利用质子-原子核碰撞中的前向双强子关联探测胶子饱和

Paul Caucal，[1]Zhong-Bo Kang，[2,3,4]Piotr Korcyl，[5]Farid Salazar，[6,7,8]Björn Schenke，[8]Tomasz Stebel，[5]Raju Venugopalan，[8,9,10]和 Wenbin Zhao[11]

[1]*SUBATECH UMR 6457*（*IMT Atlantique*、南特大学、*IN2P3/CNRS*），法国南特 *Alfred Kastler* 路 *4* 号，邮编 *44307* [2]物理与天文学系，加利福尼亚大学洛杉矶分校，美国加利福尼亚州洛杉矶，邮编 *CA 90095* [3]*Mani L. Bhaumik* 理论物理研究所，加利福尼亚大学洛杉矶分校，美国加利福尼亚州洛杉矶，邮编 *CA 90095* [4]核科学前沿中心，石溪大学，美国纽约州石溪，邮编 *NY 11794* [5]理论物理研究所，雅盖隆大学，*ul. Lojasiewicza 11*，波兰克拉科夫，邮编 *30-348* [6]物理系，天普大学，美国宾夕法尼亚州费城，邮编 *19122* [7]*RIKEN-BNL*研究中心，布鲁克海文国家实验室，美国纽约州厄普顿，邮编 *11973* [8]物理系，布鲁克海文国家实验室，美国纽约州厄普顿，邮编 *11973* [9]*CFNS*，物理与天文学系，石溪大学，美国纽约州石溪，邮编 *NY 11794* [10]希格斯理论物理中心，爱丁堡大学，英国苏格兰爱丁堡，邮编 *EH9 3FD* [11]粒子物理研究所与夸克与轻子物理重点实验室（教育部），华中师范大学，中国湖北武汉，邮编 *430079*

我们运用色玻璃凝聚态有效理论，对质子-原子核碰撞中的半包容前向双强子产生进行了详尽的数值研究。我们重点考察双强子在横向平面中近乎背对背产生的区域，从而为基于小-x胶子分布的横向动量依赖因子化方法提供依据。我们的计算整合了几个关键要素：i）通过带有跑动耦合的 Balitsky–Kovchegov 方程进行非线性快度演化；ii）微扰和非微扰 Sudakov重求和；以及 iii）针对小-x胶子分布初始条件的、受唯象学约束的模型。我们将这一唯象框架与 STAR 合作组关于质子-质子和质子-金碰撞中前向双 pion 产生方位角关联的实验数据进行比较。我们分析了与快度演化初始尺度下原子核饱和尺度有关的系统性理论不确定性，以及与强子化过程有关的不确定性。最后，我们对大型强子对撞机 ALICE 前向量能器（FoCal）升级预计覆盖的运动学范围作出预测。

arXiv:2512.21466v1 [hep-ph] 25 Dec 2025

I. 引言

胶子饱和的发现与刻画，是高能量子色动力学、强子结构和重离子物理交汇领域的一项重大挑战。当强子或原子核中的胶子相空间密度（或等价地说，其场强）足够大，使得重组和屏蔽效应与部分子劈裂贡献相抗衡时，就会发生胶子饱和，其总体效果是抑制胶子分布的增长 [1, 2]。对于携带较小纵向动量分数 x且横向动量低于一个与能量和核尺寸相关的 A动量标度 $Q_s(x,A)$的部分子，预计会出现这一现象；该标度称为饱和标度。

色玻璃凝聚态（CGC）有效理论为描述量子色动力学的这一机制提供了一个系统框架 [3–7]。（综述参见 [8–12]。）高占据数的胶子系统被视为半经典非阿贝尔规范背景场，而快速运动的色荷穿过该背景场时的散射振幅，则用类光威尔逊线表示；它们对与背景场发生的多次 eikonal 相互作用进行了重求和。因此，粒子产生截面可以表示为类光威尔逊线关联函数与可微扰计算因子的卷积。

在高能下，领先对数（$\alpha_s \ln(x_0/x) \sim O(1)$）量子修正会变得很大。这些修正被重求和到重整化群演化中，该演化从初始 x_0出发，描述满足 Balitsky-JIMWLK 层级关系 [13–15]的多点威尔逊线关联函数随x 的演化。在 $N_c \gg 1$、 $A \gg 1$ 平均场近似下，支配偶极子关联函数演化的层级关系第一条方程是 Balitsky–Kovchegov（BK）方程。色玻璃凝聚有效场论已用于研究强子-电子环形加速器（HERA）、相对论重离子对撞机（RHIC）、大型强子对撞机（LHC）以及未来电子-离子对撞机（EIC）上的广泛可观测量（参见 [12]）。

长期以来，人们认为双强子关联，尤其是前向区域产生的强子对的方位角分布，是探测质子-质子和质子-原子核碰撞中饱和动力学的灵敏手段 [16–18]。前向运动学选取来自质子的高-x 部分子和来自原子核的低-x 胶子。此外，若聚焦于双强子近乎背对背产生的构型（即测得的相对快度 $\Delta\eta$ 与相对方位角 $\Delta\Phi$平面中的背侧峰），横向动量的不平衡是探测核饱和标度的灵敏手段。

为了表征这些关联，引入符合概率是很方便的：

即在另一个动量区间内存在触发强子 h_1 的条件下，在给定的动量区间和相对方位角 $\Delta\Phi$内产生伴随强子 h_2 的概率：

$$CP(\Delta\Phi) = N_{\rm pair}(\Delta\Phi)/N_{\rm trig}\,. \tag{1}$$

这里，

$$N_{\rm pair}(\Delta\Phi) = \int \mathrm{d}\eta_{h_1} \int \mathrm{d}\eta_{h_2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_1}}^2 \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_2}}^2 \times \frac{\mathrm{d}\sigma^{pA\to h_1 h_2 X}}{\mathrm{d}(\Delta\Phi)\mathrm{d}\eta_{h_1}\mathrm{d}\eta_{h_2}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_1}}^2\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_2}}^2} \tag{2}$$

统计指定运动学区间内的强子对数量，而

$$N_{\rm trig} = \int \mathrm{d}\eta_{h_1} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_1}}^2 \frac{\mathrm{d}\sigma^{pA\to h_1 X}}{\mathrm{d}\eta_{h_1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h_1}}^2} \tag{3}$$

统计某个快度和横向动量区间内的触发粒子数量。

在远侧区域（$\Delta\Phi \sim \pi$），预计饱和会产生两种关键效应：展宽和抑制。展宽源于经典胶子场中的多重散射，而抑制则由非线性量子演化 [19, 20]引起。随着饱和标度增大，这些效应会更加明显；而饱和标度会随碰撞能量升高、前向快度增大（更小的 x）、核靶变大和/或碰撞更加中心而增大。二强子π^0 关联函数在CGC形式主义下进行了研究（在最低阶中仅包括夸克起始道），并采用高斯分布的色源 [21]。微分截面表示为夸克裂变为夸克+胶子对的光锥波函数与多点威尔逊线关联函数的卷积。文献 [21] 预测了 CP（$\Delta\Phi$）的展宽和抑制。

在 [22, 23], 中，研究表明，在背对背运动学条件下，微分截面的主导贡献可因子化为硬散射系数和非微扰的小-x 横向动量依赖（TMD）分布。在色玻璃凝聚中，这些TMD可表示为威尔逊线及其导数的组合，其快度演化由BK–JIMWLK方程控制。（数值研究参见 [24–26]。）每种TMD的规范链结构反映了底层部分子子过程 [27] 的色流。在色玻璃凝聚中，TMD 的规范链结构源自威尔逊线关联函数的色结构。在大N_c 下，小-x 处所有非极化胶子TMD都可用两个普适对象表示：偶极子关联函数和Weisz¨acker-Williams关联函数 [28]。

已有数项唯象学研究采用这一小-x横动量依赖分布框架，针对质子–原子核碰撞 [29–38] 以及深度非弹性散射 [39, 40]展开。特别是，文献 [32] 研究了 CP（$\Delta\Phi$），其中包括夸克和胶子起始道，并采用了在高斯近似下计算的横动量依赖分布，同样发现了展宽和抑制现象。尽管这些结果与相对论重离子对撞机中 pp 和 d金之间观测到的抑制相符，但它们无法再现相关性的宽度：STAR [41, 42] 和PHENIX [43] 数据表明，两个系统中的宽度相近，且大于领头阶（LO）色玻璃凝聚演化所预测的宽度。类似地，大型强子对撞机的双喷注测量 [44] 证实背侧峰受到强烈抑制，但没有明显的核展宽。这些观测促使人们提出了其他方法来解释双粒子相关性数据，例如 [45]中的一种基于核PDF的方法。

对展宽缺失的一种合理解释是，在背对背运动学条件下，部分子簇射以及碎裂导致的内禀横向动量展宽主导了关联的宽度。最近的一项研究 [46] 发现，纳入部分子簇射和碎裂引起的动量弥散后，CP(ΔΦ)的宽度对小-x胶子的内禀 k_T 变化不敏感，这表明饱和在控制背侧峰宽度方面仅起次要作用。

小x 横向动量分布形式为纳入这些相互竞争的机制提供了一种自然方法。在近背对背运动学构型中，高阶修正不仅会受到小x 对数的增强，也会受到较大的 Sudakov 双对数和单对数的增强。在中等 x下，Collins–Soper–Sterman（CSS）方程对这些对数进行重求和 [47–53]。小x 对数与 Sudakov 对数的联合重求和最初于 [54–56] 提出，此后得到广泛研究 [56–71]。微扰 Sudakov 对数主要由 parton 簇射所涵盖，而非微扰 Sudakov 因子可解释为碎裂产生的本征横向动量。因此，纳入这些效应对于正确描述远侧关联的宽度、解答展宽缺失之谜至关重要。文献 [72]采用一个简单的饱和模型，将 Sudakov重求和纳入小x 横向动量分布框架，并对 x 和 A依赖性进行参数化；研究发现，比较 pp 与 pA碰撞时，自归一化微分截面的宽度变化很小，因而表明不存在展宽。另一方面，由于关联经过了自归一化处理，抑制效应的信息被丢失，从而限制了对饱和动力学的认识。

本文介绍了在改进的横向动量依赖框架下，对色玻璃凝聚中的双强子关联进行的前沿计算。该框架纳入了Sudakov重求和、小-x演化，以及针对 pp 和 pA 碰撞中胶子分布的现象学约束初始条件。我们重点研究背侧峰；在此处，近似背对背的运动学条件使得可以用小-x 胶子分布进行TMD因子化。在高斯近似下，我们将所有小-xTMD与Wilson线偶极子关联函数联系起来，并采用跑动耦合BK方程对其进行演化。计算中纳入了微扰和非微扰Sudakov对数，并采用来自改进的TMD形式主义的非壳硬因

子 [73, 74]。我们的质子和核偶极子初始分布分别取自对HERA质子约化截面数据的拟合，以及一种纳入横向核密度的最小偏置核偶极子模型。我们将结果与STAR关于 pp 和质子-金核碰撞中前向双强子方位角关联的数据进行比较 [42]。我们还详细研究了与核初始饱和尺度和强子化相关的理论不确定性。最后，我们给出大型强子对撞机上ALICE FoCal升级预期可探测运动学区域的预测 [76]。

本文结构如下。第二节回顾在小-x TMD形式框架下计算 pA碰撞中的前向双强子产生。第三节详细介绍计算中使用的非微扰输入，包括偶极子关联函数的初始条件选择、部分子分布函数、碎裂函数以及非微扰Sudakov因子。第四节展示数值结果，并与STAR的实验数据进行比较，同时给出对FoCal的预测。第五节总结全文，并展望相对论重离子对撞机、大型强子对撞机及其他设施未来的测量。

II. 理论形式框架

在 eikonal近似中，夸克和胶子与小-x胶子背景场的多重散射，分别通过基本表示和伴随表示中的类光威尔逊线所引起的色旋转来描述。它们表示为

$$V(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\exp\left[ig\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^+ A_a^-(x^+,\boldsymbol{x})t^a\right], \tag{4}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \mathcal{P}\exp\left[ig\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x^+ A_a^-(x^+,\boldsymbol{x})T^a\right], \tag{5}$$

其中，$\mathcal{P}$ 表示对色矩阵指数进行路径排序。 t^a 和 T^a 分别是 SU(3) 在基本表示和伴随表示中的生成元。背景场在 $A^+ = 0$ 规范下满足

$$\nabla_\perp^2 A_a^-(x^+,\boldsymbol{x}) = -\rho^a(x^+,\boldsymbol{x}) \quad A_\perp^i = 0\,, \quad A^+ = 0\,, \tag{6}$$

