arXiv:2512.21579v1 [math.QA] 25 Dec 2025

QUANTUM $SL^+(N, \mathbb{R})$ 作为局部紧量子群

K. DE COMMER、G. SCHRADER、A. SHAPIRO 和 C. VOIGT

Abstract. 我们构造了高秩中首批纯连续的、 q变形的李型局部紧量子群实例。它们源自类型 A 的高秩分裂实李群的全正部分在幺模变形参数下的 Drinfeld–Jimbo 量子化。我们的方法基于量子簇理论，特别是 Fock 和 Goncharov 发展的相关工作。

Introduction

正表示产生于分裂实量子群的表示论，并且与量子簇代数和高阶量子 Teichm¨uller 理论有着深刻联系。Ponsot–Teschner [PT99, PT01] 首先在秩 1 情形中结合 Liouville 理论对其进行了研究，随后 Ip 和 Frenkel–Ip [Ip12, FI14, Ip15]将其推广到一般类型。此类表示的一个关键特征是，量子化的泛包络代数的标准生成元通过正的自伴（无界）算子作用。这类似于由分裂半单李群的酉表示产生的经典李代数表示；不同之处在于，在这一类比中，正性要求对应于只考察底层群的全正部分。

本文的主要结果是将 $SL^+_\hbar(N, \mathbb{R})$ 中全正矩阵半群 $SL^+(N, \mathbb{R})$ 的量子化构造为 Kustermans–Vaes [KV00, KV03] 意义下的局部紧量子群。这里 $\hbar$ 是一个非零实参数，在代数框架中与通常的 q 通过 $q = e^{\pi i\hbar}$ 相关联。上述类比为研究量子群正表示提供了全局方法的解析基础，并使我们能够运用强大的算子代数工具。同时，它给出了首批真正超出代数构造范畴的 Drinfeld–Jimbo 型高秩局部紧量子群实例。

从历史上看，局部紧量子群理论源于将 Pontryagin 对偶推广到非阿贝尔情形的尝试，概述见 [Kus05] 。局部紧量子群的结构在很大程度上由一个乘法酉算子所决定，它编码了局部紧群正则表示的对应物。Baaj–Skandalis [BS93], 较早研究了乘法酉算子的概念, Woronowicz [Wor96], 则进一步发展了这一概念，并引入了可管理性的概念；这一概念后来在 [SW01]中被推广为模性 。Kustermans 和 Vaes 的关键洞见是，要求 Haar 权存在，就能从一组简单的公理构建出优雅且极为灵活的局部紧量子群理论；该理论在 Pontryagin 对偶下封闭，并涵盖了当时所有已知的例子。他们特别证明，局部紧量子群的*Kac–Takesaki* 算子 是一个可管理的乘法酉算子，从而将他们的方法与 Woronowicz 的工作联系起来。

然而，除本质上属于代数性质的构造之外，迄今已知的真正的 q-变形型局部紧量子群实例寥寥无几，而且每个实例都涉及微妙的解析考量。这些例子仅限于低秩情形 [VD01, WZ02, Wor03, KK03], ，并采用逐案处理的技巧。

其中一个例子是 Woronowicz–Zakrzewski[WZ02] 引入的量子“$ax+b$”-群。为了分析这个量子群，Woronowicz 研究了量子指数函数 [Wor00], ，它与 Faddeev 非紧量子二对数[Fad95, Kas01, FG09]密切相关。量子“$ax+b$”-群的大部分复杂之处，源于其中涉及的算子仅假定为自伴算子，其谱可能包含负值部分。

Ip [Ip13] 最先意识到，Woronowicz–Zakrzewski 的工作暗含了构造量子“$ax+b$”-群全正版本所需的全部要素，另见[BT03]。这至少在两个方面令人惊讶：首先，全正“$ax+b$”-量子群的经典对应物只是一个半群，而不是群；其次，使用正自伴算子会显著简化分析。Ip 指出，在这种情况下可以得到一个模乘法酉算子，而且还存在 Haar 权，因此构成一个局部紧量子群。应将这个正“$ax+b$”-量子群视为对应于相关全正量子 $SL(2,\ \mathbb{R})$-群中的一个 Borel 子群，它是通过 Drinfeld 双构造得到的。

