arXiv:2512.21498v1 [math.AT] 25 Dec 2025

局部有限无限构形空间的无球性与魏尔斯特拉斯整覆盖

Jyh-Haur Teh*

摘要

设 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 和 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 分别表示复平面上的局部有限无限有序构形空间和无序构形空间。我们证明，$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 和 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 都具有无穷维球面性。进一步，我们得到辫群正合列的一个局部有限类比：

$$1 \longrightarrow H^{lf}(\infty) \longrightarrow B^{lf}(\infty) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \longrightarrow 1,$$

其中 $H^{lf}(\infty) = \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}))$，且 $B^{lf}(\infty) = \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//\mathrm{Aut}(\mathbb{N}))$，即 $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 对 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 作用所得同伦商的基本群。在此基础上，我们对连通可数无限层覆盖空间进行分类，并给出判据，说明何时此类覆盖可由一族整函数 $F\colon X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的零点集实现。特别地，若 $\pi_1(X)$ 是自由的，且 $H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$，则 X 上的每个可数无限层覆盖空间都可实现。

1 引言

空间上的点的配置空间 M 是几何、拓扑学和分析学的经典交汇点。对于 $n \geq 1$，有序构形空间

$$Conf_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n \mid x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}$$

及其无序商空间 $C_n(M) = Conf_n(M)/S_n$尤其编码了 M 的（纯）辫群（当 M 是曲面时）。Fadell–Neuwirth 的奠基性纤维化 [8], 以及后续发展（例如 [28, 31]），使这些空间成为代数拓扑中的核心对象。关于背景知识及更多研究方向，请参阅 Kallel 的综述 [19] 及其中的参考文献；另可参见 [20]，了解辫空间及其同调的几何方法。

本文研究平面构形空间的一种“无限、局部有限”类比。记 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 中局部有限有序 构型 $\widetilde{A} = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots)$构成的空间（不重复，且在紧子集中没有聚点）。令 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 表示相应的无序 局部有限构型空间（即 $\mathbb{C}$ 的无限局部有限子集），它是商空间 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})/\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$。一个指导原则是，与标准直极限 $\varinjlim_n Conf_n(\mathbb{C})$ 不同，空间 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 和 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 刻画了真正的“无穷多个粒子逃向无穷远的构型”，并具有与模糊拓扑 相容的拓扑；该拓扑是通过将构型视为计数测度而得到的。此外，$\pi_1 Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是不可数的，而 $\pi_1(\varinjlim_n Conf_n(\mathbb{C}))$ 是可数的。

本项目源于我们尝试为无界解析簇上的解析循环构造一种 Lawson 同调和 morphic 上同调的版本 [26, 27, 10, 11, 12, 32, 33, 34] 。这促使我们思考一个基础问题；据我们所知，文献中尚未明确讨论过这个问题：具有无穷多个单零点的复整函数空间的拓扑

*国立清华大学数学系，台湾。电子邮件：jyhhaur@math.nthu.edu.tw。

是什么？我们未能找到探讨这一问题的参考文献 [3, 24, 7]。与辫群理论专家的非正式讨论表明，目前文献尚未以满足我们应用需求的形式探讨这一问题。本文的结果解决了平面情形；所需的构造颇为精细，但也为高维类比指明了一条路径。

除了其内在的几何意义外，无序局部有限构型空间

$$\Gamma(\mathbb{C}) \;=\; \Big\{\gamma \subset \mathbb{C} \;\Big|\; \#(\gamma \cap K) < \infty \text{ for every compact } K \Subset \mathbb{C}\Big\}$$

还出现在数学的其他几个领域中。将 γ 与简单计数测度$\mu_\gamma = \sum_{x\in\gamma} \delta_x$等同起来，可以赋予 $\Gamma(\mathbb{C})$ 模糊拓扑 （即 $C_c(\mathbb{C})$ 中关于测试函数的弱收敛）。“ 这是点过程理论和随机几何中的标准状态空间 [22, 4]；特别地， $\Gamma(\mathbb{C})$ 可作为泊松过程及更复杂过程的典范样本空间 [4, 22]。在随机矩阵理论中，复 Ginibre 矩阵的特征值构成平面上的一个行列式点过程 [14, 9]。在随机解析函数理论中，高斯解析函数的零点及相关系综给出了自然的随机构型；它们与行列式点过程密切相关，并提供了一种概率复分析方法，用于在 $\Gamma(\mathbb{C})$ 上构造测度 [17, 18]。

在连续统统计力学中，平面上由不可区分粒子组成的“气体”由 $\Gamma(\mathbb{C})$ 上的概率测度描述。吉布斯测度与相变的基础框架通常是在构形空间上建立的 [30, 13]。除平衡态外，人们还研究 $\Gamma(\mathbb{C})$ 上的马尔可夫动力学（Kawasaki 动力学、Glauber 型动力学、相互作用扩散过程等）。大量研究致力于构形空间上的分析与几何（狄利克雷型、分部积分公式、微分结构），正是为了构造并分析这类动力学 [1]。在与随机矩阵相关的平面／对数相互作用情形下，状态空间中无标签构型属于 $\Gamma(\mathbb{C})$ 的无限维随机微分方程，已由 Osada 等人构造并加以研究 [29]。

对于有限的 n，有序构形空间 $Conf_n(\mathbb{C})$是辫群的经典模型，并且具有丰富的上同调 [8, 2]。构形空间也自然地出现在无碰撞运动规划中：由互异点组成的构形空间刻画了可行的多智能体轨迹，而辫子则记录了缠绕／避让模式 [15]。关于构形空间的广泛介绍（包括更多应用），请参阅 Kallel 的使用指南 [23]。

无球性。我们的首个主要结果是， $C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$和 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$都是无球的；特别地，它们是 $K(\pi,\,1)$ 型 Eilenberg–Mac Lane 空间。对于 $\mathbb{C}$ ，这与经典结论相呼应：每个有限 n （纯辫群）的 $Conf_n(\mathbb{C})$都是无球的；但在局部有限的无限情形中，必须同时控制无穷多个点。关键工具是无限间隙引理：任意映射 $S^k \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$（$k \geq 2$）都同伦于一个映射，而这一同伦可由支集位于两两不交环域中的紧支撑环境同痕实现；该映射的构型避开了无穷多个指定的径向环域。这样便得到一个互不相交壳层的分解，在每个壳层上，该映射都经由圆盘／环带中的有限构形空间分解；利用这些有限构形空间是 $K(\pi,\,1)$这一事实，我们逐个壳层进行零伦，并将这些同伦串接起来。由于每个测试函数都有紧支撑，且只与有限多个壳层相交，因此模糊连续性得以保证。同样，逐壳层提升并串接同伦，借助 $\pi_1(S^k) = 0$ 提升到有序构型，可得 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$的无球性。

整函数的零点集。第二个主题是与经典复分析的关系。设 $\mathcal{O}^{\mathrm{isz}}(\mathbb{C})$ 为具有无穷多个单零点的整函数空间，$\mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ 为处处不为零的整函数乘法群。在 §2 中，我们证明

零点集映射在商空间 $\mathcal{O}^{\mathrm{isz}}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^{*}(\mathbb{C})$ 与 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 之间诱导出一个同胚。其逆映射通过魏尔斯特拉斯乘积构造。

可数覆盖与魏尔斯特拉斯实现性。本文最后一部分探讨可数无限片覆盖的分类与实现。给定一个连通、局部路径连通且半局部单连通的空间 X，X 的连通可数覆盖的同构类对应于同态 $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$的共轭类。我们引入一类嵌入可数覆盖，并将其与映入 Borel 构造$Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})//\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$的映射联系起来，从而为此类覆盖给出一个具体的“通用”参数空间。接下来，我们探讨嵌入覆盖何时能够实现为魏尔斯特拉斯整函数族 $F\colon\ X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$的零点集 $Z(F) \subset X \times \mathbb{C}$。我们的主要判据（定理 8.15）确定了一个障碍类 $c_1(E) \in H^2(X;\mathbb{Z})$，其消失等价于全局魏尔斯特拉斯实现的存在。特别地，当 $H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$时，每个闭嵌入可数覆盖都可由魏尔斯特拉斯实现。

本文结构。第 2–3 节中，我们构造零点集同胚并确立其连续性性质，从而确认 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 上的模糊拓扑是恰当的。随后，我们在 $Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 上引入一种自然度量——和度量，在该度量下，投影 $P\colon Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}) \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 变为连续映射。我们还证明 $\pi_1(Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}))$ 是不可数的，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\pi_1(Conf_n(\mathbb{C}))$ 都嵌入 $\pi_1(Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}))$。

第 4 节通过迭代同伦变形证明 $Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 和 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 的道路连通性。第 5 节中，我们确立无限间隙引理，并用它证明 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 具有无穷维球面性。第 6 节引入有序间隙和壳层分解的概念，以证明$Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 的无球性。

在第 7 节中，我们研究可数无穷层覆盖，并用同伦商映射 $P\colon Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})//\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 替代 $P\colon Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}) \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$。第 8 节介绍魏尔斯特拉斯整覆盖，并解决实现问题。附录证明，对于有限无序构型空间，通常的欧几里得拓扑与模糊拓扑一致。

致谢

作者感谢 Sadok Kallel 教授对这项工作的关注以及提供的有益通信。他关于构形空间的著述，尤其是综述 [19] 以及相关工作 [20, 21], ，为本文提供了宝贵的背景和启发。

2 零点集同胚

令 $\mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})$ 表示在 $\mathbb{C}$ 上具有无穷多个单零点的整函数集合。令 $\mathcal{O}^{*}(\mathbb{C})$ 表示无零点整函数的集合。整函数空间赋予紧子集上一致收敛的标准拓扑。

我们考虑商空间 $\mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^{*}(\mathbb{C})$，其赋有由紧集上的一致度量 d_U 诱导的商拓扑。

设 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 的可数无限局部有限子集的集合。我们将集合 $A \in C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 与正除子（拉东测度） $\mu_A = \sum_{a\in A} \delta_a$ 视为同一对象。该空间适用的拓扑是 **模糊拓扑** （测度的弱*收敛）。

对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $K_m := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le m\}$。记 $C_c(\mathbb{C}) = \{\psi\colon\ \psi\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 是连续且具有紧支撑的}。

引理 2.1. 存在一个序列 $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset C_c(\mathbb{C})$，使得对于每个 $m \in \mathbb{N}$，子族$\{\varphi_j : 支集(\varphi_j) \subset K_m\}$ 在其中稠密

$$C_c(K_m) := \{\psi \in C_c(\mathbb{C}) : \operatorname{supp}(\psi) \subset K_m\}$$

关于全局上确界范数 $\|\cdot\|_\infty$。

证明。固定 m 并记 $\partial K_m = \{z \in \mathbb{C} : |z| = m\}$。若 $\psi \in C_c(K_m)$，则在 $\mathbb{C} \setminus K_m$ 上 $\psi \equiv 0$；因此由连续性可知，必有 $\psi|_{\partial K_m} \equiv 0$。于是，限制映射 $C_c(K_m)$ 等距映入闭子空间

$$C_\partial(K_m) := \{f \in C(K_m) : f|_{\partial K_m} \equiv 0\} \subset C(K_m).$$

反过来，若 $f \in C_\partial(K_m)$，则由 $f|_{K_m} = f$ 以及在 $\mathbb{C} \setminus K_m$ 上的 $f \equiv 0$ 定义的延拓 f 在 $\mathbb{C}$ 上连续，因此 $f \in C_c(\mathbb{C})$，且 $\operatorname{supp}(f) \subset K_m$。我们有 $C_c(K_m) = C_\partial(K_m)$。

由于 $C_\partial(K_m)$ 是可分巴拿赫空间 $C(K_m)$ 的闭子空间，因此它是可分的。取一个可数稠密子集 $\{f_{m,k}\}_{k\geq 1} \subset C_\partial(K_m)$。将每个 $f_{m,\,k}$ 在 K_m 之外延拓为 0，得到 $\varphi_{m,\,k} \in C_c(\mathbb{C})$，其中 $\operatorname{supp}(\varphi_{m,\,k}) \subset K_m$。

最后，将可数集 $\{\varphi_{m,k}$ 枚举为一个序列 $(\varphi_j)_{j\geq 1}$：$m, k \in \mathbb{N}\}$。根据前述识别，每个 $C_c(K_m)$ 中的稠密性均成立。 □

定义 2.2（模糊度量 $d_{\mathcal{V}}$）。在本文中，我们固定 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为上述构造的 $C_c(\mathbb{C})$ 的可数子集；相对于上确界范数，它在 $C_c(\mathbb{C})$ 中稠密。

我们在 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上定义模糊度量 $d_{\mathcal{V}}$：

$$d_{\mathcal{V}}(A, B) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\left|\sum_{a\in A} \varphi_j(a) - \sum_{b\in B} \varphi_j(b)\right|}{1 + \left|\sum_{a\in A} \varphi_j(a) - \sum_{b\in B} \varphi_j(b)\right|}$$

命题 2.3. $d_{\mathcal{V}}$ 是 $(\mathbb{C})$ 上的度量。

证明。</style>大概唯一不显然之处是证明：若 , $B \in C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 满足 $d_{\mathcal{V}}(A, B) = 0$，则 $A = B$。假设 $d_{\mathcal{V}}(A, B) = 0$。那么对每个 j,

$$\sum_{a\in A} \varphi_j(a) = \sum_{b\in B} \varphi_j(b).$$

任取 $\psi \in C_c(\mathbb{C})$，并选取满足 $\operatorname{supp}(\psi) \subset K_m$ 的 m。根据引理 2.1，存在一个序列 $(\varphi_{j_n})_{n\geq 1}$，满足 $\operatorname{supp}(\varphi_{j_n}) \subset K_m$ 且 $\|\varphi_{j_n} - \psi\|_\infty \to 0$。由于 $A \cap K_m$ 和 $B \cap K_m$ 均为有限集，我们可以取极限：

$$\sum_{a\in A} \psi(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{a\in A} \varphi_{j_n}(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{b\in B} \varphi_{j_n}(b) = \sum_{b\in B} \psi(b).$$

因此，对于所有 $\psi \in C_c(\mathbb{C})$，都有 $\int \psi \, d\mu_A = \int \psi \, d\mu_B$，从而作为拉东测度有 $\mu_A = \mu_B$。

为证明 $A = B$，固定 $a \in A$。由于 A 是局部有限的，存在 $r_0 > 0$ 使得 $A \cap B(a,\ r_0) = \{a\}$，因此对于所有 $0 < r \leq r_0$，有 $\mu_A(B(a,\ r)) = 1$。由于 $\mu_A = \mu_B$，对于所有 $0 < r \leq r_0$，我们也有 $\mu_B(B(a,\ r)) = 1$。特别地，对于每个满足 $1/n \leq r_0$ 的 n，球 $B(a,\ 1/n)$ 包含 B 中的一个点。因此 $a \in B$。由于集合 B 是闭的，所以 $a \in B$。因此 $A \subset B$，由对称性可得 $B \subset A$。故 $A = B$。 □

定义 2.4（根映射）。根映射 $Z : \mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^*(\mathbb{C}) \to (C_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_{\mathcal{V}})$ 定义为

$$Z([f]) = f^{-1}(0)$$

定理 2.5。根映射 $Z : \mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^*(\mathbb{C}) \to (C_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_{\mathcal{V}})$ 是一个同胚。

证明。显然，Z 定义良好。我们接下来证明 Z 是一个双射，并且 Z 和 Z^{-1} 都是序列连续的。

满射性： 设 $A \in C_\infty^{lf}$（$\mathbb{C}$）。由于 A 是 $\mathbb{C}$中的离散集，魏尔斯特拉斯乘积定理保证存在一个整函数 f，其零点恰为 A，且重数为 1。由于A 是无限的，$f \in \mathcal{O}^{isz}$（$\mathbb{C}$）。因此 Z（$[f]$）$= A$。

单射性： 假设 $Z([f]) = Z([g])$。那么 f 和 g 具有相同的单零点。定义$h(z) = f(z)/g(z)$。h 的奇点都是可去奇点，所得延拓在 $\mathbb{C}$上不为零。因此 $h \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$，这意味着 $f = g \cdot h$，所以 $[f] = [g]$。

连续性 Z： 设 $\{[f_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^*(\mathbb{C})$中的一个序列，且满足 $[f_k] \to [f]$。由于$\mathcal{O}^*(\mathbb{C})$在 $\mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})$上的作用由同胚构成，商映射 $\mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}^{isz}(\mathbb{C})/\mathcal{O}^*(\mathbb{C})$是开映射。选取一个代表元 $f \in [f]$后，可以选取代表元 $f_k \in [f_k]$，使得 $f_k \to f$ 在 $\mathbb{C}$的紧子集上一致。

设 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$是度量 $d_{\mathcal{V}}$定义中的一个测试函数。令 $K = \operatorname{supp}(\varphi)$。选取一个有界开集 G，使得 $K \subset G$ 且 $\partial G \cap Z(f) = \emptyset$。

由于 $f_k \to f$ 在紧集 ∂G 上一致，且 $\min_{z\in\partial G} |f(z)| > 0$，胡尔维茨定理表明，对充分大的 k:

- f_k 在 G 中的零点个数等于 f 在 G中的零点个数。
- f_k 在 G 中的零点逐点收敛到 f 在 G中的零点。

因此，由于 φ 连续:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{a\in Z(f_k)} \varphi(a) = \sum_{a\in Z(f)} \varphi(a).$$

由于这对度量定义中的每个φ_j都成立，因此 $d_{\mathcal{V}}(Z(f_k)\ Z(f)) \to 0$。

连续性 Z^{-1}： 设 $A_k, A \in C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。假设 $d_{\mathcal{V}}(A_k, A) \to 0$。我们必须构造代表元 f_k, f，使得 $Z(f_k) = A_k$, $Z(f) = A$，并且 $f_k \to f$在 $\mathbb{C}$的紧子集上一致。

步骤1：编号： 固定 A 中元素的一个顺序。记作 $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$。对于边界与 A 不相交的任意圆盘 D_R，$A_k \cap D_R$ 中的点最终会与 $A \cap D_R$ 中的点一一对应。因此，当 k 足够大时，我们可以将 $A_k = \{a_{n,k}\}_{n=1}^\infty$ 枚举如下:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}.$$

步骤2：构造 f： 定义因子 $h_n(z)$:

$$h_n(z) = \begin{cases} z & \text{if } a_n = 0, \\ E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) & \text{if } a_n \neq 0. \end{cases}$$

其中，$E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_n}\right)^j\right)$ 是魏尔斯特拉斯初等因子。令 $f(z) = \prod_{n=1}^\infty h_n(z)$。

步骤 3：构造 f_k： 对于足够大的 k，使得 $a_{n,}$ 每当 $a_n \neq 0$ 时，定义 f_k，逐项匹配 f 的结构:

$$h_{n,k}(z) = \begin{cases} (z - a_{n,k}) & \text{if } a_n = 0, \\ E_n\left(\frac{z}{a_{n,k}}\right) & \text{if } a_n \neq 0. \end{cases}$$

令 $f_k(z) = \prod_{n=1}^\infty h_{n,\ k}(z)$。

步骤 4：一致收敛：设 $K \subset \mathbb{C}$ 是紧致的。取 $R > 0$ 使得 $K \subset \{|z| < R\}$。由于 $|a_n| \to \infty$，取 N 使得对于所有 $n > N$都有 $|a_n| > 2R$，并且不失一般性地假设 $\partial D_{2R} \cap A = \emptyset$。

数量守恒（尾部控制）：由于 $A_k \to A$ 模糊收敛，$\lim_{k\to\infty} \#(A_k \cap D_{2R}) = \#(A \cap D_{2R}) = N$。由于我们对前 N 个点进行了编号，使得 $a_{n,\,k} \to a_n$（它们位于 D_{2R} 内），这些点涵盖了圆盘内的所有零点。因此，对于所有 $n > N$，其余零点必定位于以下范围之外：

$$|a_{n,k}| > 2R \quad \text{for all } n > N \text{ and sufficiently large } k.$$

收敛分析：我们将乘积拆分为：

$$|f_k(z) - f(z)| \leq \left| \prod_{n=1}^{N} h_{n,k}(z) \prod_{n=N+1}^{\infty} h_{n,k}(z) - \prod_{n=1}^{N} h_n(z) \prod_{n=N+1}^{\infty} h_n(z) \right|$$

1. **头部（$n \leq N$）：**因子关于参数 a 连续变化。由于 $a_{n,\,k} \to a_n$，有限乘积在 K 上一致收敛。
2. **尾部（$n > N$）：**对于 $z \in K$（$|z| < R$）和 $|w| > 2R$，我们有 $|z/w| < 1/2$。我们使用标准估计 $|\log E_n(u)| \leq 2|u|^{n+1}$。对于 f_k，利用 $|a_{n,\,k}| > 2R$：

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\log h_{n,k}(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\left(\frac{R}{|a_{n,k}|}\right)^{n+1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \infty$$

且与 k 无关。由于每一项 $h_{n,\,k} \to h_n$，无穷乘积的控制收敛定理意味着尾部一致收敛到 f 的尾部。

由于首部和尾部都一致收敛，$f_k \to f$ 在 K上一致收敛。因此，Z^{-1} 是连续的。

□

下面的结果表明，在有限无序构型空间上，模糊拓扑与标准欧几里得拓扑相同。从这个角度来看，在局部有限无穷无序构型空间上使用模糊拓扑是合理的。

定义 2.6（有限原子测度）。设 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集且 $n \geq 1$。定义

$$M_n(U) := \left\{ \mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i} : z_i \in U,\ z_i \neq z_j \text{ for } i \neq j \right\},$$

视为 U上拉东测度空间的子集，并赋予模糊拓扑：$\mu_\alpha \to \mu$ 当且仅当对所有 $f \in C_c(U)$，都有 $\int f\, d\mu_\alpha \to \int f\, d\mu$。

P命题 2.7。对于任意开集 $U \subset \mathbb{C}$ 和 $n \geq 1$，存在一个自然同胚

$$\overline{F} : C_n(U) \xrightarrow{\cong} M_n(U),$$

其中 $C_n(U)$ 赋予来自 $Conf_n(U)$ 的商拓扑，而 $M_n(U)$ 赋予模糊拓扑。

由于这一结果未用于我们的主要证明，我们将其留待附录。

本文将多次用到 Fadell–Neuwirth 定理的以下标准推论。

命题 2.8。如果 $U \subset \mathbb{C}$ 是开圆盘或开环带，那么 $Conf_n(U)$ 具有无穷维球面性。特别地，对于 $m \geq 2$ 以及任意基点 $u_0 \in Conf_n(U)$，有 $\pi_m(Conf_n(U)\ u_0) = 0$。

3 映射与自同构的连续性

3.1 映射 $P:\ Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 的连续性

定义 3.1。令 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 表示所有满足以下条件的序列 $x=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 所构成的集合：

1. $x_i\neq x_j$ 对所有 $i\neq j$；
2. (局部有限性) 对每个半径 $R>0$，集合 $\{j\in\mathbb{N}:|x_j|\le R\}$ 都是有限的。

