arXiv:2512.21550v1 [math.AC] 25 Dec 2025

平方自由 Veronese 代数的高斯代数

SOMAYEH BANDARI 和 RAHELEH JAFARI

Abstract. 我们研究由 3 次生成元生成的无平方 Veronese 代数的高斯代数。对于维数不超过 7 的情形，我们通过明确其生成元确定高斯代数，并特别证明它是正规且为 Cohen-Macaulay。

1. Introduction

设 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_d]$ 是 $\mathbb{K}$ 上的多项式环，其中 $\mathbb{K}$ 是特征为零的域，且 $\mathsf{g} = g_1, \ldots, g_n$ 是 S 中一列次数相同的非恒定齐次多项式，生成维数为 d 的 $\mathbb{K}$-子代数 $A = \mathbb{K}[\mathsf{g}] \subseteq S$。$\mathsf{g}$ 的 Jacobi矩阵记为 $\Theta(\mathsf{g})$，它是秩为 d 的 $n \times d$ 矩阵，[5, 命题 1.1]。在这种情况下，由 $\Theta(\mathsf{g})$ 的所有 $d \times d$ 子式生成的 $\mathbb{K}$-子代数称为与 g 相关联的高斯代数，[1,定义 2.1]。注意，该定义不依赖于 A 的齐次生成元的选取，因此我们将与 g 相关联的高斯代数简单记为 $\mathbb{G}(A)$，并称其为 A 的高斯代数。高斯代数 $\mathbb{G}(A)$ 同构于与有理映射 $\mathbb{P}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ 相关联的高斯映射之像的齐次坐标环；该有理映射由 $= (a_1 : \cdots : a_d) \mapsto (g_1(\mathsf{a}) : \cdots : g_n(\mathsf{a}))$ 给出。此外，存在一个 $\mathbb{K}$-代数的单射同态 $\mathbb{G}(A) \hookrightarrow A$，它诱导出从 $\mathrm{Proj}(A)$ 到其高斯像的有理映射，[1, 推论 2.4]。鉴于这些事实，$\mathbb{G}(A)$ 是一个值得研究的至关重要的对象。P. Brumatti、P. Gimenez 和 A. Simis 迈出了实现这一目标的一步，他们阐明了文献 [1] 中若干已知环面代数的高斯代数结构。若 A 是一个由次数为 r 的单项式 $\mathsf{g} = g_1, \ldots, g_n$ 生成的环面代数，则 $\Theta(\mathsf{g})$ 的所有子式都是 S 中次数为 $(r-1)d$ 的单项式。特别地，高斯代数仍是环面代数，由次数为 $(r-1)d$ 的单项式生成。第二作者与 J. Herzog 和 A. Nasrollah Nejad 在文献 [4]，中合作研究，描述了当 A 为 Borel固定代数、由 2 次生成元生成的无平方 Veronese 代数，或至少含有一个环的二分图的边环时，$\mathbb{G}(A)$ 的生成元及其结构。

与 Veronese 代数相关联的高斯代数仍然是 Veronese 代数，见 [1, 命题 3.2] 或 [4, 推论 2.3]。对于无平方 Veronese 代数，情况则更为复杂。在 [4], 中给出了 $\mathbb{G}(A)$的完整描述，当

2020 数学主题分类。13F65, 13P05, 05E40, 14M25。关键词和短语。高斯代数，平方自由 Veronese 代数，多拟阵型理想。

$A = \mathbb{K}[V_{2,d}]$ 是由次数 2 的元素生成的无平方 Veronese 代数时。注意，对于 $d \leq 3$，高斯代数同构于一个多项式环。令 $\mathrm{Mon}_S(t,r)$ 表示 S中满足 $|\mathrm{supp}(u)| \geq t$的所有次数为 r 的单项式 u 的集合，其中 $\mathrm{supp}(u) = \{i : x_i|u\}$。由 $\mathrm{Mon}_S(t,r)$ 生成的单项式理想是多拟阵的。特别地，$\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S(t,r)]$ 是正规且 Cohen-Macaulay 的，见[4,命题 3.1]。

在 [4] 中证明了，对于 $d \geq 5$，$\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{2,d}]) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S(3, d)]$。这类代数可视为某个多拟阵的基环。特别地，当 $d \geq 5$ 时，$\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{2,d}])$ 是正规且为 Cohen-Macaulay 的整环。然而，当 $d = 4$ 时，$\mathbb{G}(A)$ 并不正规。

本文研究由三次齐次生成元生成的平方自由Veronese代数的高斯代数，并在 $d \leq 7$ 的情形下描述其生成元。注意，对于 $d = 3$，4，$\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])$ 同构于一个一维多项式环。