这是我们工作的出发点。我们用来超越秩 1 情形的主要代数工具是量子簇理论。 簇代数最初由 Fomin 和 Zelevinsky 在李理论中的（对偶）典范基背景下，于交换情形中引入 [Lus93], ；随后，Berenstein 和 Zelevinsky 在 [BZ05], 中，以及 Fock 和 Goncharov 在 [FG09] 中，作为他们对高阶 Teichm¨uller 空间量子化研究的一部分，证明该理论存在一种自然的 q-变形。量子簇代数以箭图的数据为起点，定义为一族称为量子环面 或斜 Laurent 多项式环的弱非交换代数的交。该交的具体形式由簇变异的组合结构决定，交集取遍与原箭图突变等价 的所有箭图。量子簇代数包含一类特殊元素，称为全局单项式 （或“簇单项式”）。对于一大类箭图，文献 [DM21] （以及 [GHKK18] 在 $q=1$中的结果）证明，相对于任意箭图的量子环面展开全局单项式，所得的是一个斜 Laurent 多项式，其系数是 $\mathbb{N}[q^{\pm 1}]$ 在横线对合下不变的元素 $q \mapsto q^{-1}$。在与我们研究相关的情形中，我们实际上可以用有向图中路径的配分函数，显式组合地描述这些展开系数。

从解析的角度来看，量子环面与 q-劳朗正性的框架尤其引人注目。一方面，在这一框架下，Rieffel [Rie93]发展出了一套成熟的算子代数形变理论。另一方面，劳朗正性保证了全局单项式展开中的每一项都对应一个正自伴算子。通过对这类项取形式和，我们便能将量子群在不同簇中 PBW 生成元所对应的全局单项式理解为相当显式的正算子。这一视角似乎尚属新颖，我们希望它能进一步应用于 Fock 和 Goncharov 在 [FG09]中开创的量子簇代数解析理论。

在 [FG09], 中，作者解释了如何为每个簇变异关联一个称为量子变异算子的酉算子。我们将使用这些量子变异算子来构造 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 的乘法酉算子。具体来说，本文使用的簇代数是 Fock 和 Goncharov 在其关于曲面上带框架 $SL(N,\ \mathbb{C})$ 局部系统模空间的研究 [FG06] 中所考察的簇代数。在这一对应关系中，用来描述量子 Borel 子群的簇代数对应于一个“三角形”，也就是边界上有三个标记点的圆盘。Fock 和 Goncharov 构造了一个显式的簇变异复合，用以实现“翻转”：它将对应于两种粘合方式的簇图表交织起来，这两种方式都是将两个三角形沿一条边粘合成一个带有四个标记点的圆盘。相应的量子变异算子将作为我们的乘法酉算子。

利用形式和构造，我们能够证明，同一个算子可以通过函数演算从该量子群的 R-矩阵的一般因子化形式得到，并将其解释为量子 Borel 子群的海森堡双的张量平方中的一个元素。另一方面，我们的乘法酉算子的簇论描述非常适合显式计算；在验证它与局部紧量子群公理的相容性时，我们充分利用了这一特点。

我们想指出，Ip 开创了对正量子群的研究，包括高秩情形。在 [Ip12, Ip13, Ip17], he 提出采用 Van Daele [VD98] 的理论来解决这一问题，即乘子 ***Hopf*** 代数 。带有积分的乘子 Hopf 代数，或者更准确地说， [KVD97], 意义下的代数量子群，构成了一类性质良好的局部紧量子群。它们体现了一般理论的诸多特征，同时又与纯代数的 Hopf 代数理论相近。然而，[Ip12, Ip13, Ip17] 中讨论的分析方面缺乏数学严谨性，这些论文中的一些论断仅在启发式层面上成立。正如我们将要证明的， $SL_\hbar^+(N,\mathbb{R})$ 的 Borel部分的缩放常数不等于 1，这意味着它不能作为代数量子群 [DCVD10]得到。

我们将 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 构造为局部紧量子群，这为进一步探索开辟了若干方向，下面概述其中一些。自该理论创立以来，人们一直非常希望定义一种有意义的“正表示范畴”，它源自量子群的簇型实现。[1] 我们认为，本文所呈现的局部紧量子群 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 的构造，是解决这一问题的第一步。在未来的工作中，我们希望进一步具体化 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 表示范畴的若干方面，包括 Plancherel 公式以及对约化酉对偶的明确描述。

进一步探索的另一个方向，是确定 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 的表示理论在多大程度上可以在更一般的曲面 [BZBJ18] 上“积分”，从而定义一种拓扑量子场论的类似物。这个问题似乎与 Fock 和 Goncharov 关于量子化高阶 Teichm¨uller 理论的工作 [FG09] 中所产生的模函子的无限维类似物密切相关。