其中， ρ^a（x^+， $\boldsymbol{x}$）是经典源的色荷密度，用以表示大-x parton。

微分截面随后表示为对色源构型取平均的威尔逊线多点算符 $\mathcal{O}$ ρ^a。其中最简单的两个算符是基本表示和伴随表示中的偶极子 [77, 78]

$$S_F^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') = \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}\left[V(\boldsymbol{b})V^\dagger(\boldsymbol{b}')\right], \tag{7}$$

$$S_A^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}') = \frac{1}{N_c^2-1}\mathrm{Tr}\left[U(\boldsymbol{b})U^\dagger(\boldsymbol{b}')\right]. \tag{8}$$

对 ρ^a 的平均记为

$$\langle\mathcal{O}\rangle_x = \int[\mathcal{D}\rho]W_x[\rho]\mathcal{O}[\rho] \tag{9}$$

其中， $W_x[\rho]$ 是一个规范不变的随机权重泛函，用于描述源的分布，其对 x 的依赖由JIMWLK方程支配。

现在考虑质子-核碰撞中的强子单粒子包容产生。前向区域（质子前进方向）中的强子由质子中的大x 部分子产生，该部分子与原子核的低x胶子背景场发生散射。在这种非x 对称运动学条件下，质子中的大部分子可视为共线，因此可用部分子分布函数描述。与低x 胶子场的散射由类光威尔逊线编码（见方程（4）和（5））。这一设定 [79]可在所谓的色玻璃凝聚有效场论稀薄-致密近似框架内系统地推导得到 [80–82]。稀薄-致密框架下的领先阶微分截面为 [79]

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{pA\to h_1X}}{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_{h1}}\mathrm{d}\eta_{h_1}} = \int_{z_{h_1,\min}}^1 \frac{\mathrm{d}z_{h_1}}{z_{h_1}^2}\left[\sum_{q=u,d} x_p f_q(x_p,\mu^2)N_{\mathrm{F}}(x_g,\boldsymbol{k})D_{h_1/q}(z_{h_1},\mu^2) + x_p f_g(x_p,\mu^2)N_{\mathrm{A}}(x_g,\boldsymbol{k})D_{h_1/g}(z_{h_1},\mu^2)\right], \tag{10}$$

取 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p_{h1}}/z_{h_1}$，其大小为 $k_\perp = |\boldsymbol{k}|$。纵向动量分数为 x_{p-}=$k_\perp e^{\eta_1}/\sqrt{s}$，且 $x_g = k_\perp e^{-\eta_1}/\sqrt{s}$，我们假设部分子快度 η_1 等于强子快度 η_{h_1}。界限 $z_{h_1,\,\min}$ 确保满足能量约束x_p， $x_g < 1$。因子化尺度选为 $\mu^2 = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{h1}}^2$。这里， f_q 和 f_g 分别是夸克和胶子的部分子分布函数（PDFs），而 $D_{h/q}$ 和 $D_{h/g}$ 是分别表示夸克或胶子碎裂成强子的碎裂函数。我们分别定义了基本表示和伴随表示下偶极振幅的傅里叶变换

$$N_{\mathrm{F}}(x_g,\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}' e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\langle S_F^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\rangle_{x_g}, \tag{11}$$

$$N_{\rm A}(x_g,\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}' e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\langle S_A^{(2)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\rangle_{x_g}\,. \tag{12}$$

类似地，在前向区域产生的双强子源自质子中的一个大 x parton，它在低x背景场散射之前或之后辐射出第二个 parton。如果强子不平衡较小，即处于背对背运动学，散射实际上发生在一个小x 胶子上，其分布由相应的横向动量分布 [22]描述。硬散射由壳上硬系数描述，且在改进的横向动量依赖框架中采用非壳硬因子 [24, 73]。我们将采用后者，因为它能让我们在 $\Delta\Phi \sim \pi$周围覆盖更大的角度窗口，而不会显著增加数值计算的复杂度。

因此，质子-原子核碰撞中的前向双强子产生微分截面，是领头阶部分子截面、Sudakov因子、共线部分子分布函数和碎裂函数的卷积。计入夸克起始道和胶子起始道后，可写为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma^{pA\to h_1h_2X}}{\mathrm{d}\eta_{h_1}\mathrm{d}\eta_{h_2}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_{h1}}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_{h2}}} &= \int_{z_{h_1,\min}}^1 \frac{\mathrm{d}z_{h_1}}{z_{h_1}^2}\int_{z_{h_2,\min}}^1 \frac{\mathrm{d}z_{h_2}}{z_{h_2}^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^2}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{B}e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{B}}\\
\times\Bigg\{&\sum_{q=u,d} x_p f_q(x_p,\mu_b^2)D_{h_1/q}(z_{h_1},\mu_b^2)D_{h_2/g}(z_{h_2},\mu_b^2)e^{-S_{qg\to qg}(\mu_b^2,\mu^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma^{qA\to qgX}}{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_2}}\\
&+\sum_{q=u,d} x_p f_q(x_p,\mu_b^2)D_{h_1/g}(z_{h_1},\mu_b^2)D_{h_2/q}(z_{h_2},\mu_b^2)e^{-S_{qg\to qg}(\mu_b^2,\mu^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma^{qA\to qgX}}{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_2}}\\
&+2\sum_{q=u,d,s} x_p f_g(x_p,\mu_b^2)D_{h_1/q}(z_{h_1},\mu_b^2)D_{h_2/\bar{q}}(z_{h_2},\mu_b^2)e^{-S_{gg\to q\bar{q}}(\mu_b^2,\mu^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma^{gA\to q\bar{q}X}}{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_2}}\\
&+x_p f_g(x_p,\mu_b^2)D_{h_1/g}(z_{h_1},\mu_b^2)D_{h_2/g}(z_{h_2},\mu_b^2)e^{-S_{gg\to gg}(\mu_b^2,\mu^2)}\frac{\mathrm{d}\sigma^{gA\to ggX}}{\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_2}}\Bigg\}\Bigg|_{p_i=p_{hi}/z_{h_i}}\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

在参考文献 [37], 中提出的改进的横向动量依赖框架内（且在大-N_c 极限下），部分子截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{qA\to qgX}}{\mathrm{d}P.S.} = \mathcal{F}_{qg}^{(1)}(x_g,\boldsymbol{k})\mathcal{H}_{qg\to qg}^{(1)} + \mathcal{F}_{qg}^{(2)}(x_g,\boldsymbol{k})\mathcal{H}_{qg\to qg}^{(2)}\,, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{gA\to q\bar{q}X}}{\mathrm{d}P.S.} = \mathcal{F}_{gg}^{(1)}(x_g,\boldsymbol{k})\mathcal{H}_{gg\to q\bar{q}}^{(1)} + \mathcal{F}_{gg}^{(2)}(x_g,\boldsymbol{k})\mathcal{H}_{gg\to q\bar{q}}^{(2)}\,, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma^{gA\to ggX}}{\mathrm{d}P.S.} &= (\mathcal{F}_{gg}^{(1)}(x_g,\boldsymbol{k}) + \mathcal{F}_{gg}^{(3)}(x_g,\boldsymbol{k}))\mathcal{H}_{gg\to gg}^{(1)}\\
&+ (\mathcal{F}_{gg}^{(2)}(x_g,\boldsymbol{k}) + \mathcal{F}_{gg}^{(3)}(x_g,\boldsymbol{k}))\mathcal{H}_{gg\to gg}^{(2)},
\end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\mathrm{d}P.S. = \mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_1}\mathrm{d}^2\boldsymbol{p_2}$ 是部分子相空间，$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{P} = (1-z)\boldsymbol{p_1} - z\boldsymbol{p_2}$, $z = p_{1\perp}e^{\eta_1}/(p_{1\perp}e^{\eta_1} + p_{2\perp}e^{\eta_2})$。纵向动量分数为 $x_p = (-p_{1\perp}e^{\eta_1} + p_{2\perp}e^{\eta_2})/\sqrt{s}$ 和 $x_g = (p_{1\perp}e^{-\eta_1} + p_{2\perp}e^{-\eta_2})/\sqrt{s}$，而界限 $z_{h_i,\min}$ 确保满足能量约束 $x_p, x_g < 1$。非壳胶子硬因子 $\mathcal{H}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{P},z)$的完整表达式见附录 C。

小-x 胶子横动量依赖分布，$\mathcal{F}_\alpha^{(i)}(x_g, \boldsymbol{k})$，由威尔逊线及其导数的各种组合构成 [22]。这些组合蕴含了不同的规范链接结构，这些结构由底层通道的色流决定。在色玻璃凝聚有效场论中，它们表示为

$$\mathcal{F}_\alpha^{(i)}(x_g,\boldsymbol{k}) = \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{b}' e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}')}\left\langle \widetilde{\mathcal{F}}_\alpha^{(i)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\right\rangle_{x_g} \tag{17}$$

以及 $\alpha \in \{qg, gg\}$，并且

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}}_{qg}^{(1)} &= \frac{2}{\alpha_s}\mathrm{Tr}\left[\left(\partial_\perp^i V(\boldsymbol{b})\right)\left(\partial_\perp^i V^\dagger(\boldsymbol{b}')\right)\right],\\
\widetilde{\mathcal{F}}_{qg}^{(2)} &= \frac{2}{\alpha_s}\mathrm{Tr}\left[A_\perp^i(\boldsymbol{b})A_\perp^i(\boldsymbol{b}')\right]S_F^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'),\\
\widetilde{\mathcal{F}}_{gg}^{(1)} &= \frac{2}{\alpha_s}\mathrm{Tr}\left[\left(\partial_\perp^i V(\boldsymbol{b})\right)\left(\partial_\perp^i V^\dagger(\boldsymbol{b}')\right)\right]S_F^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'),\\
\widetilde{\mathcal{F}}_{gg}^{(2)} &= \frac{-2}{\alpha_s}\frac{\mathrm{Tr}\left[\left(\partial_\perp^i V^\dagger(\boldsymbol{b})\right)V(\boldsymbol{b}')\right]}{N_c}\mathrm{Tr}\left[V(\boldsymbol{b})\left(\partial_\perp^i V^\dagger(\boldsymbol{b}')\right)\right],\\
\widetilde{\mathcal{F}}_{gg}^{(3)} &= \frac{2}{\alpha_s}\mathrm{Tr}\left[A_\perp^i(\boldsymbol{b})A_\perp^i(\boldsymbol{b}')\right]S_F^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')S_F^{(2)}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}'),
\end{aligned} \tag{18}$$

其中我们引入了横向规范场

$$A_\perp^k(\boldsymbol{b}) = \frac{i}{g}V(\boldsymbol{b})\partial_\perp^k V^\dagger(\boldsymbol{b})\,, \tag{19}$$

这对应于规范 $A^- = 0$ 下的横向规范场 $x^+ = +\infty$。

胶子横动量依赖分布的 x依赖性遵循 JIMWLK演化方程。它们已在数值上进行过研究，见 [24–26]。在本研究中，横动量依赖分布的计算方法如 [83], 所述，采用高斯近似和大N_c 近似，将横动量依赖分布表示为

$$S_{qg\to qg}(\mu_b^2,\mu_f^2)=\int_{\mu_b^2}^{\mu_f^2}\frac{\mathrm{d}\mu^2}{\mu^2}\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\left[(2C_A+2C_F)\ln\left(\frac{\mu_f^2}{\mu^2}\right)-(3C_F+2\beta_0)\right]+C_{NP}\times S^{\mathrm{NP}}_{qg\to qg}(\mu_b^2,\mu_f^2)\,, \tag{20}$$

$$S_{gg\to gg}(\mu_b^2,\mu_f^2)=\int_{\mu_b^2}^{\mu_f^2}\frac{\mathrm{d}\mu^2}{\mu^2}\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\left[4C_A\ln\left(\frac{\mu_f^2}{\mu^2}\right)-6\beta_0\right]+C_{NP}\times S^{\mathrm{NP}}_{gg\to gg}(\mu_b^2,\mu_f^2)\,, \tag{21}$$

$$S_{qg\to gq}(\mu_b^2,\mu_f^2)=S_{gg\to q\bar{q}}(\mu_b^2,\mu_f^2)=S_{qg\to qg}(\mu_b^2,\mu_f^2)\,, \tag{22}$$

