具。

引理 4.6. 设 J是 $K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ 的一个理想，满足 $J = I + L$，其中 I和 L分别是 $K[x_1, \ldots, x_n]$和 $K[y_1, \ldots, y_m]$的理想。若 I或 L不是根式的，则 J不是根式的。

证明。如果 I不是根式，那么存在 $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$使得 $f \notin I$，但对于某个$k \geq 2$，$f^k \in I$。由于 $I \subset J$，我们得到 $f^k \in J$。假设 $f \in J = I + L$。由于 $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$，可推出 $f \notin L$ 和 $f \in I$，这与假设矛盾。因此，$f \notin J$，从而如所声称的，J 不是根式。若 L 不是根式，也可用同样的论证。□

命题 4.7。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是两个单元格集合，满足 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$。假设对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$，$A$ 至少有一条边属于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}')$。如果 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}')$ 不是根式，那么 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 也不是根式。

证明。由于对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$，$A$ 中至少有一条边位于 $U = V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}')$ 中，因此可得

$$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}) \subset I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C}') + (x_u : u \in U).$$

于是结论由引理 4.6 得出。 □

现在我们可以给出与单元集合相关的相邻二阶子式理想具有根式性的必要条件。

定理 4.8. 设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合。若 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 是根式理想，则 $\mathcal{C}$ 不包含表 *1* 中列出的任何一种构型。

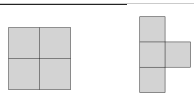
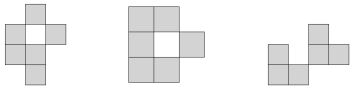
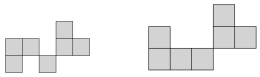
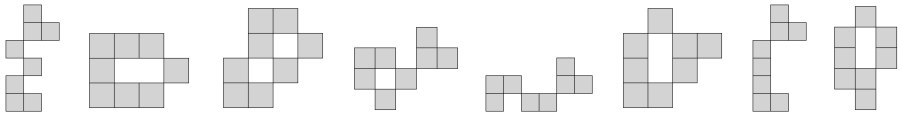
Rank	极小非根式格子集合
4	
6	
7	
8	

TABLE 1. 按秩分类的单元非根式构型。

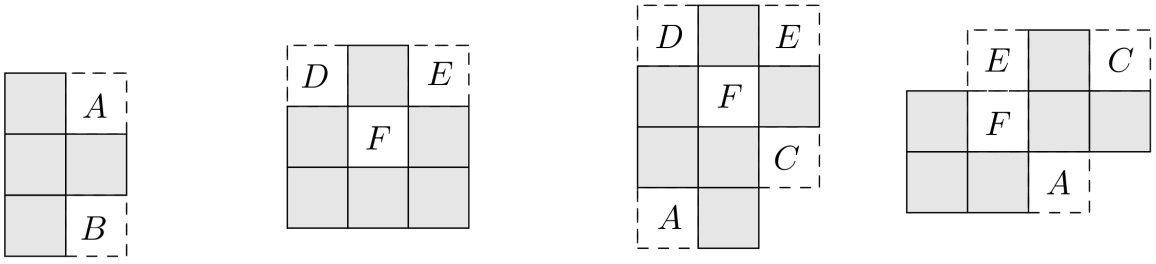
证明。利用 *Macaulay2* [3, 7], ，我们验证了表 1 所列每个单元构型所对应的相邻二阶子式理想都不是根式。

设 $\mathcal{C}$ 是一个单元集合。按照表 1 中列出的秩，我们根据 $\mathcal{C}$ 所包含构型的类型来划分证明。

秩 ***4***。我们首先考虑 $\mathcal{C}$ 真包含两个秩为 4 的构型之一的情形。

(1) 假设 $\mathcal{C}$ 真包含一个正方形四格骨牌，记作 $\mathcal{S}$。那么对每个单元$A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$， A 至少有一条边属于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{S})$。因此，由命题 4.7 可知，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。

(2) 现在假设 $\mathcal{C}$ 包含图 14 (A) 所示的多格骨牌 $\mathcal{P}$。如果 A 或 B 属于$\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 包含一个正方形四格骨牌，根据前一种情形， $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。如果这两个单元都不包含在 $\mathcal{C}$中，那么对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{P}$， A至少有一条边属于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{P})$。因此，根据命题 4.7，我们有 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。



