arXiv:2512.21478v1 [quant-ph] 25 Dec 2025

量子非抽取小波变换：理论、量子电路与应用

Brani Vidakovic
德克萨斯农工大学

2025年12月29日

摘要

非抽取小波变换或平移不变小波变换（NDWT）是经典多尺度信号分析中的核心工具，因其稳定性、冗余性和平移不变性而备受重视。本文提出了两种互补的 NDWT 量子表述，将这些经典特性以相干方式嵌入量子计算。第一种表述基于 NDWT 的 ε抽取解释：通过将移位索引提升为量子寄存器，并依次应用受控循环移位和小波分析酉算子，同时实现所有循环移位小波变换。由此得到的构造为冗余小波系数提供了明确且完全酉的量子表示，并支持相干后处理，包括通过辅助量子比特驱动的完全正迹保持映射实现量子收缩。第二种表述基于哈达玛测试，利用对角相位算子通过干涉探测尺度—移位小波结构，从而无需显式重构系数即可直接获取平移不变能量尺度图和多尺度谱。综合来看，这两种方法表明，在量子情境中，冗余性和平移不变性可以加以利用，而非设法规避。去噪、特征提取和谱缩放方面的应用展示了量子非抽取离散小波变换如何为多尺度量子信号处理提供灵活且具有物理意义的基础。

关键词：量子小波变换、量子非抽取小波变换、ε 抽取与受控移位、Hadamard 测试与相位编码、量子小波收缩与完全正迹保持通道、量子信号处理

1 引言

非抽取小波变换（NDWT）也称为平稳小波变换或平移不变小波变换，是经典信号分析中最稳健的多尺度表示之一。与标准离散小波变换（DWT）不同，NDWT 避免了二进抽取，而是在每个循环移位和每个分辨率层级上计算小波系数。由此得到的表示虽然冗余，却高度稳定：输入信号发生微小平移时，系数数组会产生平滑且可预测的变化。凭借这种稳定性，NDWT 已成为去噪、谱估计、特征提取以及尺度行为和分形行为分析中的标准工具（Nason 和 Silverman，1995；Vidakovic，1999年）。

对 NDWT 的一种有用的结构性理解，是将其视为对信号所有循环移位版本分别施加普通正交离散小波变换后形成的结构化集合。对于长度为 $N = 2^n$ 的信号，在每个分辨率层级 j 上，NDWT 都可以组织为由 2^j 个平移后的离散小波变换组成的系列。该集合中的每个离散小波变换都是正交变换，因此能够保持能量。NDWT 的冗余完全源于纳入了所有移位，而非正交性的任何损失。Nason 和 Silverman 对这一 ε 抽取视角进行了形式化，它在理解平移不变小波分析方面发挥着核心作用，并为量子实现提供了自然的桥梁。

这一结构特性在量子情境中尤为重要。量子演化本质上是酉的，而能够分解为正交分量的线性变换可以自然地实现为量子电路。由于每个平移后的离散小波变换都是正交的，NDWT 所基于的 ε 抽取系列可以相干地嵌入更大的希尔伯特空间，并将移位索引提升为量子寄存器。随后，所有平移变换都可以通过量子叠加并行施加。尽管经典非抽取小波变换本身不是酉的，但其 ε 抽取提升具有酉实现，能够保留完整的冗余多尺度结构。

本文旨在系统、完整地阐述如何在量子计算机上实现非抽取小波的思想。文中提出了两种互补的量子表述。第一种基于 NDWT 的 ε-抽取表示，利用移位寄存器、受控循环移位和正交小波酉变换，在单个量子电路中相干地生成所有平移小波变换。该构造明确给出了冗余系数结构的量子表示，并支持后续量子处理，包括通过辅助量子比特驱动的完全正迹保持（CPTP）映射进行衰减和收缩。第二种表述基于哈达玛测试和对角相位算子，旨在直接以量子期望值的形式估计移位不变能量汇总量和尺度图，而无需显式构造完整的冗余系数数组。

本文结构如下。第2节从 ε 抽取视角回顾经典非抽取离散小波变换（NDWT），重点介绍其分解为正交移位离散小波变换。第3节介绍量子 ε-抽取非抽取小波变换。振幅编码信号占用一个含有 n 个量子比特的寄存器，而含有 L 个辅助量子比特的移位寄存器则用于索引所需的循环移位，其中 L 表示小波变换的深度。先执行受控移位，再应用小波酉变换，即可实现各个 ε-抽取分支；将辅助寄存器制备为均匀叠加态，则可相干地生成整个平移变换族。第4节讨论测量策略，以及如何从所得量子态中提取系数、能量和平移不变汇总量。

第5节介绍了一种基于哈达玛测试的非抽取离散小波变换（NDWT）量子表述方法。在这种方法中，每个尺度为 j 、平移为 k 的非抽取小波都编码为对角相位酉变换。信号态与这种相位调制之间的干涉会以期望值的形式产生局部能量贡献，从而无需构造大型非酉算子即可得到冗余小波尺度图。这种表述特别适用于近期量子设备，也适用于关注谱特性或尺度行为而非显式系数恢复的应用。后续各节将探讨电路复杂度和资源缩放，介绍其在去噪和多尺度谱分析中的应用，并在最后讨论未来的发展方向。

最后，我们简要介绍本文在量子小波变换相关研究中的定位。Klappenecker（Klappenecker，1999年）以及 Fijany 和 Williams（Fijany & Williams，1998a，1998b）的早期研究表明，正交小波变换可以通过由局部旋转组成的量子电路实现。此后的研究将这些思路扩展到多维变换、小波包和高效综合方法（Bagherimehrab & Aspuru-Guzik，2023；H.-S. Li 等，2019；Z. H. Li 、 Li 、 Li 和 Xu，2018），以及量子小波原子变换等相关构造（Podzorova，2025）。这些研究主要关注临界抽样的正交小波族。本文所探讨的非抽取变换属于另一类：它具有冗余性，却完全由正交分量构成，因此特别适合量子叠加。本文补充了现有研究成果，表明平移不变小波分析不仅与量子计算兼容，而且能够在统一的量子框架内以相干且高效的方式实现。

若干介绍量子非抽取离散小波变换实现的 Jupyter 笔记本 `qiskit 2.x` (Abraham, Akhalwaya, Banerjee, Baiardi, et al., 2023) 已公开发布于 `github.com/BraniV/QNDWT`。本文中的数值示例基于这些笔记本。

2 经典非抽取离散小波变换与 ε抽取视角

经典的非抽取小波变换（也称平稳小波变换，NDWT）是离散小波变换（DWT）的冗余版本。与标准 DWT 不同，NDWT 消除了二进抽取，并在每个分辨率层级上生成与信号长度相同的系数序列。由于不进行抽取，所得表示具有平移不变性：输入信号的循环移位会导致系数数组发生相应移位，而其结构不会发生显著变化。这一特性使 NDWT 尤其适用于去噪、谱估计以及尺度相关现象的分析。

从历史上看，非抽取小波构造很早就出现在小波文献中。Holschneider 及其合作者（Holschneider、Kronland-Martinet、Morlet 和 Tchamitchian，1989年）提出了一种非抽取滤波方案，后来以 $a\ trous$ 变换之名广泛应用于天文学领域（Starck 和 Murtagh，1994年）。Shensa（Shensa，1992年）明确建立了$a\ trous$ 算法与 Mallat 多分辨率方案之间的联系，表明非抽取变换可以通过在任意尺度上执行不带下采样的标准滤波器组来获得。在统计学中，Nason 和 Silverman 将这一构造形式化为平稳小波变换（Nason 和 Silverman，1995年）；而在时间序列分析中，Percival 和 Walden 引入了最大重叠离散小波变换（MODWT），这是一种密切相关的冗余变换，并具有便捷的能量归一化特性（Percival 和 Walden，2000年）。