对于 $A=\{a_j\}_{j=1}^{\infty}\in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，令

$$set(A)=\{a_j\ :\ j\in\mathbb{N}\}$$

为由 A 的项构成的 $\mathbb{C}$ 的局部有限子集。存在一个自然映射 $P:Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，定义如下：

$$P(A):=set(A)$$

换言之，$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}$ 中无限局部有限有序构形所构成的空间。我们总是取 $\widetilde{\mathbb{N}}=\{j\}_{j=1}^{\infty}$ 作为 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 的基点。需要注意的是，这个空间比 $\mathbb{C}$ 的有限有序构形空间的直极限复杂得多。

注3.2. 函数

$$d_{\mathrm{prod}}(x,y)\ =\ \sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\ \min\{|x_j-y_j|,\,1\}.$$

是 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上的一个度量，它诱导出 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的乘积拓扑。但正如下面的例子所示，它在 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上的限制并非合适的度量。

例 3.3. （潜入的零点）令 $x=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots)$ 和 $x^{(k)}=(1,\ 2,\ \dots,\ k,\ \mathbf{0},\ k+2,\ \dots)$。在乘积拓扑中，$x^{(k)}\to x$。然而，商集分别为 $P(x^{(k)})=\{0,1,\dots,k,\dots\}$ 和 $P(x)=\{1,2,\dots\}$。这些集合的极限（在模糊拓扑中）在原点处有一个零点。因此，投影映射 P 不连续。

定义 3.4. 本文中，我们赋予 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 和度量

$$d_{\sum}(x,y)=d_{\mathrm{prod}}(x,y)+d_{\mathcal{V}}(P(x),P(y)).$$

$d_{\sum}$ 中的收敛意味着：在乘积度量下逐坐标收敛，同时底层无标号构形模糊收敛。在和度量下，以下结果显然成立。

命题 3.5. 投影映射 $P:(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_{\sum})\to(C_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_{\mathcal{V}})$ 是连续的。

3.2 自同构的连续性

定义 3.6. 设

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{N})=\{\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\mid\phi\text{ is bijective}\}.$$

对于 $\phi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，定义 $\phi_*:Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 为

$$\phi_*((a_j)_{j\ge1})=(a_{\phi(j)})_{j\ge1}.$$

引理 3.7。 固定 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 和 $\varepsilon_1 > 0$。选取 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{j>N} 2^{-j} < \frac{1}{2}\varepsilon_1$。令$S = \{\phi(1), \ldots, \phi(N)\}$，并令 $M =$ 最大值 S。设 $\delta_0 =$ 最小值 $(\frac{1}{2}\varepsilon_1, 1)$。若 $A = (a_j)_{j\geq 1}$ 和 $B = (b_j)_{j\geq 1}$ 满足 $d_{\mathrm{prod}}(A, B) < 2^{-M}\delta_0$，则

$$d_{\mathrm{prod}}(\phi_* A, \phi_* B) < \varepsilon_1.$$

证明。 对于任意 $k \leq M$，我们有

$$2^{-k} \min(|a_k - b_k|, 1) \leq d_{\mathrm{prod}}(A, B) < 2^{-M}\delta_0 \leq 2^{-k}\delta_0,$$

因此 $\min(|a_k - b_k|, 1) < \delta_0$。

现在，对于每个 $1 \leq j \leq N$，我们有 $\phi(j) \in S \subset \{1, \ldots, M\}$，所以 $\min\big(|a_{\phi(j)} - b_{\phi(j)}|, 1\big) < \delta_0$。因此

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{prod}}(\phi_* A, \phi_* B) &= \sum_{j=1}^{N} 2^{-j} \min(|a_{\phi(j)} - b_{\phi(j)}|, 1) + \sum_{j>N} 2^{-j} \min(|a_{\phi(j)} - b_{\phi(j)}|, 1) \\ &< \delta_0 \sum_{j=1}^{N} 2^{-j} + \sum_{j>N} 2^{-j} \leq \delta_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} \leq \varepsilon_1 \end{aligned}$$

□

定理 3.8。 对于每个 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，映射

$$\phi_* : (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_\sum) \longrightarrow (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_\sum)$$

是连续的。此外， ϕ_* 是一个同胚。

证明。 固定 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，并设给定 $\varepsilon > 0$。令 $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$。按照引理 3.7 中针对该$\varepsilon_1$的方式选择 N，并令 M 和 δ_0 如其中所述。定义

$$\delta := \min\big(2^{-M}\delta_0,\ \varepsilon/2\big).$$

假设 $A, B \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 满足 $d_\sum(A, B) < \delta$。那么

$$d_{\mathrm{prod}}(A, B) \leq d_\sum(A, B) < 2^{-M}\delta_0,$$

因此，引理 3.7 蕴含

$$d_{\mathrm{prod}}(\phi_* A, \phi_* B) < \varepsilon/2. \tag{1}$$

此外,

$$d_{\mathcal{V}}(P(A), P(B)) \leq d_\sum(A, B) < \varepsilon/2,$$

and

$$d_{\mathcal{V}}(P(\phi_* A), P(\phi_* B)) = d_{\mathcal{V}}(P(A), P(B)) < \varepsilon/2. \tag{2}$$

结合 (1) 和 (2) 得到

$$d_\sum(\phi_* A, \phi_* B) = d_{\mathrm{prod}}(\phi_* A, \phi_* B) + d_{\mathcal{V}}(P(\phi_* A), P(\phi_* B)) < \varepsilon.$$

因此， ϕ_* 是连续的。

最后，同样的论证也适用于 $\phi^{-1} \in$Aut(ℕ)，因此 $(\phi^{-1})_*$ 是连续的。由于 $(\phi^{-1})_* = (\phi_*)^{-1}$，可知 ϕ_* 是一个同胚。 □

3.3 将 $\pi_1(Conf_n(\mathbb{C}))$ 嵌入到 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}))$

定义 3.9。固定 $n \geq 1$。对于 $x = (z_1, \dots, z_n) \in Conf_n(\mathbb{C})$ 令

$$R(x) := 1 + \max_{1 \leq j \leq n} |z_j| \in \mathbb{R}_{>0}.$$

定义

$$i_n : Conf_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad i_n(z_1, \dots, z_n) := (z_1, \dots, z_n,\ R(x),\ R(x)+1,\ R(x)+2, \dots).$$

引理 3.10。对于每个 $n \geq 1$，映射 i_n 是良定义且连续的。此外，$i_n(1,\ 2,\ \dots\ n\ =,\ )\widetilde{\mathbb{N}}$。

证明。设 $x = (z_1, \dots, z_n) \in Conf_n(\mathbb{C})$，并令 $R = R(x)$。对于每个 $j \leq n$，我们有 $|z_j| \leq R - 1 < R$，因此对于每个整数 $m \geq 0$，$z_j \neq R + m$。由此，前面的n 个点与附加的尾部点之间不会发生碰撞。尾部点 $(R+m)_{m \geq 0}$ 互不相同，并沿实轴逃逸至 $+\infty$，因此所得序列是局部有限的。

连续性：函数 $x \mapsto R(x) = 1 + \max_j |z_j|$ 在 $Conf_n(\mathbb{C})$ 上连续（因为它是有限个连续函数的最大值）。如果 $x, x' \in Conf_n(\mathbb{C})$ 且 $R = R(x)$ $R' = R(x')$，那么对于每个尾部坐标，我们有 $|(R+m) - (R'+m)| = |R - R'|$，因此

$$d_{\sum}\big(i_n(x), i_n(x')\big) \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j - z_j'| + |R - R'|,$$

当 $x' \to x$ 趋于 0 时。最后，对于 $(1,\ 2,\ \dots\dots,\ n)$，我们有 $R = n+1$，因此尾部为 $(n+1,\ n+2,\ \dots\dots)$，从而 $i_n(1,\ 2,\ \dots\dots,\ n) = \mathbb{N}$。 □

定义 3.11。定义

$$p_n : Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \longrightarrow Conf_n(\mathbb{C}), \qquad p_n((a_j)_{j \geq 1}) := (a_1, \dots, a_n).$$

Le引理 3.12 (左逆**)**。映射 p_n 是连续的，并满足 $p_n \circ i_n =$ 恒等映射$_{Conf_n(\mathbb{C}}$ $_)}$.

证明。注意，对于 $u = (u_1,\ \dots\dots,\ u_n)$ $v = (v_1,\ \dots\dots,\ v_n) \in \mathbb{C}^n$，

$$d_n(u, v) := \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} \min(|u_j - v_j|, 1)$$

是 $\mathbb{C}^n$ 上的度量，并且它在 $\mathbb{C}^n$ 上诱导通常的乘积拓扑，因此在 $Conf_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^n$ 上也如此。p_n 的连续性可由以下计算直接得到

$$d_n(p_n(x), p_n(y)) \leq d_{\mathrm{prod}}(x, y) \leq d_{\sum}(x, y)$$

恒等映射 $p_n \circ i_n = \mathrm{id}$ 成立，因为 i_n 保持前 n 个坐标不变。 □

定理 3.13。对于每个 $n \geq 1$，诱导同态

$$(i_n)_* : \pi_1\big(Conf_n(\mathbb{C}), (1, 2, \dots, n)\big) \longrightarrow \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}})$$

是单射。等价地，$\pi_1(Conf_n(\mathbb{C}))$ 嵌入为 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}))$ 的一个子群。

证明。将 π_1 应用于 $p_n \circ i_n = \mathrm{id}$，得到

$$(p_n)_* \circ (i_n)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Conf_n(\mathbb{C}), (1,2,\dots,n))}.$$

因此，$(i_n)_*$ 有一个左逆，故为单射。 □

3.4 π_1（$Conf_\infty^{lf}$（$\mathbb{C}$）的不可数性

引理 3.14。对每个 $k \geq 1$，令 $c_k := 2k + \frac{1}{2}$，并定义环路 β_k： $[0,1] \to Conf_\infty^{lf}$（$\mathbb{C}$）如下：

$$\big(\beta_k(t)\big)_n = \begin{cases} c_k - \frac{1}{2}e^{2\pi it}, & n = 2k, \\ c_k + \frac{1}{2}e^{2\pi it}, & n = 2k+1, \\ n, & otherwise. \end{cases}$$

~于是 β_k 是一个以 $\mathbb{N}$为基点的连续环路。

证明。设

$$u(t) := c_k - \tfrac{1}{2}e^{2\pi it}, \qquad v(t) := c_k + \tfrac{1}{2}e^{2\pi it}.$$

The 仅移动坐标为 $2k$ 和 $2k+1$，并且对于所有 t 它们始终保持不同，因为

$$|v(t) - u(t)| = \left|e^{2\pi it}\right| = 1.$$

所有其他坐标均固定为整数，因此不会发生碰撞。对于每个 t 我们有 e

$$P(\beta_k(t)) = \big(\mathbb{N} \setminus \{2k, 2k+1\}\big) \cup \{u(t), v(t)\}.$$

这是局部有限的。

固定 $t_0 \in [0,1]$。对于乘积部分，

$$d_{\mathrm{pro}}{}_{\mathrm{d}}(\beta_k(t), \beta_k(t_0)) = 2^{-2k}\min\big(|u(t) - u(t_0)|, 1\big) + 2^{-(2k+1)}\min\big(|v(t) - v(t_0)|, 1\big) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0,$$

因为 u 和 v 是连续的。

对于模糊部分，对每个 $j \geq 1$ 定义

$$S_j(t) := \sum_{a \in P(\beta_k(t))} \varphi_j(a).$$

由于 φ_j 具有紧支撑，且 $P(\beta_k(t))$ 是局部有限的，因此该和是有限的。此外， $S_j(t)$ 对 t 的依赖仅通过 $u(t)$ 和 $v(t)$，因此

$$S_j(t) - S_j(t_0) = \big(\varphi_j(u(t)) - \varphi_j(u(t_0))\big) + \big(\varphi_j(v(t)) - \varphi_j(v(t_0))\big) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0.$$

Then

$$d_{\mathcal{V}}\big(P(\beta_k(t)), P(\beta_k(t_0))\big) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|S_j(t) - S_j(t_0)|}{1 + |S_j(t) - S_j(t_0)|} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0.$$

因此

$$d_{\sum}\big(\beta_k(t), \beta_k(t_0)\big) = d_{\mathrm{prod}}\big(\beta_k(t), \beta_k(t_0)\big) + d_{\mathcal{V}}\big(P(\beta_k(t)), P(\beta_k(t_0))\big) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0,$$

因此 β_k 是连续的。 □

定义3.15。对于二进制序列 $\sigma = (\sigma_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，定义 Γ_σ： $[0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 如下：

$$\big(\Gamma_\sigma(t)\big)_n = \begin{cases} c_k - \frac{1}{2}e^{2\pi it}, & n = 2k \text{ and } \sigma_k = 1, \\ c_k + \frac{1}{2}e^{2\pi it}, & n = 2k+1 \text{ and } \sigma_k = 1, \\ n, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 3.16。 对于每个 $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$，映射 Γ_σ 是 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中的连续环路，且 $\sim\Gamma_\sigma(0) = \Gamma_\sigma(1) = \mathbb{N}$。

证明。 验证过程与引理 3.14 相同。 □

引理 3.17。 对于每个 $k \geq 1$，映射

$$F_k : Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*, \qquad F_k((a_j)_{j\geq 1}) := a_{2k} - a_{2k+1}$$

是连续的，并诱导出一个同态

$$(F_k)_* : \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, -1) \cong \mathbb{Z}.$$

此外，

$$(F_k)_*\big([\Gamma_\sigma]\big) = \sigma_k \quad for\ all\ \sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

证明。 F_k 的连续性由度量 $d_{\sum}$ 下坐标投影的连续性得出。由于对于 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中的每个构型都有 $a_{2k} \neq a_{2k+1}$，因此其像包含于 $\mathbb{C}^*$。

计算如下：若 $\sigma_k = 0$，则坐标 $2k$，$2k+1$ 固定为 $2k$，$2k+1$，因此 $F_k(\Gamma_\sigma(t)) \equiv -1$，而诱导类 $(F_k)_*([\Gamma_\sigma])$ 为 $0 \in \mathbb{Z}$。

如果 $\sigma_k = 1$，那么

$$F_k(\Gamma_\sigma(t)) = (c_k - \tfrac{1}{2}e^{2\pi it}) - (c_k + \tfrac{1}{2}e^{2\pi it}) = -e^{2\pi it},$$

它绕 0 一周，因此表示 $1 \in \mathbb{Z}$（取标准定向）。所以 $(F_k)_*([\Gamma_\sigma]) = \sigma_k$。

□

定理 3.18. 基本群 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$ 是不可数的。

证明. 定义 $\Phi\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$，使得 $\Phi(\sigma) = [\Gamma_\sigma]$。如果 $\sigma \neq \sigma'$，取 k 使得 $\sigma_k \neq \sigma'_k$。由引理 2.4,

$$(F_k)_*(\Phi(\sigma)) = \sigma_k \neq \sigma'_k = (F_k)_*(\Phi(\sigma')).$$

因此 $\Phi(\sigma) \neq \Phi(\sigma')$，所以 Φ 是单射。由于 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的基数为 $2^{\aleph_0}$，群 $\pi_1(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \widetilde{\mathbb{N}})$ 是不可数的。

□

4 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$和 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$的道路连通性

4.1 支集位于开集中的单点同伦

引理 4.1（将一点移动一小段距离的鼓包同胚）。 设 $a \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$。存在一个 *Lipschitz* 函数 $\eta\colon [0,\infty) \to [0,1]$，使得 $\eta \equiv 1$ 在 $[0, r/3]$ 上成立，且 $\eta \equiv 0$ 在 $[2r/3, \infty)$ 上成立。对于任意满足 $|p-a| \leq r/6$ 的 $p \in \mathbb{C}$，定义

$$h_{a,p}(z) := z + (p-a)\,\eta(|z-a|).$$

于是 $h_{a,p}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一个同胚，满足 $h_{a,p}(a) = p$，并且在 $\mathbb{C} \setminus B(a, 2r/3)$ 上是恒等映射。此外，映射 $(a, p, z) \mapsto h_{a,p}(z)$ 在集合上连续

$$\{(a,p,z) \in \mathbb{C}^3 :\ |p-a| \leq r/6\}.$$

特别地，若 $a = a(x)$ 和 $p = p(x,t)$ 关于参数连续依赖，则 $(x, t, z) \mapsto h_{a(x),\ p(x,t)}(z)$ 是连续的。

证明。 取在 $[0, r/3]$, $[r/3, 2r/3]$, $[2r/3, \infty$ 上分段线性的 η；则 η 是利普希茨的，且 $\mathrm{Lip}(\eta) \le 3/r$。

固定 p，满足 $|p-a| \le r/6$，并设 $v := p - a$。定义 $g(z) := v\,\eta(|z-a|)$，因此 $h_{a,\,p}(z) = z + g(z)$。由于 $|g(z) - g(w)| \le |v|\mathrm{Lip}(\eta)\,|z-w|$，我们有

$$\mathrm{Lip}(g) \le |v|\,\mathrm{Lip}(\eta) \le (r/6)\cdot(3/r) = 1/2.$$

单射性和双利普希茨界。对于任意 $z, w \in \mathbb{C}$,

$$|h_{a,p}(z) - h_{a,p}(w)| = |(z-w) + (g(z)-g(w))| \ge |z-w| - |g(z)-g(w)| \ge (1 - \mathrm{Lip}(g))|z-w| \ge \tfrac{1}{2}|z-w|.$$

Th 我们 $h_{a,\,p}$ is injective and the inver 因此 (o n its image) is 2-Lipschit z。 所有 so

$$|h_{a,p}(z) - h_{a,p}(w)| \le |z-w| + |g(z)-g(w)| \le (1 + \mathrm{Lip}(g))|z-w| \le \tfrac{3}{2}|z-w|,$$

因此 $h_{a,p}$ 是全局 Lipschitz 的。

满射 性（压缩映射）。固定 $y \in \mathbb{C}$。考虑映射 $T_y \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 定义为 y

$$T_y(z) := y - g(z).$$

那么 T_y 是一个压缩映射，其常数为 $\mathrm{Lip}(T_y)$ =$\mathrm{Lip}(g) \le 1/2$。根据巴拿赫不动点定理， T_y 有唯一的不动点 $z_y \in \mathbb{C}$，即 $z_y = y - g(z_y)$，等价地，$h_{a,p}(z_y) = y$。因此$h_{a,p}$ 是满射。

因此$h_{a,p}$ 是双射、连续的，且有一个（全局）Lipschitz 逆映射，所以它是一个同胚。根据构造，$\eta \equiv 1$ 在 0 附近成立，因此 $h_{a,p}(a) = a + v = p$，且 $\eta \equiv 0$ 在 $[2r/3, \infty)$ 上成立，因此 $h_{a,p} =$ 在 $\mathbb{C} \setminus B(a,$ $2r/3)$ 上是恒等映射。$(p, z) \mapsto h_{a,p}(z)$ 的连续性可由 $v = p - a$以及 $(z \mapsto \eta(|z-a|))$ 的连续性推出。

□

引理 4.2 (在开集内支集的单点同伦)。 设 $U \subset \mathbb{C}$ 是开集，且 $\gamma : [0,1] \to U$ 连续。那么存在一个连续族的同胚 $\Psi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C} (t \in [0,1])$ 使得:

1. Ψ_0 =恒等映射；2. $\Psi_t(\gamma(0)) = \gamma(t)$ 对所有 t均成立；3. $\Psi_t =$ 在 上为恒等映射，对所有 t均成立；4. $(t, z) \mapsto \Psi_t(z)$ 在 $[0,1] \times \mathbb{C}$ 上连续。

因此，每个 Ψ_t 都固定 $\mathbb{C} \setminus U$ 中的每个点。

证明。 由于 $\gamma([0,1])$ 是紧致的，且包含于开集 U 中，因此存在 $\delta > 0$，使得 $\gamma([0,1])$ 的闭δ-邻域包含于 U 中。由 γ 的一致连续性，选取一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$，使得当 $t, s \in [t_{i-1}, t_i]$ 时， $|\gamma(t) - \gamma(s)| < \delta/6$。

设 $a_i := \gamma(t_{i-1})$ 且 $r := \delta$。对于 $t \in [t_{i-1}, t_i]$，定义

$$\Phi_i(t) := h_{a_i, \gamma(t)}$$

如 L 中所示 引理 4.1。于是 $\Phi_i(t)$ 的支集位于 $B(a_i,\ 2r/3)$ 中， $\subset U$ 并满足 $\Phi_i(t)(a_i) = \gamma(t)$.