其中颜色Casimir算符为 $C_A=N_c$, $C_F=(N_c^2-1)/(2N_c)$, 且 $\beta_0=(11C_A-2N_f)/12$, 其中 $N_f=3$。需要指出的是，在Sudakov因子中，没有包含与 β_0 成正比、关联小-x 胶子的单对数项。事实上，正如参考文献 [54, 55, 63], 所示，该项等价于以下两种处理方式之一：(i) 在硬尺度μ_f下计算硬因子中的一个 α_s 因子，而胶子横动量依赖分布中的因子 $1/\alpha_s$ 则在尺度 μ_b 下计算，从而纳入该项；或者 (ii) 忽略这一单对数项，并直接将硬因子中的一个（假定固定的） α_s 因子与横动量依赖分布中的一个 $1/\alpha_s$ 因子抵消。本文采用后一种处理方式。我们选择 Sudakov 因子中的尺度为 $\mu_f^2=x_g x_p s$，并采用处方 $b_*=b_\perp/\sqrt{1+b_\perp^2/b_{\max}^2}$ [49] ，令 $\mu_b=2e^{-\gamma_E}/b_\perp^*$，以控制非微扰区域 $b_\perp>b_{\max}$，其中$b_{\max}=1.5$吉电子伏特$^{-1}$。按照 [72], ，我们在非微扰因子中加入一个乘法因子 C_{NP}，以体现半包容深度非弹性散射和Drell-Yan过程中的提取结果与强子碰撞中的双强子产生之间的非普适性。非微扰Sudakov因子的参数化将在下一节讨论。

现在可以根据方程（13）和（10）计算符合概率。

III. 非微扰输入

在我们的数值研究中，部分子分布函数取自 CT18NNLO拟合 [84], , 默认的碎裂函数取自 NLO JAM19分析 [85]。此外，我们还考虑 NP23 [86] 和 DSS 07 [87]碎裂函数，以检验我们的结果对末态碎裂效应的敏感性。

我们采用了一个现象学约束偶极振幅，该振幅是通过拟合 HERA 上的深度非弹性散射约化截面得到的 [88]（另见[89]）。在此拟合中，偶极子与冲击参数无关，即其仅取决于坐标差 [88]（[89]）。偶极振幅，$\langle S^{(2)}(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}')\rangle_x$，参见附录 A。 x- 依赖性遵循跑动耦合BK演化方程，其初始条件将在下一节给出。

Sudakov因子由微扰和非微扰贡献之和给出，

偶极振幅的初始条件设定在 $x_0=0.01$，采用带有反常维数的修正 McLerran–Venugopalan（MV）模型，称为 MV$^\gamma$ 模型。基本偶极振幅演化的初始条件为

$$\mathcal{N}(x_0,r_\perp)=1-\exp\left\{-\frac{\left(r_\perp^2Q_{s0}^2\right)^\gamma}{4}\log\left(\frac{1}{r_\perp\Lambda_{\mathrm{IR}}}+e\right)\right\}, \tag{23}$$

其中，$\mathcal{N}(x_0,\ r_\perp)=1-\langle S_F^{(2)}\ (r_\perp)\ \rangle_{x_0}$是初始基本偶极振幅，$r_\perp=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}'|$ 是偶极子的横向尺寸，Q_{s0} 是 $x_0=0.01$处的初始饱和动量，γ是反常维数，Λ_{IR}是该模型的红外截断。我们采用参数组$\gamma=1.119$、$Q_{s0,p}^2=0.168$吉电子伏特^2、$\Lambda_{\mathrm{IR}}=0.241$ 吉电子伏特。rcBK 中的跑动耦合为

$$\alpha_s(r^2)=\frac{\pi}{\left(\beta_0\ln\left(\frac{4C^2}{r^2\Lambda_{\mathrm{IR}}^2}\right)\right)}\,, \tag{24}$$

其中 $C=1.715$。这种设置对电子-质子散射中测得的包容结构函数和约化截面给出了最佳拟合 [88]。rcBK 方程将偶极分布演化至 $x<0.01$值。然而，当 x 接近 x_0 时，MV$^\gamma$ 初始条件在傅里叶变换到动量空间后可能导致横向动量分布（TMDs）出现虚假的负值。这是初始条件造成的伪影，在演化一个单位的快度后便会消失。为解决这一问题，我们使用 rcBK 演化计算 $x<x_c$的 TMDs（其中 $x_c=x_0e^{-1}=0.0037$），并按照处方 [90] 对 $x>x_c$ 进行匹配

$$\mathcal{F}_\alpha^{(i)}(x,\boldsymbol{k})=\left(\frac{1-x}{1-x_c}\right)^4\mathcal{F}_\alpha^{(i)}(x_c,\boldsymbol{k})\,. \tag{25}$$

伴随表示下的偶极子通过以下方式获得——

ing $\langle S_A^{(2)}(r_\perp)\rangle_x = \left(\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right)^2$.

对于原子核，我们遵循参考文献 [75], 中概述的步骤，该步骤将质子和原子核中最小偏置事件的饱和尺度联系起来。该步骤通过分别采用高斯分布和伍兹–萨克森分布，有效地考虑了质子和原子核中的横向胶子密度。具体而言，我们使用 $Q^2_{s0,\ \mathrm{Au}} = 2.67\ Q^2_{s0,\ p}$ 和 $Q^2_{s0,\ \mathrm{Pb}} = 2.75\ Q^2_{s0,\ p}$ （可从 [91]推断出 $x = 0.01$ 处饱和标度的类似标度关系）。由于核初始尺度的确定存在不确定性，我们将 $Q^2_{s0,\ \mathrm{Pb/Au}}$ 改变约 20%，以计入初始条件冲击参数依赖性的建模所带来的不确定性。

对于非微扰 Sudakov 因子，我们采用文献 [92–94], 中的参数化形式

$$S^{NP}_{qg\to qg}(Q,b_\perp) = \left(2+\frac{C_A}{C_F}\right)\frac{g_1}{2}b_\perp^2 + \left(2+\frac{C_A}{C_F}\right)\frac{g_2}{2}\ln\frac{Q}{Q_0}\ln\frac{b_\perp}{b_*}, \quad (26)$$

$$S^{NP}_{gg\to gg}(Q,b_\perp) = \frac{3C_A}{C_F}\frac{g_1}{2}b_\perp^2 + \frac{3C_A}{C_F}\frac{g_2}{2}\ln\frac{Q}{Q_0}\ln\frac{b_\perp}{b_*}, \quad (27)$$

取 $g_1 = 0.212$、 $g_2 = 0.84$和 $Q_0^2 = 2.4$吉电子伏特^2。这些表达式未包含小x胶子横动量依赖分布的非微扰部分，而这部分已计入色玻璃凝聚小x横动量依赖分布中。按照 [72], 我们加入一个乘法因子 C_{NP}，并在方程（20）和（21）中将其设为 2.3，以拟合质子-质子碰撞中双强子符合概率 CP（$\Delta\Phi$）的宽度。详情请参阅第IV节。

IV. 结果

本节将介绍按照第II 节和III节的设定，双π介子产生的符合概率 CP（$\Delta\Phi$）数值结果。首先，我们将理论预言与 STAR 合作组报告的结果进行比较。随后，我们给出 ALICE FoCal 的预言。

A. 与 STAR 双强子测量的比较

图 1 展示了 STAR 在正向赝快度（π^0）测得的背对侧双强子关联概率 $CP(\Delta\Phi)$ ，涵盖 p–p 和 p–Au 碰撞，$2.6 < \eta < 4.0$碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ 吉电子伏特，针对若干横向动量区间选择。在本分析中，我们引入两个全局参数：(i) 一个整体乘法因子，用于控制 K 的归一化 $CP(\Delta\Phi)$；(ii) 一个乘法因子 C_{NP}，用于控制其强度，即非微扰 Sudakov 贡献。我们通过拟合动量区间 $3 < p_{T,\mathrm{trig}} < 5$ 吉电子伏特和 $1.5 < p_{T,\mathrm{asso}} <$2.0 吉电子伏特中的 p–p 数据来确定这些参数；这些区间的实验不确定性相对较小，且对碎裂系统学不确定性的敏感性也相对较低。优选值为$K = 1.5$ 和 $C_{NP} = 2.3$。随后，这些值将用于 p–p 和质子–核中的所有其他预测。

总体而言，我们基于色玻璃凝聚的预测能够很好地描述π^0 p–Au碰撞中八个 p_T 区间的双强子关联。对于p–p碰撞，结果则不尽相同：图中 (b)、(d) 和 (e) 面板的描述较为合理，而其余面板与数据存在较大偏差1。这些偏差的一种可能来源是，理论对低强子横向动量区域的碎裂过程缺乏充分控制：符合概率对此尤其敏感，因为其分子涉及两个碎裂函数，而分母只涉及一个。在这一比值中，与触发强子相关的碎裂效应可能会部分抵消，而与关联强子相关的效应则依然存在。这或许可以解释为何具有相同触发强子p_T 范围的区间通常能够得到更好的描述。

本文使用 JAM19 碎裂函数 [85]。采用其他参数集（如 NP23 [86] 或 DSS07 [87], ）可能导致整体归一化发生显著变化：例如，DSS07 给出 $K \simeq 1.25$，而 NP23 则需要 $K \simeq 6$。这体现了碎裂过程带来的归一化不确定度，尤其是在低-p_T 区域。此外，STAR符合概率尚未针对探测器效率进行校正 [42], ，测量样本还包含较重强子的衰变产物，这些因素也可能进一步影响归一化。聚焦于核系统与质子系统之间的比值，例如 $CP^{p\text{金}}$(ΔΦ)/CP^{pp}(ΔΦ)，可显著降低这些归一化系统误差。

表征双π介子关联的另一种方法，是在扣除 $0.7\pi < \Delta\Phi < 1.3\pi$ 底座后，在角度窗口 $[0.7\pi, 1.3\pi]$内拟合高斯分布。STAR 合作组在进行扣除时假设底座为常数。随后即可计算高斯分布的宽度以及窗口 $[0.7\pi, 1.3\pi]$ 下的面积。因此，p-Au 与 p-p 的宽度比可作为展宽的度量；同样，p-Au 与 p-p 的面积比可作为抑制程度的度量。图2 展示了 200 GeV 下 p–Au 碰撞相对于 p–p 碰撞的双强子关联面积比和宽度比。左侧各图显示这些比值随伴随强子 p_T变化的情况，右侧各图则显示它们随触发强子 p_T变化的情况。在 p–Au 碰撞中，前向双π介子符合概率的面积约为 p–p 碰撞中的 75%，这可归因于金核中非线性演化效应比质子中更强。此外，两种系统中的双强子关联宽度非常相似，这表明宽度主要由

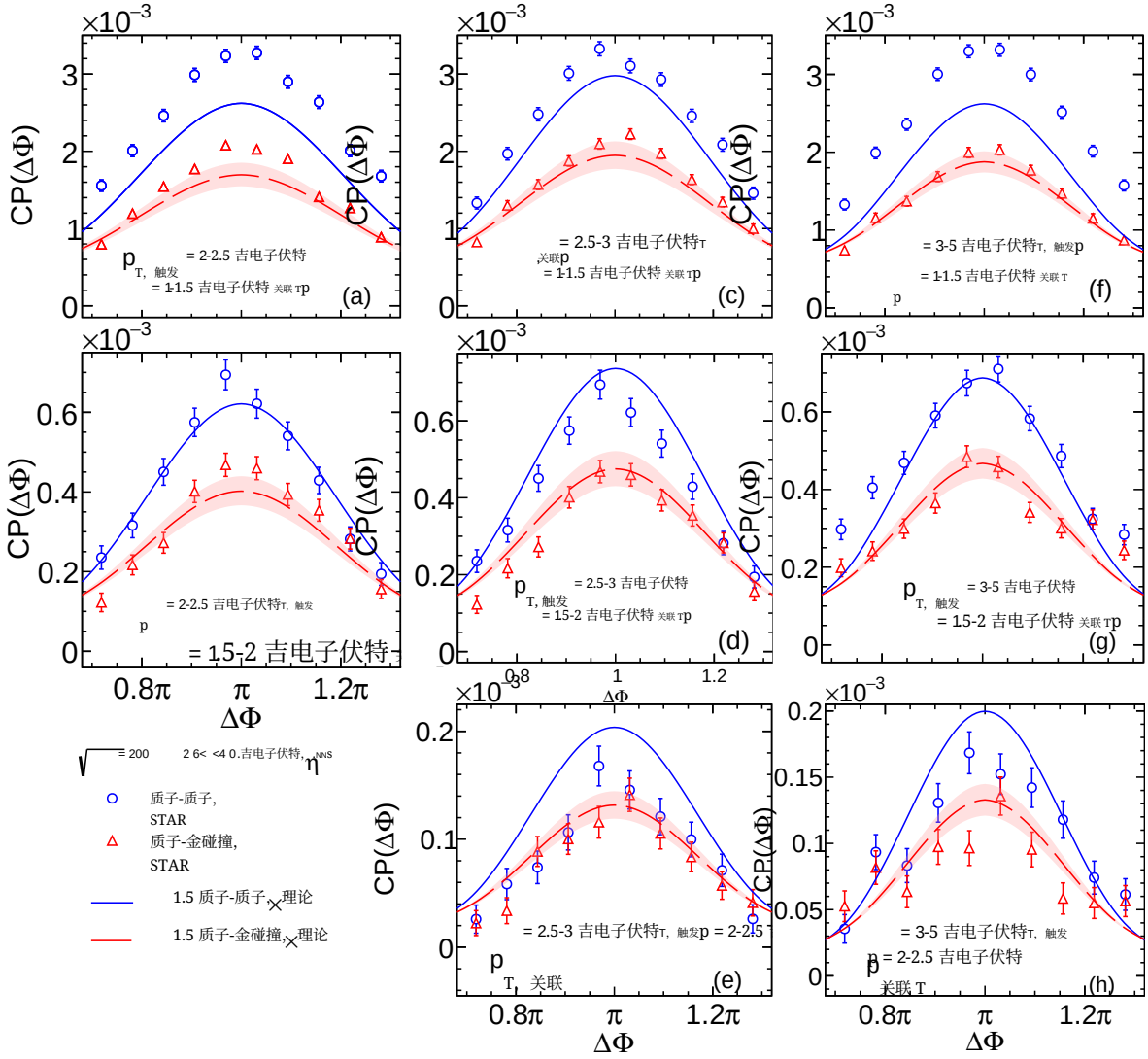


图1. 质子-质子和质子-金碰撞中远侧区域双重π^0 产生的符合概率，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ 吉电子伏特，$2.6 < \overline{\eta} < 4.0$ 针对不同的 p_T 范围。通过将$Q^2_{s\text{调整Au}}$ 1.2 倍得到该带状区域。STAR 数据来自 [42]。