设 y 为长度是 $N = 2^n$ 的实值信号，并令 W 表示相应的 $N \times N$ 正交离散小波变换矩阵，其具有 L 个多分辨率层级。常规的抽取离散小波变换会生成系数向量

$$w = Wy,$$

其中，W 中固有的二进抽取导致了众所周知的平移不变性缺失问题。为避免符号冲突，我们对不同的小波变换使用不同的符号。对于标准正交小波变换，细节系数和平滑（尺度）系数分别记为 w 和 s。对于非抽取小波变换，我们则采用惯用记法 d和 a。

一种特别适用于量子实现的观点，是将非抽取离散小波变换表示为一组结构化的普通离散小波变换，并将其应用于输入信号的循环移位版本。令 S^{ε} 表示按 ε 个样本进行循环移位的循环移位算子，该算子作用于 y 时满足

$$(S^{\varepsilon}y)[k] = y[(k-\varepsilon) \mod N].$$

这里， S^{ε} 采用通常的被动（索引平移）约定；第 3 节中的量子构造采用主动约定，两者仅相差一个符号，不影响正交性或非抽取小波变换结构。定义

$$W^{(\varepsilon)} = W S^{\varepsilon}.$$

由于 W 和 S^{ε} 都是正交的，因此每个矩阵 $W^{(\varepsilon)}$ 本身也是正交的。

如果小波变换的深度为 L，那么只需要这些移位

$$\varepsilon = 0, 1, \ldots, 2^{L} - 1$$

即可。这便得到ε抽取族

$$\left\{ W^{(\varepsilon)} y \right\}_{\varepsilon=0}^{2^{L}-1},$$

由 2^{L} 个普通小波变换组成的集合，每个变换产生 N 个系数。因此，该族中的系数总数为 $N2^{L}$。

经典非抽取小波变换由 $(L+1)N$ 个系数组成：在每个分辨率层级 $j = 1,\ldots, L$ 上有 N 个细节系数，以及在最粗层级上有 N 个尺度系数。这些系数通过确定性对齐和交错过程，从 ε 抽取族中获得。在分辨率层级 j，每个小波滤波器都有 2^{j} 个不同的循环移位。平稳变换在每个空间位置恰好保留一个系数，该系数对应于模 2^{j} 移位的适当等价类。

这种选择具有固定的线性结构。存在一个矩阵 P，它仅取决于 N 和 L，使得

$$\mathrm{NDWT}(y) = P\left(\left\{ W^{(\varepsilon)} y \right\}_{\varepsilon=0}^{2^{L}-1} \right),$$

其中， P 恰好从完整的 ε 抽取集合中提取 $(L+1)N$ 个系数，并将其重新排列为标准平稳小波形式。

因此，ε抽取视角将经典非抽取小波变换表示为一组正交分量，随后通过结构化线性投影实现平移不变性。这种表述在量子情境中尤为方便。每个算子 $W^{(\varepsilon)}$ 都是正交的，因此都可以酉实现；而量子力学天然允许对移位索引 ε进行相干叠加。在下一节中，我们将利用这一特征构造一个量子算子，使其能够在单个量子电路中相干地应用所有 $W^{(\varepsilon)}$。

3 量子 ε 抽取与非抽取离散小波变换算子

现在，我们将经典 ε 抽取表示的 NDWT 推广为量子算子。构造分为三个步骤：(i) 引入一个制备为叠加态的移位寄存器；(ii) 对数据寄存器执行受控循环移位；(iii) 应用小波分析酉算子。这些操作共同实现了整个 ε抽取族小波变换的相干量子实现。

在本节中，算子的含义均根据上下文确定。作用于经典向量的线性算子及其量子对应算子使用相同的符号表示；根据它们作用于向量还是量子寄存器，便可区分矩阵与酉算子。

对于长度为 $N = 2^n$ 的离散信号，数据寄存器由 n 个量子比特组成，并将归一化信号编码为振幅编码态 $|y\rangle$。在示例中，我们有时将未归一化的数据记为 x，其中 $y = x/\|x\|$ 表示用于制备振幅编码态的归一化版本 $|y\rangle$.

深度为 L 的非抽取离散小波变换需要 2^L 次循环移位。因此，我们引入一个由 L 个量子比特组成、承载移位索引的辅助寄存器

$$|\varepsilon\rangle, \qquad \varepsilon \in \{0, 1, \ldots, 2^L - 1\},$$

使联合希尔伯特空间的维数为 $2^L N$。

受控循环移位。循环移位算子对计算基态的作用如下:

$$S^\varepsilon |k\rangle = |(k + \varepsilon) \bmod N\rangle. \tag{1}$$

将此操作以辅助寄存器为条件，即可得到受控移位算子

$$U_{\text{shift}} \quad = \quad \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon| \otimes S^\varepsilon. \tag{2}$$

在式（1）中，我们对量子平移采用了主动约定，这与第 2 节中的经典索引方式仅在符号约定上有所不同，不会影响正交性或非抽取小波变换结构。

作用于所有分支的常见小波分析酉算子。令 W 表示与选定小波族相对应的正交离散小波变换。其量子实现是作用于数据寄存器的酉算子。其作用定义为

由下式定义

$$U_{\text{wavelet}} \quad = \quad \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon| \otimes W = I \otimes W, \tag{3}$$

从而使得在叠加态的每个分支上应用相同的小波分析模块 .

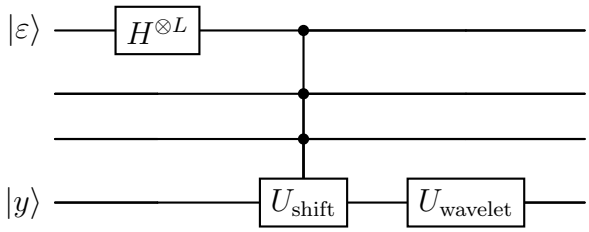


图 1：量子 ε-抽取架构。一个由 L个量子比特组成的辅助寄存器通过 $H^{\otimes L}$制备为均匀叠加态。以 ε为条件，数据寄存器先执行 S^{ε} ，随后执行小波分析酉算子 W。每个相干分支实现一种 ε-抽取小波变换。

量子 ε-抽取非抽取离散小波变换。将受控平移与受控小波算子结合，得到

$$U_{\text{NDWT}} \quad = \quad U_{\text{wavelet}} U_{\text{shift}} = \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon| \otimes W S^{\varepsilon}, \tag{4}$$

因此，每个分支 ε都携带移位小波变换 $W^{(\varepsilon)} = W S^{\varepsilon}$。

如果辅助寄存器被制备为均匀叠加态

$$|\Xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle,$$

于是， U_{NDWT} 的联合作用得到

$$U_{\text{NDWT}}(|\Xi\rangle \otimes |y\rangle) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle \otimes W S^{\varepsilon} |y\rangle. \tag{5}$$

叠加态的每个分支对应于经典 ε-抽取库中的一个元素，如今以相干方式实现。

对于固定的平移状态 $|\varepsilon\rangle$,

$$U_{\text{NDWT}}(|\varepsilon\rangle \otimes |y\rangle) = |\varepsilon\rangle \otimes W S^{\varepsilon} |y\rangle,$$

以及 s 由线性性可得式 (5) 中的叠加形式。由于算子 $W S^{\varepsilon}$ act on

作用于彼此正交的辅助量子比特子空间，因此整体算子 U_{NDWT} 是酉算子。由此，量子非抽取离散小波变换表现为一个由移位寄存器控制的分块对角酉算子。

量子非抽取离散小波变换的电路深度与其基础抽取小波变换的电路深度相同。数据寄存器承载多层小波结构，而辅助寄存器记录冗余的移位位置，不会增加变换深度。

示例 1. 全量子两层非抽取哈尔变换。本例展示了一个深度为 2 的全量子非抽取哈尔小波变换的最简实现，适用于长度为 $N = 8$ 的信号，$x =$(2、1、9、0、3、-10、2、4)。将信号重新缩放为 $[-1, 1]$ 并进行归一化，以制备数据寄存器

$$|y\rangle = \sum_{k=0}^{7} y_k |k\rangle,$$

with

$y =$(0. 165567、0.09934、0.629153、0.033113、0.231793、-0.629153、0.165567、0.29802).