(A) $\mathcal{P}$ (B) $\mathcal{C}_1$ (C) $\mathcal{C}_2$ (D) $\mathcal{C}_3$

FIGURE 14. 一些非根式单元集合。

秩 ***6***。现在我们考察 $\mathcal{C}$ 包含三个秩六构型之一的情形。

(1) 假设 $\mathcal{C}$ 包含图 14 (A) 所示的 $\mathcal{C}_1$。如果 $F \in \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 包含一个正方形四格骨牌。根据秩 4 情形中的讨论，可得 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。

现在假设 $F \notin \mathcal{C}$。若 $E \in \mathcal{C}$ 和 $D \notin \mathcal{C}$，则利用 *Macaulay2* ([3, 7]) 可以验证，$\mathcal{C}' = \mathcal{C}_1 \cup \{E\}$ 的相邻二阶子式理想不是根式。此外，对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$，$A$ 至少有一条边属于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}')$。因此，由命题 4.7，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$不是根式。当 $E \notin \mathcal{C}$ 和 $D \in \mathcal{C}$时，也可用类似论证。

如果两个单元 E 和 D 都属于 $\mathcal{C}$，那么利用 *Macaulay2* [3, 7]可以验证，$\mathcal{C}'' = \mathcal{C}_1 \cup \{E, D\}$ 的相邻二阶子式理想不是根式。此外，对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}''$，$A$ 至少有一条边属于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}'')$。因此，由命题 4.7可知，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$也不是根式。

最后，若上述单元均不属于 $\mathcal{C}$，则对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$，$A$ 至少有一条边位于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}_1)$ 中，因此再次由命题 4.7 可得结论。

(2) 假设 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{C}_2$，如图 14 (B) 所示。若 F 或 A 属于 $\mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}$ 包含一个正方形四格骨牌。根据秩4情形-(1)中的讨论，可知 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。若 $\mathcal{C}$ 包含 C 或 D，则 $\mathcal{C}$ 也包含上文讨论过的构型 $\mathcal{C}_1$，因此结论成立。

现在假设 $\mathcal{C}$ 不包含 A，C，D，和 F。若 $E \in \mathcal{C}$，则利用 *Macaulay2* ([3, 7])，可以验证 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 \cup \{E\}$ 的相邻二阶子式理想不是根式。此外，对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$，$A$ 至少有一条边位于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}')$ 中。因此，由命题 4.7 可知 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。

如果上述单元都不属于 $\mathcal{C}$，那么对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_2$，$A$ 的至少一条边位于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}_2)$ 中，而命题 4.7 再次推出 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。

(3) 假设 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{C}_3$，如图 14 (C) 所示。如果 F 或 C 中任一个属于 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 就包含一个正方形四格骨牌；类似地，如果 $A \in \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 就包含 $\mathcal{P}$，如图 14 (A) 所示。因此，根据秩 4 部分的讨论，$I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。如果 $\mathcal{C}$ 包含 E，那么 $\mathcal{C}$ 也包含上文讨论过的构型 $\mathcal{C}_2$，从而结论成立。

假设 $\mathcal{C}$ 不包含 A，C，E，以及 F。那么对于每个单元 $A \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_3$，$A$ 的至少一条边位于 $V(\mathcal{C}) \setminus V(\mathcal{C}_3)$ 中。因此，命题 4.7 推出 $I_{\mathrm{adj}}(\mathcal{C})$ 不是根式。

秩 ***7*** 和 ***8***。其余情形对应于秩 7 和 8，可用与上述证明类似的论证得出。

证明至此完成。 □

我们在本节最后，根据计算证据，讨论上述必要条件的适用范围和局限性。

备注 4.9。计算证据表明，对于 $n \leq 8$，上述图示涵盖了由 n 个单元组成的所有极小非根形状（见 [15] 中的输出）。要完全刻画其相邻二阶子式理想为根式的单元集合，似乎是一项极具挑战性的任务。事实上，我们的计算表明，随着秩递增，极小非根形状不断出现，但并未呈现出明显的规律。例如，从秩 4 增至秩 6 时，新增的三个形状似乎与较低秩的形状没有明显相似之处；从秩 6 增至秩 7 时，秩 7 的第一个形状似乎并非源自任何先前的构型；同样，从秩 7 增至秩 8 时，第三、第四和第六个形状似乎独立于较低秩的构型。当然，有些构型“相似”：例如，从秩 6 增至秩 9 时，命题 4.4 中定义的形状 $\mathcal{D}_2$、$\mathcal{D}_3$ 和 $\mathcal{D}_4$ 再次出现。此外，非根式单元集合的数量随秩迅速增长，使得计算愈发困难（见表 2）。