最后，我们希望提醒读者注意，我们的所有构造都适用于所有 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，尤其是在 $q = e^{\pi i\hbar}$ 为单位根时仍然有效。我们注意到，这些构造取决于 $\hbar$ 的取值，而非 q的取值，特别是

[1]有人尝试在一篇标题过于乐观的 [SS17], 预印本中，描述可能构成这一定义基础的代数结构。

我们在 $\hbar = 2$ 处得到一个与 $q = 1$对应的局部紧量子群。相关地，在对正表示进行代数研究时，模双 这一概念发挥着重要作用，其源头可追溯至 Faddeev [Fad95]的工作。它包含量子化包络代数的两个形式上对易的副本，其变形参数分别为对偶的 $q = e^{i\pi\hbar}$ 和 $\check{q} = e^{\pi i\hbar^{-1}}$。模对偶性是 Liouville 理论及其推广的对偶性质在数学上的反映。在解析框架下，这一点已经内置于局部紧量子群的构造之中；在我们的语境中，它表现为 $SL^+_\hbar(n, \mathbb{R})$ 与 $SL^+_{\hbar^{-1}}(n, \mathbb{R})$ 之间的同构，并对应地确定了乘法酉元。

现在让我们来介绍本文的内容。

在第一节中，我们介绍带有斜对称双线性形式的向量空间的一些基本事实，并研究与之相关的表示论。

在第二节中，我们构造了乘法酉算子，最终证明它与一个局部紧量子群相关联，即 $\mathbb{B}^+_N$ 对 $SL^+(N, \mathbb{R})$的Borel部分进行的量子化。我们给出该乘法酉算子的两个公式：一个直接基于量子群理论中通用 R-矩阵的公式，另一个则由与该量子群相关联的Heisenberg代数（或其约化）的一个特定Laurent多项式坐标图构造而成。

在第三节中，我们证明了一个基本事实：我们的乘法酉算子是模的，这已经为相关表示论所需的许多性质打开了大门。我们的策略是将乘法酉算子（视为量子群的一个表示）分解为若干个“秩一”表示的张量积；这些表示相关的模性已为人所知。

在第四节中，我们确定了上述模乘法酉算子所对应的冯·诺伊曼代数；这些代数应被视为量子群所对应的量子化可测空间。这些冯·诺伊曼代数很容易描述为扭曲群冯·诺依曼代数，但为了得到这一结果，我们需要借助更精细的 C* 代数理论，并使用 Rieffel 变形理论 [Rie93] 的结果。在本节末尾，我们还将简要评论模对偶性现象。

在第五节中，我们得到了主要结果，证明我们的模乘法酉算子导出了具有哈尔测度的量子群。这里的关键思想基于 Woronowicz 和 Van Daele [VD01, Wor03], 的基本洞见，同时在研究我们的乘法酉算子时，灵活运用（退化的）Heisenberg代数的不可约表示。

在第六节中，我们完整描述了与量子群相关的模数据，例如模元、模算子和模共轭。

在第七节中，我们研究该量子群的对偶理论，并以最初给定的乘法酉算子为基础，确定相关左正则乘法酉（或等价地，Kac– Takesaki 算子）的公式。

最后，在第八节中，我们展示了如何将 Drinfeld 双构造应用于量子化Borel群，并通过 [BV05]的结果，得到所需的量子化$SL^+_\hbar(N, \mathbb{R})$，将其作为由全正特殊线性矩阵组成的半群 $SL^+(N, \mathbb{R})$ 的局部紧量子群。

本文最后附有一长列附录，汇集了一些已知结果；对于本文所涉及的不同领域（局部紧量子群和量子簇代数）的读者群体而言，其中一些结果可能不太容易理解。

在附录 *A*中，我们汇集了有关量子二对数函数的一些分析信息，这些信息对整个理论的发展至关重要。
在附录 *B*中，我们简要说明与量子二对数相关的五边形方程的证明。

在附录 *C*中，我们遵循 [WZ02]，评述秩 1 情形（‘$ax+b$’群）的模性证明。

在附录 *D*中，我们解释一些与 C*-代数有关的技术概念（乘子和伴随元素）。

在附录 *E* 中，我们遵循 [Rie93]，解释当 C*-代数受带有斜双线性形式的向量空间作用时，如何对其进行变形。
在附录 *F*中，我们简要概述冯·诺伊曼代数及其相关权理论。