归纳定义 Ψ_t : 令 $\Psi_{t_0} := \mathrm{id}$，并对 $t \in [t_{i-1}, t_i]$ 设

$$\Psi_t := \Phi_i(t) \circ \Psi_{t_{i-1}}.$$

由于 $\Phi_i(t_{i-1}) =$ 恒等映射，定义在端点处相匹配，并保证了 $t \mapsto \Psi_t$ 的连续性。每个 Ψ_t 在 U 之外都是恒等映射，因为每个 $\Phi_i(t)$ 也是如此。最后，对 i 应用归纳法可得 $\Psi_{t_{i-1}}(\gamma(0)) = \gamma(t_{i-1}) = a_i$，因此对于 $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$\Psi_t(\gamma(0)) = \Phi_i(t)(a_i) = \gamma(t).$$

□

4.2 带逃逸支撑的单步稳定化

引理 4.3。 设 $S \subset \mathbb{C}$ 为局部有限的，并设 $\sigma:\ [0,1] \to \mathbb{C}$ 连续且具有紧像。则 $\sigma([0,1]) \cap S$ 是有限的。此外，若 $\sigma(0)\ \sigma(1) \notin S$，则存在一条连续路径$\tilde{\sigma}:\ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus S$，满足 $\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0)$ 且 $\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1)$，其像包含于 $\sigma([0,1])$的任意小邻域中。

证明。 由于 $\sigma([0,1])$ 是紧致的，且 S 局部有限，因此 $\sigma([0,1]) \cap S$ 是有限的。令 $F = \sigma([0,1]) \cap S$。为每个 $p \in F$ 选取两两不相交的闭圆盘 $B(p, \rho_p)$，使得 $B(p, \rho_p) \cap (S \setminus \{p\}) = \emptyset$（这是可行的，因为 S 是闭的，而 F 是有限的）。在每个圆盘内修改 σ，将与 p 相交的（有限条）子弧替换为 $B(p, \rho_p)$ 中连接进入点和离开点的一条小绕行路径。由此得到所需的 $\tilde{\sigma}$。 □

引理 4.4 (清除目标的单步稳定化**)**。 设 $n \geq 1$ 并设 $y = (y_j)_{j \geq 1} \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 满足 $y_j = j$ 对于 $1 \leq j \leq n-1$。令

$$S_n := \{y_j :\ j \neq n\}.$$

定义 $m_n :=$最小值$\{|y_n|, n\}$ 并且

$$R_n := \frac{m_n}{4} - 2.$$

那么存在:

- 一个指标集 $J_n \subset \mathbb{N}$，满足 $n \in J_n$ 且 $|J_n| \leq 2$;
- 一个开集 $U_n \subset \{z :\ \ |z| > R_n\}$，满足 $U_n \cap \{y_j :\ \ j \notin J_n\} = \emptyset$;
- 一条连续路径 $G_{(n)} :\ [0,1] \to (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_{\mathrm{prod}})$;

使得，记 $g^{(n)} :\ = G^{(n)}(1)$:

(i) $G^{(n)}(0) = y$ *and* $g_j^{(n)} = j$ *for* $1 \leq j \leq n$;

(ii) 对于每个 $t \in [0,1]$ 和每个 $j \notin J_n$，都有 $G_j^{(n)}(t) = y_j$;

(iii) 对于每个 $t \in [0,1]$ 和每个 $j \in J_n$，都有 $|G_j^{(n)}(t)| \geq R_n + 1$。

此外，如果 $J_n = \{n, k\}$，那么 $k > n$ 是满足 $y_k = n$ 的唯一指标，并且可以安排该构造使得 $|g_k^{(n)}| \geq k$。

证明。 **步骤 1（端点裕度）**。 由于 $R_n + 2 = m_n/4 \leq m_n \leq |y_n|$ 和 $R_n + 2 \leq m_n \leq n$，两个点 y_n 和 n 都位于 $\{|z| \geq R_n + 2\}$ 中。

步骤2（情形 1: $n \notin S_n$**）**。然后，端点 n 未被任何其他坐标占据。令$J_n = \{n\}$。选择一条折线路径 $\sigma:\ [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 2\}$，其中 $\sigma(0) = y_n$ 且 $\sigma(1) = n$。根据引理 4.3，将 σ 修改为一条路径

$$\gamma : [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 1\} \setminus S_n$$

（从 y_n 到 n）；我们可以要求 γ 始终位于距 σ不超过 $1/2$ 的范围内，因此属于 $\{|z| \geq R_n + 1\}$。由于 $\gamma([0,1])$ 是紧致的，且与 S_n不相交，距离 $\eta := \mathrm{dist}(\gamma([0,1])\ S_n) > 0$。令$\rho := \frac{1}{2}\min\{1, \eta\}$，并定义管状邻域

$$U_n := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \gamma([0,1])) < \rho\}.$$

于是 $U_n \subset \{|z| > R_n\}$（因为 γ 位于 $\{|z| \geq R_n + 1\}$ 和 $\rho \leq 1/2$中），并且 $U_n \cap S_n = \emptyset$。将引理 4.2 应用于 U_n 和 γ，得到一个支集包含于 U_n 的 Ψ_t，且满足 $\Psi_t(y_n) = \gamma(t)$。定义$G^{(n)}(t) := (\Psi_t(y_j))_{j\geq 1}$。于是只有第 n 个坐标发生变化，并且它始终位于 $\{|z| \geq R_n + 1\}$中。

步骤 3（情形 2： $n \in S_n$）。于是存在唯一的指标 $k \neq n$，使得 $y_k = n$。由于对于$j \leq n-1$，$y_j = j$，必然有 $k > n$。令 $J_n := \{n, k\}$。我们先通过移开第 k 个坐标来清除目标 n，同时保持其他所有坐标不变。

步骤 *3a*（为阻挡点选择一个远处的新位置）。令 $\rho_{n,\,k} := \max\{R_n + 3,\, k\}$，并令$C_{\rho_{n,\,k}} := \{z : |z| = \rho_{n,\,k}\}$。由于 $P(y)$ 局部有限，$C_{\rho_{n,\,k}} \cap P(y)$ 是有限集，因此我们可以选择

$$q \in C_{\rho_{n,k}} \setminus P(y).$$

注意，$|q| = \rho_{n,\,k} \geq k$。

步骤 *3b*（将阻挡点从 n 移至 q）。令 $S_k := \{y_j : \ j \neq k\}$，这是一个局部有限（因而闭）的集合，且不包含 n。选取一条折线路径 $\sigma : [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 2\}$，从 $\sigma(0) = n$ 到$\sigma(1) = q$。根据引理 4.3，将 σ 修改为一条路径

$$\alpha : [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 1\} \setminus S_k$$

其中 $\alpha(0) = n$和 $\alpha(1) = q$。令 $\eta := \operatorname{dist}(\alpha([0,1]),\, S_k) > 0$，并设 $\rho := \frac{1}{2}\min\{1, \eta\}$。令

$$V := \{z : \operatorname{dist}(z, \alpha([0,1])) < \rho\} \subset \{|z| > R_n\}.$$

于是 $V \cap S_k = \emptyset$。应用引理 4.2，得到支集包含于 V 中的同胚 Θ_t，满足$\Theta_t(n) = \alpha(t)$，并且逐点固定 $\mathbb{C} \setminus V$。定义中间构型 $\tilde{y}$ 为 $\tilde{y}_j := \Theta_1(y_j)$。于是 $\tilde{y}_k = q$，并且对于 $j \neq k$ 有 $\tilde{y}_j = y_j$（特别是 $\tilde{y}_n = y_n$）。

步骤 *3c*（移动坐标 n 从 y_n 到 n，现在未被占据）。令 $S_n := \{\tilde{y}_j : \ j \neq n\}$。由于 $\tilde{y}_k = q \neq n$，我们有 $n \notin S_n$。选取一条折线路径 $\sigma' : [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 2\}$，从 $\sigma'(0) = y_n$到 $\sigma'(1) = n$，并根据引理 4.3，将其修改为一条路径

$$\beta : [0,1] \to \{|z| \geq R_n + 1\} \setminus \tilde{S}_n.$$

令 $\eta' := \operatorname{dist}(\beta([0,1]),\, \tilde{S}_n) > 0$并设 $\rho' := \frac{1}{2}\min\{1, \eta'\}$。令

$$W := \{z : \operatorname{dist}(z, \beta([0,1])) < \rho'\} \subset \{|z| > R_n\}.$$

于是 $W \cap S_n = \emptyset$。应用引理 4.2，得到支集包含于 W 的同胚 Ψ_t，满足$\Psi_t(y_n) = \beta(t)$，并逐点固定 $\mathbb{C} \setminus W$；特别地，Ψ_t 固定了 q。

步骤 *3d*（连接这两次移动）。定义 $G^{(n)} : \ [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 如下

$$G^{(n)}(t) := \begin{cases} \big(\Theta_{2t}(y_j)\big)_{j\geq 1}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \big(\Psi_{2t-1}(\tilde{y}_j)\big)_{j\geq 1}, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

于是 $G^{(n)}(0) = y$，且 $G^{(n)}(1)$ 满足 $g_n^{(n)} = n$。只有 $J_n = \{n, k\}$ 中的指标会移动。此外，移动坐标始终位于 $\{|z| \geq R_n + 1\}$ 中，最终的阻挡点位置 $g_k^{(n)} = q$ 满足$|q| \geq k$。

最后，在情形 1 中，令 $U_n := U_n$；在情形 2 中，令 $U_n := V \cup W$。两种情形下都有 $U_n \subset \{|z| > R_n\}$ 和 $U_n \cap \{y_j : \ j \notin J_n\} = \emptyset$。

步骤 4（连续性及属于 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$**）**。每个 $G^{(n)}(t)$ 都是由 y 经 $\mathbb{C}$ 的一个同胚（或两个同胚的复合）得到的，因此其坐标两两不同，且底层集合局部有限；由此 $G^{(n)}(t) \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。只有有限个坐标会移动（至多两个），且每个移动坐标都连续依赖于 t，所以 $G^{(n)}$ 在 d_{prod}中连续。

□

4.3 迭代稳定化与一条全局路径

引理 4.5（迭代稳定化）。固定 $x \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。存在构型 $g^{(n)} \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ $(n \geq 0)$、路径 $G^{(n)}\colon [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$，以及半径 $R_n \in \mathbb{R}$，使得：

(i) $g^{(0)} = x$;

(ii) 对于 $1 \leq j \leq n$， $g_j^{(n)} = j$（因此这些坐标此后不再变化）；

(iii) $G^{(n)}(0) = g^{(n-1)}$ 和 $G^{(n)}(1) = g^{(n)}$;

(iv) 对每个 n，存在一个集合 $J_n \subset \mathbb{N}$，满足 $|J_n| \leq 2$，使得对于所有 t 和所有 $j \notin J_n$，$G_j^{(n)}\ t() = g_j^{(n-1)}$ ；

(v) 路径 $G^{(n)}$ 由支集在 $\{|z| > R_n\}$ 中的同痕诱导，且移动坐标满足 $|G_j^{(n)}(t)| \geq R_n + 1$，其中 $j \in J_n$；此外，当 $n \to \infty$ 时， $R_n \to \infty$。

证明。对 n 进行归纳，将引理 4.4 应用于 $y = g^{(n-1)}$。由此得到 $G^{(n)}$、J_n 和 R_n，它们满足性质 (ii)–(iv)。

还需证明 $R_n \to \infty$。在引理 4.4 中， R_n 定义为 $R_n = \frac{1}{4}\min\{|g_n^{(n-1)}|, n\} - 2$。我们声称，对于每个 n,

$$|g_n^{(n-1)}| \ \geq\ \min\{|x_n|, n\}.$$

事实上，坐标 n 要么在阶段 n 之前从未移动过，此时 $g_n^{(n-1)} = x_n$；要么它先前在某个阶段 $m < n$ 中作为阻挡项移动过。在后一种情况下，引理 4.4 保证它移动后其模至少等于它的指标，因此至少为 n。因此 $\min\{|g_n^{(n-1)}|, n\} \geq \min\{|x_n|, n\}$，从而

$$R_n \ \geq\ \frac{1}{4}\min\{|x_n|, n\} - 2 \ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ \infty$$

□

定义 4.6（阶段区间和全局路径）。令

$$I_1 = \Big[0, \frac{1}{2}\Big], \qquad I_n = \big(1 - 2^{-(n-1)},\, 1 - 2^{-n}\big] \quad (n \geq 2),$$

使得 $[0,1) = \bigsqcup_{n\geq 1} I_n$。令 $\theta_n\colon I_n \to [0,1]$ 为仿射递增双射。

给定引理 4.5 中的 $(g^{(n)})$ 和 $(G^{(n)})$，定义 $H\colon [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 如下：

$$H(t) = \begin{cases} G^{(n)}(\theta_n(t)), & t \in I_n, \\ \widetilde{\mathbb{N}}, & t = 1. \end{cases}$$

引理 4.7 (H 在 d_{prod}中的连续性)。映射 $H\colon [0,1] \to (E,\ d_{\mathrm{prod}})$ 是连续的。

证明。在每个 I_n 上， $H = G^{(n)} \circ \theta_n$ 都是连续的。在连接时刻 $t_n := \sup I_n = 1 - 2^{-n}$，我们有

$$\lim_{t \nearrow t_n} H(t) = G^{(n)}(1) = g^{(n)} = G^{(n+1)}(0) = \lim_{t \searrow t_n} H(t),$$

因此 H 在 $[0,1$上连续$)$。

为保证在 1 处的连续性，固定 $\varepsilon > 0$ 并选择 M 使得 $\sum_{j>M} 2^{-j} < \varepsilon$。阶段 j 完成后，坐标 j 将永远等于 j（引理 4.5(ii)），因此存在 $T < 1$，使得对于所有 $1 \leq j \leq M$和所有 $t \in [T,1]$， $H_j(t) = j = H_j(1)$。因此对于 $t \in [T,1]$,

$$d_{\mathrm{prod}}(H(t), H(1)) = \sum_{j>M} 2^{-j} \min(|H_j(t) - j|, 1) \leq \sum_{j>M} 2^{-j} < \varepsilon.$$

□

对于 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，定义测试和

$$S_\varphi(t) := \sum_{a \in P(H(t))} \varphi(a),$$

这是一个有限和。

引理 4.8 (测试和的连续性)。 对每个固定的 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，映射 $t \mapsto S_\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

证明。 设 $K = \mathrm{supp}(\varphi)$ 紧致，并选取满足 $K \subset B(0,R)$ 的 $R > 0$。

在 $t_0 < 1$ 处的连续性。 固定 $t_0 < 1$，并选取一个包含 t_0 的紧区间 $J \subset [0,1)$。于是 J 只与有限多个阶段区间 I_n 相交，因此在 J 上只出现有限多个阶段。令 $F \subset \mathbb{N}$ 为相应移动指标集 J_n 的并集；则 F 是有限的，且只有 F 中的指标会在 J 上移动。

对于指标 $j \notin F$，点 $H_j(t)$ 在 J 上是常值的。由于 $P(H(t_0))$ 局部有限，$P(H(t_0)) \cap K$ 是有限的。因此存在一个有限指标集 $I \subset \mathbb{N}$，使得对所有 $t \in J$，

$$P(H(t)) \cap K \subset \{H_i(t) : i \in I\}.$$

（事实上，取 $I := F \cup \{j \notin F : H_j(t_0) \in K\}$，由于 $P(H(t_0)) \cap K$ 是有限的，因此它是有限的。）因此在 J 上，我们有 $S_\varphi(t) = \sum_{i \in I} \varphi(H_i(t))$，这是连续函数的有限和，所以 S_φ 在 t_0 处连续。

在 $t_0 = 1$ 处的连续性。 根据引理 4.5(v)，半径 $R_n \to \infty$，因此取 N_1 使得对所有 $n \geq N_1$ 都有 $R_n > R$。对于这样的 n，在阶段 n 中的每个移动坐标都保持在 $\{|z| \geq R_n + 1\} \subset \mathbb{C} \setminus B(0, R)$ 内，因此不可能进入 K。

令 $I_0 := \{j \in \mathbb{N} : x_j \in K\}$，由于 $P(x)$ 是局部有限的，所以它是有限的。令 $I_1 := \bigcup_{n=1}^{N_1 - 1} J_n$，这是有限的（每个 J_n 的大小为 ≤ 2）。设 $I := I_0 \cup I_1$，这是有限的，并令 $N := \max I$。

断言：对于每个 $t \in [0,1]$，$P(H(t)) \cap K \subset \{H_i(t) : i \in I\}$。事实上，若 $H_j(t) \in K$ 对某个 j 成立，那么要么 j 直到时间 t 都未移动（因此 $H_j(t) = x_j \in K$ 且 $j \in I_0$），要么 j 在某个阶段 n 移动过，且 $n < N_1$（因此 $j \in J_n \subset I_1$），因为阶段 $n \geq N_1$ 绝不会将移动坐标放入 K。换言之，一个点只有在以下情况下才可能属于 K：它一开始就在 K 中且从未移动（I_0）；或者它是有限多个“早期”阶段中被移动的有限多个指标之一，而在这些阶段，K附近仍可能发生移动（I_1）；在阶段 N_1之后，所有移动都被迫发生在远离 K的地方。

现在取 $t \geq t_N := 1 - 2^{-N}$。此时，所有阶段 1、.....、N 都已完成，因此对每个$i \leq N$，$H_i(t) = i$。特别地，对所有 $i \in I$，$H_i(t) = i$。若 $j > N$，则 $j \notin I$，因此根据上面的断言，$H_j(t) \notin K$。于是对所有 $t \in [t_N, 1]$，

$$P(H(t)) \cap K = \{1, 2, 3, \dots\} \cap K = P(\widetilde{\mathbb{N}}) \cap K,$$

因此，对所有 $t \in [t_N, 1]$，$S_\varphi(t) = S_\varphi(1)$，从而证明了在 1 处的连续性。 □

引理 4.9 （$P \circ H$在 $d_{\mathcal{V}}$中的连续性）。 映射 $P \circ H : [0,1] \to (C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_{\mathcal{V}})$ 是连续的。证明。固定 $t_0 \in [0,1]$。对每个 m，引理 4.8 给出 $t \mapsto S_{\varphi_m}(t)$ 在 t_0 处的连续性。定义

$$f_m(t) := \frac{1}{2^m} \frac{|S_{\varphi_m}(t) - S_{\varphi_m}(t_0)|}{1 + |S_{\varphi_m}(t) - S_{\varphi_m}(t_0)|}.$$

于是 f_m 在 t_0 处连续，且 $0 \leq f_m(t) \leq 2^{-m}$。根据魏尔斯特拉斯 M-判别法，$\sum_m f_m(t)$ 在 t_0 的某个邻域内一致收敛。因此

$$t \longmapsto d_{\mathcal{V}}(P(H(t)), P(H(t_0))) = \sum_{m \geq 1} f_m(t)$$

在 t_0 处连续。 □

定理 4.10。 度量空间 $(E, d_{\sum})$ 是路径连通的。

证明。 按照定义 4.6 构造 H 。由引理 4.7， H 连续映射到 (E, d_{prod})。由引理 4.9， $P \circ H$ 连续映射到 $(C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}),\ d_{\mathcal{V}})$。由于 $d_{\sum}(u, v) = d_{\mathrm{prod}}(u, v) + d_{\mathcal{V}}(P(u),\ P(v))$，可知 H 连续映射到 $(E,\ d_{\sum})$。 □

由于 $P\colon\ Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}) \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续满射，我们得到以下结果。

推论 4.11。 空间 $(C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C}),\ d_{\mathcal{V}})$ 是路径连通的。

5 $C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$的无球性

5.1 相对同伦延拓

引理 5.1。 设 K 是一个紧致拓扑空间，并设

$$F : K \longrightarrow C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$$

是连续的。那么对于每个紧集 $B \subset \mathbb{C}$，都存在一个整数 $N(B) \geq 0$，使得

$$\#\big(F(x) \cap B\big) \leq N(B) \qquad for\ all\ x \in K.$$

等价 地，族 $\{F(x) :\ x \in K\}$ 在 的每个紧子集上都是一致局部有限的 $\mathbb{C}$.

证明。 选取 $\psi \in C_c(\mathbb{C})$，使得

$$0 \leq \psi \leq 1, \qquad \psi \equiv 1 \text{ on } B.$$

定义

$$g : K \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \langle F(x), \psi \rangle = \sum_{a \in F(x)} \psi(a).$$

对于每个 x，这个和都是有限的，因为 $F(x)$ 是局部有限的，且 $\mathrm{supp}(\psi)$ 是紧的。根据模糊拓扑的定义，g 是连续的。由于 K 是紧致的， g 有界：存在 $M \in \mathbb{N}$，使得对所有 $x \in K$，都有 $g(x) \leq M$ 。

现在注意，对于每个 $x \in K$，

$$g(x) = \sum_{a \in F(x)} \psi(a) \ \geq \ \sum_{a \in F(x) \cap B} \psi(a) \ = \ \sum_{a \in F(x) \cap B} 1 \ = \ \#(F(x) \cap B),$$

因为 $\psi \equiv 1$ 在 B 上以及处处满足 $\psi \geq 0$ 。因此

$$\#(F(x) \cap B) \leq g(x) \leq M \qquad \text{for all } x \in K.$$

□

引理 5.2. 设 K 是一个紧致拓扑空间，并设 $F\colon\ K \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续的。设 t

$$\Phi : K \times [0, 1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

是连续的，并记 $\Phi_{x,\ t} := \Phi(x、\ t、\ \cdot)$。假设：

1. 对于每个 $(x, t) \in K \times [0, 1]$，映射 $\Phi_{x,\ t}\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个同胚；

2. 存在一个固定紧集 $S \subset \mathbb{C}$，使得

$$\Phi_{x,t}(z) = z \qquad \textit{for all } (x,t) \in K \times [0,1] \textit{ and all } z \in \mathbb{C} \setminus S.$$

定义

$$H : K \times [0,1] \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad H(x,t) := (\Phi_{x,t})_*\big(F(x)\big) = \{\Phi_{x,t}(a) : a \in F(x)\}.$$

那么 H 是连续的。

证明。要证明 $H\colon K \times [0,1] \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 在模糊拓扑下连续，只需证明对于每个 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，映射

$$g(x,t) := \langle H(x,t), \varphi\rangle = \sum_{a \in F(x)} \varphi\big(\Phi_{x,t}(a)\big)$$

在 $K \times [0,1]$ 上连续。

固定 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，并令 $C_0 :=\operatorname{supp}(\varphi)$，它是紧致的。

步骤 1定义

$$C_1 := \bigcup_{(x,t)\in K\times[0,1]} \Phi_{x,t}^{-1}(C_0) \subset \mathbb{C}.$$

我们断言 C_1 是紧致的。

事实上，根据支撑假设，存在一个固定的紧集 $S \subset \mathbb{C}$，使得 $\Phi_{x,\,t}(z) = z$对所有 $z \notin S$均成立。因此，如果 $z \in \Phi_{x\,t,}^{-1}(C_0)$ 且 $z \notin S$，那么 $z = \Phi_{x,\,t}(z) \in C_0$。所以 $C_1 \subset S \cup C_0$，且 $S \cup C_0$ 是紧致的。

现在考虑集合

$$E := \{(x,t,z) \in K \times [0,1] \times (S \cup C_0) \ : \ \Phi_{x,t}(z) \in C_0\}.$$

由于 $(x,\ t,\ z) \mapsto \Phi_{x,\,t}(z)$ 是连续的，E 是紧空间 $K \times [0,1] \times (S \cup C_0)$ 中的闭集，因此 E 是紧致的。令 $\pi_{\mathbb{C}}$ 为到 z 坐标的投影。则 $C_1 = \pi_{\mathbb{C}}(E)$，所以作为紧集的连续像，$C_1$ 是紧致的。

步骤2 由于 C_1 是紧致的，且 $F\colon K \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续的，同时 K 紧致，根据引理 5.1，存在一个整数 $N \geq 0$ 使得

$$\#\big(F(x) \cap C_1\big) \leq N \qquad \text{for all } x \in K.$$

此外，$\varphi(\Phi_{x,\,t}(a)) \neq 0$ 意味着 $\Phi_{x,\,t}(a) \in C_0$，即 $a \in C_1$。因此我们可以改写为

$$g(x,t) = \sum_{a \in F(x)\cap C_1} \varphi\big(\Phi_{x,t}(a)\big).$$

如果 $N = 0$，那么对于所有 x，$F(x) \cap C_1 = \varnothing$，所以 $g \equiv 0$，至此得证。以下设 $N \geq 1$。**步骤 3** 固定 $(x_0,\ t_0) \in K \times [0,1]$。对于 $z \in C_1$，定义

$$f_{x,t}(z) := \varphi\big(\Phi_{x,t}(z)\big), \qquad f_0(z) := f_{x_0,t_0}(z) = \varphi\big(\Phi_{x_0,t_0}(z)\big).$$

那么 $(x,t,z) \mapsto |f_{x,t}(z) - f_0(z)|$ 在紧致空间 $K \times [0,1] \times C_1$ 上连续。因此，该函数

$$m(x,t) := \sup_{z\in C_1} |f_{x,t}(z) - f_0(z)|$$

在 $K \times [0,1]$ 上连续。特别地， $m(x_0, t_0) = 0$，因此存在 (x_0, t_0) 的一个邻域 U，使得

$$m(x,t) < \frac{\varepsilon}{2N} \qquad \text{for all } (x,t) \in U. \tag{$*$}$$

接下来，注意到 $f_0 \in C_c(\mathbb{C})$，因为 $\Phi_{x_0,\ t_0}$ 是一个同胚，并且

$$\operatorname{supp}(f_0) \subset \Phi_{x_0,t_0}^{-1}(C_0) \subset C_1$$

是紧致的。因此，映射 $x \mapsto \langle F(x),\ f_0 \rangle$ 是连续的。于是存在一个邻域$U' \subset K$，使得 x_0

$$\big|\langle F(x), f_0\rangle - \langle F(x_0), f_0\rangle\big| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{for all } x \in U'. \tag{$**$}$$

现在令 $(x,\ t) \in (U' \times [0,1]) \cap U$。我们估计：

$$\begin{aligned}
|g(x,t) - g(x_0,t_0)| &= \left| \sum_{a \in F(x) \cap C_1} f_{x,t}(a) - \sum_{b \in F(x_0) \cap C_1} f_0(b) \right| \\
&\le \left| \sum_{a \in F(x) \cap C_1} \big(f_{x,t}(a) - f_0(a)\big) \right| + \left| \sum_{a \in F(x) \cap C_1} f_0(a) - \sum_{b \in F(x_0) \cap C_1} f_0(b) \right| \\
&\le \#(F(x) \cap C_1) \cdot m(x,t) + \big|\langle F(x), f_0\rangle - \langle F(x_0), f_0\rangle\big| \\
&\le N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

利用（ $*$）和（$**$）。因此 g 在 $(x_0,\ t_0)$ 处连续，从而在 $K \times [0,1$ 上连续].