对于 $d = 5$，6，7，我们证明 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}]) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4, 2d) \setminus E_d]$，其中

$$\mathrm{Mon}^*_S(4,2d) = \{x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d} \in \mathrm{Mon}_S(4,2d) \,;\, a_i \leq d-2 \text{ for } 1 \leq i \leq d\},$$

and

$$E_d = \{u \in \mathrm{Mon}^*_S(4,2d) \,;\, u = x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} x_{i_3}^{a_3} x_{i_4} \text{ for some } i_1, i_2, i_3, i_4 \in [d]\}.$$

由 Mon 生成的单项式理想$^*_S(4, 2d) \setminus E_d$ 对于所有 $d \geq 5$ 都是多拟阵型的，见定理2.11。特别地，$\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])$ 是正规且为 Cohen-Macaulay 的。根据我们现有的证据，我们猜想 $\mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4, 2d) \setminus E_d]$ 对于所有 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}]$ 都必须定义高斯代数 $d \geq 5$。我们将高维情形 $d \geq 8$留作一个开放问题。

2. The Gauss algebra of squarefree Veronese algebras

设 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_d]$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 上的多项式环，其中 $\mathbb{K}$ 是一个特征为零的域。设 $A = \mathbb{K}[\mathbf{g}]$ 是一个环面代数，由单项式序列 $\mathbf{g} = g_1, \ldots, g_n$ 生成，其中 $g_i = x_1^{a_{1i}} \cdots x_d^{a_{di}}$ 对于 $i = 1, \ldots, n$。我们将矩阵 B 中对应于行 $i_1, \ldots, i_r$ 和列 $j_1, \ldots, j_r$ 的 r-子式记为 $[i_1, \ldots, i_r \mid j_1, \ldots, j_r]_B$。那么

$$x_{j_1} \ldots x_{j_r}[i_1, \ldots, i_r \mid j_1, \ldots, j_r]_{\Theta(\mathbf{g})} = g_{i_1} \ldots g_{i_r}[i_1, \ldots, i_r \mid j_1, \ldots, j_r]_{\mathrm{Log}(\mathbf{g})},$$

其中，$\Theta(\mathbf{g})$ 是$\mathbf{g}$ 的 Jacobi矩阵，而 $\mathrm{Log}(\mathbf{g}) = (a_{ij})$ 是$\mathbf{g}$的指数矩阵，其列由$\mathbf{g}$中各单项式的指数构成。因此，高斯代数 $\mathbb{G}(A)$ 可以用$\mathbf{g}$中 d个单项式的乘积来描述，如下文所示。

命题 2.1。 [4, 页码 4] 设 $A = \mathbb{K}[\mathbf{g}]$ 是一个由以下生成元生成的齐次单项式代数：S 生成元 $\mathbf{g} = g_1$，……，g_n。那么，A 的高斯代数由下式确定：

$$\mathbb{G}(A) = \mathbb{K}[\frac{g_{i_1} \cdots g_{i_d}}{x_1 \cdots x_d} \,;\, \det \mathrm{Log}(g_{i_1}, \ldots, g_{i_d}) \neq 0].$$

令 $V_{r,\ d}$ 表示 r 次的所有无平方自由单项式的集合 S。则$\mathbb{K}$代数 $A=\mathbb{K}[V_{r,d}]$ 称为 S中 r 次的无平方 ***Veronese*** 代数。

注记 2.2。 注意，$V_{r,d}$ 是非空集，当且仅当 $r\leq d$。对于 $r=d$，它只有一个元素 $g=x_1\cdots x_d$，这意味着 $A=\mathbb{K}[V_{r,d}]$ 是一个一维多项式环。若 $r=d-1$，则 $V_{r,d}$有 d个元素$\{g_i=x_1\cdots\hat{x}_i\cdots x_d;\ \ 1\leq i\leq d\}$，因此 $\mathbb{G}(A)=\mathbb{K}[\frac{g_1\cdots g_d}{x_1\cdots x_d}]$。所以，高斯代数同构于一个一维多项式环。

用 $\mathrm{Mon}_S(t,r)$ 表示所有满足$|\mathrm{supp}(u)|\geq t$的 S 中次数为 r 的单项式 u 的集合，其中 $\mathrm{supp}(u)=\{i;x_i|u\}$。根据 [4, 注记 3.4], ， $d\geq r+2$的 $A=\mathbb{K}[V_{r,d}]$ 的高斯代数包含于 $\mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S(r+1,(r-1)d)]$。事实上，

$$\mathbb{G}(A)\subseteq\mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(r+1,(r-1)d)], \tag{1}$$