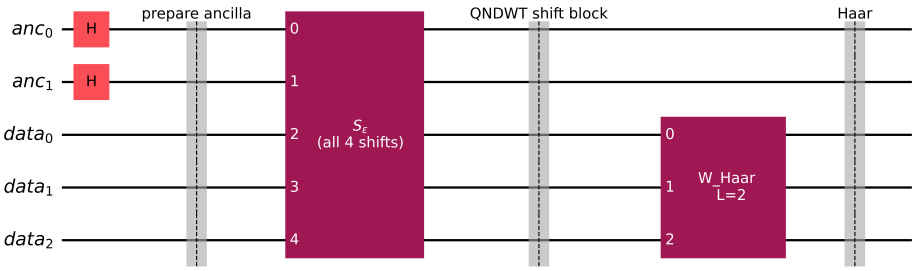


图 2：对 $N = 8$ 执行的全量子两层哈尔量子非抽取小波变换。该量子电路以叠加态相干制备四个平移后的哈尔变换。

该变换的过程如下：

$$|0\rangle^{\otimes 2}|y\rangle \xrightarrow{H^{\otimes 2}} \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\varepsilon=0}^{3}|\varepsilon\rangle|y\rangle \xrightarrow{U_{\mathrm{shift}}} \tfrac{1}{2}\sum_{\varepsilon=0}^{3}|\varepsilon\rangle S^{\varepsilon}|y\rangle \xrightarrow{W} \tfrac{1}{2}\sum_{\varepsilon=0}^{3}|\varepsilon\rangle W S^{\varepsilon}|y\rangle. \tag{6}$$

ε	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$	$w_{2,1}$	$w_{2,2}$	$w_{1,1}$	$w_{1,2}$	$w_{1,3}$	$w_{1,4}$
0	0.736842	0.052632	-0.315789	-0.684211	0.074432	0.669891	0.967620	-0.148865
1	0.947368	-0.157895	-0.210526	0.578947	0.148865	-0.595458	-0.223297	-0.893188
2	0.578947	0.210526	0.157895	0.842105	-0.148865	0.074432	0.669891	0.967620
3	0.000000	0.789474	-0.736842	0.368421	-0.893188	0.148865	-0.595458	-0.223297

表1：每次平移对应的量子二层哈尔系数。

此示例既是教学基准，也是构建更大型 QNDWT 构造并对小波系数进行后续量子处理的基础模块。实现代码可在随附的 `qiskit`代码仓库中找到，位于 `QNDWT001.ipynb` 。

索引	1	2	3	4	5	6	7	8
d_1	0.074432	-0.595458	0.669891	-0.223297	0.967620	-0.893188	-0.148865	0.148865
d_2	-0.315789	0.368421	0.842105	0.578947	-0.684211	-0.736842	0.157895	-0.210526
a_2	0.736842	0.789474	0.210526	-0.157895	0.052632	0.000000	0.578947	0.947368

表 2：完全量子 QNDWT 状态的 NDWT 系数。

示例 2：多普勒信号的全量子 QNDWT。我们以长度为 $N = 64$ 的多普勒测试信号（图 3，左图）演示量子非抽取 Haar 小波变换（QNDWT）。该信号采用振幅编码，存储在一个六量子比特数据寄存器中；一个三量子比特辅助量子比特寄存器制备出八种循环移位的均匀叠加。每个辅助量子比特取值都控制数据寄存器执行相应的循环移位，因此该量子电路能够相干地制备输入信号的所有移位版本。

随后，对数据寄存器应用一次三级哈尔变换。对于每个辅助量子比特取值，得到的状态都包含一个不同循环移位对应的哈尔系数。从完整状态向量中，我们提取每个移位对应的细节向量 $w_1^{(\varepsilon)}$ 、 $w_2^{(\varepsilon)}$ 、 $w_3^{(\varepsilon)}$ 以及平滑近似 $s_3^{(\varepsilon)}$.

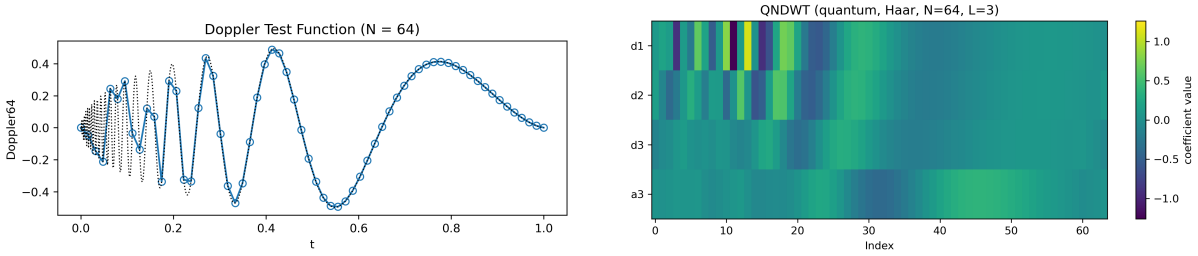


图 3：（左）在 $N = 64$ 个等间距采样点（以 t为单位）上采样的多普勒测试信号。（右）深度为 $L = 3$.的量子非抽取小波变换

通过撤销移位并对所有辅助量子比特取值对应的细节向量进行汇总，组装得到非抽取小波序列。由此得到标准的非抽取离散小波变换分量 d_1、 d_2、 d_3和 a_3，每个分量长度为 64，如图 3 右图所示。

将这些序列绘制成堆叠图，即可重现多普勒信号的经典 Haar 非抽取离散小波变换。此示例在 `QNDWT003.ipynb`. 中实现

此示例展示了 QNDWT 的基于移位的实现。所有冗余系数都在单个量子电路中相干地产生，无需进行测量。接下来的示例将介绍哈达玛测试方案，该方案提供了一种互补的基于测量的机制，无需构建完整的冗余表示即可估计小波能量和谱。

下一节将介绍如何测量式 (5) 中的联合态，以提取系数、能量和平移不变汇总量。

4 量子非抽取离散小波变换中信息的测量与提取

量子非抽取离散小波变换将所有 ε-抽取小波变换制备为相干叠加，

$$|\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle \otimes W S^{\varepsilon} |y\rangle. \tag{7}$$

数据寄存器包含与给定循环移位相对应的小波系数，而辅助寄存器则编码移位索引 ε。这种联合结构支持多种不同的信息提取模式，具体取决于如何测量或舍弃辅助寄存器。

对辅助寄存器进行投影测量。如果在计算基下测量辅助寄存器，联合态将坍缩为其中一个抽取变换

$$|y_\varepsilon\rangle = W S^{\varepsilon} |y\rangle,$$

每种变换出现的概率均为 2^{-L}。在操作层面，这相当于选取单个循环移位，并执行常规正交小波变换。尽管这一过程舍弃了冗余信息，但它将经典抽取离散小波变换作为量子非抽取离散小波变换架构的一个特例，直接实现于量子系统中。