由于这对每个 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$ 都成立，映射 H 在模糊拓扑下是连续的。 □

我们先记录一个基本的开性事实，后文将反复用到。

引理 5.3. 设 K 是一个紧致拓扑空间，且 $F\colon K \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 连续。若 $Q \subset \mathbb{C}$是紧致的，且 $F(x_0) \cap Q = \varnothing$，则存在一个开邻域 U，它是 x_0 在 K 中的开邻域，并且$F(x) \cap Q = \varnothing$ 对所有 $x \in U$均成立。

证明。取 $\psi \in C_c(\mathbb{C})$，使得 $\psi \ge 1$在 Q上，且 $\operatorname{supp}\ \psi \cap F(x_0) = \varnothing$。于是 $\langle F(x_0)\ \psi\rangle = 0$。由模糊连续性， $x \mapsto \langle F(x)\ \psi\rangle$ 连续，因此存在 x_0的一个邻域 U，使得$\langle F(x)\ \psi\rangle < 1/2$对所有 $x \in U$均成立。若 $F(x) \cap Q \neq \varnothing$，则 $\langle F(x)\ \psi\rangle \ge 1$，矛盾。 □

引理 5.4。 设 K 为一个紧致拓扑空间，并设

$$F : K \longrightarrow C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$$

为连续函数。设 $B \subset \mathbb{C}$ 为一个紧集，使得

$$F(x) \cap \partial B = \varnothing \qquad \textit{for all } x \in K.$$

则：

1. 函数

$$x \longmapsto \#\big(F(x) \cap B\big)$$

在 K 上局部常值。

2. 对于每个连通分支 $K_0 \subset K$，令

$$n := \#\big(F(x) \cap B\big) \quad (\ \textit{where}\ x \in K_0).$$

那么映射

$$r_B : K_0 \longrightarrow C_n(\operatorname{int} B), \qquad r_B(x) := F(x) \cap \operatorname{int} B$$

是良定义且连续的，其中 $C_n(\operatorname{int} B)$ 表示 B 的第 n 个无序构形空间。

证明。 **(1) #(()) 的局部常值性**。 固定 $x_0 \in K$。由于 $F(x_0)$ 局部有限，$F(x_0) \cap \partial B$是有限的；根据假设，它为空。因为 ∂B是紧致的，且 $F(x_0)$ 在 ∂B中没有聚点，所以距离

$$\delta := \operatorname{dist}(\partial B, F(x_0)) > 0.$$

Let

$$N := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, \partial B) \le \delta/3\},$$

∂B的一个紧领圈。于是 $F(x_0) \cap N = \varnothing$，因此由引理 5.3，存在 x_0 的一个邻域 U，使得

$$F(x) \cap N = \varnothing \qquad \text{for all } x \in U. \tag{$*$}$$

定义紧集

$$B^- := \{z \in B : \operatorname{dist}(z, \partial B) \ge \delta/3\} \subset \operatorname{int} B.$$

对于 $x \in U$，条件 $(*)$ 意味着 $F(x)$ 在条带 $B \setminus B^- \subset N$中没有点，因此

$$F(x) \cap B = F(x) \cap B^- \qquad (x \in U). \tag{$**$}$$

选取 $\eta \in C_c(\mathbb{C})$，使得 $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ 位于 B^-上，且 $\operatorname{supp}(\eta) \subset B^- \cup N$ （这是可能的，因为$B^- \subset \operatorname{int} B$且 N是紧致的）。于是对于 $x \in U$，利用 $(*)$ 和 $(**)$，

$$\langle F(x), \eta\rangle = \sum_{a \in F(x)} \eta(a) = \sum_{a \in F(x) \cap B^-} 1 = \#(F(x) \cap B^-) = \#(F(x) \cap B).$$

因此， $x \mapsto \#(F(x) \cap B)$ 在 U上与连续映射 $x \mapsto \langle F(x)\ \eta\rangle$一致，所以在 U上连续。但它的取值属于 $\mathbb{N}$，因此在 U上局部常值。由于 x_0是任意的，$x \mapsto \#(F(x) \cap B)$ 在 K上局部常值。

(2) 限制映射 r_B 在每个分支上的连续性。令 $K_0 \subset K$ 为一个连通分支。由 (1)，数值

$$n := \#(F(x) \cap B)$$

对 $x \in K_0$ 是常数。由于 $F(x) \cap \partial B = \varnothing$，我们有 $F(x) \cap B \subset \operatorname{int} B$，因此 $r_B(x) = F(x) \cap \operatorname{int} B$ 作为 $C_n(\operatorname{int} B)$ 的一个元素是良定义的。

固定 $x_0 \in K_0$。若 $n = 0$，则 r_B 是映射到空构形的常值映射，并且是连续的。假设 $n \ge 1$。

如上所述，选取 $\delta > 0$ 以及 x_0 的一个邻域 $U \subset K_0$ ，使得 $(*)$ 成立，从而对于所有 $x \in U$ 都有$F(x) \cap B = F(x) \cap B^-$。令

$$A_0 := F(x_0) \cap B^- = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \operatorname{int} B.$$

选取两两不相交的开圆盘 $D_1, \dots, D_n$，使其位于 $\mathbb{C}$ 中，并满足：

$$a_i \in D_i, \qquad \overline{D_i} \subset \operatorname{int} B, \qquad \overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \varnothing\ (i \ne j),$$

并且还要满足：对每个 i，$\overline{F}(x_0) \cap D_i = \{a_i\}$。令

$$C_{\mathrm{out}} := B^- \setminus \bigcup_{i=1}^{n} D_i,$$

它是紧的且满足 $F(x_0) \cap C_{\mathrm{out}} = \varnothing$。根据断言 0，缩小 U 后，我们可以假设

$$F(x) \cap C_{\mathrm{out}} = \varnothing \qquad \text{for all } x \in U. \tag{†}$$

对每个 i，选取 $\chi_i \in C_c(\mathbb{C})$，使得 $0 \le \chi_i \le 1$，$\mathrm{supp}(\chi_i) \subset D_i$，且 $\chi_i(a_i) = 1$。于是$\langle F(x_0)\ \chi_i\rangle = 1$，因此根据连续性，存在 $U_i \subset U$的一个邻域，使得对所有 $x \in U_i$，均有 $\langle F(x)\ \chi_i\rangle > 1/2$。特别地，当 $x \in U_i$ 时，$F(x) \cap D_i \neq \varnothing$（否则该和为 0）。令

$$U' := \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset U.$$

那么对所有 $x \in U'$:

对每个 i，• $F(x) \cap D_i \neq \varnothing$；
由 (†) 可知，$F(x) \cap B^-$ 中的每个点都属于 $\bigcup_i D_i$。

由于这些圆盘两两不相交，且 $\#(F(x) \cap B^-) = n$，因此对每个 $x \in U'$

$$\#(F(x) \cap D_i) = 1 \quad \text{for all } i, \qquad \text{and} \qquad F(x) \cap B^- = \bigsqcup_{i=1}^{n} \big(F(x) \cap D_i\big). \tag{‡}$$

因此，对于 $x \in U'$，我们可以定义唯一的点

$$a_i(x) \in D_i \quad \text{by} \quad F(x) \cap D_i = \{a_i(x)\}.$$

定义

$$\widetilde{r}(x) := \big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big) \in D_1 \times \cdots \times D_n.$$

断言 1. 每个映射 $a_i : U' \to D_i$ 都是连续的。

证明。设 $x_\alpha \to x$ 是 U' 中的一个网。令 $p_\alpha := a_i(x_\alpha) \in D_i$。由于 D_i 是紧致的，(p_α) 有一个收敛子网 $p_{\alpha_\beta} \to p \in \overline{D_i}$。我们证明 $p = a_i(x)$，这意味着整个网收敛，因而连续。

取 p 的一个开邻域 W，使得 $W \subset D_i$。令 $\psi \in C_c(\mathbb{C})$ 满足 $0 \le \psi \le 1, \psi \equiv 1$ 于 W 上，并且 $\overline{\mathrm{supp}(\psi)} \subset D_i$。于是当 β 足够大时，$p_{\alpha_\beta} \in W$，因此

$$\langle F(x_{\alpha_\beta}), \psi\rangle = \sum_{q \in F(x_{\alpha_\beta})} \psi(q) = \psi(p_{\alpha_\beta}) = 1$$

使用 (‡)（D_i 中恰有一个点）。由模糊连续性，$\langle F(x_{\alpha_\beta})\ \psi\rangle \to \langle F(x)\ \psi\rangle$，因此$\langle F(x)\ \psi\rangle = 1$。由于 $\mathrm{supp}(\psi) \subset D_i$且根据 (‡) 有 $F(x) \cap D_i = \{a_i(x)\}$，我们得到 $\langle F(x)\ \psi\rangle = \psi(a_i(x))$，因此 $\psi(a_i(x)) = 1$，从而 $a_i(x) \in W$。由于 W 是 p 的任意邻域，且满足$W \subset D_i$，这就推出 $p = a_i(x)$。 □

根据断言 1，$\widetilde{r} : U' \to D_1 \times \cdots \times D_n$是连续的。令

$$q : D_1 \times \cdots \times D_n \longrightarrow C_n(\operatorname{int} B), \qquad q(z_1, \dots, z_n) := \{z_1, \dots, z_n\}.$$

由于这些圆盘两两不相交， q 是到 $C_n(\operatorname{int} B)$的开子集上的一个同胚，该开子集由每个 D_i 中恰有一个点的构型组成（这是一个标准的构型空间图卡）。对于 $x \in U'$，由（‡）可得

$$r_B(x) = F(x) \cap \operatorname{int} B = F(x) \cap B^- = \{a_1(x), \dots, a_n(x)\} = q(\widetilde{r}(x)).$$

因此， $r_B|_{U'} = q \circ \widetilde{r}$ 在 x_0处连续。由于 x_0 是 K_0中的任意元素， r_B 在 K_0上连续。 □

引理 5.5 (U 内部的一致余量与一致分离。 设 K 是有限 CW 复形， P是有限离散空间，且 η: $K \times [0,1] \times P \to \mathbb{C}$ 是一个连续映射，使得对每个 (x,t)，映射 $\eta_{x,\,t}$: $P \to \mathbb{C}$ 都是单射。设 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集，并假设 $\eta(K \times [0,1] \times P) \subset U$。那么存在常数 $\delta > 0$ 和 $\sigma > 0$，使得:

1. *(*Room*) If* $c \in \eta(K \times [0,1] \times P)$ *then* $\overline{B(c,\delta)} \subset U$.
2. （分离）对于所有$(x,t) \in K \times [0,1]$ 以及所有互不相同的 $p \neq q \in P$,

$$|\eta(x,t,p) - \eta(x,t,q)| \geq \sigma.$$

证明。 设 $B := K \times [0,1] \times P$。由于 K是紧致的（有限 CW 复形），且 P是有限的，因此 B是紧致的。所以 $C := \eta(B) \subset U$ 是紧致的。

(1) 由于 U 是开集且 $C \Subset U$，距离

$$\delta := \operatorname{dist}(C, \mathbb{C} \setminus U) = \inf\{|c-y| : c \in C,\, y \in \mathbb{C} \setminus U\}$$

严格为正。因此，对所有$\overline{c \in C}$， $B(c,\ \delta) \subset U$。

(2) 对每个满足 $p \neq q$ 的有序对 $(p,\ q)$，定义

$$d_{p,q} : K \times [0,1] \to (0,\infty), \qquad d_{p,q}(x,t) := |\eta(x,t,p) - \eta(x,t,q)|.$$

每个 $d_{p,\,q}$ 都处处连续且为正（单射性）。由 $K \times [0,1]$ 的紧致性，每个 $d_{p,\,q}$ 都能取到正的最小值。由于有有限多个有序对 $(p,\ q)$，有限个最小值中的最小值

$$\sigma := \min_{p \neq q} \ \min_{(x,t) \in K \times [0,1]} d_{p,q}(x,t)$$

为正，因此所述不等式成立。 □

引理 5.6 （统一时间细分）。 在引理 *5.5* 的设定中，固定 $r > 0$。则存在一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$，使得对于每个 i、每个 $x \in K$、每个 $p \in P$ 以及每个 $t \in [t_{i-1}, t_i]$,

$$|\eta(x,t,p) - \eta(x,t_{i-1},p)| < \frac{r}{6}.$$

证明。 映射 η在紧定义域 $K \times [0,1] \times P$上一致连续，因此存在$\Delta > 0$，使得 $|t-s| < \Delta$ 推出 $|\eta(x,t,p) - \eta(x,s,p)| < r/6$ 对所有 $(x,p) \in K \times P$成立。选取网格为 $< \Delta$ 的划分。 □

引理 5.7 （时间片上的同步鼓包移动）。 设 $m \in \mathbb{N}$, K 为紧致集，且 $U \subset \mathbb{C}$为开集。固定数值 $r > 0$ 和 $\sigma > 0$，使得 $4r/3 < \sigma$。假设给定了连续映射

$$a_j : K \to U, \qquad b_j : K \times [t_-, t_+] \to U \qquad (j = 1, \dots, m)$$

使得

1. （小位移） $|b_j(x,\ t) - a_j(x)| < r/6$ 对于所有（x，t）以及所有 j;

2. （分离中心） $|a_j(x) - a_k(x)| \geq \sigma$ 对于所有 $x \in K$ 以及所有 $j \neq k$;

3. (room) $\overline{B(a_j(x), 2r/3)} \subset U$ *for all* $x \in K$ *and all* j.

那么存在一个连续映射

$$H : K \times [t_-, t_+] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad H_{x,t} := H(x, t, \cdot),$$

使得对于每个 (x, t):

1. $H_{x,t}$： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个同胚；*2.* $H_{x,t} = \mathrm{id}$ 在 $\mathbb{C} \setminus U$上；
3. $H_{x,t}(a_j(x)) = b_j(x, t)$ 对每个 j均成立；*4.* 若另外对所有 j, $b_j(x, t_-) = a_j(x)$ ，则 $H_{x,t_-} = \mathrm{id}$。

证明。 固定选取一个利普希茨隆起函数 θ: $[0, \infty) \to [0, 1]$ ，如引理 4.1 中所述，半径为 r: $\theta \equiv 1$ 在 $[0, r/3]$ 上且 $\theta \equiv 0$ 在 $[2r/3, \infty)$。

对每个 j 定义

$$H_j(x, t)(z) := z + \big(b_j(x, t) - a_j(x)\big)\, \theta\big(|z - a_j(x)|\big).$$

根据引理 4.1（取中心 $a = a_j(x)$ 和目标点 $p = b_j(x, t)$） ，每个 $H_j(x, t)$ 都是一个同胚，满足 $H_j(x, t)(a_j(x)) = b_j(x, t)$，并且在 $B(a_j(x)\ 2r/3)$ 之外是恒等映射。映射 $(x, t, z) \mapsto H_j(x, t)(z)$ 是连续的，因为 a_j, b_j 是连续的，而且根据引理 4.1，$(p, z) \mapsto h_{a,p}(z)$ 是连续的。

根据分离假设和 $4r/3 < \sigma$，对于固定的 x，球 $B(a_j(x)\ 2r/3)$ 两两不相交。因此， $H_j(x,\ t)$ 的支集互不相交，所以 $H_j(x,\ t)$ 可交换。

定义同时移动

$$H_{x,t} := H_m(x, t) \circ \cdots \circ H_1(x, t).$$

这是一个同胚（同胚的有限复合），并且它在 $\mathbb{C} \setminus U$ 上等于 id，因为每个 H_j 都如此，而且根据 (3)，每个支集都包含于 U 中。此外，对于每个 j，点 $a_j(x)$ 位于 H_j 的支集中，但对于 $k \neq j$ 不位于 H_k 的任何支集中（不相交性），因此

$$H_{x,t}(a_j(x)) = H_j(x, t)(a_j(x)) = b_j(x, t).$$

如果对于所有 j 都有 $b_j(x,\ t_-) = a_j(x)$，那么每个 $H_j(x,\ t_-) =$ 都是 id，从而 $H_{x,\ t_-} =$ 也是 id。$(x,\ t,\ z)$ 的连续性 $\mapsto H_{x,\ t}(z)$ 可由每个 H_j 的连续性及有限复合得到。 □

下面的结果受 Edwards–Kirby 的同伦延拓定理，以及他们的相对形变与支集控制理论（定理 5.1 和第 7 节中的相对讨论；见 [5]）启发。我们还受益于围绕 [25, 定理 3.9] 的讨论。

定理 5.8 （参数化 Edwards-Kirby 同伦延拓）。设 $U \subset \mathbb{C}$ 为开集， K 为有限 *CW* 复形，其子复形为 $L \subset K$。设 P 为有限离散空间。假设 η： $K \times [0, 1] \times P \to U$ 连续，并且:

1. 对每个 $(x,\ t)$ ，$\eta_{x,\ t}$： $P \to U$ 都是单射;

2. 对每个 $x \in L$、 $\eta_{x,t} = \eta_{x,0}$ 对所有 $t \in [0, 1]$。

那么存在一个连续映射

$$\Phi : K \times [0,1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \Phi_{x,t} := \Phi(x,t,\cdot),$$

使得：

1. 对每个 (x,t)，$\Phi_{x,t}$ 是 $\mathbb{C}$ 的同胚；*2.* 对所有 x，$\Phi_{x,0} = \mathrm{id}$；*3.* 对所有 (x,t)，$\Phi_{x,t} =$ 在 $\mathbb{C}\setminus U$ 上为 id；*4.* 对所有 (x,t,p)，$\Phi_{x,t}(\eta(x,0,p)) = \eta(x,t,p)$；*5.* 对所有 $x \in L$ 及所有 t，$\Phi_{x,t} = \mathrm{id}$。

此外，若对某个子区间 $I \subset [0,1]$，映射 $t \mapsto \eta(x,t,p)$ 对所有 $p \in P$ 都在 I 上为常值（关于 x 一致），则 $\Phi_{x,t}$ 也可以选为在 I 上为常值。

证明。令 $P = \{p_1, \dots, p_m\}$。

(A) 选取一致半径。应用引理 5.5，得到 $\delta > 0$ 和 $\sigma > 0$，使得：(i) 对紧集 C 中的所有 c，$B(c,\delta) \subset U$：$= \eta(K \times [0,1] \times P)$；且 (ii) 对所有 $j \neq k$ 及所有 (x,t)，$|\eta(x,t,p_j) - \eta(x,t,p_k)| \geq \sigma$。选取 $r > 0$ 使得

$$\frac{2r}{3} < \delta, \qquad \frac{4r}{3} < \sigma. \tag{$*$}$$

（B）选取一个统一时间细分。应用引理 5.6，得到一个划分 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$，使得对于每个 i、每个 $x \in K$、每个 j 和每个 $t \in [t_{i-1}, t_i]$，

$$|\eta(x,t,p_j) - \eta(x,t_{i-1},p_j)| < \frac{r}{6}. \tag{$**$}$$

（C）逐片构造环境同伦。对于每个 $i = 1, \dots, N$ 以及每个 $j = 1, \dots, m$，定义

$$a_{i,j}(x) := \eta(x, t_{i-1}, p_j), \qquad b_{i,j}(x,t) := \eta(x,t,p_j) \quad (t \in [t_{i-1}, t_i]).$$

于是，(∗∗) 给出了引理 5.7 的小位移条件。中心 $a_{i,j}(x)$ 的分离条件由一致分离 σ 得出，而空间条件 $B(a_{i,j}(x),\ 2r/3) \subset U$ 则由 (∗) 得出，因为每个 $a_{i,j}(x) \in C$ 且 $2r/3 < \delta$。

因此，引理 5.7 对每个 i 都给出一个同胚连续族

$$H_i : K \times [t_{i-1}, t_i] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x,t,z) \mapsto H_i(x,t)(z),$$

使得对于每个 $(x,\ t) \in K \times [t_{i-1}, t_i]$：

1. $H_i(x,\ t) =$ 在 $\mathbb{C}\setminus U$ 上的恒等映射；2. 对所有 j，$H_i(x,\ t)\big(\eta(x,\ t_{i-1},\ p_j)\big) = \eta(x,\ t,\ p_j)$；3. $H_i(x,\ t_{i-1}) =$ 恒等映射。

现在在 i 中归纳地定义 $\Phi_{x,\ t}$。令 $\Phi_{x,\ t_0} :=$ 为恒等映射。假设 $\Phi_{x,\ t_{i-1}}$ 已定义。对于 $t \in [t_{i-1}, t_i]$，定义

$$\Phi_{x,t} := H_i(x,t) \circ \Phi_{x,t_{i-1}}. \tag{$\dagger$}$$

那么每个 $\Phi_{x,t}$ 都是同胚，而 $\Phi_{x,t} =$ 在 $\mathbb{C}\setminus U$ 上是恒等映射，因为 (†) 中的两个因子都是同胚。

（D）连续性。我们断言，$(x,t,z)\mapsto \Phi_{x,t}(z)$ 在每个分片上连续，并且在端点处拼接。假设根据归纳法，$(x,z)\mapsto \Phi_{x,t_{i-1}}(z)$ 连续。在 $t\in[t_{i-1},t_i]$ 上，我们有

$$\Phi(x,t,z)=H_i\big(x,t,\Phi(x,t_{i-1},z)\big),$$

连续映射的复合，因此连续。在 $t=t_{i-1}$ 处，由于 $H_i(x,\ t_{i-1})=\mathrm{id}$，该公式与已定义的 $\Phi_{x,\ t_{i-1}}$ 一致，因此各部分连续地粘合起来。因此，Φ 在 $K\times[0,1]\times\mathbb{C}$ 上连续。