最后，在附录 *G* 中，我们给出第 2 节中构造的乘法酉算子的五边形方程的一个直接代数证明。

约定与记号：对于定义域为 X的复值函数 f，我们记 te

$$\overline{f}(x)=\overline{f(x)},\qquad x\in X.$$

对于 X 局部紧豪斯多夫空间，我们用 $C_b(X)$表示其上具有逐点代数结构和 $*$-运算$f\mapsto f$的有界连续复值函数构成的 C*代数。我们用 $C_0(X)\subseteq C_b(X)$表示其由无穷远处消失的函数构成的 C*子代数。

对于 A一个复代数，M 一个左 A-模，以及 $V\subseteq M$ 一个线性子空间，我们记 te

$$AV=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\mid n\geq 1,a_i\in A,v_i\in V\right\}\subseteq M.$$

我们用 $[-]$ 表示赋范空间中某个集合的线性张成的范数闭包；若取相对于另一种线性拓扑 τ的闭包，则记为 $[-]^\tau$。
希尔伯特空间的内积约定为在第一个因子上反线性。我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上有界算子构成的冯·诺依曼代数，用 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示紧算子构成的 C*-代数。于是，对于 $\mathcal{H}$ 一个希尔伯特空间以及 $\xi,\ \eta\in\mathcal{H}$，我们用 $\omega_{\xi,\ \eta}$ 表示向量泛函

$$\omega_{\xi,\eta}\colon\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathbb{C},\qquad\omega_{\xi,\eta}(x)=\langle\xi,x\eta\rangle,\qquad x\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\tag{0.1}$$

并用 $\theta_{\xi,\ \eta}$ 表示秩一算子

$$\theta_{\xi,\eta}\in\mathcal{K}(\mathcal{H}),\qquad\theta_{\xi,\eta}(\zeta)=\langle\eta,\zeta\rangle\xi,\qquad\zeta\in\mathcal{H}.\tag{0.2}$$

我们用

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})_*=\mathcal{K}(\mathcal{H})^*=[\omega_{\xi,\eta}\mid\xi,\eta\in\mathcal{H}]\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})^*$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上正规泛函的空间。我们也将这些记号用于不同希尔伯特空间之间的算子空间。

我们通常用粗体符号表示希尔伯特空间上的无界算子。对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的无界算子 $\mathbf{T}$，我们用 $\mathscr{D}(\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{H}$ 表示其定义域，默认假设该定义域在 $\mathcal{H}$ 中稠密。若$\mathbf{S},\mathbf{T}$是两个无界算子，且 $\mathscr{D}(\mathbf{S})\cap\mathscr{D}(\mathbf{T})$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，则用$\mathbf{S}+\mathbf{T}$表示定义在 $\mathscr{D}(\mathbf{S}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{T})$ 上的和算子。若$\mathbf{S},\mathbf{T}$是闭算子，且$\mathbf{S}+\mathbf{T}$ 可闭，则用$\mathbf{S}\dotplus\mathbf{T}$ 表示$\mathbf{S}+\mathbf{T}$的闭包。

希尔伯特空间上的自伴算子默认可以是无界的（定义域稠密）。本文所说的 正算子 始终指谱包含于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的自伴算子，而 严格正算子 指可逆的正算子（即 0 不属于点谱）。我们经常对自伴算子使用函数演算，相关介绍参见例如 [Sch12，第 5]章。

我们用 $\otimes$ 表示希尔伯特空间的张量积，或 C*-代数的最小张量积。我们用 $\bar{\otimes}$ 表示冯·诺依曼代数的空间张量积。在需要区分时，我们用 $\odot$ 表示向量空间的代数张量积。例如，我们用 $\mathbf{H}_1 \odot \mathbf{H}_2$ 表示自伴算子 $\mathbf{H}_i$ 的代数张量积，其定义域为代数张量积 $\mathscr{D}(\mathbf{H}_1) \odot \mathscr{D}(\mathbf{H}_2)$；而我们用 $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ 表示 $\mathbf{H}_1 \odot \mathbf{H}_2$，的闭包，该闭包仍为自伴算子；若二者均为（严格）正算子，则它也为（严格）正算子（参见[RS81，第 VIII.10]节）。