非抽取离散小波变换系数的完整恢复。要重建完整的冗余非抽取离散小波变换系数表，可以根据辅助寄存器的测量结果，对数据寄存器进行条件测量。对 ε 的所有取值重复此过程，即可恢复整个ε-抽取库；对齐后，还可得到（$L+1$）N 平稳系数。所需的测量轮次数与经典方法枚举所有循环移位的成本相当，而 $|\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle$ 的底层幺正制备保持不变，且与 N无关。

逐层能量和平移不变汇总量。许多非抽取离散小波变换的应用并不依赖单个系数，而是依赖逐层能量、范数或平移不变汇总量等聚合量。这些量可以通过对辅助寄存器进行偏迹自然地获得。令

$$\rho = |\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle\langle\Psi_{\mathrm{NDWT}}|$$

表示 t　联合密度算符，并通过下式定义数据寄存器上的约化态

$$\rho_D = \mathrm{Tr}_A(\rho).$$

该偏迹相干地对所有循环移位进行平均。因此，仅作用于数据寄存器的可观测量的期望值，会重现通过经典非抽取小波变换能量估计器计算得到的相同移位平均量。特别是，可以通过测量对应小波子空间上的投影算子来估计细节层 j 的能量。

跨尺度统计量与相关性。 在分析局部振荡结构或自相似结构时，非抽取离散小波变换的冗余性尤其有价值。由于 $|\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle$ 中同时包含所有移位，因此可以估计跨尺度相关性，例如

$$\langle d_{j,k}\, d_{j',k'} \rangle$$

以及其他多层级汇总，都可以仅通过对 ρ_D 进行重复测量来估计，无需解析或枚举移位索引。从这个意义上说，量子表示将所有 2^L 经典变换压缩为单个对象，可在测量时从中提取丰富的统计结构。

混合测量策略。 也可以采用中间策略。对辅助量子比特进行部分测量或弱测量，可以在降低估计量方差的同时，保留移位子集之间的相干性。此类混合程序没有直接的经典对应物，并可能支持基于冗余小波表示的高效量子协议，用于信号分类、异常检测或去噪。

总体而言，量子非抽取离散小波变换提供了一种统一机制，用于生成、存储和探测传统上通过循环移位获得的完整冗余小波表示族。该表示制备高效，无需重复进行酉变换，并支持针对所关注统计任务灵活定制的测量方案。这些特性使 QNDWT 成为自适应量子信号处理和基于量子小波的推断的天然基础。

非抽取离散小波变换投影的量子类比。 在经典情形下，非抽取离散小波变换由 ε-抽取库 $z(y) \in \mathbb{R}^{N2^L}$ 通过一个固定的线性算子$P : \mathbb{R}^{N2^L} \to \mathbb{R}^{(L+1)N}$得到；该算子会选择、对齐并汇总不同移位下的系数，从而形成平稳序列 $d_j, j = 1, \ldots, L$和 a_L。尽管这是一个线性投影，但它并非酉算子：它会降低维数、混合不同 ε 区块中的系数，并执行移位平均。因此，无法将其直接实现为量子电路。

在量子构造中，平移平均通过偏迹自然产生。对辅助寄存器取迹后，得到约化态 ρ_D，其作用类似于经典投影 P。具体而言， ρ_D 的对角元素满足

$$(\rho_D)_{k,k} = \frac{1}{2^L} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} \left|(WS^{\varepsilon} y)_k\right|^2,$$

这与平稳小波变换中使用的局部平移平均能量一致。更一般地，对于任何仅作用于数据寄存器的可观测量 O ，

$$\mathrm{Tr}(O\rho_D) = \frac{1}{2^L}\sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1}\langle y|(S^\varepsilon)^* W^* O W S^\varepsilon|y\rangle,$$

复现经典的平移不变非抽取离散小波变换统计量。

在此意义下，经典投影 P 和量子偏迹 $\mathrm{Tr}_A(\cdot)$ 对二次汇总量和不变特征发挥着类似的作用。经典非抽取离散小波变换通过显式线性聚合压缩 ε-抽取库，而量子非抽取离散小波变换则通过完全正且保迹映射压缩相干叠加态。因此，平移不变性在量子情境下自然地体现为量子粗粒化的一种实例，其实现方式是偏迹，而非酉算子。

5 哈达玛测试非抽取小波变换

经典非抽取小波变换通过在所有循环移位处应用相同的小波滤波器，生成一种冗余且具有平移不变性的多尺度表示。尽管由于没有下采样，该变换是非酉的，但可以通过改变获取小波信息的方式，构造出保持幺正性的量子类比。哈达玛测试方案并不显式生成带符号小波系数，而是将尺度-平移小波编码为对角相位算子，并通过干涉恢复基于能量的量（Aharonov、Jones 和 Landau，2009）。由此得到一种相干且完全酉的机制，用于构造冗余的非抽取离散小波变换标量图，而无需复制信号或合成大型块结构算子。

令振幅编码信号为

$$|y\rangle = \frac{1}{\|y\|}\sum_{n=0}^{N-1} y_n|n\rangle,$$

并令 $\psi_{j,\,k}[n]$表示尺度 j 和循环移位 k下的离散非抽取小波。为探测与 $(j,\ k)$ 相关的局部小波能量，定义对角相位酉变换

$$U_{\phi,j,k} = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta\psi_{j,k}[0]},\, e^{i\theta\psi_{j,k}[1]},\,\ldots,\, e^{i\theta\psi_{j,k}[N-1]}\right),$$

其中 $\theta > 0$ 是一个可调相位增益参数。对 $U_{\phi,\,j}$进行哈达玛测试 k

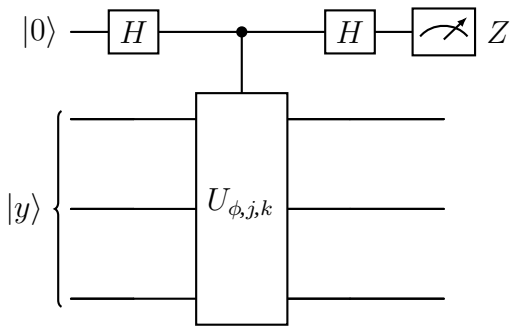


图 4：尺度为 j、平移为 k 的非抽取小波哈达玛测试电路。数据寄存器存放振幅编码信号 $|y\rangle$。辅助量子比特控制对角相位算子 $U_{\phi,\ j,\ k}$，并在 Z 基底下进行测量，以估计 $\mathbb{E}[Z_{j,k}] = \mathrm{Re}\langle y|U_{\phi,\ j,\ k}|y\rangle$。若要获取虚部，则在最后一次哈达玛变换之前，在辅助量子比特上插入一个 S 门。

可得期望值

$$\mathbb{E}[Z_{j,k}] = \mathrm{Re}\langle y|U_{\phi,j,k}|y\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 \cos\big(\theta\, \psi_{j,k}[n]\big).$$

当 θ足够小时，余弦函数可作二阶展开，且

$$\mathbb{E}[Z_{j,k}] \;\approx\; 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2\, \psi_{j,k}[n]^2, \tag{8}$$

因此，$\mathbb{E}[Z_{j,k}]$ 相对于 1 的偏差编码了尺度为 j 、平移为k处的局部非抽取离散小波变换能量。当 $\theta \max_n |\psi_{j,\ k}[n]| \ll 1$ 时，该近似成立；对于固定分辨率下的紧支撑小波，这一条件很容易满足。