致谢。Francesco Navarra 和 Ayesha Asloob Qureshi 获得了土耳其科学与技术研究委员会 TUBITAK 的资助，资助编号：124F113。Francesco Navarra 是

Rank	2	3	4	5	6	7	8
弱连通 单元格集合的数量	2	5	22	94	524	3031	18770
非根式 单元格集合的数量	0	0	2	9	74	550	4210

TABLE 2. 弱连通单元格集合的数量（按对称性去重）

GNSAGA Indam 的成员，并对其支持表示感谢。Sara Saeedi Madani 部分获得了 IPM 的资助（编号：1404130019）。

利益冲突声明。 作者声明，他们没有已知的竞争性财务利益或个人关系可能会影响本文所报告的研究工作。

数据可用性。 </style}本文使用的数据见 [15]。

REFERENCES

[1] W. Bruns、J. Herzog，《Cohen–Macaulay环》，剑桥大学出版社，伦敦，1993年。[2] W. Bruns、U. Vetter，《行列式环》，《数学讲义》第1327卷，施普林格，纽约，1988年。[3] C. Cisto、R. Jahangir、F. Navarra，《单元格集合、多格骨牌与二项式理想》，arXiv:2403.06743，2025年。软件包：https://www.macaulay2.com/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/PolyominoIdeals/ html/index.html。[4] C. Cisto、F. Navarra、R. Utano，《弱闭路径多格骨牌的素性》，《伊利诺伊数学杂志》66(4)，545–563，2022年。[5] P. Diaconis、D. Eisenbud、B. Sturmfels，《格点游走与主分解》，载于《纪念 Gian-Carlo Rota 的数学论文集》，Birkh¨auser，波士顿，1998年。[6] D. Eisenbud、B. Sturmfels，《二项式理想》，《杜克数学杂志》84（1996），1–45。[7] D. R. Grayson、M. E. Stillman，《Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统》，可访问 https://macaulay2.com。[8] J. Herzog、T. Hibi，《由相邻 2-子式生成的理想》，《交换代数杂志》4（2012），525–549。[9] J. Herzog、T. Hibi、F. Hreinsd´ottir、T. Kahle、J. Rauh，《二项式边理想与条件独立性语句》，《应用数学进展》45（2010），317–333。[10] J. Herzog、T. Hibi、H. Ohsugi，《Binomials》，《数学研究生教材》第279卷，施普林格，2018年。[11] M. Hochster、J.A. Eagon，《Cohen–Macaulay环、不变量理论与行列式簇的一般完美性》，《美国数学杂志》93，1020–1058，1971年。[12] S. Ho˙sten、J. S hapiro，《格基理想的主分解》，《符号计算杂志》29（2000），625–639。[13] S. Ho˙sten、S. Sullivant，《相邻子式理想》，《代数杂志》277（2004），615–642。[14] T. Kahle，《二项式理想的分解》，《代数与几何软件杂志》4，2012年。《Binomials：二项式理想的专用程序》，Macaulay2软件包，1.2.1版，可访问 https://github.com/ Macaulay2/M2/tree/master/M2/Macaulay2/packages。[15] F. Navarra，《相邻二阶子式理想》（1.0版）[计算机软件], Zenodo，2025年。可访问 https: //doi.org/10.5281/zenodo.17312374。[16] A. A. Qureshi，《由二阶子式生成的理想、单元格集合与堆叠多格骨牌》，《代数杂志》357（2012），279–303。[17] SageMath，《Sage数学软件系统》（9.5版），Sage开发者团队，2022年，https://www. sagemath.org。

(TakayukiHibi) Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Suita, Osaka 565-0871, Japan电子邮件地址: hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

（Francesco Navarra） Sabanci University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Orta Mahalle, Tuzla 34956, Istanbul, Turkey
电子邮箱地址: francesco.navarra@sabanciuniv.edu

(AyeshaAsloob Qureshi) Sabanci University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Orta Mahalle, Tuzla 34956, Istanbul, Turkey电子邮箱地址: aqureshi@sabanciuniv.edu, ayesha.asloob@sabanciuniv.edu

（Sara Saeedi Madani） Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, and School of Mathematics, Institute for Research in FundamentalSciences, Tehran, Iran
电子邮箱地址: sarasaeedi@aut.ac.ir, sarasaeedim@gmail.com