在向量空间或希尔伯特空间的张量积之间，我们用 Σ 表示翻转映射：

$$\Sigma\colon v \otimes w \mapsto w \otimes v.$$

对于希尔伯特空间之间的算子 X，我们用$X_{ij\ldots}$表示标准的腿编号记法。因此，例如，若 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ 是希尔伯特空间，且 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3)$，则

$$X_{23} = 1 \otimes X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3), \qquad X_{32} = 1 \otimes \Sigma X \Sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_2), \qquad \text{etc.}$$

致谢：KDC 感谢 J. Krajczok 和 W. Malfait 就本文的初稿进行讨论并提出意见。他还感谢 M. Yakimov 在本项目早期（非常早期）就簇代数理论展开讨论。GS 获得了美国国家科学基金会标准资助 DMS-2302624 的支持。AS 获得了欧洲研究理事会通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号948885）提供的支持，以及英国皇家学会大学研究奖学金的支持。

1. Skew-symmetric spaces and their representations

1.1. **斜对称空间**。

定义 1.1. 一个斜对称空间(V,ϵ)是一个有限维实向量空间 V，配备有一个斜对称双线性形式

$$\epsilon\colon V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \epsilon(v,w) = -\epsilon(w,v), \qquad v,w \in V.$$

若 ϵ 非退化，则称 V 辛；若 $\epsilon = 0$，则称为平凡。

斜对称空间的集合在取子空间、有限直和及共轭空间的运算下是封闭的

$$V = (V,\epsilon) \mapsto \overline{V} = (V,-\epsilon).$$

形式上，为了方便起见，我们将 V 底层向量空间的记号改为将其元素写作 v，其中 v 对应于 $v \in V$。

若上下文清楚，我们便从记号中省略 ϵ ，即写作

$$(v,w)=\epsilon(v,w),\qquad v,w\in V.$$

对于任意斜对称空间 V，我们都可以为其定义其根基

$$\mathrm{Rad}(V)=\{v\in V\mid (v,-)=0\}\subseteq V.$$

Then Rad(V)是 V的一个平凡斜对称子空间，而 ϵ 可传递到商空间 t

$$V_{\mathrm{red}}=V/\mathrm{Rad}(V), \tag{1.1}$$

且 V_{red} 是辛的。我们称 V_{red} 为 V的约化 。

若 $V'\subseteq V$是与Rad(V)互补的任意子空间，则 V'是V的辛子空间，并通过商映射与 V_{red} 同构。特别地，我们可以将 V 分解为斜对称子空间的内直和

$$V=\mathrm{Rad}(V)\oplus V'. \tag{1.2}$$

辛空间 V' 的拉格朗日子空间 是指维数最大的平凡斜对称子空间$W\subseteq V'$ 。对于这样的子空间，可以在 V'中选取一个拉格朗日互补子空间$\hat{}W$，称为 W的对偶 ，使得$\hat{}W$与 W之间的配对非退化。于是，对于 W的一组基 $\{e_1,\dots,e_m\}$，存在唯一的对偶$\hat{}$基 $\{\hat{}e_1、\dots、\hat{}e_m\}$，属于 W，使得

$$(\hat{e}_i,e_j)=\delta_{ij},\qquad 1\le i,j\le m.$$

记作 $Z_i=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{e_i,\hat{}e_i\}$， $Z_i\subseteq V'$是二维辛向量子空间，并且 (1.2) 可以进一步细化为斜对称子空间的内直和

$$V=\mathrm{Rad}(V)\oplus V'=\mathrm{Rad}(V)\oplus\bigoplus_{i=1}^{m}Z_i. \tag{1.3}$$

1.2. **斜对称空间的表示**。

定义 1 **.2.** 设 V是斜对称空间，并将 $(V,+)$ 视为局部紧群 .

对于 $\hbar\in\mathbb{R}^\times=\mathbb{R}\setminus\{0\}$，酉 *unitary* $\hbar$-表示 V是 $(V,+)$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的强连续酉 Ω-射影表示 $(\mathcal{H},\pi)$，其中 Ω 是酉二阶余循环

$$\Omega(v,w)=\Omega_\hbar(v,w)=e^{-\pi i\hbar(v,w)},\qquad v,w\in V.$$

具体而言，这意味着对每个 $v\in V$， $\pi(v)$ 都是 $\mathcal{H}$ 上的酉算子；对每个 $\xi\in\mathcal{H}$ ，映射 $v\mapsto\pi(v)\xi$ 范数连续；并且

$$\pi(v+w)=e^{-\pi i\hbar(v,w)}\pi(v)\pi(w),\qquad v,w\in V, \tag{1.4}$$

由此我们特别得到

$$\pi(v)\pi(w)=e^{2\pi i\hbar(v,w)}\pi(w)\pi(v),\qquad v,w\in V. \tag{1.5}$$

注 1.3。 请注意，原则上可以通过将 $\hbar$ 并入斜对称双线性形式而限定于 $\hbar=1$ 的情形。然而，在某些语境下，将 $\hbar$ 明确作为变形参数保留下来会更为方便。