因此，非抽取离散小波变换的哈达玛测试表述不会产生带符号小波系数。每次查询都会得到一个形如式（8）的实数期望值；在小角度范围内，该值等于 1 减去二次量的某个常数倍

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2\, \psi_{j,k}[n]^2.$$

因此，哈达玛非抽取小波变换会生成冗余且平移不变的能量标度图，而不是 ε抽取量子非抽取小波变换所生成的 $(L+1)N$ 系数数组。这一区别至关重要：哈达玛表述非常适用于基于能量和谱的任务，例如平滑、多尺度谱估计以及尺度或赫斯特指数分析，但不支持逐系数收缩或直接进行信号重构。

从计算角度来看，主要开销是对 $U_{\phi,\ j,\ k}$ 的受控施加。对于哈尔小波，$U_{\phi,\ j,\ k}$ 的对角元素仅取少数几种不同的值

，因此门深度随 log N 增长。对于更平滑的小波，滤波器的支撑范围会扩大，但算子仍为对角形式，因此可通过稀疏相位梯度构造高效地实现综合。每对 $(j,\ k)$ 仅需进行一次哈达玛测试，因此总开销随探测的尺度–平移位置数量线性增长，并随 N 对数增长。

参数 θ 控制线性度与灵敏度之间的权衡。较大的取值会提高信号对比度，但会降低二次近似的有效性；较小的取值则能改善线性度，但代价是更高的采样噪声。在实践中，θ 取 $[10^{-2}, 10^{-1}]$ 范围内的值通常可以实现良好的折中。由于哈达玛测量结果是伯努利随机变量，因此，要以精度 ε 估计$\mathbb{E}[Z_{j,k}]$所需的采样次数，其规模为

$$\text{shots} \sim \varepsilon^{-2}.$$

聚合量（例如逐层能量或平均尺度图）通常所需的采样次数较少，这是因为移位之间的方差缩减。

哈达玛非抽取小波变换中的噪声主要影响辅助量子比特。退相干会降低干涉对比度，并使估计值偏向零，但可以通过短深度相位构造或回波技术加以缓解。数据寄存器上的振幅阻尼会扰动编码振幅，但由于所关注的量是对角酉算子的期望值，其敏感性与其他重叠估计任务相当，通常不如完整量子态层析严重。

哈达玛非抽取小波变换与前文介绍的 ε抽取量子非抽取小波变换密切相关。两者都利用酉操作生成冗余、平移不变的多尺度表示。ε抽取表述会生成显式系数向量，适用于进一步的相干处理，包括量子收缩。相比之下，哈达玛表述通过相位调制与干涉来访问相同的多尺度结构，并生成基于期望值的能量摘要，尤其适合近期量子设备。两种方法共同为经典非抽取小波变换提供了互补的量子实现：一种在系数域中运作，另一种则在能量域中运作。

示例3. 通过哈达玛测试实现 QNDWT。本例说明如何使用哈达玛测试探测局部小波能量，以及它们与 QNDWT 非抽取结构之间的关系。我们考虑在 $N = 128$ 个等距点上采样的多普勒函数。通过 $L = 3$个分辨率层级，非抽取哈尔变换生成四个序列 d_1，d_2，d_3 和 a_3，每个序列的长度均为 128。这些序列

组装成 4×128 系数矩阵

$$W_{\mathrm{QNDWT}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

如图 5 左图所示。

为与哈达玛表述建立联系，考虑正交的哈尔变换矩阵 W. 设 x 表示多普勒采样，$y = x/\|x\|$ 表示归一化信号。抽取系数为 $w = Wy$，系数 w_k 的能量满足

$$|w_k|^2 = \frac{1 - \langle y|U_k|y\rangle}{2}, \qquad U_k = W^\top (I - 2|k\rangle\langle k|)W.$$

因此，可以通过仅使用一个辅助量子比特的哈达玛测试来估计 $|w_k|^2$ 。在此示例中，我们选取抽取变换最精细细节频带中的一个系数 w_k ，并在模拟器上计算 $\langle y|U_k|y\rangle$。哈达玛估计值与经典能量 $|w_k|^2$ 在数值精度范围内一致（见图 5 右图）。

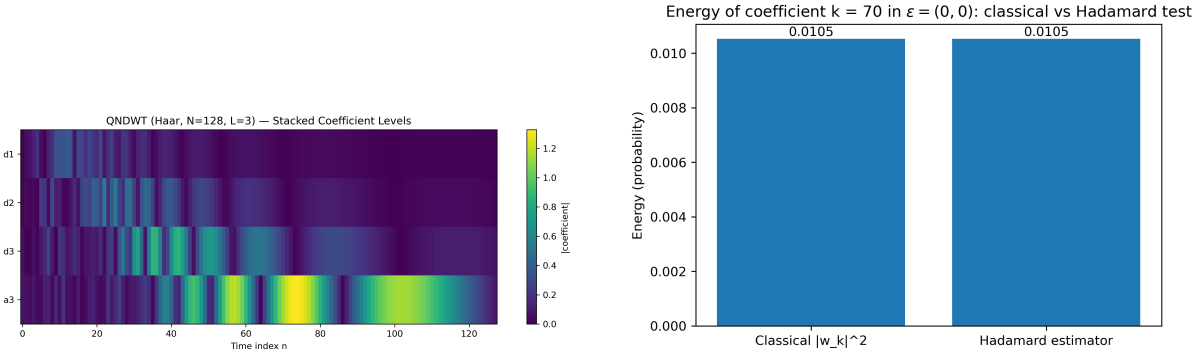


图 5: （左）在 $N = 128$ 个等距点采样的多普勒函数的 W_{QNDWT}；（右） $|w_k|$ 的哈达玛估计值与经典能量在数值精度范围内一致

由于单个 NDWT 系数可以表示为不同移位下抽取系数的有限线性组合，因此，即使完整的 QNDWT 是隐式生成或由经典方法生成的，哈达玛测试仍提供了一种量子机制，可用于探测特定尺度或位置上的局部小波能量。此示例在笔记本 `QNDWT004.ipynb` 中使用 Qiskit 2.x 实现。

6 量子非抽取离散小波变换的电路复杂度和资源缩放

第3至5节介绍了经典非抽取小波变换的两种互补量子表述。在 ε抽取方法（第3节）中，单次幺正制备即可生成联合态，以相干方式编码所有移位小波变换。在哈达玛方法（第5节）中，通过期望值探测平移不变的多尺度信息，得到的是能量标度图，而非带符号系数。本节总结相应的电路资源，并阐明量子构造与经典非抽取小波变换的计算成本有何不同。

从经典角度看，直接计算量子非抽取离散小波变换可以视为对信号的多个循环移位分别应用正交离散小波变换。相较于单次离散小波变换，冗余变换会显著增加计算和存储开销，因为必须生成或模拟多个平移变换。在量子情境下，冗余的处理方式有所不同：ε抽取架构在单个量子态中相干地表示所有移位，而哈达玛门架构则通过重复但浅层的干涉实验获取多尺度能量。

ε抽取架构（态制备）。第 3 节中的酉算子形式为

$$U_{\mathrm{NDWT}} = \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle\langle\varepsilon| \otimes W S^{\varepsilon},$$

其作用于一个 n量子比特的数据寄存器和一个 L量子比特的移位寄存器。因此，主要的相干基本操作为：(i) 对数据寄存器执行受控模移位；以及 (ii) 一个小波分析酉算子 W。