其中

$$\mathrm{Mon}^*_S(r+1,(r-1)d)=\{x_1^{a_1}\cdots x_d^{a_d}\in\mathrm{Mon}_S(r+1,(r-1)d)\ ;\ a_i\leq d-2\text{ for }1\leq i\leq d\}.$$

我们定义集合

$$E_d=\{u\in\mathrm{Mon}^*_S(4,2d)\ ;\ u=x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}x_{i_3}^{a_3}x_{i_4}\text{ for some }i_1,i_2,i_3,i_4\in[d]\}.$$

引理 2.3. 设 $d\geq 5$。则 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])\subseteq\mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4,2d)\setminus E_d]$。

证明。 由 (1)，我们有 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])\subseteq\mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4,2d)]$。现在反设存在一个单项式 $m=x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}x_{i_3}^{a_3}x_{i_4}\in\mathbb{G}\ \mathbb{K}[V_{3,d}]\ \cap(\ )$。于 E_d $g_1\ \ldots\ g_d\ \in\ V_{3\,d}$ $m\ =\ \frac{g_1\ldots g_d}{x_1\ldots x_d}$ 是，存在单项式 ,,,， 使得 $\det\mathrm{Log}(g_1,\ldots,g_d)\neq 0$。记 $\mathrm{Log}(g_1,\ldots,g_d)$ 的列为 $C_1,\ldots,C_d$，其行为 $R_1,\ldots,R_d$。经过适当重新标记，我们可以假设 R_4 有两个非零项，而 $R_5,\ldots,R_d$ 各有一个非零项。

由于各行互不相同，因此存在 $d-4$ 列，记为 C_5、.....、C_d，在某个 j 行处有一个非零项，其中 $5\leq j\leq d$；其余 4 列 C_1、.....、C_4 在行 R_5、.....、R_d 上均为零。注意， R_4 只有两个非零项，因此在 C_1、.....、C_4 中有两列在前三行中各有三个非零元素，这意味着存在两列完全相同，矛盾。□

引理 2.4。 设 $d\in\{5,6,7\}$。则 $E_d=\{x_{i_1}^{d-2}x_{i_2}^{a_2}x_{i_3}^{a_3}x_{i_4}\ ;\ \ 1\leq a_2,a_3\leq d-2$，$a_2+a_3=d+1$ 和 $i_j\in[d]\}$。

证明。 设 $m=x_{i_1}^{a_1}x_{i_2}^{a_2}x_{i_3}^{a_3}x_{i_4}\in E_d$。则对 $i=1$， $a_i\leq d-2$，2，3 成立。若对 $i=1$，$a_i\leq d-3$，2，3 成立，则 $2d-1=a_1+a_2+a_3\leq 3(d-3)$，这意味着 $8\leq d$，矛盾。□

引理 2.5. 设 $d\geq 6$ ***and*** $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d-1}])=\mathbb{K}[\text{单项式}^*_{S'}(4,2(d-1))\setminus E_{d-1}]$, 其中 $S'=\mathbb{K}[x_{i_1},\ldots,x_{i_{d-1}}]\subset S$. 若 m 是 $\mathbb{K}[\text{单项式}^*_S(4,2d)\setminus E_d]$ 中的一个单项式，且$|\mathrm{supp}(m)|<d$，则 $m\in\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])$.

证明。设 $|\text{supp}(m)| = t < d$。不失一般性，我们可以假设$m = x_1^{a_1} \cdots x_t^{a_t}$。由于对于所有 $i \in [t]$, $a_1 + \cdots + a_t = 2d$ 且 $a_i \leq d-2$，存在$1 \leq r < s \leq t$ 使得 $a_r, a_s > 1$。我们从最大指数中选取 a_r, a_s。令$u = \frac{m}{x_r x_s} = x_1^{a_1'} \cdots x_t^{a_t'} \in$单项式$_{S'}(4, 2(d-1))$，其中 $S' = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{d-1}]$。注意到，由于 a_i 中至多有两个幂等于 $d-2$，因此可得 $u \in$单项式$^*_{S'}(4, 2(d-1))$。若 $u \in E_{d-1}$，则 $t = 4$ 且 $2 \in \{a_r, a_s\}$。由于 $m \notin E_d$，我们可以假设$a_1 = a_r, a_2 = a_3 = a_4 = 2$。注意到 $a_1 \leq d-2$，这意味着 $2d = a_1 + 6 \leq d + 4$，从而 $d \leq 4$，与此矛盾。因此，$u \notin E_{d-1}$。于是，根据假设，$u \in \mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d-1}])$。那么存在 $u = \frac{g_1 \cdots g_{d-1}}{x_1 \cdots x_{d-1}}$ 使得 $g_i \in V_{3,d-1}$ 且 $\det(\text{Log}(g_1, \ldots, g_{d-1})) \neq 0$。令 $g_d = x_r x_s x_d$。因此 $(x_1 \cdots x_d)m = x_1 \cdots x_d x_r x_s u = g_1 \cdots g_d$。由于 $\text{Log}(g_1, \ldots, g_d)$ 的最后一行除最后一个元素外均为零，而最后一个元素等于 1，因此 $\text{Log}(g_1, \ldots, g_d)$ 是非奇异的。□