（E）延拓性质。固定 j，并对 i 进行归纳。当 $i=0$ 时，$\Phi_{x,\ t_0}(\eta(x,\ 0,\ p_j))=\eta(x,\ 0,\ p_j)$。假设 $\Phi_{x,\ t_{i-1}}(\eta(x,\ 0,\ p_j))=\eta(x,\ t_{i-1},\ p_j)$。那么对于 $t\in[t_{i-1},t_i]$,

$$\Phi_{x,t}(\eta(x,0,p_j))=H_i(x,t)\big(\Phi_{x,t_{i-1}}(\eta(x,0,p_j))\big)=H_i(x,t)\big(\eta(x,t_{i-1},p_j)\big)=\eta(x,t,p_j).$$

这就证明了（4）。

（F）初始时刻与支集控制。根据构造，$\Phi_{x,\ 0}=\mathrm{id}$。支集控制成立，因为每个 $H_i(x,\ t)=\mathrm{id}$ 在 $\mathbb{C}\setminus U$ 上成立，且递归过程保持这一性质。

（G）上的相对性质。若 $x\in L$，则根据假设，对所有 t 和所有 j，$\eta(x,\ t,\ p_j)=\eta(x,\ 0,\ p_j)$。特别地，在每个分片 $b_{i,\ j}(x,\ t)\equiv a_{i,\ j}(x)$，因此由引理 5.7 得 $H_i(x,\ t)\equiv\mathrm{id}$，进而由（†）可得，对所有 t，$\Phi_{x,\ t}\equiv\mathrm{id}$。

(H) 在 t 中的可选平稳性。若 $\eta(x,t,p)$ 在子区间 I 上关于 t 为常数，则细化该划分，使得 I 是若干完整分片的并。在这些分片上，$b_{i,j}(x,t)\equiv a_{i,j}(x)$，因此 $H_i(x,t)\equiv\mathrm{id}$，而由 (†) 可知 $\Phi_{x,t}$ 在 I 上为常数。

□

5.2 无限间隙引理

关于下述结果，参见 [6]。

定理 5.9 (Katětov–Tong 插入定理)。设 X 是一个正规拓扑空间。若 $a:X\to\mathbb{R}$ 上半连续，$b:X\to\mathbb{R}$ 下半连续，且对所有 x 都有 $a(x)<b(x)$，则存在连续函数：$X\to\mathbb{R}$，使得对所有 x，均有 $a(x)<c(x)<b(x)$。

引理 5.10 (两个圆附近的边界归一化)。固定半径 $0<R<2R<3R$ 以及 pu t

$$A:=\{R\le|z|\le 2R\},\qquad B:=\{R/2\le|z|\le 3R\}.$$

取 $\varepsilon>0$ 足够小，使得

$$R/2+\varepsilon<R\qquad and\qquad 2R<3R-\varepsilon.$$

设 K 为紧致度量空间，且 $F:\ K\to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 为连续的，其中 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 赋予模糊拓扑。

定义两个单侧领圈函数

$$u_{\mathrm{in}}(x):=\sup\{|z|:\ z\in F(x),\ R/2-\varepsilon\le|z|<R/2\},\quad(\sup\emptyset:=R/2-\varepsilon),$$

$$v_{\mathrm{out}}(x):=\inf\{|z|:\ z\in F(x),\ 3R<|z|\le 3R+\varepsilon\},\quad(\inf\emptyset:=3R+\varepsilon).$$

则 u_{in} 是上半连续的，并且对所有 x 都满足 $u_{\mathrm{in}}(x)<R/2$；v_{out} 是下半连续的，并且对所有 x 都满足 $3R<v_{\mathrm{out}}(x)$。

因此，根据定理 *5.9*，存在连续函数 r^{in}、$r^{\mathrm{out}}:\ K\to\mathbb{R}$，使得对所有 x,

$$u_{\mathrm{in}}(x)<r^{\mathrm{in}}(x)<R/2,\qquad 3R<r^{\mathrm{out}}(x)<v_{\mathrm{out}}(x).$$

特别地,

$$F(x)\cap\{|z|=r^{\mathrm{in}}(x)\}=\varnothing,\qquad F(x)\cap\{|z|=r^{\mathrm{out}}(x)\}=\varnothing\quad for\ all\ x.$$

此外，还存在一个径向同胚的连续族 $\Psi_{x,t}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ $(x\in K,t\in[0,1])$，使得：

1. $\Psi_{x,\ 0}$ =标识;

2. $\Psi_{x,\ t}$ = 在 $\{|z| \le R/2 - \varepsilon\} \cup A \cup \{|z| \ge 3R + \varepsilon\}$上;

3. 每个 $\Psi_{x,\ t}$ 都支集于该固定紧集内

$$S := \{R/2 - \varepsilon \le |z| \le R/2 + \varepsilon\} \ \cup \ \{3R - \varepsilon \le |z| \le 3R + \varepsilon\};$$

4. $\Psi_{x,\ 1}$满足

$$\Psi_{x,1}(\{|z| = r^{\text{in}}(x)\}) = \{|z| = R/2\}, \qquad \Psi_{x,1}(\{|z| = r^{\text{out}}(x)\}) = \{|z| = 3R\};$$

5. 因此,

$$(\Psi_{x,1})_*(F(x)) \cap \partial B = \varnothing \qquad \textit{for all } x.$$

证明。 **(A)** u_{in} **和** u_{in}（x）$< R/2$**的上半连续性**。固定 $c < R/2$。对于 $n \ge 1$ se t

$$Q^{\text{in}}_{c,n} := \{z :\ c \le |z| \le R/2 - 1/n\} \cap \{R/2 - \varepsilon \le |z| \le R/2\},$$

紧致。于是

$$\{x :\ u_{\text{in}}(x) < c\} = \bigcap_{n \ge 1} \{x :\ F(x) \cap Q^{\text{in}}_{c,n} = \varnothing\},$$

因此，根据引理 5.3，它是开集。因此， u_{in} 是上半连续的。此外， $F(x) \cap \{R/2 - \varepsilon \trianglelefteq |z| \le R/2\}$ 是有限的，且其所有半径都是 $< R/2$，所以其上确界为 $< R/2$（若为空，则等于 $R/2 - \varepsilon$）。

(B) v_{out} **和** $3R < v_{\text{out}}(x)$**的下半连续性**。取 $c > 3R$。对于 $n \ge 1$ s et

$$P^{\text{out}}_{c,n} := \{z :\ 3R + 1/n \le |z| \le c\} \cap \{3R \le |z| \le 3R + \varepsilon\},$$

紧致。于是

$$\{x :\ v_{\text{out}}(x) > c\} = \bigcap_{n \ge 1} \{x :\ F(x) \cap P^{\text{out}}_{c,n} = \varnothing\},$$

根据引理 5.3，它是开集。因此， v_{out} 是下半连续的。此外，v_{out} 定义集中的所有半径都是 $> 3R$，所以 $v_{\text{out}}(x) > 3R$。

(C) 在边界之外选取连续空半径。对 $a(x) = u_{\text{in}}(x)$和 $b(x) = R/2$ 应用定理 5.9，得到连续的 r^{in}，满足 $u_{\text{in}} < r^{\text{in}} < R/2$。对$a(x) = 3R$ 和 $b(x) = v_{\text{out}}(x)$应用定理 5.9，得到连续的 r^{out}，满足 $3R < r^{\text{out}} < v_{\text{out}}$。

那么， $\{|z| = r^{\text{in}}(x)\}$ 在 $F(x)$ 中为空：该半径上的任意点都会位于 $R/2$ 下方的领域中，并与 $r^{\text{in}}(x) > u_{\text{in}}(x)$ 矛盾。类似地， $\{|z| = r^{\text{out}}(x)\}$ 也为空：该半径上的任意点都会位于 $3R$ 上方的领域中，并与 $r^{\text{out}}(x) < v_{\text{out}}(x)$ 矛盾。

(D) 在 A **上具有固定支集且为恒等映射的径向同胚**。对每个 x，定义严格递增同胚 σ_x： $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 如下:

$$\sigma_x(r) = r \text{ for } r \le R/2 - \varepsilon, \text{ for } R \le r \le 2R, \text{ and for } r \ge 3R + \varepsilon,$$

并令 σ_x 在 $[R/2 - \varepsilon, R/2 + \varepsilon]$ 上以及在 $[3R - \varepsilon, 3R + \varepsilon]$ 上分段线性，且

$$\sigma_x(R/2 - \varepsilon) = R/2 - \varepsilon,\ \sigma_x(r^{\text{in}}(x)) = R/2,\ \sigma_x(R/2 + \varepsilon) = R/2 + \varepsilon,$$

$$\sigma_x(3R - \varepsilon) = 3R - \varepsilon,\ \sigma_x(r^{\text{out}}(x)) = 3R,\ \sigma_x(3R + \varepsilon) = 3R + \varepsilon.$$

定义 $\Psi_x(0) = 0$，并令 $\Psi_x(re^{i\theta}) = \sigma_x(r)e^{i\theta}$ 对于 $r > 0$ 成立。于是，Ψ_x 是 $\mathbb{C}$ 的一个同胚，其支集包含于固定紧集 S 中，并且在 A 上等于恒等映射。

定义该同伦

$$\sigma_{x,t}(r) = (1-t)r + t\,\sigma_x(r), \qquad \Psi_{x,t}(0) = 0,\ \Psi_{x,t}(re^{i\theta}) = \sigma_{x,t}(r)e^{i\theta}.$$

每个 $\sigma_{x,\,t}$ 都严格递增，因此每个 $\Psi_{x,\,t}$ 都是同胚，并且 $(x,\ t,\ z) \mapsto \Psi_{x,\,t}(z)$ 是连续的。

（E）边界回避。由于 σ_x 严格递增，

$$\Psi_x^{-1}(\{|z| = R/2\}) = \{|z| = r^{\mathrm{in}}(x)\}, \qquad \Psi_x^{-1}(\{|z| = 3R\}) = \{|z| = r^{\mathrm{out}}(x)\}.$$

在 $F(x)$ 中，两个原像圆都是空的，因此 $(\Psi_x)_*(F(x)) \cap \partial B = \varnothing$。 □

以下是代数拓扑中的一个标准结果。

引理 5.11。设 K 是一个单连通 *CW* 复形，且 Y 是一个 $K(\pi, 1)$。那么每个连续映射 $f\colon K \to Y$ 都是零伦的。特别地，若 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个开圆盘或开环带，对于 $n \in \mathbb{N}$，每个连续映射 $f\colon K \to Conf_n(U)$ 都是零伦的。

以下结果是我们证明主要结论所用的关键技术工具。

引理 5.12（无限间隙引理）。设 K 是一个有限 *CW* 复形，且 $\pi_1(K) = 0$；设$F\colon K \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$ 是连续映射（关于模糊拓扑）。那么存在半径 $0 < R_1 < R_2 < \cdots \to \infty$ 和连续映射 $G\colon K \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，它与 F 同伦，并且对每个 $m \geq 1$ 和每个$x \in K$，

$$G(x) \cap A_m = \varnothing \qquad where \qquad A_m := \{z \in \mathbb{C}\colon\ R_m \leq |z| \leq 2R_m\}.$$

此外，同伦 $F \simeq G$ 是一系列同伦的可数拼接，其中阶段 m 是由复合一个以 K 为参数、支撑于某个紧环域内的紧支撑环境同伦所诱导的，并且这些支集可以两两不交。

证明。**步骤 0（选择互不相交的支集）**。归纳地选择半径 R_m，使得 $R_{m+1} > 10^4 R_m$。令

$$B_m := \{R_m/2 \leq |z| \leq 3R_m\}, \quad U_m := \mathrm{int}(B_m), \quad A_m := \{R_m \leq |z| \leq 2R_m\} \subset U_m.$$

固定 $\delta_m := R_m/100$ 并

$$W_m := \{R_m/2 - \delta_m < |z| < 3R_m + \delta_m\}.$$

那么 $\overline{W_m}$ 是两两不相交的紧集。

We 归纳构造连续映射 $F^{(m)}\colon K \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，使得 $F_{(0)} := F$如此 t

$$F^{(m)}(x) \cap A_j = \varnothing \quad \text{for all } j \leq m \text{ and all } x,$$

并且 $F_{(m-1)} \simeq F^{(m)}$，通过一个支集包含于 W_m 的同伦实现。

阶段 m（清晰 A_m）。假设 $F^{(m-1)}$ 已构造。

(1) 规范化边界。取 $\varepsilon_m > 0$，使其满足 $\varepsilon_m < \delta_m$ 和 $R_m/2 + \varepsilon_m < R_m$ 以及 $2R_m < 3R_m - \varepsilon_m$。应用引理 5.10（取 $R = R_m$、$\varepsilon = \varepsilon_m$）于 $F^{(m-1)}\colon K \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$。我们得到一个连续同伦变形 $\Psi^{(m)}_{x\,t}$，其支集包含于固定的紧子集 $S_m \subset W_m$ 中，并且在 A_m 上等于恒等映射，使得

$$\widetilde{F}^{(m-1)}(x) := (\Psi^{(m)}_{x,1})_*\big(F^{(m-1)}(x)\big) \quad \text{satisfies} \quad \widetilde{F}^{(m-1)}(x) \cap \partial B_m = \varnothing \quad \text{for all } x.$$

根据引理 5.2， $x \mapsto \widetilde{F}_{(m-1)}(x)$ 是连续的，这一步产生了一个同伦 $F^{(m-1)} \simeq \widetilde{F}_{(m-1)}$，其支集包含于 $\overline{W_m}$ 中。由于 $\Psi^{(m)}_{x\,t}$，在 A_m 上是恒等映射，这一步不会改变其是否属于 A_m。

(2) 限制到 U_m 且基数为常数的情形。对 $B = B_m$ 和映射 $\widetilde{F}^{(m-1)}$应用引理 5.4。在 K的每个连通分支上，整数

$$n_m := \#\big(\widetilde{F}^{(m-1)}(x) \cap B_m\big)$$

是常数，且限制映射

$$r_m : K \to C_{n_m}(U_m), \qquad r_m(x) := \widetilde{F}^{(m-1)}(x) \cap U_m$$

是连续的。

(3) 提升并零伦到 $U_m \setminus A_m$中。设

$$V_m := \{(5/2)R_m < |z| < 3R_m\} \subset U_m \setminus A_m.$$

由于 $\pi_1(K) = 0$ 且 $Conf_{n_m}(U_m) \to C_{n_m}(U_m)$ 是一个覆盖映射， r_m 存在连续提升$\bar{r}_m$： $K \to Conf_{n_m}(U_m)$。根据 $Conf_{n_m}(U_m)$ 是一个 $K(\pi, 1)$ 这一事实以及引理 5.11， $\bar{r}_m$ 是零伦的。固定 $b_m \in Conf_{n_m}(V_m)$ 并选取一个同伦

$$h_m : K \times [0,1] \to Conf_{n_m}(U_m)$$

满足 $h_m(\cdot, 0) = \bar{r}_m$ 且 $h_m(\cdot, 1) \equiv b_m$。

(4) 通过 *EK* 延拓实现 h_m，支集包含于 U_m。令 $P_m = \{1, \ldots, n_m\}$ 并定义

$$\eta_m : K \times [0,1] \times P_m \to U_m, \qquad \eta_m(x,t,i) = (h_m(x,t))_i.$$

由带支集控制的定理 5.8（Edwards–Kirby），存在一个同胚的连续族 $\Phi^{(m)}_{x\,t}$,: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，满足:

- $\Phi_{(m)\,x,\,0} = \mathrm{id}$;
- $\Phi_{(m)\,x,t} =$ 在 $\mathbb{C} \setminus U_m$ 上为 id（因此支集包含于 $B_m \subset W_m$）；
- $(\Phi_{(m)\,x,t})_*$ 将 $\bar{r}_m(x)$ 映射到 $h_m(x,t)$。

定义

$$F^{(m)}(x) := (\Phi^{(m)}_{x,1})_*\big(\widetilde{F}^{(m-1)}(x)\big).$$

那么 $F^{(m)}(x) \cap U_m$ 是 $b_m \subset V_m \subset U_m \setminus A_m$所对应的无序构型，因此

$$F^{(m)}(x) \cap A_m = \varnothing \qquad \text{for all } x.$$

根据引理 5.2，阶段同伦在模糊拓扑下是连续的，且其支集包含于 W_m .

（*5*）较早的间隙仍为空。对于 $j < m$，我们有 $A_j \subset \{|z| \le 2R_{m-1}\}$，而 $W_m \subset \overline{\{|z| \ge R_m/2 - \delta_m\}}$ 且 $R_m/2 - \delta_m \gg 2R_{m-1}$，这是由 $R_m > 10^4 R_{m-1}$的选择所致。因此 $A_j \cap \overline{W_m} = \varnothing$。所以阶段 m 不会影响较早的间隙。由于这些 W_m 两两不相交，较后的阶段也不会影响较早的阶段。

步骤 1（通过紧集上的稳定化定义 G）。 通过规定其与每个紧集 C 的交来定义 $G(x) \subset \mathbb{C}$：任选满足对所有 $m \ge M$ 均有 $C \cap W_m = \varnothing$ 的 $M = M(C)$，并令

$$G(x) \cap C := F^{(M)}(x) \cap C.$$

这是良定义的：若 $M' \geq M$ 是另一个这样的指标，则根据稳定化，

$$F^{(M')}(x) \cap C = F^{(M)}(x) \cap C,$$

因此，右侧不依赖于 M 的选择。

Eq等价地，由于交集趋于稳定，对于任意充分大的 M，可以写作 e

$$G(x) \cap C \;=\; \bigcap_{m \geq M} \big(F^{(m)}(x) \cap C\big) \;=\; F^{(M)}(x) \cap C.$$

那么，对于所有 m， $G(x) \in C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 且 $G(x) \cap A_m = \varnothing$。

的连续性。对于 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，令 $C = \mathrm{supp}(\varphi)$，并按上述方式选取 M。那么

$$\langle G(x), \varphi \rangle = \langle F^{(M)}(x), \varphi \rangle,$$

它关于 x 连续，因此 G 在模糊拓扑下连续。

的同伦。使用 $t_m = 1 - 2^{-m}$ 拼接各阶段的同伦。通过测试函数检验模糊连续性：对于固定的 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$，紧致集 $\mathrm{supp}(\varphi)$ 只与有限多个 W_m 相交，因此只有有限多个阶段会影响 $\langle \cdot,\ \varphi \rangle$；并且在每个时间片上，求值都是连续的。因此，这种拼接定义了一个连续同伦 $F \simeq G$。 □

下面的结果显而易见。

引理 5.13（基点变换：关于 $m \geq 2$）。设 X 是路径连通的， $m \geq 2$，且 $\gamma :\ [0,1] \to X$是一条从 x_0到 x_1的路径。则存在一个自然同构 $\gamma\#:\ \pi_m(X,\ x_0) \cong \pi_m(X,\ x_1)$。

定理 5.14（C_∞^{lf}（$\mathbb{C}$）的无球性）。空间 C_∞^{lf}（$\mathbb{C}$）是无穷维球面性的。

证明。固定 $k \geq 2$ 以及一个基点映射

$$f : (S^k, *) \longrightarrow \big(C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \mathbb{N}\big).$$

步骤 0（具有几何增长的间隙引理）。应用无限间隙引理，得到一个连续映射

$$g : S^k \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$$

与 f同伦，并且半径 $0 < R_1 < R_2 < \cdots \to \infty$ 满足

$$g(x) \cap A_m = \varnothing, \qquad A_m := \{z \in \mathbb{C} :\ R_m \leq |z| \leq 2R_m\}, \quad \text{for all } x \in S^k, \ \text{for all } m \geq 1.$$

经过取一个子序列（并重新标记），我们还可以假设

$$R_m > 2R_{m-1} \qquad (m \geq 2). \tag{3}$$

（事实上，由于 $R_m \to \infty$，归纳地选取 $m_1 < m_2 < \cdots$使得 $R_{m_{\ell+1}} > 2R_{m_\ell}$；那么 g也避开环带 A_{m_ℓ}。）固定 $Q := g(*)$。

步骤 1（由空环带分隔的壳层分解）。定义开壳层 ls

$$S_1 := \{|z| < R_1\}, \qquad S_m := \{2R_{m-1} < |z| < R_m\} \quad (m \geq 2).$$

条件（3）保证对所有 $m \geq 2$ 都有 $S_m \neq \varnothing$。此外，

$$\partial\overline{S_1} \subset \{|z| = R_1\} \subset A_1, \qquad \partial\overline{S_m} \subset \{|z| = 2R_{m-1}\} \cup \{|z| = R_m\} \subset A_{m-1} \cup A_m \ (m \geq 2).$$

由于 $g(x)$避开了每个 A_m，因此我们有

$$g(x)\cap\partial\overline{S_m}=\varnothing\qquad\text{for all } x\in S^k,\ \text{ for all } m\geq 1.$$

步骤 2（限制到每个壳层，作为有限构型映射）。对于每个 m，应用限制引理（引理 5.4），取 $K=S^k$、$F=g$ 和 $B=S_m$。由于 S^k 连通，我们得到一个整数 $n_m\geq 0$，使得

$$n_m=\#\big(g(x)\cap\overline{S_m}\big)\qquad\text{for all } x\in S^k,$$

以及一个连续映射

$$g_m:S^k\to C_{n_m}(S_m),\qquad g_m(x):=g(x)\cap S_m.$$

令 $Q_m:=g_m(*)=Q\cap S_m$，使得（不交并）

$$Q=\bigsqcup_{m\geq 1}Q_m.$$

步骤 3（每个壳层映射都是零伦的）。每个 S_m 都是开圆盘（$m=1$）或开环带（$m\geq 2$）。根据假设，每个 $C_{n_m}(S_m)$ 都是无穷维球面性的。因此对于 $k\geq 2$,

$$\pi_k\big(C_{n_m}(S_m),Q_m\big)=0,$$

因此 $g_m:(S^k,\ *)\to(C_{n_m}(S_m)\ Q_m)$ 存在基于基点的零同伦

$$H_m:(S^k\times[0,1],\{*\}\times[0,1])\to(C_{n_m}(S_m),Q_m)$$

其中 $H_m(\cdot,\ 0)=g_m$，且 $H_m(\cdot,\ 1)\equiv Q_m$。

步骤 4（将壳零伦拼接成一个全局零同伦）。令 $t_m:=1-2^{-m}$ 和 $t_0:=0$。定义 $H:S^k\times[0,1]\to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 通过标准的逐壳层拼接：对于 $t\in[t_{m-1},t_m]$，设

$$H(x,t)\cap S_j=\begin{cases}Q_j, & j<m,\\ H_m\left(x,\dfrac{t-t_{m-1}}{t_m-t_{m-1}}\right), & j=m,\\ g_j(x), & j>m,\end{cases}\qquad H(x,t)\cap\Big(\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j\geq 1}S_j\Big)=\varnothing.$$

这一定义良好，因为 S_j 两两不交。

(a) $H(x,t)\in C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 对所有 (x,t)。局部有限性：每个紧集 $K_0\subset\mathbb{C}$ 只与有限多个壳层 S_j 相交（因为 $R_j\to\infty$），且每个 $H(x,t)\cap S_j$ 都是有限的，因此 $H(x,t)\cap K_0$ 是有限的。