Sudakov因子（或等价地，部分子簇射动力学）决定。结果表明，我们的预测在不确定度范围内与数据一致。此外，图3 显示，采用不同的碎裂函数并不会影响这些发现。尽管由于碎裂函数的选择，整体归一化存在显著不确定性，但值得注意的是，图3 所示的比值不受这一选择影响。

通过计算每个区间内质子 x_p 和原 x_g 子核的平均值，验证稀薄-致密近似的有效性。在相对论重离子对撞机能量下，对于 STAR 合作组考察的运动学范围，$\langle x_g \rangle$低于 10^{-3} （图8 右图），而 $x_p \sim 0.5 - 0.8$ （图8 左图）。

B. FoCal 的预测

接下来，我们预测在π^0 太电子伏特下，FoCal 运动学条件下预期的双π$\sqrt{s_{NN}} = 5.36$ 关联。图4展示了前向快度范围内 $3.2 < \eta < 5.8$FoCal 的质子-质子和质子-铅碰撞中的双π关联。本分析中，我们纳入了 $\Delta y = 0.465$的整体快度偏移，方向朝向质子束，以考虑大型强子对撞机质子-铅碰撞中质心系与实验室系之间的偏差。如图所示，与 STAR 测量结果相比，FoCal 的双ππ^0 关联（比较质子-铅与质子-质子碰撞时）所受抑制明显较弱，尽管 FoCal 探测的胶子能量分数小得多（如图8 右图所示）。图5的 (a) 和 (c) 面板所示的质子–核（金或铅）与质子-质子碰撞之间的相对面积比，更清楚地揭示了两种体系的差异。此外，我们已验证

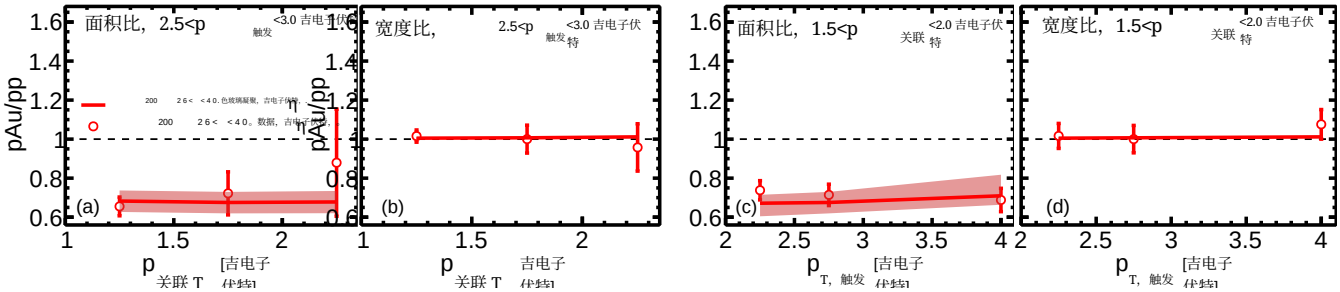


图 2. 质子-金碰撞相对于质子-质子碰撞中，前向赝快度下背对背双π^0 关联的相对面积和宽度，其中 $p_{T,\ \mathrm{trig}}$ = 2.5 - 3 吉电子伏特/$p_{T,\ \mathrm{asso}}$ （左侧两个面板）为关于 $p_{T,\ \mathrm{asso}}$ = 1.5 - 2 吉电子伏特/$p_{T,\ \mathrm{trig}}$ （右侧两个面板）为关于$Q^2_{s,\ \mathrm{Au}}$ 变化的函数。色带是将 [42]乘以 1.2 得到的。STAR 数据引自 $_{\mathrm{trig}}$ = 2。

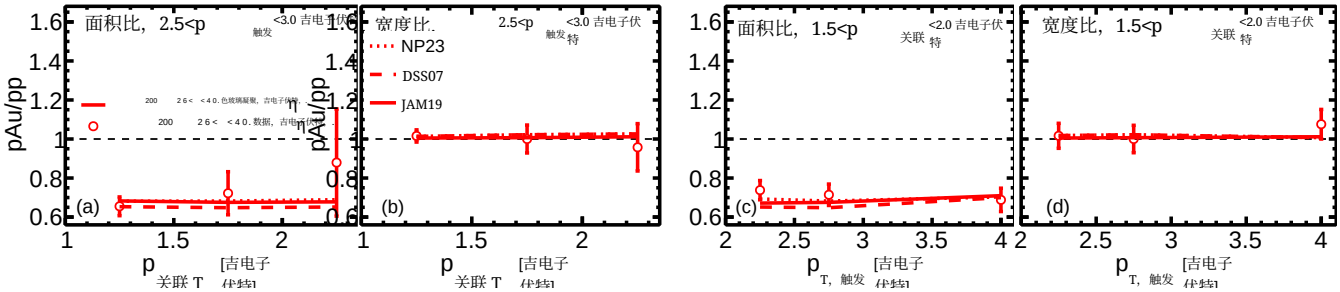


图 3. 质子-金碰撞相对于质子-质子碰撞中，采用三种不同碎裂函数时，前向赝快度下背对背双-π^0 关联的相对面积和宽度；$p_{T,\ \mathrm{trig}}$ = 2.5 - 3 吉电子伏特/关于 $p_{T,\ \mathrm{asso}}$ 的函数关系（左侧两个面板），以及 $p_{T,\ \mathrm{asso}}$= 1.5 - 2 吉电子伏特/关于 $p_{T,\ \mathrm{trig}}$ 的函数关系（右侧两个面板）。STAR 数据引自 [42]。

采用其他碎裂函数时，这一结论仍然不变（见图6的 (a) 和 (c) 面板）。

一项详细研究表明，观测到的行为源于STAR和FoCal所探测的 $\langle k_\perp/Q_s\rangle$取值不同，其中 $k_\perp$ 是原子核中小-x 胶子的横向动量。这里，饱和标度定义为 $Q_s^2(x) = 2/R_\perp^2$，$s(x)$，其中$R_\perp$、$s(x)$的选取满足 $\mathcal{N}(x, R_\perp, s(x)) = 1 - \exp(-1/2)$。图9显示，STAR探测的区域中，$k_\perp/Q_s$大致处于 $1 \sim 1.5$范围内，而FoCal测量在 $3.2 < \eta < 5.8$ 、 $\sqrt{s_{NN}} = 5.36$ 太电子伏特碰撞能量下对应的取值约为 $5 \sim 6$。由于 $k_\perp/Q_s$ 取值越大，表明测量所探测的是更稀疏的胶子密度区域，此时饱和效应减弱，因此，与STAR相比，FoCal自然观测到的饱和效应更小。这一差异源于RHIC和大型强子对撞机能区中不同的碎裂能量分数。图8右图进一步展示了这一点，其中给出了STAR和FoCal处 $\langle z\rangle$的取值。值得注意的是，FoCal的取值小于STAR，这反映了其更高的碰撞能量（FoCal为5.36太电子伏特，而STAR处为200 GeV），更高的碰撞能量为碎裂过程提供了更大的相空间，因而探测到更小的 z 区域。相空间的增大使FoCal处的 $\langle k_\perp/Q_s\rangle$ 更大，进而导致更弱的饱和效应，尽管所探测的饱和尺度更大。

此外，抑制比仅表现出轻微的对碎裂函数的依赖。例如，图6(a)显示，采用 NP-23 碎裂函数时，抑制略强于考虑完整快度窗口时的抑制，但仍明显弱于 STAR 观测到的抑制。这种一致性表明，结果具有稳健性，并不严重依赖于碎裂函数。

一项详细研究（图 9右图）表明，FoCal区域的平均比值 $\langle k_\perp/Q_s\rangle$ 略低于整个快度范围内得到的数值；不过，其值仍约为 3.5。这一相对较大的数值表明，即使在最前向区域，探针仍能探测到稀薄胶子密度区间。对于给定的伴随粒子横动量区间 p_T，相对于质子-质子碰撞，pAu(Pb)的比值随触发粒子 $1.5 < p_{\mathrm{T横向动量}}$ $_{\mathrm{asso.}} < 2.0$ （吉电子伏特）变化的情况也呈现出类似特征，如图 5 和图 6的（c）面板所示。

我们进一步研究了在 STAR 和 FoCal 能区下，质子–核与质子-质子碰撞中双强子关联的相对宽度。如图 5的（b）和（d）面板所示，我们的结果表明，关联宽度主要由 Sudakov 因子（或等价地，由 parton shower 动力学）决定；图 6 的（b）和（d）面板则表明，该比值基本不受碎裂函数选择的影响。因此，在相对论重离子对撞机和大型强子对撞机的能区下，质子–核与质子-质子碰撞的宽度比均接近于 1——

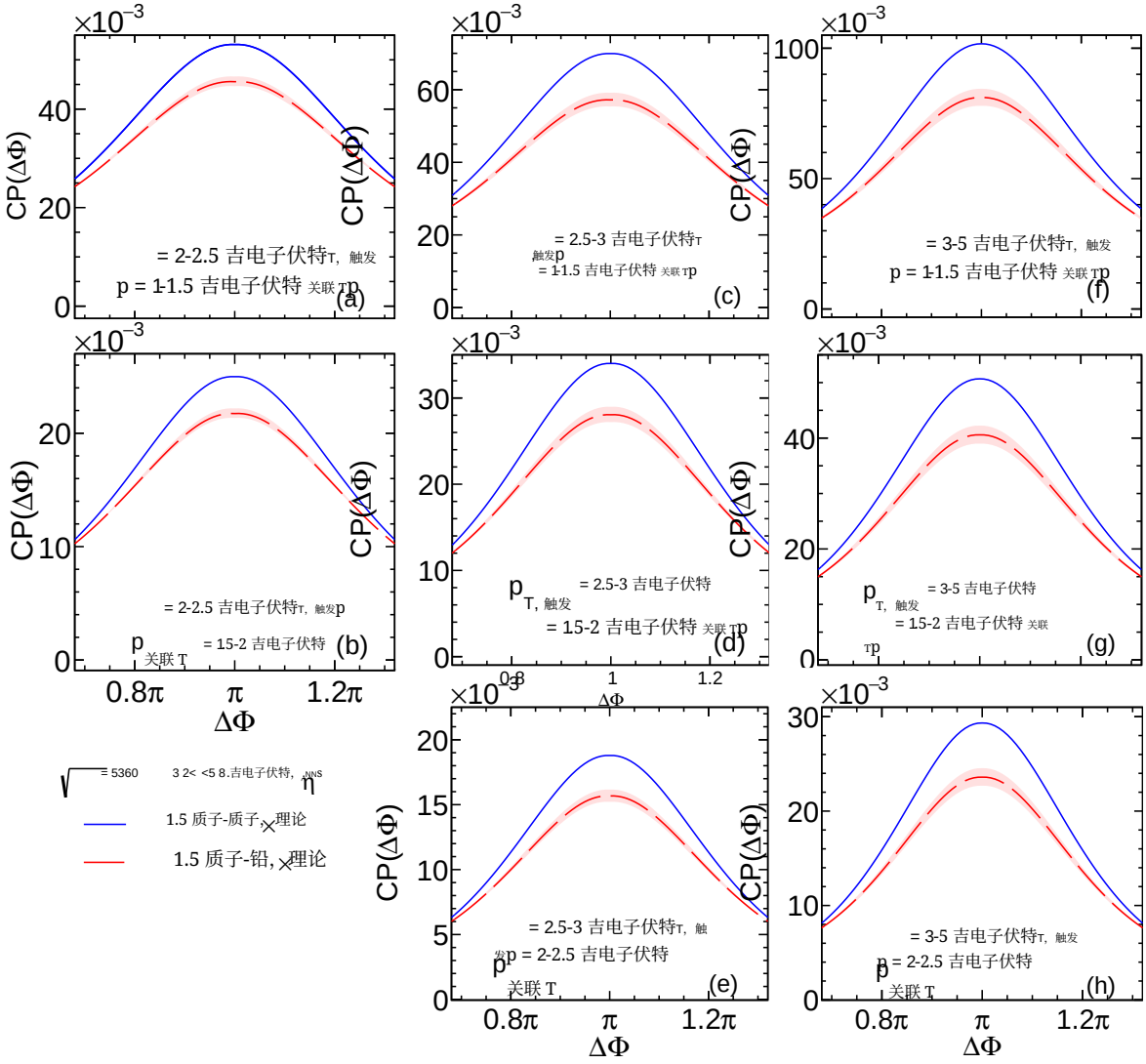


图4. 在 $\sqrt{s_{NN}} = 5.36$ 太电子伏特下，质子-质子和质子-铅碰撞中二-π^0 产生的远侧区域符合概率，$3.2 < \eta < 5.8$ 适用于不同的 p_T 范围。通过将$Q^2_{s,\ \mathrm{Pb}}$ 改变1.2倍得到该色带。