命题 2.6. 设 $A = \mathbb{K}[V_{3,5}]$ 和 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_5]$。则

$$\mathbb{G}(A) = \mathbb{K}[\text{Mon}^*_S(4, 10) \setminus \{x_{i_1}^3 x_{i_2}^3 x_{i_3}^3 x_{i_4} \; ; \; i_j \in [5]\}].$$

证明。注意，根据引理 2.4, $E_5 = \{x_{i_1}^3 x_{i_2}^3 x_{i_3}^3 x_{i_4} \; ; \; i_j \in [5]\}$，并根据引理 2.3,$\mathbb{G}(A) \subseteq \mathbb{K}[\text{Mon}^*_S(4, 10) \setminus E_5]$。现在，只需证明任意单项式 $m \in \text{Mon}^*_S(4, 10) \setminus E_5$ 都可以写成 $\frac{g_1 \cdots g_5}{x_1 \cdots x_5}$，其中 $g_i \in V_{3,5}$ 且 $\det(\text{Log}(g_1, \ldots, g_5)) \neq 0$。经过适当的重新标记后，我们区分以下情形:

情形 1: 对于 $m = x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2$，设 $g_1 = x_1 x_2 x_3, g_2 = x_2 x_3 x_4, g_3 = x_3 x_4 x_5, g_4 = x_1 x_4 x_5$ 和 $g_5 = x_1 x_2 x_5$。那么，指数向量 $\mathsf{a}_1 = (1, 1, 1, 0, 0)$、$\mathsf{a}_2 = (0, 1, 1, 1, 0)$、$\mathsf{a}_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$、$\mathsf{a}_4 = (1, 0, 0, 1, 1)$ 和 $\mathsf{a}_5 = (1, 1, 0, 0, 1)$ 线性无关，因此得证。

情形 2: 如果 $m = x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5$，那么 $g_1 = x_1 x_2 x_3$, $g_2 = x_1 x_2 x_4$, $g_3 = x_1 x_2 x_5$, $g_4 = x_1 x_3 x_4$ 和 $g_5 = x_3 x_4 x_5$ 都可行。

情形 3: 如果 $m = x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4 x_5$，那么 $g_1 = x_1 x_2 x_3$, $g_2 = x_1 x_2 x_4$, $g_3 = x_1 x_2 x_5$, $g_4 = x_1 x_3 x_4$ 和 $g_5 = x_2 x_3 x_5$ 都可行。□

情形 4: $|\text{supp}(m)| = 4$。不失一般性，我们可以假设 $m = x_1^{a_1} \cdots x_4^{a_4}$。由于对所有 $i \in [4]$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$ 且 $a_i \leq 3$，因此存在$1 \leq r < s \leq 4$ 满足 $a_r, a_s > 1$。我们从最大指数中选取 a_r, a_s。令 $u = \frac{m}{x_r x_s} = x_1^{a_1'} \cdots x_4^{a_4'} \in \text{Mon}_{S'}(4, 8)$, 其中 $S' = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]$ 且 $a_i' \leq 2$。由于对所有 $i \in [4]$, $a_1' + \cdots + a_4' = 8$ 且 $a_i' \leq 2$，因此可得对所有 $i \in [4]$, $a_i' = 2$。令 $g_1 = x_1 x_2 x_3, g_2 = x_2 x_3 x_4$, $g_3 = x_1 x_3 x_4$ 和 $g_4 = x_1 x_2 x_4$。因此 $u = x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = \frac{g_1 \cdots g_4}{x_1 \cdots x_4}$ 且 $\det(\text{Log}(g_1, \ldots, g_4)) \neq 0$。现在，令 $g_5 = x_r x_s x_5$。因此 $(x_1 \cdots x_5)m = x_1 \cdots x_5 x_r x_s u = g_1 \cdots g_5$。由于 $\text{Log}(g_1, \ldots, g_5)$ 的最后一行中，除最后一个元素为 1 外，其余元素均为零，因此我们得出 $\text{Log}(g_1, \ldots, g_5)$ 是非奇异的。

命题 2.7. 设 $A = \mathbb{K}[V_{3,6}]$ 和 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_6]$。则

$$\mathbb{G}(A) = \mathbb{K}[\text{Mon}^*_S(4, 12) \setminus \{x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 x_{i_3}^3 x_{i_4} \; ; \; i_j \in [6]\}].$$