无限性：$\mathbb{C}$ 中的任意无限局部有限子集都是无界的，因此会与无限多个壳层相交。于是 $Q=g(*)$ 与无限多个壳层相交，即对于无限多个 m，有 $Q_m\neq\varnothing$。对每个固定的 m，$n_m=\#(g(x)\cap S_m)$ 关于 x 是常数，因此 $n_m=\#Q_m$。所以对于无限多个 m，有 $n_m>0$；并且对于每个 (x,t)，对所有 j 取并所得的集合都包含来自无限多个壳层的点，因此$H(x,t)$ 是无限的。

(b) H 在模糊拓扑下是连续的。固定 $\varphi\in C_c(\mathbb{C})$，并令 $C_0:=\mathrm{supp}(\varphi)$。由于 C_0 是紧致的，存在 M，使得对所有 $j>M$都有 $C_0\cap S_j=\varnothing$。因此

$$\langle H(x,t),\varphi\rangle=\sum_{j=1}^{M}\sum_{z\in H(x,t)\cap S_j}\varphi(z),$$

一个有限和。在每个分片 $[t_{m-1}, t_m]$ 上，只有第 m 个壳层项随 t 变化；其余项要么是固定的 Q_j，要么是固定的 $g_j(x)$。由于每个 H_m 连续映射到有限配置空间 $C_{n_m}(S_m)$，泛函 $A \mapsto \sum_{a\in A} \varphi(a)$ 在 $C_{n_m}(S_m)$ 上连续，因此 $(x,t) \mapsto \langle H(x,t)\ \varphi\rangle$ 在每个分片上连续。在连接时刻 $t = t_m$，连续性成立，因为 $H_m(\cdot,1) = Q_m$与下一分片的取值相匹配。在 $t = 1$附近，所有与 C_0 相交的壳层都已冻结为 Q_j，因此该表达式趋于稳定。因此，$\langle H(\cdot,\cdot)\ \varphi\rangle$ 连续；由于模糊拓扑是由所有 $\varphi \in C_c(\mathbb{C})$ 诱导的初始拓扑，H 连续。

我们有 $H(\cdot,\ 0) = g$, $H(\cdot,\ 1) \equiv Q$，以及 $H(*,\ t) = Q$ 对所有 t 都成立（基于的条件，因为每个H_m 都是基于的）。因此，g 在基点 Q处是基于的零伦，所以

$$[g] = 0 \in \pi_k\big(C^{lf}_\infty(\mathbb{C}), Q\big).$$

步骤 5（返回基点 $\mathbb{N}$）。令 $F\colon S^k \times [0,1] \to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$ 为从 f 到 g的一个同伦，并令 $\gamma(t) := F(*,\ t)$，这是一条从 $\mathbb{N}$到 Q的路径。根据基点变换（引理 5.13），

$$\gamma_\#([f]) = [g] = 0.$$

由于 $\gamma_\#$ 是 $k \geq 2$的同构，我们得出 $[f] = 0$ 属于 $\pi_k(C^{lf}_\infty(\mathbb{C})\ \mathbb{N})$。由于 f是任意的，$\pi_k(C^{lf}_\infty(\mathbb{C})\ \mathbb{N}) = 0$ 对所有 $k \geq 2$ 都成立。 □

6 $Conf^{lf}_\infty$的无球性（$\mathbb{C}$）

6.1 参数化同伦作用与连续性

引理 6.1 (紧集内点的统一有界性)。 设 $B_n, B \in C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$ 且假设 $B_n \to B$模糊收敛。那么对于每个紧集 $K \subset \mathbb{C}$,

$$\sup_n \#(B_n \cap K) < \infty.$$

证明。 选取 $\chi \in C_c(\mathbb{C})$，使得 $\chi \geq 1$ 在 K上成立。于是对每个 n,

$$\#(B_n \cap K) \leq \sum_{b\in B_n} \chi(b),$$

而右侧由模糊收敛收敛到 $\sum_{b\in B} \chi(b) < \infty$。因此它在 n中有界。

□

设 K 是一个紧空间。一个以 K 为参数的紧支撑环境同伦 $\mathbb{C}$是一个连续映射

$$\Phi : K \times [0,1] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad (x,t,z) \mapsto \Phi_{x,t}(z),$$

使得对于每个 $(x,\ t)$，映射 $\Phi_{x,\ t}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个同胚，$\Phi_{x,\ 0} =$ 对所有 x 都是恒等映射，并且存在一个统一的紧集 $K_{\text{iso}} \subset \mathbb{C}$，满足

$$\Phi_{x,t}(z) = z \qquad \text{for all } (x,t) \in K \times [0,1] \text{ and all } z \in \mathbb{C} \setminus K_{\text{iso}}.$$

给定 $B \in C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，定义 $\Phi_{x,t}(B) := \{\Phi_{x,t}(b) :\ b \in B\}$. 给定 $A = (a_j)_{j\geq 1} \in Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$，定义$\Phi^\infty_{x,t}(A) := (\Phi_{x,t}(a_1)\ \Phi_{x,t}(a_2)\dots)$。那么

$$P(\Phi^\infty_{x,t}(A)) = \Phi_{x,t}(P(A)).$$

引理 6.2 (参数化同伦作用在 $C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 上是连续的)。设 K 为紧致集，且 Φ 是如上所述的 K–参数化紧支撑环境同伦。那么映射

$$C_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \times K \times [0,1] \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad (B,x,t) \mapsto \Phi_{x,t}(B),$$

在模糊拓扑中是连续的。

证明。固定 $\phi \in C_c(\mathbb{C})$，并设

$$\Lambda_\phi(B,x,t) := \sum_{z \in \Phi_{x,t}(B)} \phi(z) = \sum_{b \in B} \phi(\Phi_{x,t}(b)).$$

只需证明 Λ_ϕ 是连续的。

设 $(B_n, x_n, t_n) \to (B,x,t)$，其中 $B_n \to B$ 模糊收敛，且 $(x_n,t_n) \to (x,t)$。记

$$\begin{aligned}\Lambda_\phi(B_n,x_n,t_n) - \Lambda_\phi(B,x,t) &= \Big(\sum_{b\in B_n} \phi(\Phi_{x_n,t_n}(b)) - \sum_{b\in B_n} \phi(\Phi_{x,t}(b))\Big) + \Big(\sum_{b\in B_n}\psi(b) - \sum_{b\in B}\psi(b)\Big) \\ &=: (\star) + (\star\star),\end{aligned}$$

其中 $\psi := \phi \circ \Phi_{x,t} \in C_c(\mathbb{C})$ 是固定的。于是，由模糊收敛，$(\star\star) \to 0$。

对于 $(\star)$，令紧集 $K_0 := (\operatorname{supp}\phi) \cup K_{\mathrm{iso}}$。若 $b \notin K_0$，则 $b \notin K_{\mathrm{iso}}$ 推出 $\Phi_{x_n,t_n}(b) = \Phi_{x,t}(b) = b$，并且 $b \notin \operatorname{supp}\phi$，因此两个被加项均为零。故

$$|(\star)| \le \#(B_n \cap K_0) \cdot \|\phi\circ\Phi_{x_n,t_n} - \phi\circ\Phi_{x,t}\|_{L^\infty(K_0)}.$$

根据引理 6.1，$\#(B_n \cap K_0)$ 在 n 中一致有界。由于 Φ 在紧集 $K \times [0,1] \times K_0$ 上连续，我们在 K_0 上有一致收敛 $\Phi_{x_n,\,t_n} \to \Phi_{x,\,t}$，因此 $\phi\circ\Phi_{x_n,\,t_n} \to \phi\circ\Phi_{x,\,t}$ 在 K_0 上一致收敛，进而 $(\star) \to 0$。因此 $\Lambda_\phi(B_n,\ x_n,\ t_n) \to \Lambda_\phi(B,\ x,\ t)$，从而证明了连续性。

□

引理 6.3 (参数化同伦作用在 $(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ d_\sum)\ d_\sum)$). 设 K 是紧致的，且 Φ 是一个 K 参数化紧支撑环境同伦。则映射

$$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \times K \times [0,1] \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad (A,x,t) \mapsto \Phi^\infty_{x,t}(A),$$

对 $d_\sum$连续。

证明。乘积部分：对于每个坐标 j，映射 $(A,\ x,\ t) \mapsto \Phi_{x,\ t}(a_j)$ 是连续的（因为 $(x,\ t,\ z) \mapsto \Phi_{x,\ t}(z)$ 是连续的）。因此可得 d_{prod}-连续性。

模糊部分：$P(\Phi^\infty_{x,\ t}(A)) = \Phi_{x,\ t}(P(A))$ 以及 P：$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是连续的。因此复合

$$(A,x,t) \mapsto (P(A),x,t) \mapsto \Phi_{x,t}(P(A))$$

根据引理 6.2，在模糊拓扑下是连续的。因此，$d_\mathcal{V}$ 项连续变化，$d_\sum$也是如此。

□

6.2 有序空间中的无限间隙

引理 6.4 （有序间隙）。设 $m \ge 2$，且设 f：$S^m \to (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})\ \ d_\sum)$ 连续。则存在半径 $0 < R_1 < R_2 < \cdots \to \infty$ 以及映射 $\widehat{f}$：$S^m \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$，其与 f 在$Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中同伦，使得对于每个 $\ell \ge 1$ 和每个 $x \in S^m$，

$$P(\widehat{f}(x)) \cap \{z \in \mathbb{C} :\ R_\ell \le |z| \le 2R_\ell\} = \varnothing.$$

此外，同伦 $f \simeq \widehat{f}$ 可以选为定义在区间 $[t_{\ell-1}, t_\ell]$上的可数拼接，其中 $t_\ell \uparrow 1$。

证明。 对 $F := P \circ f : S^m \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 应用引理 5.12。我们得到半径 $R_\ell \to \infty$ 以及同伦 $F \simeq G$ ，它是各阶段的可数拼接。在阶段 ℓ ，我们有一个 S^m– 参数化紧支撑环境同伦 $\Phi^{(\ell)}$ ，其支集包含在一个紧环域内，并且这些支集两两不相交。

通过逐坐标作用，将阶段 ℓ 提升到 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$:

$$H^{(\ell)}(x,t) := \big(\Phi^{(\ell)}_{x,t}\big)^\infty\big(A^{(\ell)}(x)\big),$$

其中， $A^{(\ell)}(x)$ 表示阶段 ℓ开始时的构型。根据引理 6.3，每个阶段在 $d_\sum$中都是连续的。

将阶段 ℓ 重新参数化到子区间 $[t_{\ell-1}, t_\ell]$，其中 $t_\ell = 1 - 2^{-\ell}$，并将其拼接起来，得到同伦 $H\colon S^m \times [0,1) \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。现在检查 H 是否连续延拓到 $t = 1$，从而得到端点 $\widehat{f}$。

乘积部分位于 $t = 1$。 固定一个坐标 j。由于 S^m 是紧致的，且 $x \mapsto f_j(x)$ 连续，$f_j(S^m)$ 是紧致的，因此包含于某个闭球 B_{M_j}中。由于各阶段的环域支撑不断移向无穷远（且两两不相交），只有有限多个阶段的支集与B_{M_j}相交。因此， $H(x,\ t)$ 的第 j 个坐标只在有限多个阶段中发生变化，故当 ℓ充分大时，该坐标将保持不变，且这一结论对 x一致成立。因此，当 $t \to 1^-$时，d_{prod} 极限存在，并等于逐坐标稳定后的构型。

模糊部分位于 $t = 1$。 固定 $\phi \in C_c(\mathbb{C})$。于是 $\mathrm{supp}(\phi)$ 是紧致的，因此只与有限多个阶段支集相交（同样是因为环域支撑两两不交且趋于无穷远）。因此，当 t 充分接近 1 时，后续阶段都不会影响对$\sum \phi$有贡献的任何点，所以 $t \mapsto \sum_{z \in P(H(x,\ t))} \phi(z)$ 最终保持不变。这说明它在模糊拓扑下于 $t = 1$ 处连续。

因此， H延拓为定义在 $[0,1]$ 上的连续同伦，其终点为 f。最后，$\sim P(f) = G$ 且 $G(x)$ 避开每个环域 $\{R_\ell \le |z| \le 2R_\ell\}$，从而证明该引理。 □

6.3 壳层分解与常指标集

固定 $m \ge 2$ 以及连续映射 $f\colon S^m \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。由引理 6.4，经过同伦后，我们可以假设存在半径 $0 < R_1 < R_2 < \cdots \to \infty$，使得

$$P(f(x)) \cap \{R_\ell \le |z| \le 2R_\ell\} = \varnothing \qquad (\text{ for all } x \in S^m,\ \text{ for all } \ell \ge 1).$$

定义壳层

$$S_1 := \{z : |z| < R_1\}, \qquad S_\ell := \{z : 2R_{\ell-1} < |z| < R_\ell\} \quad (\ell \ge 2).$$

引理 6.5 (指标集在 S^m) 上保持不变。 对每个 $j \in \mathbb{N}$，存在唯一的 $\ell(j) \in \mathbb{N}$，使得 $f_j(S^m) \subset S_{\ell(j)}$。等价地，

$$J_\ell := \{j \in \mathbb{N} :\ f_j(x) \in S_\ell\}$$

与 $x \in S^m$ 无关。此外，每个 J_ℓ 都是有限的，并且有无穷多个 J_ℓ 非空。

证明。 固定 j。坐标映射 $x \mapsto f_j(x)$ 是连续的（ $d_\sum$ 的乘积项）。由于$f_j(x) \in P(f(x))$，且 $P(f(x))$ 不与任何间隙环带相交， $|f_j(x)|$ 永远不会等于任何边界半径 R_ℓ 或 $2R_\ell$。因此， $f_j(x)$ 不可能从一个壳层跨到另一个壳层，所以壳层指标在 x中局部恒定。由于 S^m 连通，它是常数；记作 $\ell(j)$。

因此， $J_\ell = \{j :\ \ell(j) = \ell\}$ 与 x无关。若 J_ℓ 是无限的，那么有界集 S_ℓ将包含 $P(f(x))$中的无穷多个点，这与局部有限性矛盾。若只有有限多个 J_ℓ非空，那么 $P(f(x))$将是有界的，因而由局部有限性可知它是有限的，这与它是无限集矛盾。因此，无穷多个 J_ℓ 是非空的。 □

记 $n_\ell := |J_\ell|$，并列出 $J_\ell = \{j_{\ell,1} < \cdots < j_{\ell,n_\ell}\}$（可能是 $n_\ell = 0$）。采用 $Conf_0(U) = \{\text{点}\}$。

定义 6.6（壳映射）。定义

$$f^{(\ell)} : S^m \to Conf_{n_\ell}(S_\ell), \qquad f^{(\ell)}(x) := (f_{j_{\ell,1}}(x), \ldots, f_{j_{\ell,n_\ell}}(x)).$$

6.4 相对于基点的壳层零伦

引理 6.7（基于基点的壳收缩）。固定 $m \geq 2$ 和一个基点 $* \in S^m$。对于每个 ℓ，存在一个同伦

$$H^{(\ell)} : S^m \times [0,1] \to Conf_{n_\ell}(S_\ell)$$

使得

$$H^{(\ell)}(\cdot, 0) = f^{(\ell)}, \qquad H^{(\ell)}(*, t) = f^{(\ell)}(*) \quad \textit{for all } t, \qquad H^{(\ell)}(\cdot, 1) \equiv f^{(\ell)}(*).$$

证明。这恰好表明 $f^{(\ell)} : (S^m, *) \to (Conf_{n_\ell}(S_\ell), f^{(\ell)}(*))$ 的基于基点的同伦类是平凡的。由命题 2.8 可知这一点，因为对于 $m \geq 2$，$\pi_m(Conf_{n_\ell}(S_\ell), f^{(\ell)}(*)) = 0$。 □

6.5 拼接一个全局的基于基点的零伦

令 $t_\ell := 1 - 2^{-\ell}$，使得 $t_\ell \uparrow 1$，并令 $s_\ell : [t_{\ell-1}, t_\ell] \to [0,1]$ 为仿射重参数化。固定一个基点 $* \in S^m$。

对每个 ℓ，定义常值壳配置

$$c^{(\ell)} := f^{(\ell)}(*) \in Conf_{n_\ell}(S_\ell),$$

并选取一个基于基点的壳同伦 $H^{(\ell)}$，如引理 6.7 中所述。

如下定义 $\mathcal{H} : S^m \times [0,1) \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。对于 $t \in [t_{\ell-1}, t_\ell]$，令；对于 $1 \leq i \leq n_\ell$,

$$\mathcal{H}_{j_{\ell,i}}(x,t) := \big(H^{(\ell)}(x, s_\ell(t))\big)_i,$$

对于指标 $j = j_{r,i} \in J_r$，若 $r \neq \ell$，则定义

$$\mathcal{H}_j(x,t) := \begin{cases} (c^{(r)})_i & \text{if } r < \ell, \\ f_j(x) & \text{if } r > \ell. \end{cases}$$

由于各壳层互不相交，且每个 $H^{(\ell)}$ 都保持在 $Conf_{n_\ell}(S_\ell)$ 中，因此不会发生碰撞。局部有限性成立，因为 $\mathbb{C}$ 的任意紧子集只与有限多个壳层相交，且每个壳层只贡献有限多个点。因此，对所有 (x,t)，都有 $\mathcal{H}(x,t) \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$。

令 $c^\infty \in Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 为如下定义的构型

$$c^\infty_{j_{\ell,i}} := (c^{(\ell)})_i = f_{j_{\ell,i}}(*) \qquad (\text{ for all } \ell,\ 1 \leq i \leq n_\ell).$$

等价地，$c^\infty = f(*)$。

引理 6.8 (连续性与延拓). 映射 $\mathcal{H} : S^m \times [0,1) \to (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_\sum)$ 是连续的，并且可连续延拓至

$$\mathcal{H} : S^m \times [0,1] \to (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_\sum)$$

通过设定 $\mathcal{H}(x,1) := c^\infty$. 此外 $\mathcal{H}(*, t) = c^\infty$ 对所有 $t \in [0,1]$均成立。

证明。 在每个分片 $S^m \times [t_{\ell-1}, t_\ell]$ 上，只有有限多个坐标随 t 变化（即 J_ℓ中的坐标），因此 $\mathcal{H}$在 d_{prod} 上关于 $[0,1)$ 连续。对于 $[0,1)$ 上的模糊部分，固定 $\phi \in C_c(\mathbb{C})$，使得 $\overline{\mathrm{supp}}(\phi) \subset B_R$，并选择 L，使得 B_R仅与壳层 $S_1, \dots, S_L$相交。于是 $(x,t) \mapsto \sum_{z \in P(\mathcal{H}(x,t))} \phi(z)$ 是来自壳层 $1, \dots, L$的连续贡献之有限和，因此连续；这意味着 $d_{\mathcal{V}}$-连续性，进而得到 $d_{\sum}$-连续性。

对于 $t = 1$ 处的延拓，乘积部分成立，因为每个坐标 j 在时间 $t_{\ell(j)}$ 之后都会变为常值。对于模糊部分，同样的紧致支集论证表明，对于 $t \geq t_L$，ϕ–和在 t 中已经是常值，因此等于它在 $t = 1$ 处的值。

最后，由于每个壳层同伦都是基点的，$H^{(\ell)}(*, s) = f^{(\ell)}(*)$，拼合得到的同伦满足 $\mathcal{H}(*, t) = f(*) = c^\infty$，对所有 t 均成立。 □

6.6 无球性

定理 6.9。 空间 $(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), d_{\sum})$ 是无穷维球面性的。

证明。 固定 $m \geq 2$ 和一个基点映射 $f\colon (S^m, *) \to (Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}})$。

应用引理 6.4，得到 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 中从 f 到映射 $\widehat{f}$ 的一个同伦，该映射的无标号构形具有无穷多个间隙。令 $\gamma(t)$ 为此同伦的基点轨迹，它是从 $\mathbb{N}$ 到 $f(*)$ 的一条路径。根据引理 5.13，诱导映射

$$\gamma_{\#} : \pi_m(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\cong} \pi_m(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widehat{f}(*))$$

是一个同构。因此，只需证明 $[\widehat{f}] = 0 \text{ in } \pi_m(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widehat{f}(*))$。

对其进行壳层分解 $\widehat{f}$（为简化记号，将其重命名为 f），并按照引理 6.8 构造 $\widehat{\ }$全局基点同伦 $\mathcal{H}$。该同伦满足 $\mathcal{H}(\cdot, 0) = f$，$\mathcal{H}(*, t) = f(*)$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对所有 t 均成立，并且 $\mathcal{H}(\cdot, 1)$ 是在 $f(*)$ 处的常值映射。因此，f 是基点保持的零伦映射，并且 $[f] = 0$。

因此 $\gamma_{\#}([f]) = [\widehat{f}] = 0$，而且由于 $\gamma_{\#}$是一个同构，$[f] = 0 \text{ in } \pi_m(Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}})$。 □

7 可数无穷层覆盖

7.1 有序构型空间的同伦商

在本节中，我们令 $G := \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，将其视为离散群，并令 $X = Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 赋予和度量 $d_{\sum}$。回顾一下，对于 $\phi \in G$，ϕ 诱导出一个同胚 $\phi_* : X \to X$，其由 $\phi_*(x_j)_{j \geq 1} = (x_{\phi(j)})_{j \geq 1}$ 给出，并且映射 $P : X \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 是 G-不变的。

定义 7.1（同伦商（Borel 构造））。 固定一个可缩的自由 右 G–CW复形 EG，使得商映射 $EG \to BG := EG/G$ 是一个主 G–丛。由于 G 是离散群，我们可以取 EG 的 Milnor 模型。定义同伦商

$$X//G := EG \times_G X := (EG \times X)/G,$$

其中 G 通过以下方式在 $EG \times X$ 上右作用

$$(e, x) \cdot \sigma := (e\sigma^{-1}, \sigma \cdot x).$$

将商映射记为 $q : EG \times X \to EG \times_G X$。

$EG \times X$ 上的对角右作用是自由且适当不连续的。特别地，商映射 $q : EG \times X \to EG \times_G X$ 是一个主 G–丛。

下面的观察显而易见。

命题 7.2. 存在一个良定义的连续映射

$$\overline{P} : X//G \longrightarrow C_\infty^{lf}(\mathbb{C}), \qquad \overline{P}([e,x]) := P(x),$$

满足 $P \circ \overline{q} = P \circ \mathrm{pr}_X$。特别地，我们有一个交换图：

$$\begin{array}{ccc} EG \times X & \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ X//G & \xrightarrow{\overline{P}} & C_\infty^{lf}(\mathbb{C}) \end{array}$$

7.2 可数无限片覆盖的典范嵌入

定义 7.3。 设 Y 为一个拓扑空间，且设 $g : Y \to X//G$ 为连续映射。定义拉回主 G–丛

$$P_g := g^*(EG \times X) \longrightarrow Y.$$

利用 G 在离散集 $\mathbb{N}$上的标准作用，定义关联丛

$$\pi_W : W_g := P_g \times_G \mathbb{N} \longrightarrow Y.$$

（等价地，$((y,e,x)\cdot\sigma, n) \sim ((y,e,x)\ \sigma\cdot n)$。）我们称 π_W为与g相关联的可数覆盖。