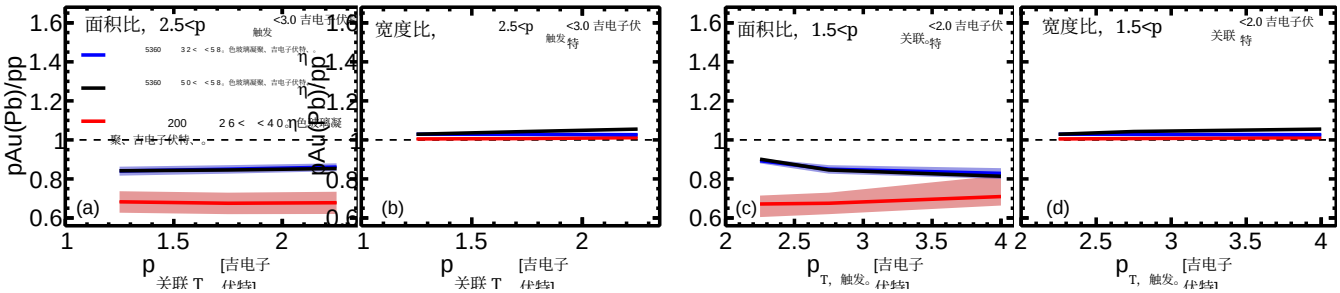


图5. 前向赝快度下，质子-金和质子-铅碰撞中相对于质子-质子碰撞的背对背二-π^0 关联的相对面积和宽度：左侧两个面板显示其随$p_{T,\ \mathrm{trig}}$ = 2.5 - 3 吉电子伏特/ c 的变化，右侧两个面板显示其随$p_{T,\ \mathrm{asso}}$ = 1.5 - 2 吉电子伏特/ c 的变化。通过将$Q^2_{s,\ 金/铅}$ 改变1.2倍得到该色带。

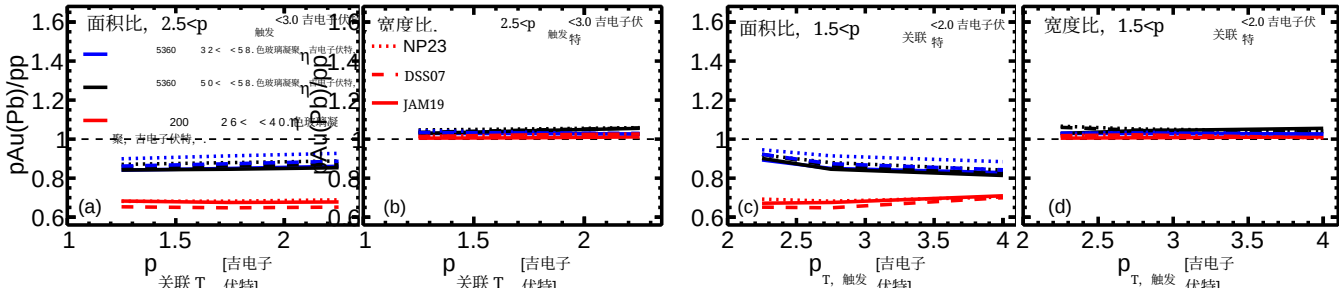


图6. 在前向赝快度下，采用三种不同碎裂函数时，p-Au 和 p-Pb 碰撞中背靠背双π^0 关联的相对面积和宽度，相对于质子-质子碰撞的结果；对于 $p_{T,\ \mathrm{trig}}$ = 2.5 - 3 吉电子伏特 /c，作为 $p_{T,\ \mathrm{asso}}$ 的函数（左侧两个面板）；对于 $p_{T,\ \mathrm{asso}}$ = 1.5 - 2 吉电子伏特 /c，作为 $p_{T,\ \mathrm{trig}}$ 的函数（右侧两个面板）。

快度。这一结论与文献 [45, 46] 中早先的发现一致。

V. 总结与展望

我们的分析表明，色玻璃凝聚形式体系（在改进的横向动量分布近似下）能够合理描述 STAR 在质子-质子碰撞和质子-金碰撞中测得的背侧峰附近前向双π^0 产生。我们证明，符合概率 $CP(\Delta\Phi)$ 在很大程度上对强子碎裂效应敏感，同时也表明，关联的积分面积比和宽度比具有稳健性，且基本不受碎裂函数选择的影响。这种不敏感性表明，这些比值可作为底层初态动力学的可靠探针，从而为搜寻胶子饱和效应提供窗口。

我们还预测了在 $\sqrt{s_{NN}}$ =5.36 太电子伏特下 ALICE FoCal 实验可达到的运动学范围内的这些观测量。我们预测，双强子关联中的抑制效应显著弱于 STAR 测得的结果。尽管 FoCal 探测到的饱和标度更大，但由于质心能量更高、前向快度更大，较小的-x使碎裂能量的平均值 $\langle z\rangle$更小；这意味着 parton 往往具有显著更大的横向动量，因此对稀薄区更加敏感。

为进一步提高 FoCal 测量对饱和效应的敏感度，可采用互补观测量，例如能量关联函数 [95–97], 重味产生 [98–100], 或 γ–喷注 [38]和双喷注关联 [36] 。这些额外测量能够更直接地探测底层部分子过程的运动学，从而增强饱和信号。

另一种可能的做法是考察符合概率的抑制和展宽如何随碰撞冲量参数变化（例如见 [101]）。ALICE 和 LHCb 合作组已报告了一些这方面的测量结果，见 [102, 103]。我们预期，中心碰撞中的胶子饱和效应更强，因为胶子密度通常更高。然而，在实验中，中心度通常通过多重数确定，而在质子-质子和质子-核碰撞中，多重数与冲量参数并不总是密切相关。展望未来，如果能找到一种更好地约束冲量参数的方法，一个有前景的做法是构造相对于最小偏置事件的比值观测量。这些观测量可以最大限度地减少与中心度无关的贡献，例如 Sudakov 效应，从而分离出由饱和驱动的抑制。

除了这些互补研究之外，我们希望在不久的将来能够获得双强子产生的完整次领先阶（NLO）贡献。这方面的一些初步工作见 [104, 105], ； 若将其与现有的单包容强子产生次领先阶计算 [106–108], 结合起来，便可为实现完整的 NLO 精度并更好地评估理论不确定性提供一条可行路径。

最后，还要指出，基于核部分子分布函数（nPDF）[45] 的其他模型，或基于动力学阴影效应和冷核物质能量损失的模型 [109] ，在定性上都能再现双强子数据，并对能量依赖性给出互补的预测。对基于 CGC 的计算、nPDF 框架和冷核物质能量损失模型进行系统比较，并努力阐明这些不同形式体系之间的联系 [110, 111], ，或许有助于区分真正的胶子饱和效应与冷、热核物质修正 [112]。

致谢

我们感谢 X. Chu、C. Marquet、H. Xing 和 F. Yuan 提供宝贵的讨论。Z.K.、F.S. 和 W.Z. 感谢 Kaiyuan Shi 在本项目早期阶段与我们合作。本研究获得美国能源部科学办公室核物理办公室的支持，依据美国能源部合同编号 DE-SC0012704

（B.P.S.），并在 Saturated Glue（SURGE）专题理论合作组（Z.K.、F.S.、B.P.S.、R.V.、W.Z.）框架内开展。PC 获法国国家研究署资助，资助项目为 ANR-25-CE31-5230（TMD-SAT）。Z.K. 还获得美国国家科学基金会 PHY-2515057 号资助。P.K. 感谢波兰国家科学中心（NCN）2022/46/E/ST2/00346 号资助。他还衷心感谢波兰高性能计算基础设施 PLGrid（HPC 中心：ACK Cyfronet AGH）提供计算设施，并通过计算资助项目 PLG/2024/017690 提供支持。F.S. 获布鲁克海文国家实验室实验室定向研究与发展计划及 RIKEN-BNL研究中心的支持。T.S. 感谢波兰国家科学中心（NCN）2021/43/D/ST2/03375 号资助。R.V. 获美国能源部科学办公室支持，合同号 DE-SC0012704。他还获得西蒙斯基金会通过禁闭与QCD弦西蒙斯合作组提供的支持，在石溪大学担任共同首席研究员，资助编号为 994318。他感谢皇家学会沃尔夫森基金会访问学者奖学金的支持，以及爱丁堡大学希格斯中心的热情接待。W.Z. 部分获得美国国家科学基金会（NSF）在 JETSCAPE合作组框架内提供的支持（OAC-2004571）。F.S. 和 W.Z. 还感谢核理论研究所；本工作的部分内容是在该所“电子-离子对撞机上的精密QCD”项目期间完成的。

本文内容并不代表欧盟的官方立场，文中信息和观点的责任完全由作者承担。

[1] L. V. Gribov、E. M. Levin 和 M. G. Ryskin，《QCD中的半硬过程》，Phys. Rept. 100 (1983) 1–150。[2] A. H. Mueller 和 J.-w. Qiu，《小 x 值下的胶子再组合与阴影效应》，Nucl. Phys. B 268 (1986) 427–452。[3] L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《计算极大原子核的夸克和胶子分布函数》，《物理评论D》49 (1994) 2233–2241，arXiv:高能物理-现象学/9309289。[4] L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《小横向动量下极大原子核的胶子分布函数》，《物理评论D》49 (1994) 3352–3355，arXiv:高能物理-现象学/9311205。[5] L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《大原子核色场中的格林函数》，《物理评论D》50 (1994) 2225–2233，arXiv:高能物理-现象学/9402335。[6] A. Ayala、J. Jalilian-Marian、L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《非阿贝尔魏茨泽克-威廉姆斯场中的胶子传播子》，《物理评论D》52 (1995) 2935–2943，arXiv:高能物理-现象学/9501324。[7] A. Ayala、J. Jalilian-Marian、L. D. McLerran 和 R. Venugopalan，《小 x 下魏茨泽克-威廉姆斯胶子分布函数的量子修正》，《物理评论D》53 (1996) 458–475，arXiv:高能物理-现象学/9508302。[8] E. Iancu 和 R. Venugopalan，《色玻璃凝聚态与QCD中的高能散射》，第 249–3363 页。3，2003。arXiv:高能物理-现象学/0303204。[9] F. Gelis、E. Iancu、J. Jalilian-Marian 和 R. Venugopalan，《色玻璃凝聚态》，Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 60 (2010) 463–489，arXiv:1002。0333 [高能物理-现象学]。[10] Y. V. Kovchegov 和 E. Levin，《高能量下的量子色动力学》，第 33 卷。牛津大学出版社，2013年。[11] J. L. Albacete 和 C. Marquet，《相对论重离子碰撞中的胶子饱和与初始条件》，Prog. Part. Nucl. Phys. 76 (2014) 1–42，arXiv:1401。4866 [高能物理-现象学]。[12] A. Morreale 和 F. Salazar，《在对撞机上探测胶子饱和》，Universe 7 第 8 期，（2021年）312，arXiv:2108.08254 [hep-ph].[13] I. Balitsky，《高能散射的算符展开》，《核物理B》463卷（1996年）99–160，arXiv:hep-ph/9509348 [hep-ph].[14] Y. V. Kovchegov，《包含多重潘趣克交换的原子核小 x F(2)结构函数》，《物理评论D》60卷（1999年）034008，arXiv:hep-ph/9901281[hep-ph].[15] I. Balitsky，《夸克对色偶极子小-x演化的贡献》，《物理评论D》75卷（2007年）014001，arXiv:hep-ph/0609105.[16] D. Kharzeev、E. Levin 和 L. McLerran，《色玻璃凝聚态中的喷注方位角关联与部分子饱和》，《核物理A》（2005年）748卷 627–640，arXiv:hep-ph/0403271.[17] C. Marquet，《p(A)碰撞中的前向包容性双喷注产生与方位角关联》，《核物理A》（2007年）796卷 41–60，arXiv:0708.0231 [hep-ph].[18] J. L. Albacete 和 C. Marquet，《色玻璃凝聚态中RHIC氘+金碰撞的前向双强子方位角关联》，物理评论快报 105（2010年）162301，arXiv:1005.4065 [hep-ph].[19] D. Kharzeev、Y. V. Kovchegov 和 K. Tuchin，《pA碰撞中的克罗宁效应与高p(T)抑制》，《物理评论D》68卷（2003年）094013，arXiv:hep-ph/0307037.[20] J. L. Albacete、N. Armesto、A. Kovner、C. A. Salgado 和 U. A. Wiedemann，《非线性QCD演化下克罗宁效应的能量依赖性》，物理评论快报 92（2004年）082001，arXiv:hep-ph/0307179.[21] T. Lappi 和 H. Mantysaari，《高斯近似下JIMWLK方程的氘金碰撞前向双强子关联》，《核物理A》（2013年）908卷 51–72，arXiv:1209.2853 [hep-ph].[22] F. Dominguez、C. Marquet、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《小 x 下非积分胶子分布的普适性》，《物理评论D》83卷（2011年）105005，arXiv:1101.0715 [hep-ph].[23] F. Dominguez、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《原子核硬过程的k_t-因子化》，物理评论快报 106（2011年）022301，arXiv:1009.2141 [hep-ph].