证明。注意，根据引理 2.4, $E_6 = \{x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 x_{i_3}^3 x_{i_4} \; ; \; i_j \in [6]\}$，并根据引理 2.3, $\mathbb{G}(A) \subseteq \mathbb{K}[\text{Mon}^*_S(4, 12) \setminus E_6]$。现在，只需证明任意单项式 $m \in$

$\mathrm{Mon}_S^*(4,12)\setminus E_6$ 都可以写成 $\frac{g_1\cdots g_6}{x_1\cdots x_6}$，其中 $g_i\in V_{3,6}$ 以及 $\det(\mathrm{Log}(g_1,\ldots,g_6))\neq 0$。当 $|\mathrm{supp}(m)|<6$ 时，由引理 2.5 和命题 2.6 可得。如果 $|\mathrm{supp}(m)|=6$，则在适当重新标记后，我们区分以下几种情况：

情形 1：对于 $m=x_1^2\cdots x_6^2$，令 $g_1=x_1x_2x_3, g_2=x_1x_4x_5, g_3=x_1x_3x_6, g_4=x_2x_4x_6, g_5=x_2x_5x_6$ 和 $g_6=x_3x_4x_5$。那么，指数向量 $\mathsf{a}_1=(1,1,1,0,0,0)$、$\mathsf{a}_2=(1,0,0,1,1,0)$、$\mathsf{a}_3=(1,0,1,0,0,1)$、$\mathsf{a}_4=(0,1,0,1,0,1)$、$\mathsf{a}_5=(0,1,0,0,1,1)$ 和 $\mathsf{a}_6=(0,0,1,1,1,0)$ 线性无关，因此得证。

情形 2： 若 $m=x_1^3x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6$，则 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_3x_4$，$g_3=x_1x_4x_6$，$g_4=x_1x_5x_6$，$g_5=x_2x_3x_5$ 和 $g_6=x_2x_4x_5$ 均可行。

情形 3： 若 $m=x_1^3x_2^3x_3^2x_4^2x_5x_6$，则 $g_1=x_1x_2x_4$，$g_2=x_1x_2x_5$，$g_3=x_1x_2x_6$，$g_4=x_1x_3x_4$，$g_5=x_2x_3x_5$ 和 $g_6=x_3x_4x_6$ 均可行。

情形 4： 若 $m=x_1^3x_2^3x_3^3x_4x_5x_6$，则 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_2x_4$，$g_3=x_1x_2x_5$，$g_4=x_1x_3x_6$，$g_5=x_2x_3x_6$ 和 $g_6=x_3x_4x_5$ 均可行。

情形 5： 若 $m=x_1^4x_2^2x_3^2x_4^2x_5x_6$，那么$g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_2x_4$，$g_3=x_1x_2x_5$，$g_4=x_1x_3x_4$，$g_5=x_1x_4x_6$ 和 $g_6=x_3x_5x_6$ 均可行。

情形 6： 若 $m=x_1^4x_2^3x_3^2x_4x_5x_6$，那么 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_2x_4$，$g_3=x_1x_2x_5$，$g_4=x_1x_2x_6$，$g_5=x_1x_3x_4$ 和 $g_6=x_3x_5x_6$ 均可行。

情形 7： 若 $m=x_1^4x_2^4x_3x_4x_5x_6$，那么 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_2x_4$，$g_3=x_1x_2x_5$，$g_4=x_1x_2x_6$，$g_5=x_1x_3x_4$ 和 $g_6=x_2x_5x_6$ 均可行。□

命题 2.8。设 $A=\mathbb{K}[V_{3,7}]$ 和 $S=\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_7]$。则

$$\mathbb{G}(A)=\mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S^*(4,14)\setminus\{x_{i_1}^5x_{i_2}^5x_{i_3}^3x_{i_4}\ ,\ x_{i_1}^5x_{i_2}^4x_{i_3}^4x_{i_4}\ ;\ i_j\in[7]\}].$$

证明。注意，由引理 2.4，$E_7=\{x_{i_1}^5x_{i_2}^5x_{i_3}^3x_{i_4}\ ,\ x_{i_1}^5x_{i_2}^4x_{i_3}^4x_{i_4}\ ;\ i_j\in[7]\}$，且由引理 2.3，$\mathbb{G}(A)\subseteq\mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S^*(4,12)\setminus E_7]$。现在只需证明，任意单项式 $m\in\mathrm{Mon}_S^*(4,12)\setminus E_7$ 都可写成 $\frac{g_1\cdots g_7}{x_1\cdots x_7}$，其中 $g_i\in V_{3,7}$ 且 $\det(\mathrm{Log}(g_1,\ldots,g_7))\neq 0$。当 $|\mathrm{supp}(m)|<7$ 时，由引理 2.5 和命题 2.7 即得结论。若 $|\mathrm{supp}(m)|=7$，则在适当重新标记后，我们区分以下几种情形：