备注 7.4。 由于 $\mathbb{N}$ 是离散的，关联丛 $\pi_W : W_g \to Y$ 是纤维为 $\mathbb{N}$的覆盖映射。

引理 7.5. 存在一个良定义的连续映射

$$\mathrm{ev}_g : W_g \to \mathbb{C}, \qquad \mathrm{ev}_g([(y,e,x),n]) := \big(x\big)_n,$$

其中 $(y,e,x) \in P_g \subset Y \times EG \times X$ 和 $(x)_n$ 表示 $x \in X$的第 n个坐标。

证明. 良定义性：在 $W_g = P_g \times_G \mathbb{N}$ 中，我们有 $[(y,e,x)\ n] = [(y,e,x)\cdot\sigma, \sigma^{-1}\cdot n]$。此外，$P_g$ 上的右作用由 $EG \times X$上的右作用诱导，因此

$$\mathrm{ev}_g([(y,e,x)\cdot\sigma, \sigma^{-1}\cdot n]) = \big((x\cdot\sigma)\big)_{\sigma^{-1}(n)} = \big((x_{\sigma(j)})_{j\geq 1}\big)_{\sigma^{-1}(n)} = \big(x\big)_n,$$

因此 ev_g 是良定义的。

连续性是 Y上的局部性质：对于任意允许平凡化 $P_g|_U \cong U \times G$的开集 $U \subset Y$，我们有 $W_g|_U \cong U \times \mathbb{N}$，且 ev_g 变为 $(y, e(y)\ x(y)\ n) \mapsto (x(y))_n$。该映射是连续的，因为 $\mathbb{N}$是离散的，且 X 上的每个坐标映射都是连续的。 □

定义 7.6（嵌入的全空间）。定义

$$\iota_g : W_g \to Y \times \mathbb{C}, \qquad \iota_g(w) := \big(\pi_W(w),\ \mathrm{ev}_g(w)\big).$$

令 $E_g := \iota_g(W_g) \subset Y \times \mathbb{C}$。

引理 7.7。 设 Y为豪斯多夫空间，且 $F :\ Y \to C_\infty^{lf}(\mathbb{C})$ 关于模糊拓扑连续。那么关联集

$$E_F := \{(y,z) \in Y \times \mathbb{C} :\ z \in F(y)\}$$

在 $Y \times \mathbb{C}$中是闭的。

证明。 设 $(y_\alpha, z_\alpha)_{\alpha\geq 1}$ 是 E_F 中收敛到 $(y,z)\in Y\times\mathbb{C}$ 的一个序列。反设 $z\notin F(y)$。

由于 $F(y)$ 在 $\mathbb{C}$ 中局部有限，它是闭且离散的，因此存在 $r>0$ 使得 $B(z,r)\cap F(y)=\varnothing$。取 $\varphi\in C_c(\mathbb{C})$，使其在 $B(z,\frac{1}{2}r)$ 上满足 $\varphi\equiv 1$，且 $\operatorname{supp}\varphi\subset B(z,r)$。于是 $\sum_{a\in F(y)}\varphi(a)=0$。

由 F 的模糊连续性，

$$\sum_{a\in F(y_\alpha)}\varphi(a)\longrightarrow\sum_{a\in F(y)}\varphi(a)=0.$$

另一方面，由于 $z_\alpha\to z$，对于所有充分大的 α，都有 $z_\alpha\in B(z,\frac{1}{2}r)$，因此 $\varphi(z_\alpha)=1$。由于 $z_\alpha\in F(y_\alpha)$，我们得到

$$\sum_{a\in F(y_\alpha)}\varphi(a)\geq 1$$

最终，这与收敛到 0 矛盾。因此 $z\in F(y)$ 且 $(y,z)\in E_F$。故 E_F 是闭的。

□

定理 7.8. 假设 Y 是豪斯多夫的。设 $g: Y\to X//G$ 连续，且 $\pi_W: W_g\to Y$ 是相应的可数无限层覆盖映射。则：

1. $\iota_g:\ W_g\to Y\times\mathbb{C}$ 是一个拓扑嵌入，而 π_W 在同胚 $W_g\cong E_g$ 下与限制 $p_1|_{E_g}: E_g\to Y$ 相对应。特别地，$p_1|_{E_g}$ 是一个与 π_W 等价的覆盖空间。

2. 设 $F:=\overline{P}\circ g:\ Y\to C^{lf}_\infty(\mathbb{C})$。那么

$$E_g=\{(y,z)\in Y\times\mathbb{C}:\ z\in F(y)\}.$$

特别地，E_g 在 $Y\times\mathbb{C}$ 中是闭的。

证明。 **(1) 局部图描述**。固定 $y_0\in Y$。由于 $P_g\to Y$ 是一个主 G–丛，存在一个开邻域 $U\ni y_0$ 以及一个覆盖 U 上的同胚 $P_g|_U\cong U\times G$。因此，

$$W_g|_U\cong(U\times G)\times_G\mathbb{N}\cong U\times\mathbb{N},$$

其中，最后一个对应将 $[(y,\ \sigma)\ n]$ 映射为 $(y,\ \sigma(n))$。

在此对应下，$\iota_g|_{W_g|_U}$ 变为

$$U\times\mathbb{N}\longrightarrow U\times\mathbb{C},\qquad(y,n)\longmapsto(y,x_n(y)),$$

其中，$y\mapsto x(y)\in X$ 是通过将 P_g 的局部截面投影到 X 因子上而得到的连续有序构型。每个切片 $U\times\{n\}$ 都同胚地映射到图上

$$\Gamma_n:=\{(y,x_n(y)):\ y\in U\}\subset U\times\mathbb{C}.$$

由于 $x(y)\in X$ 的坐标两两不同，因此这些图 Γ_n 彼此不相交。于是 ι_g 限制为一个同胚

$$W_g|_U\cong\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}(U\times\{n\})\ \xrightarrow{\cong}\ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n=E_g\cap(U\times\mathbb{C}).$$

因此 ι_g 是到其像上的局部同胚，故为拓扑嵌入。此外，$p_1: U\times\mathbb{C}\to U$ 限制为标准覆盖映射 $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n\to U$，而它在上述同胚下恰好对应于 $W_g|_U\to U$。这就证明了 (1)。

(2) 纤维的识别与闭性。设 $F = P \circ g\colon Y \to C_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})$，由命题 7.2 可知它是连续的。我们断言，对每个 $y \in Y$，

$$E_{g,y} := \{z \in \mathbb{C} : (y,z) \in E_g\} = F(y).$$

在 y 上选取 $p \in P_g$。根据 P 的定义，构型 $F(y) = P(g(y))$ 等于 $P(x(p))$，也就是说，它是 $x(p) \in X$ 的坐标底集。另一方面，$E_{g,\,y}$ 恰好是当 n 变化时，值 $\mathrm{ev}_g([p,n]) = (x(p))_n$ 所成的集合。因此，$E_{g,\,y} = F(y)$，于是

$$E_g = \{(y,z) \in Y \times \mathbb{C} :\ z \in F(y)\}.$$

由于 F 连续且 Y 是豪斯多夫的，引理 7.7 推出 E_g 是闭的。 □

备注 7.9。 定理 7.8 可以这样理解：一个连续映射 $g\colon Y \to Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})//\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 会规范地确定一个可数覆盖 $W_g \to Y$，以及将其全空间闭嵌入到 $Y \times \mathbb{C}$ 中；该覆盖在 y 上的纤维，是从 $\mathbb{C}$ 中忘掉 $g(y)$ 的标签后得到的局部有限子集。

8 实现 Weierstrass 整函数覆盖

在本节中，设 X 是豪斯多夫、仿紧且局部可缩的。设 $q\colon E \to X$ 是一个可数无限层覆盖，并假设给定一个嵌入 $E \hookrightarrow X \times \mathbb{C}$，使得 $q = p_1|_E$（第一投影的限制）和 E 在 $X \times \mathbb{C}$ 中是闭 。

8.1 Weierstrass 整函数族与实现问题

定义 8.1. 映射 $F\colon X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个 *Weierstrass* 整函数族，如果

1. F 是连续的；

2. 对每个 $x \in X$, $F_x(z) := F(x,z)$ 关于 z 是整函数；3. 零点集 $Z(F) := \{(x,z) \in X \times \mathbb{C} : F(x,z) = 0\}$ 投影为可数无限层覆盖 $p_1\colon Z(F) \to X$。

我们称 $p_1\colon Z(F) \to X$ 为与 F 相关联的 Weierstrass 整函数覆盖。

定义 8.2（实现问题）。 给定这样一个嵌入覆盖 $q : E \to X$，我们询问是否存在一个 Weierstrass 整函数族 F，使得 $Z(F)$ 作为 X 上的覆盖与 E 等价。

命题 8.3。 固定 $n \geq 2$。令 $p\colon\ S^n \to \mathbb{RP}^n$ 为标准二重覆盖，并令 $q\colon\ \mathbb{R} \to S^1$ 定义为

$$q(\theta) = e^{i\theta}$$

则 乘积覆盖映射 $p \times q\colon\ S^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{RP}^n \times S^1$ 不等价于任何整覆盖映射 g.

证明。 假设乘积覆盖映射等价于复数平面上的一个整覆盖映射。则存在一个嵌入 $h = (p \times q, r)\colon\ S^n \times \mathbb{R} \to (\mathbb{RP}^n \times S^1) \times \mathbb{C}$。定义 $\phi\colon\ S^n \to \mathbb{C}$ 为

$$\phi(x) = r(x,0)$$

注意到

$$h(x,0) = ([x], 1, \phi(x)) \text{ and } h(-x,0) = ([x], 1, \phi(-x))$$

由于 h 是单射，这意味着对于任意 $x \in S^n$，都有 $\phi(x) \neq \phi(-x)$，这与博苏克-乌拉姆定理相矛盾。

□

8.2 局部图平凡化与一致有限性

引理 8.4（局部图分解）。对于每个 $x_0 \in X$，都存在一个开邻域$U \ni x_0$ 和连续映射 $s_n\colon\ U \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$，使得

$$E \cap (U \times \mathbb{C}) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(s_n), \qquad \Gamma(s_n) := \{(x, s_n(x)) : x \in U\},$$

并且 $s_n(x) \neq s_m(x)$ 对 $n \neq m$ 以及每个固定的 $x \in U$成立。

证明。为覆盖映射 q选取一个均匀覆盖邻域 $U \ni x_0$；于是 $q^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$，其中每个 $q|_{E_n}\colon\ E_n \to U$ 都是一个同胚。定义 $s_n(x) := p_2((q|_{E_n})^{-1}(x))$，其中 $p_2\colon\ X\times\mathbb{C} \to\mathbb{C}$ 是第二投影。于是 $E_n = \Gamma(s_n)$，且该并集是不交的。 □

引理 8.5。固定 U 和 $E|_U = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(s_n)$，如引理 *8.4* 中所述。设 $K \subset U$ 是紧致的，且 $R > 0$。则只有有限多个图 $\Gamma(s_n)$ 与 $K \times B(0, R)$相交。等价地，存在 $N = N(K, R)$，使得对任意 $x \in K$ 和任意 $n \geq N$，$|s_n(x)| > R$。

证明。假设有无穷多个 $\Gamma(s_n)$ 与 $K \times B(0,\ R)$ 相交。选取点 $(x_n,\ s_n(x_n))$，使得 $x_n \in K, |s_n(x_n)| \leq R$，且指标 n 两两不同。由于 $K \times B(0,\ R)$ 是紧致的，并且 E 在$X \times \mathbb{C}$中是闭的，故存在一个子序列收敛到

$$(x_n, s_n(x_n)) \to (x_\infty, z_\infty) \in E \cap \big(K \times \overline{B(0, R)}\big).$$

由于 q 是一个覆盖映射，存在 $(x_\infty,\ z_\infty)$ 的一个开邻域 $\mathcal{O} \subset E$，使得 $q|_{\mathcal{O}}\colon\ \mathcal{O} \to V$ 是到开集 $V \ni x_\infty$ 上的同胚。特别地，$\mathcal{O}$ 包含于$q^{-1}(V)$的一个单个片中。

由于 $(x_n,\ s_n(x_n)) \to (x_\infty,\ z_\infty)$ 在 E 中，对于所有充分大的 n，都有 $(x_n,\ s_n(x_n)) \in \mathcal{O}$，因此这些点位于 V 上方的同一片中，进而对于某个固定指标 n_0，它们位于同一个图 $\Gamma(s_{n_0})$ 中。这与指标两两不同的选取相矛盾。因此，只有有限多个图与$K \times B(0,\ R)$ 相交，从而得到所述的一致有界性。

□

8.3 局部魏尔斯特拉斯乘积

对于 $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，定义魏尔斯特拉斯初等因子

$$\mathcal{E}_p(w) := (1 - w) \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \cdots + \frac{w^p}{p}\right), \qquad \mathcal{E}_0(w) := (1 - w).$$

引理 8.6。对于 $|w| < 1$ 有

$$\log \mathcal{E}_p(w) = -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{w^k}{k},$$

因此对于$|w| \leq \frac{1}{2}$，

$$\big|\log \mathcal{E}_p(w)\big| \leq 2|w|^{p+1}.$$

证明。对 $|w| < 1$ 使用 $\log(1 - w) = -\sum_{k\geq 1} w^k/k$，并将前 p 项与指数修正相消。对于 $|w| \leq 1/2$，用几何级数估计余项：$\sum_{k\geq p+1} |w|^k/k \leq \sum_{k\geq p+1} |w|^k \leq 2|w|^{p+1}$。

□

注记 8.7（避开一个公共点）。若 $E \subset X \times \mathbb{C}$ 是闭的且（$x_0,\ c$）$\notin E$，则存在邻域 $U \ni x_0$ 和 B（$c,\ \varepsilon$），使得（$U \times B$（$c,\ \varepsilon$））$\cap E = \varnothing$。特别地，可以在局部选取一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使其避开某个邻域上方的所有纤维。

命题 8.8。设 $U \subset X$ 是开集，并假设 $E|_U = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(s_n)$ 如引理 *8.4* 中所述。假设存在一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使得对所有 $x \in U$ 和所有 n，都有 $c \neq s_n(x)$。那么

$$F_U(x,z) := \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n\!\left(\frac{z-c}{s_n(x)-c}\right)$$

在 $U \times \mathbb{C}$ 上局部一致收敛到一个连续函数，并且对每个 $x \in U$，函数$z \mapsto F_U(x,z)$ 都是整函数，其单零点恰好为 $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$。因此 $Z(F_U)|_U = E|_U$。

证明。 固定一个紧致集 $K \subset U$ 和一个半径 $R > 0$。将引理 8.5 应用于紧致集 K 以及平移坐标 $s_n - c$ 中的半径 $2R$，可得存在 N 使得

$$\text{for all } x \in K \ \text{ and } n \geq N: \quad |s_n(x) - c| > 2R.$$

对于 $|z-c| \leq R$和 $n \geq N$，有 $|w_n(x,\ z)| \leq 1/2$，其中 $w_n(x,\ z) := (z-c)/(s_n(x)\ - c)$。根据引理 8.6,

$$\left|\log \mathcal{E}_n(w_n(x,z))\right| \leq 2|w_n(x,z)|^{n+1} \leq 2 \cdot 2^{-(n+1)}.$$

因此，对数级数在 $K \times B(c,\ R)$上一致收敛（由 M判别法），故乘积也在此处一致收敛。标准的魏尔斯特拉斯乘积论证可得其关于$(x,\ z)$连续，且关于 z全纯。

固定 x 时，每个因子在 $z = s_n(x)$ 处有一个单零点，且没有其他零点；局部一致收敛保证极限函数恰好在这些点有零点，且重数相同。因此，在 U 上的零点集恰为 $\bigsqcup_n \Gamma(s_n)$。 □

8.4 全局障碍与判据

定义 8.9. 令 $\mathcal{O}$ 为 X 上的层，其在开集 $U \subset X$ 上的截面是连续函数 $h\colon U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，并且对每个 x，$h(x,\cdot)$ 都是整函数。令 $\mathcal{O}^\times$ 为处处非零截面的子层。

引理 8.10. 若 $h\colon U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 连续，且对每个 $x \in U$，$h(x,\cdot)$ 全纯，则存在 $\partial h/\partial z$，且它在 $U \times \mathbb{C}$ 上连续。

证明. 固定 (x_0, z_0)。选取 $r > 0$，使得 $\overline{D(z_0, r)}$包含于所考虑的区域内。由柯西积分公式,

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{h(x,\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}\, d\zeta.$$

被积函数关于（x，ζ）在紧集 $U' \times \{|\zeta - z_0| = r\}$上连续，其中 U'是 x_0的一个小邻域。因此，该积分关于 x连续，从而证明了在（x_0，z_0）处的连续性。 □

引理 8.11（正合指数序列）**：** 在 X上的层序列

$$0 \longrightarrow 2\pi i\,\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^\times \longrightarrow 1$$

是正合的。

证明。 在 $\mathcal{O}$ 处的正合性是逐点的：对于每个 (x,z)，$\exp(\ell)\ = 1$ 当且仅当 $\ell \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$。exp 作为层映射的满射性是局部的：给定 $h \in \mathcal{O}^\times(U)$ 和 $x_0 \in U$，选取 x_0 的一个可缩邻域$V \subset U$（依据局部可缩性）。固定 $z_0 \in \mathbb{C}$；由于 V是可缩的，映射 $x \mapsto h(x,z_0)\ \in$

$\mathbb{C}^*$ 在 V 上存在连续对数 L_0。根据引理 8.10，h'/h 在 $V \times \mathbb{C}$ 上连续，因此我们可以定义

$$\ell(x,z) := L_0(x) + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial h/\partial \zeta}{h}(x,\zeta)\, d\zeta,$$

沿着直线段。因此，$\ell \in \mathcal{O}(V)$ 和 $e^{\ell} = h$ 在 $V \times \mathbb{C}$ 上。 □

引理 8.12 (精细性)。 $\mathcal{O}$ 是一个精细层（因此是无环的）。特别地，$H^1(X;\mathcal{O}) = 0$。

证明。 $\mathcal{O}$ 是连续复值函数层 C^0_X 上的模层，其中函数定义在 X 上（通过对 x 变量进行乘法）。在仿紧空间上，单位分解存在，因此可得精细性。

□

定义 8.13。选取 X 的一个开覆盖 $\{U_i\}$，使其由均匀覆盖的集合构成，并且在这些集合上还可以选取一个被所有纤维避开的 $c_i \in \mathbb{C}$（注 8.7）。在每个 U_i 上，选取一个局部魏尔斯特拉斯实现 $F_i \in \mathcal{O}(U_i)$，使得 $Z(F_i) = E|_{U_i}$（命题 8.8）。

在交叠部分 $U_{ij} := U_i \cap U_j$ 上，比值 $h_{ij} := F_i/F_j$ 延拓为 $\mathcal{O}^\times(U_{ij})$ 的一个元素（因为 F_i 和 F_j 具有相同的单零点）。族 $\{h_{ij}\}$ 是一个取值于 $\mathcal{O}^\times$ 的切赫 1-余循环，因此确定了一个类 $[h] \in H^1(X;\mathcal{O}^\times)$。定义

$$c_1(E) := \delta([h]) \in H^2(X; 2\pi i\,\mathbb{Z}) \cong H^2(X;\mathbb{Z}),$$

其中 δ 是引理 8.11 的长正合序列中的连接同态。

引理 8.14 (良定义性)。 $c_1(E)$ 与覆盖和局部实现的所有选择无关$\{F_i\}$。

证明。将 F_i 替换为满足 $u_i \in \mathcal{O}^\times(U_i)$ 的 $u_i F_i$，会将 h_{ij} 替换为 $h'_{ij} = (u_i/u_j)h_{ij}$，也就是说，余循环改变了一个余边界，因此 $[h]$ 不变。细化覆盖不会改变层上同调中的类。因此，$c_1(E) = \delta([h])$ 良定义。

□

定理 8.15 (全局实现判据)。设 $q\colon E \to X$ 是一个闭嵌入可数覆盖。则 E 等价于一个 *Weierstrass* 整函数覆盖，当且仅当 $c_1(E) = 0$ 属于 $H^2(X;\mathbb{Z})$。

证明。若存在这样的全局魏尔斯特拉斯整函数族 F，取 $F_i := F|_{U_i}$。于是 $h_{ij} \equiv 1$，故 $[h] = 0$，进而 $c_1(E) = \delta([h]) = 0$。

反过来，假设 $c_1(E) = 0$。由与 $0 \to 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\times \to 1$ 相关的长正合上同调序列的正合性及引理 8.12，映射 $H^1(X;\mathcal{O}^\times) \xrightarrow{\delta} H^2(X;2\pi i\mathbb{Z})$ 是单射（其核是 $H^1(X;\mathcal{O}) = 0$ 的像）。因此，$c_1(E) = \delta([h]) = 0$ 蕴含 $[h] = 0$。

因此，余循环 $\{h_{ij}\}$ 是一个余边界：存在 $u_i \in \mathcal{O}^\times(U_i)$，使得 $h_{ij} = u_i/u_j$ 在 U_{ij} 上成立。令 $F_i := F_i/u_i$。那么 $F_i = F_j$ 在交叠处成立，因此这些 F_i 可以粘合成一个全局的 $F \in \mathcal{O}(X)$。由于除以处处非零的因子不会改变零点，$Z(F)|_{U_i} = Z(F_i) = E|_{U_i}$，因此 $Z(F) = E$ 在全局成立。 □

推论 8.16。如果 $H^2(X;\ \mathbb{Z}) = 0$，那么每个闭嵌入可数覆盖 $E \subset X \times \mathbb{C}$ 都可实现为某个魏尔斯特拉斯整函数族 F的 $Z(F)$。

备注 8.17。如果 $F\colon\ X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是连续的，并且每个 F_x 都是整的，那么对于每个 $k \geq 0$，系数

$$a_k(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = r} \frac{F(x,\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta$$

在 x 中连续（由紧集上的一致连续性和柯西积分公式可知），因此带有连续 a_k 的 $F_x(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(x) z^k$ 自动成立。

8.5 可数无限层覆盖与魏尔斯特拉斯整覆盖

下文中，我们令 $G := \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，并将 X 视为一个路径连通、局部路径连通且半局部单连通的空间。

定义 8.18。令 $Cov_\infty(X)$ 表示可数无限层覆盖映射 $p\colon E \to X$ 的等价类集合。

定义 8.19。固定一个基点 $x_0 \in X$。对于具有可数纤维的覆盖 $p: E \to X$，选取一个双射 $\lambda: \mathbb{N} \to p^{-1}(x_0)$。路径提升给出 $\pi_1(X, x_0)$ 在 $p^{-1}(x_0)$ 上的作用，从而得到一个同态

$$\rho_{(E,\lambda)} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{N}).$$

改变 λ 会将 $\rho_{(E,\lambda)}$ 共轭为 $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ 中的一个元素。

定理 8.20。存在一个双射

$$Cov_\infty(X) \;\cong\; \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), \mathrm{Aut}(\mathbb{N}))\big/ conjugacy.$$