[24] C. Marquet、E. Petreska 和 C. Roiesnel，《JIMWLK 演化产生的横向动量依赖胶子分布》，JHEP 10（2016年）065，arXiv:1608.02577 [hep-ph].[25] E. Petreska，《色玻璃凝聚态理论中小x下的横向动量分布胶子分布》，Int. J. Mod. Phys. E 27 no. 05，（2018年）1830003，arXiv:1804.04981 [hep-ph].[26] S. Cali、K. Cichy、P. Korcyl、P. Kotko、K. Kutak 和 C. Marquet，《JIMWLK方程数值解中的系统效应》，欧洲物理学杂志C 81 no. 7，（2021年）663，arXiv:2104.14254 [hep-ph].[27] C. J. Bomhof、P. J. Mulders 和 F. Pijlman，《任意硬过程中的规范链构造》，欧洲物理学杂志C 47（2006年）147–162，arXiv:hep-ph/0601171.[28] F. Dominguez、C. Marquet、A. M. Stasto 和 B.-W. Xiao，《高能量下QCD多粒子产生的普适性》，《物理评论D》87卷（2013年）034007，arXiv:1210.1141 [hep-ph].[29] J. Jalilian-Marian 和 A. H. Rezaeian，《色玻璃凝聚态框架下RHIC和大型强子对撞机上的直接光子产生与光子-强子关联》，《物理评论D》86卷（2012年）034016，arXiv:1204.1319[hep-ph].[30] A. Stasto、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《RHIC氘金碰撞中的双强子背对背关联》，《物理快报B》716（2012年）430–434，arXiv:1109.1817[hep-ph].[31] P. Kotko、K. Kutak、S. Sapeta、A. M. Stasto 和 M. Strikman，《估算大型强子对撞机超周边重离子碰撞中前向双喷注产生的非线性效应》，欧洲物理学杂志C 77 no. 5，（2017年）353，arXiv:1702.03063 [hep-ph].[32] J. L. Albacete、G. Giacalone、C. Marquet 和 M. Matas，《pA 碰撞中的前向双强子背对背关联》，《物理评论D》99 no. 1，（2019年）014002，arXiv:1805.05711 [hep-ph].[33] A. van Hameren、P. Kotko、K. Kutak 和 S. Sapeta，《太电子伏特 $\sqrt{s}$ = 5.02下质子-质子和质子-铅碰撞双喷注方位角关联中的展宽与饱和效应》，《物理快报B》795（2019年）511–515，arXiv:1903.01361 [hep-ph].[34] A. van Hameren、P. Kotko、K. Kutak 和 S. Sapeta，《高能因子化中中央-前向双喷注产生的Sudakov 效应》，《物理快报B》814（2021年）136078，arXiv:2010.13066 [hep-ph].[35] S. Beni´c、O. Garcia-Montero 和 A. Perkov，《RHIC和大型强子对撞机高能质子-质子及质子-核碰撞中的孤立光子-强子产生》，《物理评论D》105 no. 11，（2022年）114052，arXiv:2203.01685 [hep-ph].[36] M. A. Al-Mashad、A. van Hameren、H. Kakkad、P. Kotko、K. Kutak、P. van Mechelen 和 S. Sapeta，《大型强子对撞机前向量能器中的质子-质子及质子-铅碰撞双喷注方位角关联》，JHEP 12（2022年）131，arXiv:2210.06613 [hep-ph].[37] A. van Hameren、H. Kakkad、P. Kotko、K. Kutak 和 S. Sapeta，《在大型强子对撞机前向双喷注产生中寻找饱和效应》，欧洲物理学杂志C 83 no. 10，（2023年）947，arXiv:2306.17513 [hep-ph].[38] I. Ganguli、A. van Hameren、P. Kotko 和 K. Kutak，《FoCal量能器接收度内大型强子对撞机质子-质子与质子-铅碰撞中的前向 γ+喷注产生》，欧洲物理学杂志C 83 no. 9，（2023年）868，arXiv:2306.04706 [hep-ph].

[39] L. Zheng、E. C. Aschenauer、J. H. Lee 和 B.-W. Xiao，《在电子-离子对撞机上通过双强子关联探测胶子饱和》，《物理评论D》89卷第7期（2014年）074037，arXiv:1403.2413[高能物理-现象学]。[40] A. van Hameren、P. Kotko、K. Kutak、S. Sapeta 和 E. ˙Zarn´ow，《利用电子-双喷注关联探测EIC中的胶子数密度》，欧洲物理学杂志C 81卷第8期（2021年）741，arXiv:2106.13964 [高能物理-现象学]。[41] STAR合作组，E. Braidot，《STAR实验中 d+Au 碰撞的前向π介子关联抑制》，载于第45届莫里昂德会议：量子色动力学与高能相互作用，页码355–338。2010年5月。arXiv:1005.2378 [高能物理-现象学]。[42] STAR 合作组，M. S. Abdallah 等，《STAR实验中量子色动力学非线性胶子效应及其质量数依赖性的证据》，物理评论快报 129卷第9期（2022年）092501，arXiv:2111.10396[nucl-ex]。[43] PHENIX合作组，A. Adare 等，《d+Au 碰撞中前向快度下背对背强子对的抑制，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV》，物理评论快报 107（2011年）172301，arXiv:1105.5112 [nucl-ex]。[44] ATLAS合作组，M. Aaboud 等，《ATLAS探测器在质子-质子和质子-铅碰撞（sNN=5.02TeV）中测得的双喷注方位角关联与条件产额》，《物理评论C》100卷第3期（2019年）034903，arXiv:1901.10440 [nucl-ex]。[45] D. V. Perepelitsa，《通用核部分子分布函数方法对双强子饱和信号的描述》，《物理评论C》111卷第5期（2025年）054901，arXiv:2501.18347 [nucl-th]。[46] K. Cassar、Z. Wang、X. Chu 和 E.-C. Aschenauer，《探究胶子饱和引起的双粒子关联展宽现象》，《物理评论D》112卷第3期（2025年）034034，arXiv:2503.08447 [高能物理-现象学]。[47] J. C. Collins 和 D. E. Soper，《量子色动力学中的背对背喷注》，Nucl. Phys. B 193（1981年）381。[勘误：Nucl.Phys.B 213, 545（1983年）]。[48] J. C. Collins 和 D. E. Soper，《部分子分布与衰变函数》，Nucl. Phys. B 194（1982年）445–492。[49] J. C. Collins、D. E. Soper 和 G. F. Sterman，《Drell-Yan对以及W和Z玻色子产生中的横向动量分布》，Nucl. Phys. B 250（1985年）199–224。[50] J. Collins，《微扰量子色动力学基础》，第32卷。剑桥大学出版社，2011年。[51] M.-S. Gao、Z.-B. Kang、D. Y. Shao、J. Terry 和 C. Zhang，《质子-质子和质子-核碰撞中双喷注方位角去关联的QCD重求和》，JHEP 10（2023年）013，arXiv:2306.09317 [高能物理-现象学]。[52] P. Sun、C. P. Yuan 和 F. Yuan，《强子碰撞中双喷注关联的横向动量重求和》，《物理评论D》92卷第9期（2015年）094007，arXiv:1506.06170 [高能物理-现象学]。[53] Z.-B. Kang、K. Lee、D. Y. Shao 和 J. Terry，《强子双喷注产生中的Sivers不对称性》，JHEP 02（2021年）066，arXiv:2008.05470 [高能物理-现象学]。[54] A. H. Mueller、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《小-x 饱和形式主义中的Sudakov重求和》，物理评论快报 110卷第8期（2013年）082301，arXiv:1210.5792[高能物理-现象学]。[55] A. H. Mueller、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《小x饱和形式主义中硬过程的Sudakov双对数重求和》，