在 $n=$ 个量子比特上执行 ε 的模加法，可以使用标准量子加法器实现，其深度为 $O(n)$（通过针对特定硬件的优化通常还能进一步降低）。小波酉变换 W 取决于所选的小波族。对于哈尔小波， W 可以通过哈达玛门和交换门构造出特别浅的量子电路。对于紧支撑正交小波（道贝希、对称小波等）， W 可以依据正交滤波器组的标准分解，编译为基本单量子比特门和受控旋转门。对于资源缩放而言，关键在于 ε抽取架构只对数据寄存器应用 W 一次，而不是应用 2^L 次：移位索引位于正交的辅助量子比特子空间中，因此冗余不会引入额外的酉算子深度。

在此处重点讨论的 NDWT 设置中，电路宽度为 $n+L$ 个量子比特（深度为 L，并有 2^L 次移位）。完全通用的“所有循环移位”构造需要 n 个移位量子比特，但对于 NDWT 深度参数化而言，并不需要这种推广，最好将其视为可选扩展。与 S^{ε} 和 W 的底层实现相比，受控结构会使门数量增加一个常数倍。

一个实际需要注意的问题是，虽然完整的冗余库已通过相干方式制备，但要将所有 系数提取为经典数值，仍需进行许多次测量（第4节）。因此，ε-抽取架构的主要优势在于，可将冗余表示作为量子对象 用于后续相干处理（例如通过完全正迹保持映射进行衰减或收缩），而将测量推迟到下游任务明确后再进行，并根据该任务量身安排。

哈达玛架构（能量查询）。哈达玛表述（第5节）通过施加受控对角酉算子$U_{\phi,\ j,\ k}$并测量单个辅助量子比特来估计多尺度能量。对于每个尺度–平移对（$j,\ k$），一次哈达玛测试需要：（i）一个辅助量子比特；（ii）受控施加$U_{\phi,\ j,\ k}$（或等效的受控实现）；以及（iii）两个哈达玛门和一次投影测量。两种架构都需要准备数据寄存器 $|y\rangle$ 。

对于哈尔小波，对角相位仅取少数几种不同的值，而$U_{\phi,\ j,\ k}$的深度随 $O(\log\ N)$增长。对于更平滑的小波，对角综合仍然高效，因为只需要进行相位旋转；在精度固定时，标准分解得到的门数量关于 N 呈多对数级。因此，每次局部能量估计所需的酉算子深度通常为 $O(\log\ N)$，而总运行时间则随必须探测的尺度–平移位置（$j,\ k$）数量线性增长。

采样复杂度遵循标准的重叠估计标度：要以精度 ε 估计单个实数，所需采样次数为

$$\text{shots} \sim \varepsilon^{-2},$$

因为哈达玛测量结果服从伯努利分布。实际应用中，非抽取离散小波变换摘要（如层级能量和平均尺度图）会汇总许多 $(j,\ k)$ 位置的信息，因此可通过求平均降低方差，往往能减少每个位置所需的有效采样次数。

两种量子表述的比较。 ε-抽取量子非抽取离散小波变换以增加量子比特为代价，实现一次相干制备：整个冗余库都存在于一个联合态中，可在测量前进行相干处理。当需要进行系数域操作（例如衰减通道、逐系数非线性操作或相干多尺度特征提取）时，这种架构最为适用。

哈达玛表述将辅助量子比特占用量降至最低，并以重复进行能量查询取代显式的系数生成。因此，当最终目标是获得平移不变能量尺度图、多尺度谱或其他二次汇总量，且近期约束倾向于浅层受控对角操作和基于测量的估计时，这种表述尤其具有吸引力。

简而言之，这两种构造适用于不同场景：ε-抽取量子非抽取离散小波变换可访问系数，以便进行相干后处理；而哈达玛量子非抽取离散小波变换则能直接访问能量摘要，同时量子线路结构最为精简。

噪声、退相干与完全正迹保持效应。噪声的影响取决于所提取的信息。在 ε-抽取表示中，退相干通过作用于联合系统的完全正迹保持（CPTP）映射发挥作用。相位阻尼会抑制计算基下的非对角项，从而降低不同平移扇区之间的相干性。然而，许多基于非抽取离散小波变换的任务（例如层级能量和平移不变范数）主要取决于数据寄存器约化态的对角元素。由于相位阻尼不会改变这些对角元素，辅助量子比特的相干性损失实际上会将量子叠加转化为对各个移位进行经典平均，这通常足以用于基于能量的汇总。

数据寄存器上的振幅阻尼会扰动振幅编码，并可能使数值系数发生失真。因此，当目标是系数恢复时，其影响会比目标是聚合二次汇总时更加明显。这与第4节中的测量讨论一致：基于 $\rho_D = \mathrm{Tr}_A(\rho)$ 的任务天然比要求完整系数读出的任务更能容忍辅助量子比特退相干。

在哈达玛表述中，主要噪声机制是辅助量子比特退相位，或 $U_{\phi,j,k}$ 综合过程中的相位误差。这些因素会降低干涉可见度，并使估计值产生趋向于零的偏差，但量子电路仍然较浅，并且可以结合回波式缓解。此外，小波尺度图中的冗余支持在 (j,k) 位置之间进行额外平均。

最后，噪声也可以作为一种衰减机制加以建设性利用。在 epsilon–抽取设置中，受控退相位或振幅阻尼能够实现对高频细节分量的软衰减，从而通过完全正迹保持通道为量子小波收缩提供一条具有物理意义的途径。在哈达玛设置中，对辅助量子比特实施受控退相位，或有意降低相位分辨率，能够直接在期望值层面实现类似的衰减。这些联系为后文 वकिसति的收缩与去噪应用提供了动机。

总体而言，量子非抽取离散小波变换的两种表述都以相干态制备（ε-抽取量子非抽取离散小波变换）或高效能量查询（哈达玛量子非抽取离散小波变换）取代了显式的经典平移枚举。对于固定的小波族和固定精度，所需资源随 $n = \log_2 N$ 多项式增长，并且仍适用于中等规模量子设备；尤其适合关注平移不变多尺度汇总，而非完整系数读出的任务。

7 量子非抽取离散小波变换的应用

第3至5节介绍了经典非抽取小波变换的两种互补量子表述。第3节的 ε-抽取构造制备了一个相干态，其中编码了所有循环移位小波变换，从而能够在测量前进行系数域后处理

。随后，第4节说明如何通过测量选择和约化态$\rho_D = \mathrm{Tr}_A(\rho)$获得平移不变摘要。相比之下，第5节的 Hadamard 表述并不旨在输出带符号系数，而是通过期望值获取尺度-平移能量和谱。下文的应用也据此安排：我们先介绍冗余小波域中的逐系数运算，再介绍能量层面的谱摘要和尺度摘要。

7.1 逐系数处理：通过完全正迹保持衰减实现收缩

在 ε 抽取表述中，量子非抽取离散小波变换会制备相干库

$$|\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle \;=\; U_{\mathrm{NDWT}}(|\Xi\rangle \otimes |y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle \otimes W S^{\varepsilon} |y\rangle, \tag{9}$$

其中

$$|\Xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\varepsilon=0}^{2^L-1} |\varepsilon\rangle$$

是与变换深度L相关的 2^L 平移索引上的均匀叠加。经典方法中，平移不变去噪会对每个平移变换应用收缩规则，然后对所有平移结果取平均。在量子情境下，只需一次制备 $|\Psi_{\mathrm{NDWT}}\rangle$ ，即可相干地获得所有平移系数向量。因此，可以通过对数据寄存器施加衰减，同时保持移位寄存器不变，来实现逐系数收缩。由此无需显式枚举或重新应用变换，即可得到平移不变收缩的量子类比。