证明。这是通过纤维上的 π_1–作用对覆盖进行分类的标准结果。给定 $p: E \to X$，单值化产生一个同态的共轭类。反之，给定一个群同态 $\sim\rho: \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{N})$，构造相应覆盖 $X \times_\rho \mathbb{N} \to X$，其中 X 是万有覆盖。这两个构造在同构意义下互为逆运算。□

定义 8.21。定义

$$H^{lf}(\infty) := \pi_1(Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}), \widetilde{\mathbb{N}}), \qquad B^{lf}(\infty) := \pi_1(Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//G, [e, \widetilde{\mathbb{N}}])$$

其中，e 是 EG的基点。

命题 8.22。存在局部有限版本的辫群正合列：

$$1 \longrightarrow H^{lf}(\infty) \longrightarrow B^{lf}(\infty) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \longrightarrow 1,$$

其中，满射由 π：$Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//G \to BG$诱导。此外，$Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$是一个 $K(H^{lf}(\infty), 1)$型的埃伦伯格–麦克莱恩空间，而 $Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//G$是一个 $K(B^{lf}(\infty), 1)$型的埃伦伯格–麦克莱恩空间。

证明。利用纤维化的同伦长正合列

$$\begin{array}{ccc} Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//G \\ & & \downarrow \\ & & BG \end{array}$$

由于 BG 是 $K(G, 1)$，我们有 $\pi_k(BG) = 0$（当 $k \geq 2$ 时），且 $\pi_1(BG) = G$。根据定理 6.9，$Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})$是一个 $K(H^{lf}(\infty), 1)$型的埃伦伯格–麦克莱恩空间。同伦长正合列表明，$Conf^{lf}_\infty(\mathbb{C})//G$是一个 $K(B^{lf}(\infty), 1)$型的埃伦伯格–麦克莱恩空间，并且还给出了短正合列。□

定义 8.23。令 $EmbCov^{lf}_\infty(X)$ 表示由满足以下条件的对 $(p: E \to X, \iota)$ 的同构类组成的集合：p 是可数无限层覆盖映射，且 $\iota: E \hookrightarrow X \times \mathbb{C}$ 是覆盖 X 的嵌入（即 $p = p_1 \circ \iota$），并且每个纤维 $\iota(p^{-1}(x)) \subset \mathbb{C}$ 都是局部有限的，且 $\iota(E)$ 在 $X \times \mathbb{C}$ 中是闭的。

定理 8.24。 假设 X 具有 *CW*复形的同伦类型。则存在一个自然双射

$$[X, Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G] \;\cong\; EmbCov^{lf}_{\infty}(X),$$

将映射 $g\colon\ X \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G$ 发送到定理 *7.8* 中构造的嵌入覆盖 $(W_g \to X,\ \iota_g)$ 。

证明。 根据定理 7.8，映射 $g\colon\ X \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G$ 确定了 X 上的可数无限层覆盖 $E_g \subset X \times \mathbb{C}$，并且 E_g 在 $X \times \mathbb{C}$ 中是闭的。

反过来，给定一个闭的嵌入局部有限覆盖 $E \subset X \times \mathbb{C}$，令 $P \to X$ 为纤维的主 G–丛，即纤维的标记 （双射 $\mathbb{N} \to p^{-1}(x)$）。嵌入到 $\mathbb{C}$ 中将这种标记转化为有序的局部有限构型，即给出一个 G–等变映射 $P \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})$。这产生一个分类映射 $g\colon\ X \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G$，且这两个构造在同构意义下互为逆构造。 □

定义 8.25 （魏尔斯特拉斯可实现类）。 令 $\mathscr{E}(X) \subset EmbCov^{lf}_{\infty}(X)$ 为满足以下条件的有序对 $(p\colon\ E \to X,\ \iota)$ 的等价类子集：嵌入覆盖 $p_1\colon\ \iota(E) \to X$ 是魏尔斯特拉斯整覆盖。

以下是将定理 8.15 及其推论改写为本文采用的记号。

定理 8.26 (陈障碍判据**)**。 对于$(E \to X, \iota) \in EmbCov^{lf}_{\infty}(X)$，该类属于 $\mathscr{E}(X)$ 当且仅当 $c_1(E) = 0 \in H^2(X;\mathbb{Z})$。特别地，如果 $H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$，那么$\mathscr{E}(X) = EmbCov^{lf}_{\infty}(X)$。

由命题 8.22 可得一个短正合列：

$$1 \longrightarrow H^{lf}(\infty) \xrightarrow{\iota} B^{lf}(\infty) \xrightarrow{\tau} G \longrightarrow 1$$

由上述结果可得一个图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), H^{lf}(\infty)) & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_*} & & & & \\
\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), B^{lf}(\infty))^{conj} & \xrightarrow{\Phi} & EmbCov^{lf}_{\infty}(X) & \longleftarrow & \mathscr{E}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle \tau_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{For}} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{For}|_{\mathscr{E}}} & \\
\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), G)^{conj} & \xrightarrow{\Psi} & Cov_{\infty}(X) & &
\end{array}$$

其中各映射定义如下：

1. ι_*: Hom($\pi_1(X,\ x_0)\ H^{lf}(\infty)$) $\to$Hom($\pi_1(X,\ x_0)\ B^{lf}(\infty)$)^{conj}是先与 ι 作复合，再取其共轭类：

$$\iota_*(\alpha) := [\,\iota \circ \alpha\,].$$

2. τ_*: Hom($\pi_1(X,\ x_0)\ B^{lf}(\infty)$)^{conj} $\to$Hom($\pi_1(X,\ x_0)\ G$)^{conj}由 τ 诱导：

$$\tau_*([\varphi]) := [\,\tau \circ \varphi\,].$$

3. Φ: Hom($\pi_1(X,\ x_0)\ B^{lf}(\infty)$)$^{conj} \to EmbCov^{lf}_{\infty}(X)$ 是通过将 $[\varphi]$ 实现为映射 $g\colon\ X \to Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G$ 的自由同伦类而得到的映射（利用 $Conf^{lf}_{\infty}(\mathbb{C})//G$ 是一个 $K(B^{lf}(\infty),\ 1)$），然后将 g映射到定理 8.24 的嵌入覆盖 $(W_g \to X,\ \iota_g)$。等价地：选择满足 $g_* = \varphi$ 的 g，并令 $\Phi([\varphi]) := [(W_g,\ \iota_g)]$。

4. 对于： $EmbCov_\infty^{lf}(X) \to Cov_\infty(X)$ 忘记嵌入：

$$\mathrm{For}([(p : E \to X, \iota)]) := [p : E \to X].$$

5. Ψ： $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,\ x_0)\ G)^{conj} \to Cov_\infty(X)$ 是标准分类映射（定理 8.20），$\widetilde{\ }$将 $[\rho]$ 映射到覆盖映射 $X \times_\rho \mathbb{N} \to X$ 的同构类。

对角箭头 $\mathscr{E}(X) \to Cov_\infty(X)$ 是 For 的限制。

我们有如下结果。该结果的灵感来自第 108 页中的图表 [16,].

定理 8.27。上述集合图表是可交换的（方形和三角形均如此）。

证明。 **（A）的良定义性** Φ。因为 $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G$ 是 Eilenberg–Mac Lane 空间$K(B^{lf}(\infty),\ 1)$（命题 8.22），标准的 $K(\pi,\ 1)$ 对应给出一个双射

$$[X, Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G] \ \cong\ \mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), B^{lf}(\infty))^{conj},$$

其中 $[X, Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G]$ 表示自由同伦类。将该双射的逆与定理 8.24 中的双射 $[X, Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G] \cong EmbCov_\infty^{lf}(X)$ 复合，得到一个如上所述的良定义映射 Φ 。

（B）交换方形的交换性。令 $[\varphi] \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X,\ x_0)\ B^{lf}(\infty))^{conj}$，并选取$g : X \to Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G$ 使得 $g_* = \varphi$。考虑相应的主 G丛

$$P_g := g^*(EG \times Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})) \longrightarrow X$$

以及相应覆盖映射

$$W_g := P_g \times_G \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

固定 $p_0 \in (P_g)_{x_0}$，并用它将纤维标记为

$$\lambda_0 : \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} (W_g)_{x_0}, \qquad n \longmapsto [p_0, n].$$

对于以 x_0 为起点的环路 γ，令 $\widetilde{\gamma}$ 为 γ 到 P_g 的提升，满足 $\widetilde{\gamma}(0) = p_0$。那么存在唯一的 $\sigma(\gamma) \in G$，使得 $\widetilde{\gamma}(1) = p_0 \cdot \sigma(\gamma)$，而从 $[p_0, n]$ 出发、位于 W_g 中的提升路径终止于

$$[p_0 \cdot \sigma(\gamma), n] = [p_0, \sigma(\gamma)(n)].$$

因此，覆盖映射 $W_g \to X$ 的单值化（相对于 λ_0）为

$$\rho_{(W_g,\lambda_0)} : \pi_1(X, x_0) \to G, \qquad [\gamma] \mapsto \sigma(\gamma).$$

另一方面，典范投影 $\bar{\pi}$： $Conf_\infty^{lf}(\mathbb{C})//G \to BG$ 在基本群上诱导满射 $\bar{\pi}_* = \tau$： $B^{lf}(\infty) \to G$ （命题 8.22），且主丛 P_g 同构于拉回 $(\bar{\pi} \circ g)^*(EG) \to X$。因此，主丛单值化等于

$$(\bar{\pi} \circ g)_* = \bar{\pi}_* \circ g_* = \tau \circ \varphi.$$

根据上述计算，这恰好是 $\rho_{(W_g,\lambda_0)}$。取共轭类（以忽略标记）后可知，底层覆盖映射 $\mathrm{For}(\Phi([\varphi])) = [W_g \to X]$ 的同构类在定理 8.20 下对应于

$$[\rho_{(W_g,\lambda_0)}] = [\tau \circ \varphi] = \tau_*([\varphi]).$$

等价地，

$$\mathrm{For} \circ \Phi \ =\ \Psi \circ \tau_*,$$

这就是该方形的交换性。

（复数平面）三角形的交换性。根据定义， $\mathscr{E}(X) \subset EmbCov_\infty^{lf}(X)$，且对角箭头 $\mathscr{E}(X) \to Cov_\infty(X)$ 是 For 对 $\mathscr{E}(X)$ 的限制。因此，该三角形显然交换。

□

推论 8.28。 $EmbCov_{\infty}^{lf}(X) = Cov_{\infty}(X)$ 当且仅当 τ_* 是满射时成立。特别地，若 $\pi_1(X)$ 是自由群，则这一结论成立。

T定理 8.29. 若 $\pi_1(X)$ 是一个自由群，且 $H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$，则 $\mathscr{E}(X) = Cov_{\infty}(X)$.

证明. 任取一个可数无限层覆盖 $p: E \to X$。由定理 8.20，它对应于一个单值化同态 $\rho: \pi_1(X) \to G$，且在共轭意义下唯一。群 $\pi_1(X)$ 是自由群，因此我们可以为每个自由生成元选择一个在 $B^{lf}(\infty)$ 中沿满射 $B^{lf}(\infty) \twoheadrightarrow G$ 的提升（命题 8.22），从而得到一个同态 $\widetilde{\rho}: \pi_1(X) \to B^{lf}(\infty)$，其复合映射为 ρ，且目标为 G。

由于 $Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})//G$是一个 $K(B^{lf}(\infty), 1)$，同态 $\widetilde{\rho}$由某个映射$g: X \to Conf_{\infty}^{lf}(\mathbb{C})//G$实现。相应覆盖 $W_g \to X$ 的单值化为 ρ，因此它与 $E \to X$ 同构（作为覆盖映射）。此外，W_g 具有典范闭局部有限嵌入 $W_g \hookrightarrow X \times \mathbb{C}$（定理 7.8）。最后，$H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$ 蕴含 $c_1(W_g) = 0$，因此根据定理 8.26，W_g 是可魏尔斯特拉斯实现的。 □

关于多项式覆盖及类似结果，参见 [16,定理 6.3]。

推论 8.30。 如果 X 是一个连通图（等价地，一个连通的1维 *CW*复形），那么

$$\mathscr{E}(X) = Cov_{\infty}(X).$$

证明。 由于 X 是一个图，$\pi_1(X)$是自由的，且 $H^2(X;\mathbb{Z}) = 0$。结论直接由上述结果得出。 □

9 附录

命题 (2.7)。 对于任意开集 $U \subset \mathbb{C}$ 和 $n \geq 1$，存在一个自然同胚

$$\overline{F}: C_n(U) \xrightarrow{\cong} M_n(U),$$

其中 $C_n(U) = Conf_n(U)/S_n$具有商拓扑，而 $M_n(U)$具有模糊拓扑。

证明。定义

$$F: Conf_n(U) \to M_n(U), \qquad F(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i}.$$

此映射具有 S_n–不变性，因此可下降为一个双射

$$\overline{F}: C_n(U) \to M_n(U), \qquad \overline{F}(\{z_1, \ldots, z_n\}) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i}.$$

步骤 *1*: $\overline{F}$ 是连续的。固定 $\varphi \in C_c(U)$。泛函

$$I_{\varphi}: M_n(U) \to \mathbb{R}, \qquad I_{\varphi}(\mu) = \int \varphi \, d\mu$$

根据模糊拓扑的定义是连续的。在 $Conf_n(U)$ 上，

$$T_{\varphi}: Conf_n(U) \to \mathbb{R}, \qquad T_{\varphi}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(z_i)$$

是连续的，并且 $I_\varphi \circ F = \underline{T_{\varphi^\circ}}$ 因此 F是连续的。由于 $F = F \circ q$与 $\overline{q}$: $Conf_n(U) \to C_n(U)$ 是商映射， F 是连续的。

步骤2: $\overline{F^{-1}}$ 是连续的。固定

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta_{z_i} \in M_n(U), \qquad z_i \neq z_j \ (i \neq j).$$

选择两两不交的开圆盘 D_1，.....， $D_n \subset U$，使得

$$z_i \in D_i, \qquad \overline{D_i} \subset U, \qquad \overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \varnothing \ (i \neq j).$$

$\widetilde{}$接下来选择两两不交的开集 $D_i \subset U$，使得

$$\overline{D_i} \subset \widetilde{D}_i, \qquad \overline{\widetilde{D}_i} \subset U, \qquad \widetilde{D}_i \cap \widetilde{D}_j = \varnothing \ (i \neq j).$$

对于每个 i，选择 $\phi_i \in C_c(U)$，使得

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \qquad \phi_i(z_i) = 1, \qquad \mathrm{supp}(\phi_i) \subset D_i.$$

于是 $\int \phi_i \, d\mu = 1$。由 $\nu \mapsto \int \phi_i \, d\nu$ 的模糊连续性，存在一个模糊邻域$\mathcal{N}(\mu) \subset M_n(U)$，使得对于所有 $\mu' \in \mathcal{N}(\mu)$,

$$\int \phi_i \, d\mu' > \frac{1}{2} \qquad \text{for all } i.$$

将 $\mu' = \sum_{j=1}^{n} \delta_{w_j}$ 写成具有不同 w_j 的形式。由于 ϕ_i 的支集包含于 D_i 中且取值于 $[0,1]$,，不等式 $\int \phi_i \, d\mu' > \frac{1}{2}$ 蕴含 D_i 至少包含一个原子 w_j。由于圆盘 D_i 两两不交，且 μ' 恰好有 n 个原子，因此对于每个 $\mu' \in \mathcal{N}(\mu)$:

$$\text{each } D_i \text{ contains exactly one atom, and there are no atoms outside } \bigcup_{i=1}^{n} D_i. \tag{4}$$

因此，对于每个 i，都存在唯一确定的点 $w_i(\mu') \in D_i$，使得

$$\mu'(D_i) = 1, \qquad \mu' = \sum_{i=1}^{n} \delta_{w_i(\mu')}.$$

定义

$$H : \mathcal{N}(\mu) \to Conf_n(U), \qquad H(\mu') := \big(w_1(\mu'), \ldots, w_n(\mu')\big).$$

为证明 H 是连续的，固定 i，并选取 $h_i \in C_c(U; \mathbb{C})$，使得

$$h_i(z) = z \text{ for all } z \in \overline{D_i}, \qquad \mathrm{supp}(h_i) \subset \widetilde{D}_i.$$

那么，对于任意 $\mu' = \sum_{j=1}^{n} \delta_{w_j} \in \mathcal{N}(\mu)$,

$$\int h_i \, d\mu' = \sum_{j=1}^{n} h_i(w_j) = h_i\big(w_i(\mu')\big) = w_i(\mu'),$$

~ ~ ~因为恰有一个原子位于 $D_i \subset D_i$ 中，而所有其他原子都位于 D_i 之外（$\overline{D}_i$ 互不相交），而 h_i（z）在 D_i上 $= z$。由于 $\mu' \mapsto \int h_i \, d\mu'$ 在模糊拓扑下连续，每个坐标$\mu' \mapsto w_i$（μ'）都是连续的，因此 H 是连续的。

现在令

$$\overline{H} := q \circ H : \mathcal{N}(\mu) \to C_n(U),$$

其中 q : $Conf_n(U) \to C_n(U)$ 是商映射。由构造可知,

$$\overline{F} \circ \overline{H} = \mathrm{id}_{\mathcal{N}(\mu)}.$$

因此,H是 F在 μ处的连续局部逆映射,所以 F^{-1}在 μ处连续。由于 $\mu \in M_n(U)$是任意的，故 F^{-1} 处处连续。

因此， F 是一个同胚。 □

参考文献

[1] S. Albeverio、Yu. G. Kondratiev 和 M. Röckner，《构形空间上的分析与几何》，《函数分析杂志》**154** (1998)，第 2 期，444–500。DOI：10.1006/jfan.1997.3183。[2] V. I. Arnol'd，《彩色辫群的上同调环》，《数学札记》**5** (1969)，138–140。DOI：10.1007/BF01098313。[3] J. S. Birman，《辫子、链环与映射类群》，《数学年刊研究》丛书第 82 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1974。[4] D. J. Daley 和 D. Vere-Jones，《点过程理论导论》第 II 卷：一般理论与结构，第 2 版，施普林格，2008。[5] R. D. Edwards 和 R. C. Kirby，嵌入空间的变形，《数学年刊》（第 2 辑）**93**(1971)，63–88。DOI：10.2307/1970753。[6] R. Engelking，《一般拓扑学》，第 2 版，Sigma纯数学丛书第 6 卷，Heldermann出版社，柏林，1989。[7] E. R. Fadell 和 S. Y. Husseini，《构形空间的几何与拓扑》，施普林格数学专著丛书，施普林格出版社，柏林，2001。[8] E. Fadell 和 L. Neuwirth，《构形空间》，《斯堪的纳维亚数学》**10** (1962)，111–118。DOI：10.7146/math.scand.a-10517。[9] P. J. Forrester，《对数气体与随机矩阵》，伦敦数学会专著丛书，第 34 卷，普林斯顿大学出版社，2010。[10] E. M. Friedlander，代数循环、Chow 簇与 Lawson 同调，《组合数学》**77**(1991)，第 1 期，55–93。[11] E. M. Friedlander 和 H. B. Lawson, Jr.，代数上循环理论，《数学年刊》**136**(1992)，第 2 期，361–428，DOI：10.2307/2946609。[12] E. M. Friedlander 和 H. B. Lawson, Jr.，代数上循环空间与循环空间之间的对偶性，《拓扑学》**36** (1997)，第 2 期，533–565，DOI：10.1016/0040-9383(96)00011-0。[13] H.-O. Georgii，《吉布斯测度与相变》，第 2 版，德古意特数学研究丛书，第 9 卷，Walter de Gruyter，2011。[14] J. Ginibre，《复矩阵、四元数矩阵与实矩阵的统计系综》，《数学物理学杂志》**6**(1965)，440–449。DOI：10.1063/1.1704292。

[15] R. Ghrist，构形空间、辫子与机器人学，载于《辫子》，讲义系列，数学科学研究所，新加坡国立大学，第 19 卷，世界科学出版社，2010，第 263–304 页。[16]V. Lundsgaard Hansen，《辫子与覆盖：专题选讲》，伦敦数学会学生教材第 18 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989。DOI：10.1017/CBO9780511613098。[17] J. B. Hough、M. Krishnapur、Y. Peres 和 B. Virág，《高斯解析函数的零点与行列式点过程》，大学讲义系列，第 51 卷，美国数学会，2009。[18] Z. Kabluchko 和 D. Zaporozhets，随机解析函数复零点的渐近分布，《概率年刊》42 (2014)，第 4 期，1374–1395。DOI：10.1214/13-AOP847。[19] S. Kallel，《点的配置空间：使用指南》，arXiv:2407.11092 (2024)。受邀撰写，载于《数学物理百科全书》第 2 版，爱思唯尔 (2024)，DOI：10.1016/B978-0-323-95703-8.00211-1。[20] S. Kallel，对称积、对偶性与构形空间的同调维数，《几何与拓扑专著》13 (2008)，499–527，DOI：10.2140/gtm.2008.13.499。[21] S. Kallel 和 W. Taamallah，置换积与厚对角线的几何及基本群，《加拿大数学杂志》65 (2013)，第 3 期，575–599，DOI：10.4153/CJM-2012-028-3。[22] O. Kallenberg，《随机测度：理论与应用》，概率论与随机建模，第 77 卷，施普林格，2017。[23] S. Kallel，《点的配置空间：使用指南》，arXiv:2407.11092，2024。[24] C. Kassel 和 V. Turaev，《辫群》，数学研究生教材第 247 卷，施普林格，纽约，2008。[25] A. Kupers，证明流形同胚的同调稳定性，预印本，arXiv:1510.02456 [math.AT] (2015)。[26] H. B. Lawson, Jr.，代数循环与同伦论，《数学年刊》129 (1989)，第 2 期，253–291，DOI：10.2307/1971448。[27] H. B. Lawson, Jr.，《代数循环空间》，《微分几何综述》2 (1993)，第 1 期，137–213，DOI：10.4310/SDG.1993.v2.n1.a3。[28] D. McDuff，正粒子与负粒子的构形空间，《拓扑学》14 (1975)，第 1 期，91–107。DOI：10.1016/0040-9383(75)90038-5。[29] H. Osada，与随机矩阵相关的无限维随机微分方程，《概率论及相关领域》153 (2012)，471–509。DOI：10.1007/s00440-011-0352-9。[30] D. Ruelle，《统计力学：严格结果》，W. A. Benjamin，1969。[31] G. Segal，构形空间与迭代环空间，《数学创刊》21 (1973)，213–221。DOI：10.1007/BF01390197。[32] J.-H. Teh，高阶循环群与皮卡簇的 Harnack–Thom 定理，《美国数学会会刊》360 (2008)，第 6 期，3263–3285，DOI：10.1090/S0002-9947-07-04432-7。

[33] J.-H. Teh 和 C.-J. Yang，实全纯链的刻画及其在用代数循环表示同调类中的应用，复流形**7**（2020），93-105。

[34] J.-H. Teh 和 C.-J. Yang，实可求长流、全纯链与代数循环，复流形**8** （2021），第 1 期，274–285，DOI：10.1515/coma-2020-0119。