《物理评论D》88卷第11期（2013年）114010, arXiv:1308.2993 [高能物理-现象学]。[56] J. Zhou, 《小 x 横向动量依赖胶子分布的标度依赖性》, Phys.Rev.D 99卷第5期（2019年）054026, arXiv:1807.00506[高能物理-现象学]。[57] B.-W. Xiao、F. Yuan 和 J. Zhou, 《小x处的横向动量依赖部分子分布》, Nucl. Phys. B 921（2017年）104–126, arXiv:1703.06163 [高能物理-现象学]。[58] Y. Hatta、B.-W. Xiao、F. Yuan 和 J. Zhou, 《排他与包容过程中双喷注产生的各向异性》, 物理评论快报 126卷第14期（2021年）142001, arXiv:2010.10774 [高能物理-现象学]。[59] Y. Hatta、B.-W. Xiao、F. Yuan 和 J. Zhou, 《喷注产生中软胶子辐射的方位角不对称性》, 《物理评论D》104卷第5期（2021年）054037, arXiv:2106.05307 [高能物理-现象学]。[60] M. Hentschinski, 《次领头阶高能因子化中的横向动量依赖胶子分布》, 《物理评论D》104卷第5期（2021年）054014, arXiv:2107.06203 [高能物理-现象学]。[61] P. Taels、T. Altinoluk、G. Beuf 和 C. Marquet, 《低x下次领头阶双喷注光生过程及其背对背极限》, JHEP 10（2022年）184, arXiv:2204.11650 [高能物理-现象学]。[62] P. Caucal、F. Salazar、B. Schenke 和 R. Venugopalan, 《小 x 深度非弹性散射中的背对背包容双喷注：Sudakov 抑制与次领头阶胶子饱和》, JHEP 11（2022年）169, arXiv:2208.13872 [高能物理-现象学]。[63] P. Caucal、F. Salazar、B. Schenke、T. Stebel 和 R. Venugopalan, 《小 x 深度非弹性散射中的背对背包容双喷注：次领头阶胶子Weizs¨acker-Williams分布》, JHEP 08（2023年）062, arXiv:2304.03304[高能物理-现象学]。[64] P. Caucal、F. Salazar、B. Schenke、T. Stebel 和 R. Venugopalan, 《小 x 深度非弹性散射中的背对背包容双喷注：完整次领头阶结果与预测》, 物理评论快报 132卷第8期（2024年）081902, arXiv:2308.00022 [高能物理-现象学]。[65] P. Caucal 和 E. Iancu, 《小 x 处横向动量依赖胶子分布的演化》, 《物理评论D》111卷第7期（2025年）074008, arXiv:2406.04238 [高能物理-现象学]。[66] P. Caucal、E. Iancu、A. H. Mueller 和 F. Yuan, 《半包容深度非弹性散射中的喷注定义与横向动量依赖因子化》, 物理评论快报 134卷第6期（2025年）061903, arXiv:2408.03129 [高能物理-现象学]。[67] P. Caucal 和 F. Salazar, 《小-x 深度非弹性散射中的次领头阶双强子关联：横向动量依赖碎裂》, arXiv:2405.19404 [高能物理-现象学]。[68] P. Caucal、E. Iancu、F. Salazar 和 F. Yuan, 《小 x处的胶子劈裂：JIMWLK、DGLAP和CSS方程的统一推导》, arXiv:2510.08454 [高能物理-现象学]。[69] H. Duan、A. Kovner 和 M. Lublinsky, 《Collins-Soper-Sterman 哈密顿量：快度依赖可观测量的高能演化》, 《物理评论D》111卷第5期（2025年）054022, arXiv:2407.15960[高能物理-现象学]。[70] H. Duan、A. Kovner 和 M. Lublinsky, 《高能散射的 Born-Oppenheimer 重整化群：CSS、DGLAP及其他》, JHEP 08 (2025) 137, arXiv:2412.05097 [高能物理-现象学].[71] S. Mukherjee, V. V. Skokov, A. Tarasov 和 S. Tiwari, 《DGLAP、CSS 和 BFKL演化的统一描述：连接大 x 与小 x 的TMD因子化》, 《物理评论D》109 卷第 3 期, (2024) 034035, arXiv:2311.16402 [高能物理-现象学].[72] A. Stasto、S.-Y. Wei、B.-W. Xiao 和 F. Yuan, 《前向碰撞中的双强子角关联》, 《物理快报B》784 (2018) 301–306, arXiv:1805.05712 [高能物理-现象学].[73] P. Kotko、K. Kutak、C. Marquet、E. Petreska、S. Sapeta 和 A. van Hameren, 《稀薄-致密强子碰撞中前向双喷注产生的改进TMD因子化》, JHEP 09 (2015) 106, arXiv:1503.03421[高能物理-现象学].[74] T. Altinoluk、R. Boussarie 和 P. Kotko, 《运动学扭度全阶下色玻璃凝聚态与TMD框架的相互作用》, JHEP 05 (2019) 156, arXiv:1901.01175 [高能物理-现象学].[75] F. Deganutti、C. Royon 和 S. Schlichting, 《大型强子对撞机中基于冲量参数依赖TMD方法的前向双喷注产生》, JHEP 01 (2024) 159, arXiv:2311.01965 [高能物理-现象学].[76] ALICE 合作组, 《ALICE实验中的前向量能器（FoCal）》。http://cds.cern.ch/record/2696471.[77] J. J alilian-Marian 和 Y. V. Kovchegov, 《深度非弹性散射和质子-核碰撞中的包容双胶子及价夸克-胶子产生》, 《物理评论D》70 (2004) 114017, arXiv:hep-ph/0405266. [勘误: 《物理评论D》71, 079901 (2005)].[78] R. Baier、A. Kovner、M. Nardi 和 U. A. Wiedemann, 《饱和量子色动力学物质中的粒子关联》, 《物理评论D》72 (2005) 094013, arXiv:hep-ph/0506126.[79] A. Dumitru、A. Hayashigaki 和 J. Jalilian-Marian, 《色玻璃凝聚态与前向区域中的强子产生》, 《核物理A》765 (2006) 464–482, arXiv:hep-ph/0506308.[80] F. Gelis 和 R. Venugopalan, 《色玻璃凝聚态中的大质量夸克-反夸克产生》, 《物理评论D》69 (2004) 014019, arXiv:hep-ph/0310090.[81] J. P. Blaizot、F. Gelis 和 R. Venugopalan, 《色玻璃凝聚态方法中的高能质子-核碰撞。1. 胶子产生与克罗宁效应》, 《核物理A》743 (2004) 13–56, arXiv:hep-ph/0402256.[82] J. P. Blaizot、F. Gelis 和 R. Venugopalan, 《色玻璃凝聚态方法中的高能质子-核碰撞。2. 夸克产生》, 《核物理A》743 (2004) 57–91, arXiv:hep-ph/0402257.[83] F. Cougoulic、P. Korcyl 和 T. Stebel, 《利用自动微分改进巴利茨基-科夫切戈夫演化方程求解器》, 《计算物理通讯》313 (2025) 109616, arXiv:2411.12739[高能物理-现象学].[84] T.-J. Hou 等, 《CTEQ-TEA次次领头阶全局量子色动力学分析的进展》, arXiv:1908.11394[高能物理-现象学].[85] JAM合作组、N. Sato、C. Andres、J. J. Ethier 和 W. Melnitchouk, 《通过对部分子分布和碎裂函数进行蒙特卡罗分析研究奇异夸克抑制》, 《物理评论D》101 卷第 7 期, (2020) 074020, arXiv:1905.03788[高能物理-现象学].[86] J. Gao、C. Liu、X. Shen、H. Xing 和 Y. Zhao,

《碎裂函数的同步确定及对动量求和规则的检验》，物理评论快报 132 卷第 26 期，(2024) 261903，arXiv:2401.02781 [高能物理-现象学].[87] D. de Florian、R. Sassot 和 M. Stratmann，《π介子和K介子碎裂函数及其不确定性的全局分析》，《物理评论D》75 (2007) 114010，arXiv:hep-ph/0703242.[88] J. L. Albacete、N. Armesto、J. G. Milhano、P. Quiroga-Arias 和 C. A. Salgado，《AAMQS：纳入重夸克的小x新HERA数据非线性量子色动力学分析》，《欧洲物理学杂志C》71 (2011) 1705，arXiv:1012.4408 [高能物理-现象学].[89] T. Lappi 和 H. M¨antysaari，《从HERA数据到质子-核碰撞的高能单粒子包容产生》，《物理评论D》88 (2013) 114020，arXiv:1309.6963 [高能物理-现象学].[90] F. Gelis、A. M. Stasto 和 R. Venugopalan，《高能强子-强子碰撞中的极限碎裂》，《欧洲物理学杂志C》48 (2006) 489–500，arXiv:hep-ph/0605087.[91] H. Kowalski、T. Lappi 和 R. Venugopalan，《高部分子密度普适动力学的核增强》，物理评论快报 100 (2008) 022303，arXiv:0705.3047 [高能物理-现象学].[92] P. Sun、J. Isaacson、C. P. Yuan 和 F. Yuan，《半包容深度非弹性散射和Drell–Yan过程的非微扰函数》，Int.J. Mod. Phys. A 33 卷第 11 期，(2018) 1841006，arXiv:1406.3073 [高能物理-现象学].[93] A. Prokudin、P. Sun 和 F. Yuan，《Collins–Soper–Sterman重求和的方案依赖性与横向动量分布解释》，《物理快报B》750 (2015) 533–538，arXiv:1505.05588 [高能物理-现象学].[94] M. G. Echevarria、Z.-B. Kang 和 J. Terry，《量子色动力学中次领头阶、次次领头对数精度下Sivers函数的全局分析》，JHEP 01 (2021) 126，arXiv:2009.10710[高能物理-现象学].[95] Z.-B. Kang、R. Kao、M. Li 和 J. Penttala，《光子-强子产生中小x处的横向能量-能量关联函数》，《物理评论D》112 卷第 7 期，(2025) 076006，arXiv:2504.00069 [高能物理-现象学].[96] I. Ganguli 和 P. Kotko，《大型强子对撞机质子-质子和质子-铅碰撞中前向 γ-强子产生的横向能量-能量关联与方位角关联》，《物理评论D》112 卷第 11 期，(2025) 114020，arXiv:2507.23435 [高能物理-现象学].[97] I. Moult 和 H. X. Zhu，《能量关联函数：从理论到实验的探索》，arXiv:2506.09119[高能物理-现象学].[98] C. Marquet、C. Roiesnel 和 P. Taels，《前向重夸克对产生中的线偏振小x胶子》，《物理评论D》97 卷第 1 期，(2018) 014004，arXiv:1710.05698 [高能物理-现象学].[99] T. Altinoluk、C. Marquet 和 P. Taels，《低x改进横向动量分布方法在重夸克对轻子产生与强子产生中的应用》，JHEP 06 (2021) 085,arXiv:2103.14495 [高能物理-现象学].[100] C. Marquet、Y. Shi 和 B.-W. Xiao，《重介子对光生中的软胶子辐射统一重求和》，arXiv:2510.18949[高能物理-现象学].[101] G. Giacalone 和 C. Marquet，《大型强子对撞机前向双强子关联中胶子饱和的特征》，《核物理A》982(2019) 291–294，arXiv:1807.06388 [高能物理-现象学].[102] ALICE 合作组，B. Abelev 等，《p-铅碰撞中近侧和远侧的长程角关联》，碰撞能量为 $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ 太电子伏特，《物理快报B》719 (2013) 29–41，arXiv:1212.2001 [nucl-ex].[103] LHCb 合作组，R. Aaij 等，《在前向区域测量$\sqrt{s_{\rm NN}} = 5$太电子伏特质子-铅碰撞中的长程近侧角关联》，《物理快报B》762 (2016) 473–483，arXiv:1512.00439 [nucl-ex].[104] E. Iancu 和 Y. Mulian，《深度非弹性散射中的次领头阶双强子产生：实修正》，JHEP 07 (2023) 121，arXiv:2211.04837 [高能物理-现象学].[105] P. Caucal、M. G. Morales、E. Iancu、F. Salazar 和 F. Yuan，《揭示海夸克：小 x下横向动量依赖夸克分布的普适性》，arXiv:2503.16162 [高能物理-现象学].[106] G. A. Chirilli、B.-W. Xiao 和 F. Yuan，《饱和形式体系下 pA 碰撞中包容强子产生的单圈因子化》，物理评论快报 108(2012)122301，arXiv:1112.1061 [高能物理-现象学].[107] Y. Shi、L. Wang、S.-Y. Wei 和 B.-W. Xiao，《推进色玻璃凝聚态前向强子产生的精确研究》，物理评论快报 128 no. 20, (2022) 202302，arXiv:2112.06975 [高能物理-现象学].[108] L. Wang、L. Chen、Z. Gao、Y. Shi、S.-Y. Wei 和 B.-W. Xiao，《质子-核碰撞中的前向包容喷注产生》，《物理评论D》107 no. 1, (2023) 016016，arXiv:2211.08322 [高能物理-现象学].[109] Z.-B. Kang、I. Vitev 和 H. Xing，《d+金碰撞中的双强子动量不平衡与关联》，《物理评论D》85 (2012) 054024，arXiv:1112.6021 [高能物理-现象学].[110] Y. Fu、Z.-B. Kang、F. Salazar、X.-N. Wang 和 H. Xing，《色玻璃凝聚态与高扭度形式体系之间的对应关系》，物理评论快报 135 no.3,(2025) 032301，arXiv:2310.12847 [高能物理-现象学].[111] Y. Fu、Z.-B. Kang、F. Salazar、X.-N. Wang 和 H. Xing，《色玻璃凝聚态与高扭度展开相遇》，《物理评论D》112 no. 1, (2025) 014029，arXiv:2406.01684 [高能物理-现象学].[112] F. Arleo 等，《核冷量子色动力学：综述与未来战略》，arXiv:2506.17454 [高能物理-现象学].[113] E. Iancu 和 D. N. Triantafyllopoulos，《来自JIMWLK 演化的高点关联》，JHEP11 (2011) 105，arXiv:1109.0302 [高能物理-现象学]。

附录 A：高斯近似下的小 x 胶子 TMD

在高斯近似下，威尔逊线及其导数的关联函数可用基本表示中的类光威尔逊线二点函数表示 [22, 113]。通过假设平移

该二点函数具有不变性，因此它仅取决于相对横向间距，而非各个坐标；采用平均场近似后，我们得以简化式（18）中定义的非极化胶子分布表达式。

随后可通过以下表达式得到横动量依赖分布：

$$\alpha_s\mathcal{F}_{qg}^{(1)}(\boldsymbol{k},x)=\frac{N_cS_\perp}{2\pi^2}\int\frac{r_\perp \mathrm{d}r_\perp}{2\pi}J_0(k_\perp r_\perp)\nabla_\perp^2\left[1-\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right], \tag{A1}$$

$$\alpha_s\mathcal{F}_{qg}^{(2)}(\boldsymbol{k},x)=\frac{C_FS_\perp}{2\pi^2}\int\frac{r_\perp \mathrm{d}r_\perp}{2\pi}J_0(k_\perp r_\perp)\mathcal{K}(x,r_\perp)\left[1-\left(\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right)^{N_c/C_F}\right]\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x, \tag{A2}$$

$$\alpha_s\mathcal{F}_{gg}^{(1)}(\boldsymbol{k},x)=\frac{N_cS_\perp}{2\pi^2}\int\frac{r_\perp \mathrm{d}r_\perp}{2\pi}J_0(k_\perp r_\perp)\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\nabla_\perp^2\left[1-\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right], \tag{A3}$$

$$\alpha_s\mathcal{F}_{gg}^{(2)}(\boldsymbol{k},x)=\alpha_s\mathcal{F}_{gg}^{(1)}(\boldsymbol{k},x)-\alpha_s\mathcal{F}_{adj}(\boldsymbol{k},x), \tag{A4}$$

$$\alpha_s\mathcal{F}_{gg}^{(3)}(\boldsymbol{k},x)=\frac{C_FS_\perp}{2\pi^2}\int\frac{r_\perp \mathrm{d}r_\perp}{2\pi}J_0(k_\perp r_\perp)\mathcal{K}(x,r_\perp)\left[1-\left(\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right)^{N_c/C_F}\right]\left(\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right)^2, \tag{A5}$$

$$\alpha_s\mathcal{F}_{Adj}(\boldsymbol{k},x)=\frac{C_FS_\perp}{2\pi^2}\int\frac{r_\perp \mathrm{d}r_\perp}{2\pi}J_0(k_\perp r_\perp)\nabla_\perp^2\left[1-\left(\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right)^{N_c/C_F}\right]. \tag{A6}$$