情形 1：对于 $m=x_1^2\cdots x_7^2$，令 $g_1=x_1x_2x_3$、$g_2=x_2x_3x_4$、$g_3=x_3x_4x_5$、$g_4=x_4x_5x_6$、$g_5=x_5x_6x_7$、$g_6=x_1x_6x_7$ 和 $g_7=x_1x_2x_7$。那么，指数向量 $\mathsf{a}_1=(1,1,1,0,0,0,0)$、$\mathsf{a}_2=(0,1,1,1,0,0,0)$、$\mathsf{a}_3=(0,0,1,1,1,0,0)$、$\mathsf{a}_4=(0,0,0,1,1,1,0)$、$\mathsf{a}_5=(0,0,0,0,1,1,1)$、$\mathsf{a}_6=(1,0,0,0,0,1,1)$ 和 $\mathsf{a}_7=(1,1,0,0,0,0,1)$ 线性无关，因此得证。

情形 2： 若 $m=x_1^3x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2x_7$，则 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_4x_5$，$g_3=x_1x_5x_6$，$g_4=x_1x_5x_7$，$g_5=x_2x_3x_4$，$g_6=x_2x_4x_6$ 和 $g_7=x_3x_6x_7$ 均可行。

情形 3： 若 $m=x_1^3x_2^3x_3^2x_4^2x_5^2x_6x_7$，则 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_3x_4$，$g_3=x_1x_4x_5$，$g_4=x_1x_5x_6$，$g_5=x_2x_3x_4$，$g_6=x_2x_5x_7$ 和 $g_7=x_2x_6x_7$ 均可行。

情形 4： 若 $m=x_1^3x_2^3x_3^3x_4^2x_5x_6x_7$，则 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_3x_4$，$g_3=x_1x_4x_6$，$g_4=x_1x_5x_6$，$g_5=x_2x_3x_5$，$g_6=x_2x_3x_7$ 和 $g_7=x_2x_4x_7$ 均可行。

情形 5： 如果 $m=x_1^4x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6x_7$，那么 $g_1=x_1x_2x_3$，$g_2=x_1x_3x_4$，$g_3=x_1x_4x_5$，$g_4=x_1x_5x_6$，$g_5=x_1x_6x_7$，$g_6=x_2x_3x_5$ 和 $g_7=x_2x_4x_7$ 都可行。

情形 6： 如果 $m = x_1^4x_2^3x_3^2x_4^2x_5x_6x_7$，那么 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_2x_4$，$g_3 = x_1x_2x_5$，$g_4 = x_1x_3x_6$，$g_5 = x_1x_4x_7$，$g_6 = x_2x_4x_7$，$g_7 = x_3x_5x_6$。

情形 7： 如果 $m = x_1^4x_2^3x_3^3x_4x_5x_6x_7$，那么 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_3x_4$，$g_3 = x_1x_4x_6$，$g_4 = x_1x_5x_6$，$g_5 = x_1x_2x_7$，$g_6 = x_2x_3x_5$ 和 $g_7 = x_2x_3x_7$ 都适用。

情形 8： 如果 $m = x_1^4x_2^4x_3^2x_4x_5x_6x_7$，那么 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_2x_4$，$g_3 = x_2x_3x_5$，$g_4 = x_1x_2x_6$，$g_5 = x_1x_3x_4$，$g_6 = x_1x_5x_7$，$g_7 = x_2x_6x_7$

情形 9： 若 $m = x_1^5x_2^2x_3^2x_4^2x_5x_6x_7$，则 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_2x_4$，$g_3 = x_1x_3x_4$，$g_4 = x_1x_4x_5$，$g_5 = x_1x_5x_6$，$g_6 = x_1x_6x_7$ 和 $g_7 = x_2x_3x_7$ 可行。

情形 10： 若 $m = x_1^5x_2^3x_3^2x_4x_5x_6x_7$，则 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_2x_4$，$g_3 = x_1x_2x_5$，$g_4 = x_1x_3x_4$，$g_5 = x_1x_3x_7$，$g_6 = x_1x_5x_6$ 和 $g_7 = x_2x_6x_7$ 可行。

情形 11： 若 $m = x_1^5x_2^4x_3x_4x_5x_6x_7$，则 $g_1 = x_1x_2x_3$，$g_2 = x_1x_2x_4$，$g_3 = x_1x_2x_5$，$g_4 = x_1x_2x_6$，$g_5 = x_1x_3x_4$，$g_6 = x_1x_5x_7$ 和 $g_7 = x_2x_6x_7$ 可行。 □

综上所述，我们得到以下定理。

定理 2.9。设 $d \in \{5, 6, 7\}$。则 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}]) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S^*(4, 2d) \setminus E_d]$.