设 ρ 表示联合态的密度算符， ρ_D 表示对移位寄存器取迹后数据寄存器上的约化态。在小波域中作用的对角（或近似对角）完全正迹保持（CPTP）映射，

$$\rho_D \mapsto \mathcal{E}(\rho_D) = \sum_k E_k \rho_D E_k^*, \tag{10}$$

通过 Kraus算符有选择地衰减细尺度或小幅值分量，从而起到软阈值处理的作用。由于所有平移扇区都受到均匀衰减，因此所得收缩会在相干表示层面实现平移不变的收缩规则。

相位阻尼通道提供平滑的、依赖尺度的衰减，通常对细尺度内容的抑制强于对粗尺度内容的抑制。通过调节阻尼强度，振幅阻尼通道可以实现硬阈值和软阈值效应。由于（9）中已经存在冗余系数结构，衰减会同时作用于

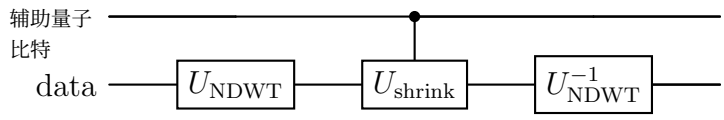


图 6：通过辅助量子比特驱动的通道在 QNDWT 域中进行逐系数收缩。数据寄存器经由 U_{NDWT}映射到冗余小波域，与辅助量子比特（或环境）通过联合酉算子相互作用，其约化作用实现衰减 U_{shrink}，再由 U^{-1} 非抽取离散小波变换映射回来。测量时域寄存器即可得到去噪信号。

所有移位，因此无需重复进行变换计算。

酉扩张与辅助量子比特控制的衰减。衰减可以通过在更大的希尔伯特空间上进行酉扩张来实现。设 $U(\theta)$ 表示作用于数据和辅助环境寄存器的参数化联合酉算子。对环境取迹后，数据中选定的分量会发生收缩。当 θ较小时，收缩程度可随 θ 平滑调节，这与经典收缩相呼应，同时通过可逆演化再经粗粒化来实现这一效果。有关小波量子收缩的更多内容，请参见 Vidakovic（2025）。

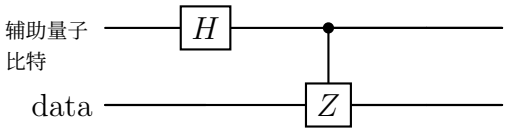


图 7：辅助量子比特驱动的退相干是实现衰减的一种基本操作。将辅助量子比特制备为叠加态，并施加受控的 Z 门，丢弃辅助量子比特后会在数据量子比特上产生相位阻尼通道。在 QNDWT 基中逐系数应用该操作，可使小波分量平滑收缩。

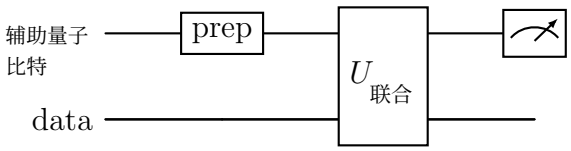


图 8：用于 QNDWT 收缩的完全正迹保持映射的斯廷斯普林扩张。辅助量子比特与数据上的联合酉算子 U_{joint} 在丢弃或测量辅助量子比特后，会导出一种在冗余小波基下呈对角或近似对角的克劳斯表示，从而衰减较小的系数，同时保留主要结构。

7.2 E能量级处理：小波尺度图与多尺度谱

第5节的哈达玛表述专为依赖 NDWT 能量而非带符号系数的任务设计。无需构造完整的冗余系数数组，只需通过受控对角酉算子和哈达玛测试查询尺度-平移能量或层级能量。当只需要能量摘要时，这种方法尤其有用

（如小波尺度图、谱、标度指数），或者当近期硬件限制更适合浅层对角电路和基于测量的估计时，也很有用。

示例 4：NDWT 能量表示和对数谱（db2， $N = 512$）。本示例说明了如何使用 NDWT 能量对湍流风速信号进行谱分析（Vidakovic、Katul 和 Albertson，2000年）。根据 Kolmogorov 的 K41 理论，充分发展的湍流呈现出幂律谱，这与赫斯特指数为 $H = 1/3$ 的分数布朗运动的标度特性一致。

图 9 显示了湍流速度时间序列 U_n $n = 0$，……，511，其采样率为 56赫兹，并作为后续小波分析的输入。

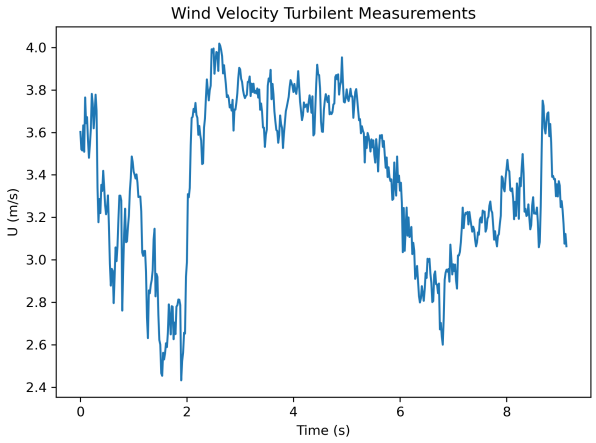


图 9：长度为 $N = 512$ 的湍流风速信号 U_n（采样率为 56赫兹）。

图 10 展示了使用道贝希 2 小波进行 7 层 NDWT 得到的能量摘要。左侧面板显示了平稳小波能量的堆叠表示，各行排列如下

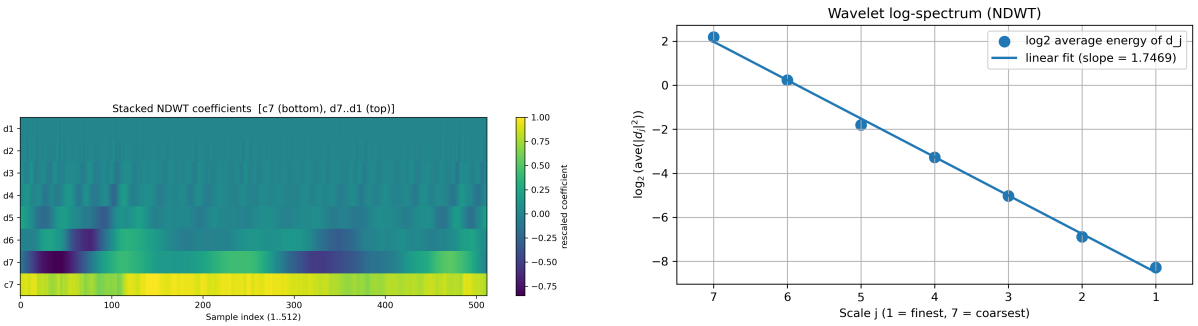
$$[a_7,\ d_7,\ d_6,\ \ldots,\ d_1],$$

其中，d_1 表示最精细的细节层，d_7 表示最粗糙的细节层。右侧面板显示相应的 NDWT 对数谱，它由平均尺度能量构成

$$E_j \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |d_j[n]|^2, \qquad j = 1, \ldots, 7. \tag{11}$$

对 $\log_2 E_j$ 与 j 进行线性拟合，可得一个斜率；对于自相似模型，该斜率通过关系式 $\log_2 E_j \approx (2H + 1)\, j + \text{const.}$ 来解释。文献中通常将此斜率报告为负值，但由于我们对 j进行了索引，斜率为正。