这里，$S_\perp$ 是总面积因子，$C_F=(N_c^2-1)/(2N_c)$；$N_c=3$, $J_0(\zeta)$是零阶第一类贝塞尔函数，$\nabla_\perp^2=\frac{\partial^2}{\partial r_\perp^2}+\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}$, $\mathcal{K}(x,r_\perp)=\frac{\nabla_\perp^2\Gamma(x,r_\perp)}{\Gamma(x,r_\perp)}$, 而 $\Gamma(x,r_\perp)=-\ln\left[\langle S_F^{(2)}(r_\perp)\rangle_x\right]$。需要注意的是，平均场近似忽略了 $1/N_c$中的次领先贡献。为保持一致性，我们采用大-N_c极限，这意味着用 $N_c/2$替代基本卡西米尔算符 C_F。

附录B：小-x 横动量依赖分布的数值结果

本附录给出计算质子-质子和质子-x 碰撞中的双强子关联所需的式（18）中的五种小-横动量依赖分布的数值结果。我们采用附录A 中的高斯近似，并使用跑动耦合巴利茨基-科夫切戈夫方程的解进行计算（详情见第III节）。由于我们假设偶极子具有平移不变性，因此给出的横向动量分布结果已按总体面积因子 $S_\perp$归一化。

图 7 展示了质子和铅核在两个 x_g取值下的这五种横动量依赖分布。如众所周知，在低 k_T区域，各种横动量依赖分布有显著差异；而在高 k_T（或“稀薄”）区域，它们则趋于相同的微扰尾部。在低 k_T区域，不同行为源于定义各横动量依赖分布时所采用的规范链接结构不同。低、高 k_T区域之间的转变由饱和标度决定。比较质子和铅核在 x 取值下的横动量依赖分布，可以清楚地看到这一点。此外，随着横动量依赖分布演化至更小的 x_g，它们会向更高的 k_T移动，这反映了小 x 演化后饱和标度增大的事实。

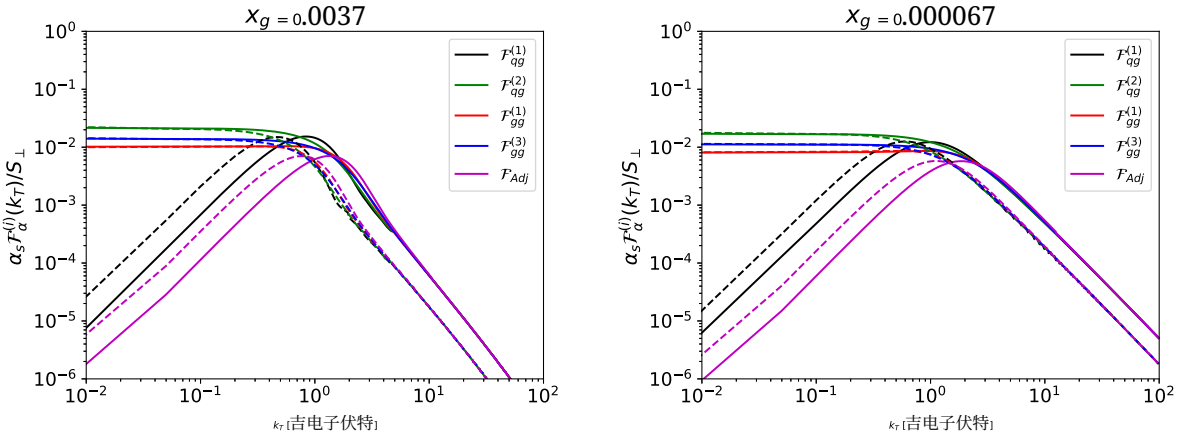


图7. 质子（虚线）和铅（实线）的五种小-x 胶子横动量依赖分布，胶子 $x_g=3.7\times10^{-3}$（左）和 $x_g=6.7\times10^{-5}$（右）

附录 C：改进的横向动量依赖因子化中的部分子产生截面

在改进的横向动量依赖框架中，硬因子由矩阵元计算得到，其中小 x 胶子处于非壳上 [73]。方程（14）、（15）和（16）中出现的改进横向动量依赖框架硬因子的显式表达式为：

$$\mathcal{H}^{(1)}_{qg\to qg} = \frac{\alpha_s^2(1-z)\left[1+(1-z)^2\right]}{2\boldsymbol{P}^2}\left[\frac{(1-z)^2}{\boldsymbol{k_q^2}}+\frac{1}{N_c^2}\frac{1}{\boldsymbol{k_g^2}}\left(\frac{\boldsymbol{P}^2}{\boldsymbol{k_q^2}}-z^2\right)\right], \tag{C1}$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_{qg\to qg} = \frac{\alpha_s^2 C_F}{N_c}\frac{(1-z)\left[1+(1-z)^2\right]}{\boldsymbol{k_g^2 k_q^2}}, \tag{C2}$$

$$\mathcal{H}^{(1)}_{gg\to q\bar{q}} = \frac{\alpha_s^2}{2N_c}\frac{z(1-z)\left[z^2+(1-z)^2\right]}{\boldsymbol{P}^2}\left[\frac{(1-z)^2}{\boldsymbol{k_{\bar{q}}^2}}+\frac{z^2}{\boldsymbol{k_q^2}}\right], \tag{C3}$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_{gg\to q\bar{q}} = \frac{\alpha_s^2}{2N_c}\frac{z(1-z)\left[z^2+(1-z)^2\right]}{\boldsymbol{P}^2}\left[\frac{\boldsymbol{P}^2}{\boldsymbol{k_q^2 k_{\bar{q}}^2}}-\frac{(1-z)^2}{\boldsymbol{k_{\bar{q}}^2}}-\frac{z^2}{\boldsymbol{k_q^2}}\right], \tag{C4}$$

$$\mathcal{H}^{(1)}_{gg\to gg} = \frac{\alpha_s^2 N_c}{2C_F}\frac{2z(1-z)}{\boldsymbol{P}^2}\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right]\left[\frac{(1-z)^2}{\boldsymbol{k_{g2}^2}}+\frac{z^2}{\boldsymbol{k_{g1}^2}}\right], \tag{C5}$$

$$\mathcal{H}^{(2)}_{gg\to gg} = \frac{\alpha_s^2 N_c}{2C_F}\frac{2z(1-z)}{\boldsymbol{P}^2}\left[\frac{z}{1-z}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)\right]\left[\frac{\boldsymbol{P}^2}{\boldsymbol{k_{g1}^2 k_{g2}^2}}-\frac{(1-z)^2}{\boldsymbol{k_{g2}^2}}-\frac{z^2}{\boldsymbol{k_{g1}^2}}\right]. \tag{C6}$$

此处， $\boldsymbol{k_i}$ 表示相应部分子的横向动量。在数值实现中，硬因子中的一个 α_s 幂次会被乘在胶子横向动量依赖分布上的 $1/\alpha_s$ 前因子抵消，而剩余的强耦合则取值于硬尺度 μ_f。

附录 D：补充图

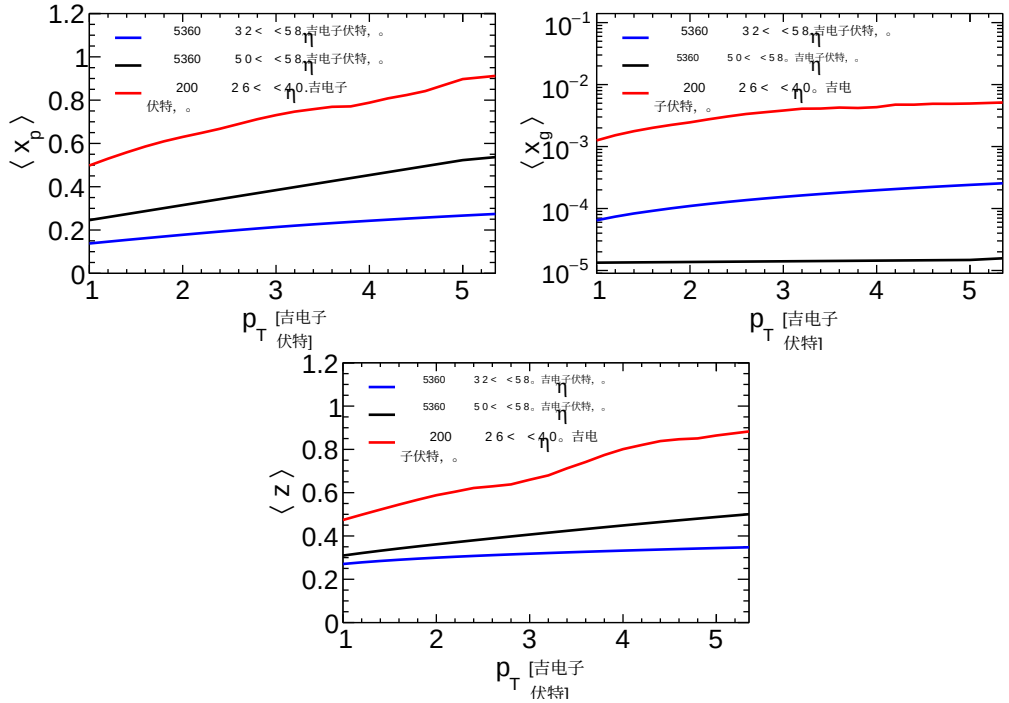
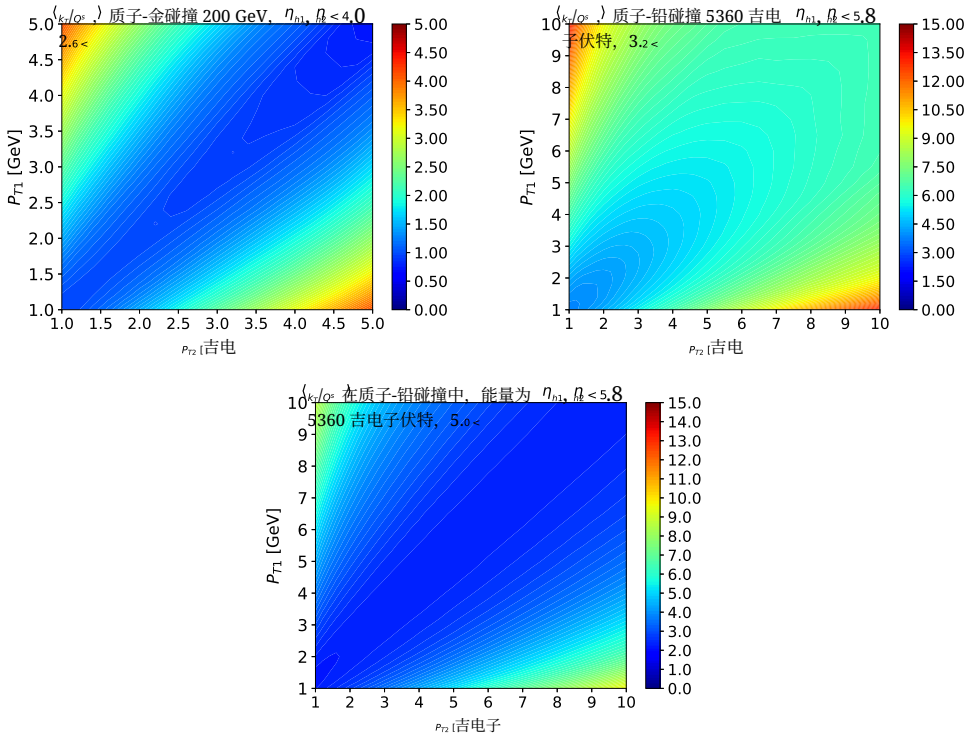


图8. 质子的平均 $\langle x_p\rangle$ （左）、原子核中胶子的平均 $\langle x_g\rangle$ （右），以及强子 $\langle z\rangle$ 的碎裂能量分数（下），对应于STAR（质子-金碰撞）和FoCal（质子-铅）运动学条件下的 $p_T = p_{T1} = p_{T2}$。



Fig图 9. 在 STAR 和 FoCal 的运动学条件下， k_T 与 Q_s, $\langle k_T/Q_s \rangle$之比的平均值。