对于单项式理想 $I \subset S$，我们用 $G(I)$ 表示 I 的唯一极小单项式生成元集。对于单项式 $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in S$，定义 $\deg_{x_i}(u) := a_i$，其中对所有 $i = 1, \ldots, n$ 均成立。设 I 由同一次数的元素生成。若对任意 u、$v \in G(I)$，只要 $\deg_{x_i}(u) > \deg_{x_i}(v)$，就存在一个指标 j，使得 $\deg_{x_j}(u) < \deg_{x_j}(v)$，且 $x_j(u/x_i) \in I$，则称 I 为多拟阵理想。等价地，若存在一个离散多拟阵的基集 $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^n$，使得 $G(I) = \{\mathbf{x^a} : \mathbf{a} \in \mathcal{B}\}$，则称 I 在 S 中为多拟阵理想。根据 [3,推论 6.2], ，离散多拟阵的基环是正规且 Cohen-Macaulay 的。多拟阵理想已从代数和组合两个角度在多篇文章中得到讨论。第 12] 章 [2, 概述了离散多拟阵和多拟阵理想。

根据 [4, 命题 3.1]，由 $\mathrm{Mon}_S(t, r)$ 生成的单项式理想是多拟阵型的，而且很容易看出，由 $\mathrm{Mon}_S^*(t, r)$ 生成的单项式理想也是多拟阵型的。

注 2.10. 设 $A = \mathbb{K}[V_{2,4}]$ 和 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_4]$。

(a) 根据 [4, 定理 3.2(a)]，$\mathbb{G}(A) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S(3, 4) \setminus \{x_1x_2x_3x_4\}]$。设 $u = x_2^2x_3x_4$，$v = x_1^2x_2x_3 \in \mathrm{Mon}_S(3, 4)\setminus\{x_1x_2x_3x_4\}$。则 $(u/x_2)x_1 = x_1x_2x_3x_4 \notin \mathrm{Mon}_S(3, 4)\setminus\{x_1x_2x_3x_4\}$。因此，由 $\mathrm{Mon}_S(3, 4)\setminus\{x_1x_2x_3x_4\}$ 生成的单项式理想不是多拟阵型的。(b) 根据 [4, 命题 3.1], [4, 定理 3.2(b)] 和 [3, 推论 6.2], ，我们得到：对于 $d \geq 5$，由 $\mathrm{Mon}_S(3, d)$ 生成的单项式理想是多拟阵型的；并且 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{G}(A) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}_S(3, d)]$ 是正规且 Cohen-Macaulay 的，对于$d \geq 5$。

定理 2.11. 设 $d \geq 5$。那么，由 $\mathrm{Mon}_S^*(4, 2d) \setminus E_d$ 生成的单项式理想是多拟阵型的。

证明。 设 $M := \mathrm{Mon}^*_S(4, 2d) \setminus E_d$ 且 $u = x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d}, v = x_1^{b_1} \cdots x_d^{b_d} \in M$，并且 $\deg_{x_i}(u) > \deg_{x_i}(v)$。由于 $\mathrm{Mon}^*_S(4, 2d)$ 是多拟阵型的，因此存在指标 $j \in [d]$，使得 $\deg_{x_j}(u) < \deg_{x_j}(v)$，且 $(u/x_i)x_j \in \mathrm{Mon}^*_S(4, 2d)$。为方便起见，我们假设 $i = 1$ 且 $j = 2$。

如果 $(u/x_1)x_2 \notin E_d$，则无需证明。现在，令 $(u/x_1)x_2 \in E_d$。我们考虑以下几种情况：

情况 a： $|\mathrm{supp}(u/x_1)x_2| = 4$ 且 $|\mathrm{supp}(u)| = 4$。因此，由于 $u \notin E_d$，我们有 $a_1 > 1$ 和 $a_2 > 0$。不妨设 $u = x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}$。若对某个$k \in \{5, \ldots, d\}$， $b_k \neq 0$，则 $|\mathrm{supp}(u/x_1)x_k| \geq 5$，从而 $(u/x_1)x_k \in M$。注意，$\deg_{x_k}(u) < \deg_{x_k}(v)$。现在，令 $b_5 = \cdots = b_d = 0$。由于 $(u/x_1)x_2 \in E_d$、 $a_2 > 0$和$u \notin E_d$，可得 $a_1 = 2$。因此，由于 $|\mathrm{supp}(v)| = 4$、 $b_5 = \cdots = b_d = 0$和$b_1 < a_1 = 2$，可得 $b_1 = 1$，这意味着 $v \in E_d$，与矛盾。