在量子情境下，第4节表明，约化密度算符 ρ_D =Tr$_A(\rho)$ 已经对经 epsilon 抽取的移位索引进行平均。对 ρ_D 上的层级投影算符取期望值，可以得到层级能量的量子估计；而哈达玛测试可用于计算所需的重叠量，无需显式构造所有



F图 10：NDWT 能量在尺度与时间上的定位（db2， $L = 7$， $N = 512$）。

平移变换。因此，在 j 上重复查询即可直接在能量域中得到量子非抽取离散小波变换谱，即 $\log_2 E_j$ 与 j的关系。对于由赫斯特指数 H标记的分数布朗运动，经典非抽取离散小波变换谱产生接近 $(2H + 1)$ 的斜率。由于量子估计天然地对移位进行平均，因此预期会呈现相同的尺度行为，并且由于相干平均，方差可能有所降低。此示例可在笔记本 `QNDWT005.ipynb`.中找到

上述两种应用模式均可提供平移不变的多尺度信息，但侧重的输出各不相同。ε抽取表述可实现系数访问，适用于在测量前进行相干去噪和衰减；通过对移位寄存器中的各项进行统一处理，确保平移不变性。Hadamard 表述则可通过期望值直接访问能量标度图和谱，无需恢复全部系数。总之，这些应用展示了量子非抽取离散小波变换如何在统一框架内同时支持逐系数处理和逐能量多尺度汇总。

8 结论

本文提出了非抽取小波变换的两种互补量子表述，并阐明了如何将经典的平移不变多尺度思想相干地嵌入量子计算中。这两种构造均以经典非抽取小波变换的 ε 抽取解释为基础（第 2 节），该解释将冗余变换表示为一组结构化的正交小波分析，并以循环移位作为索引。

第3节和第4节介绍的第一种表述，将移位索引 ε 提升为量子寄存器，并通过受控循环移位后接小波分析酉算子，以相干方式实现所有移位小波变换。这种 ε抽取量子非抽取小波变换给出了明确的系数域表示，并在设计上保留了冗余性和平移不变性。由于整个冗余库都编码在一个联合态中，后续处理——例如衰减、收缩、

或特征提取——都可以在测量前以相干方式进行。正如第4节和第7节所述，由辅助量子比特驱动的完全正迹保持映射为量子收缩提供了一种具有物理意义的机制，使非线性去噪效果得以实现，同时不违背幺正性。

第5节提出的第二种表述采用哈达玛测试，通过对角相位算子的期望值获取非抽取小波信息。该方法不生成带符号系数，而是直接在能量域中得到平移不变能量尺度图和多尺度谱。通过系统地探测尺度—平移对，该方法引入冗余，同时始终保持幺正性。这种表述尤其适用于近期量子设备：在这类设备上，浅层对角电路和重叠估计比深层多路复用幺正变换更为实用；而且其主要目标是进行谱分析或尺度分析，而非逐系数重建。

尽管在操作上有所不同，这两种构造针对的都是平移不变小波分析中相辅相成的方面。ε-抽取表述提供系数级访问，并支持相干后处理；哈达玛表述则可直接获取二次汇总量和不变特征。两者都利用量子并行性取代经典平移枚举，也都能自然适配注重稳健性和方差降低的测量策略。总之，它们建立了一个灵活的框架，可根据硬件约束和应用需求，在冗余、相干性与测量成本之间进行权衡。

这一框架引出了若干值得进一步探索的方向。在算法方面，冗余小波幺正算子的优化编译，以及将 epsilon–抽取态制备与 Hadamard–测试读出相结合的混合方案，都值得深入研究。从统计学角度看，量子贝叶斯收缩以及基于冗余系数统计的自适应衰减策略，为经典小波方法提供了有前景的拓展。更广泛地说，连续小波变换和过完备小波变换、多通道与多维信号，以及数据驱动或自适应小波构造，都是拓展当前理论的自然途径。

总体而言，本文的研究结果表明，非抽取小波思想不仅与量子计算兼容，而且在许多方面与量子计算天然契合。通过在相干量子架构中统一冗余、平移不变性和多分辨率结构，量子非抽取离散小波变换为新兴量子平台上的多尺度分析、去噪和推断奠定了坚实的理论基础。

致谢。作者衷心感谢美国国家科学基金会通过德克萨斯农工大学提供的第2515246号资助，以及德克萨斯农工大学 H. O. Hartley讲席的研究经费支持。作者还感谢 Nick Broon

IBM Quantum 的同仁在他访问德克萨斯农工大学期间进行了宝贵的讨论。

参考文献

Abraham, H., Akhalwaya, A., Banerjee, T., Baiardi, A., 等（2023）。*Qiskit*：一个用于量子计算的开源框架。 https://qiskit.org/。Aharonov, D., Jones, V., & Landau, Z.（2009）。一种用于近似琼斯多项式的多项式量子算法。载于 *Algorithmica*（第55卷，第395–421页）。施普林格。Bagherimehrab, M., & Aspuru-Guzik, A.（2023）。适用于所有量子小波变换的高效量子算法。*Quantum*, *7*，1103。doi: 10.22331/q-2023-10-10-1103 Fijany, A., & Williams, C. P.（1998a）。量子小波变换及其实现。载于 C. P. Williams（编），量子计算与量子通信（第1509卷，第10–33页）。柏林，海德堡：施普林格。doi: 10.1007/BFb0053328 Fijany, A., & Williams, C. P.（1998b）。量子小波变换：快速算法与完整电路。载于*SPIE*量子计算会议论文集（第3076卷，第175–183页）。doi: 10.1117/12.302230 Holschneider, M., Kronland-Martinet, R., Morlet, J., & Tchamitchian, P.（1989）。一种借助小波变换进行信号分析的实时算法。载于《小波：时频方法与相空间》（第286–297页）。施普林格。Klappenecker, A.（1999）。量子计算机上的小波与小波包。载于第三届计算智能与多媒体应用国际会议（*ICCIMA*）论文集（第169–173页）。电气电子工程师学会。doi: 10.1109/ICCIMA.1999 .795210 Li, H.-S., 等（2019）。适用于一般正交小波的量子小波变换。《量子信息处理》，*18*（2），50。doi: 10.1007/s11128-018-2042-3 Li, Z. H., Li, J., Li, F. G., & Xu, S. J.（2018）。多层多维量子小波变换。《量子信息处理》，*17*（9），240。doi: 10.1007/s11128-018-2000-y Nason, G. P., & Silverman, B. W.（1995）。平稳小波变换及其若干统计应用。载于 A. Antoniadis & G. Oppenheim（编），《小波与统计》（第103卷，第281–300页）。纽约：施普林格。doi: 10.1007/978-1-4612 -2544-7 17 Percival, D. B., & Walden, A. T.（2000）。时间序列分析的小波方法。剑桥大学出版社。Podzorova, N.（2025）。量子小波原子变换。《量子信息处理》。（即将出版）Shensa, M. J.（1992）。离散小波变换：结合 à trous 算法与 Mallat 算法。《*IEEE*信号处理汇刊》，*40*（10），2464–2482。doi:

10.1109/78.157290 Starck, J.-L., & Murtagh, F.（1994年）。使用 à trous 算法进行图像复原。《天文学与天体物理学》，*288*，342–350。Vidakovic, B.（1999年）。基于小波的统计建模。Wiley。Vidakovic, B.（2025年11月）。小波收缩的量子框架。取自 https://arxiv.org/abs/2511.19855 （arXiv 预印本）Vidakovic, B., Katul, G., & Albertson, J.（2000年）。自相似过程的多尺度去噪。《地球物理研究杂志：大气》，*105*（D22），27049–27058。doi：10.1029/2000JD900479