情形 b： $|\mathrm{supp}(u/x_1)x_2| = 4$ 且 $|\mathrm{supp}(u)| = 5$。因此 $a_1 = 1$ 且 $a_2 > 0$。我们可以假设 $u = x_1x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_4^{a_4}x_5^{a_5}$。若对某个 $k \in \{6, \ldots, d\}$，有 $b_k \neq 0$，则$|\mathrm{supp}(u/x_1)x_k| \geq 5$，因此 $(u/x_1)x_k \in M$。注意，$\deg_{x_k}(u) < \deg_{x_k}(v)$。现在，令 $b_6 = \cdots = b_d = 0$。由于 $b_1 < a_1 = 1$，我们有 $b_1 = 0$。所以 $|\mathrm{supp}(v)| = 4$。因此，由于 $v \notin E_d$，我们有 $b_i \geq 2$，其中 $i = 2$ 为 3、4、5。另一方面，由于 $(u/x_1)x_2 \in E_d$，可得 $a_3 = 1$ 或 $a_4 = 1$ 或 $a_5 = 1$。我们可以假设$a_3 = 1$。现在，我们断言 $(u/x_1)x_3 \notin E_d$，从而 $(u/x_1)x_3 \in M$。反设 $(u/x_1)x_3 \in E_d$。那么 $(u/x_1)x_3 = x_2^{a_2}x_3^2x_4^{a_4}x_5^{a_5}$，其中$a_j = 1$，对某些 $j \in \{2, 4, 5\}$ 和 $a_k + a_l = 2d - 3$，且 $\{k, l\} = \{2, 4, 5\} \setminus \{j\}$。由于 a_k、 $a_l \leq d - 2$，我们有 $2d - 3 \leq 2d - 4$，这与结论矛盾。因此 $(u/x_1)x_3 \notin E_d$。注意，$\deg_{x_3}(v) \geq 2 > 1 = \deg_{x_3}(u)$. □

命题 2.12. 设 $d \in \{5, 6, 7\}$。那么， $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])$ 是正规且 *Cohen-Macaulay* 的。

证明。 定理2.9、定理 2.11和 [3, 推论 6。2] 得出所需结果。 □

根据我们的证据，我们预期 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}]) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4, 2d) \setminus E_d]$ 对所有$d \geq 5$ 均成立。对于较小的维数 $d \in \{5, 6, 7\}$，我们已在定理 2.9中证明。引理 2.5提供了一个归纳过程，解决了非全支撑单项式的问题。因此，尚待解决的关键部分是检验全支撑单项式。然而，我们将更高阶的情形 $d \geq 8$留作开放问题。

问题 2.13. 设 $d \geq 8$。 $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}]) = \mathbb{K}[\mathrm{Mon}^*_S(4, 2d) \setminus E_d]$ 吗?

如果上述问题的答案是肯定的，那么由定理2.11和 [3, 推论 62] 可得， $\mathbb{G}(\mathbb{K}[V_{3,d}])$ 对 $d \geq 8$是正规且为 Cohen-Macaulay 的。

数据可用性。由于本研究未创建或分析新数据，本文不涉及数据共享。

References

[1] P. R. Brumatti、P. Gim´enez 和 A. Simis，关于与有理映射 $\mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^n$ 相关联的高斯代数，《代数学杂志》207(2)（1998），557-571。1[2] J. Herzog、T. Hibi，《单项式理想》，《数学研究生教材》第260卷，施普林格出版社，2011。6[3] J. Herzog、T. Hibi，离散多拟阵，《代数组合杂志》16（2002），239-268。6, 7[4] J. Herzog、R. Jafari 和 A. Nasrollah Nejad，关于环面代数的高斯代数，《代数组合杂志》51（2020），1-17。1, 2, 3, 6[5] A. Simis，《特征零下的两个微分主题》，载于 C. Melles、J.-P. Brasselet、G. Kennedy、K. Lauter、L. McEwan（编），《代数与非交换几何专题：纪念露丝·米希勒论文集》，《当代数学》第324卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛（2003），195-204。1

Department of Mathematics, Buein Zahra Technical University, Buein Zahra, Qazvin, Iran电子邮箱地址: somayeh.bandari@yahoo.com and s.bandari@bzte.ac.ir

Mosaheb Institute of Mathematics, Kharazmi University, Tehran, Iran
电子邮箱地址: rjafari@khu.ac.ir