注 1.4。 当 V 作为斜对称空间是平凡的时，定义 1.2 与 $\hbar$ 无关，并且仅仅恢复了（强连续）酉算子 V-表示的概念。

酉 $\hbar$-表示的子表示、直和与不可约性按显然的方式定义。

例 1.5。 在 V 上赋予勒贝格测度后， $L^2(V)$ 带有 V 的标准 酉$\hbar$-表示 $\pi = \pi_{\mathrm{st}}$ ，其定义如下：

$$(\pi(v)g)(w) = e^{\pi i\hbar(v,w)}g(w-v), \qquad v, w \in V, g \in L^2(V). \tag{1.6}$$

例 1.6。 假设 V 是辛空间，并选取互补拉格朗日子空间 W，$\hat{}W \subseteq V$。那么 $L^2(W)$ 带有 V 的唯一酉 $\hbar$-表示 $\pi = \pi_{\mathrm{Heis}}$，即 ˆ海森堡 $\hbar$-表示 （相对于极化 $(W, \hat{W})$），满足

$$(\pi(w)f)(w') = f(w'-w), \quad (\pi(\hat{w})f)(w') = e^{2\pi i\hbar(\hat{w},w')}f(w'),$$
$$f \in L^2(W), w, w' \in W, \hat{w} \in \hat{W}.$$

定理 1.7（斯通-冯诺依曼定理）。 若 V 是辛空间，则它的所有海森堡 $\hbar$-表示均不可约且酉等价。任何其他酉 $\hbar$-表示都是海森堡 $\hbar$-表示的（可能无限）直和。

若 V 是斜对称空间，且 $(\mathcal{H}, \pi)$ 是一个酉 $\hbar$-表示，则酉算子的单参数群

$$\pi_v \colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \qquad t \mapsto \pi(tv), \qquad v \in V$$

具有一个无穷小生成元

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\hbar = \mathbf{v}_\pi, \qquad v \in V,$$

因此 $\mathscr{D}(\mathbf{v})$ c 由满足 $t \mapsto \pi(tv)\xi$ 范数可微的那些向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 构成，其中

$$\mathbf{v}\xi = -i\frac{d}{dt}(\pi(tv)\xi)_{|t=0}, \qquad \xi \in \mathscr{D}(\mathbf{v}).$$

算子 $\mathbf{v}$ 是自伴的，我们记作

$$\mathbf{E}(v) = \mathbf{E}_\hbar(v) = \mathbf{E}_\pi(v) \tag{1.7}$$

对于 t 它的指数算子是严格正算子（通过函数演算得到） ：

$$\mathbf{E}(v) = e^{\mathbf{v}}, \qquad \pi(tv) = \mathbf{E}(v)^{it} = e^{it\mathbf{v}}, \qquad v \in V, t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

于是我们可以将 (1.4) 改写为

$$\mathbf{E}(v+w)^{it} = e^{-\pi i\hbar t^2(v,w)}\mathbf{E}(v)^{it}\mathbf{E}(w)^{it}, \qquad t \in \mathbb{R}, v, w \in V. \tag{1.9}$$

在下文中，我们使用以下简写

$$\mathbf{E}(v) \star \mathbf{E}(w) := \mathbf{E}(v+w), \qquad v, w \in V. \tag{1.10}$$

我们以 以下两个作用结束本节，它们作用于酉算子 $\hbar$-表示：

定义 1.8。若 V_1、V_2 是斜对称空间，分别在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1$、$\mathcal{H}_2$上带有酉算子 $\hbar$-表示 π_1、π_2，则它们的乘积是酉算子 $\hbar$-表示

$$\pi_\otimes \colon V_1 \oplus V_2 \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \qquad \pi_\otimes(v_1 \oplus v_2) = \pi_1(v_1) \otimes \pi_2(v_2). \tag{1.11}$$

用指数算子表示，这意味着

$$\mathbf{E}(v_1 \oplus v_2) = \mathbf{E}(v_1) \otimes \mathbf{E}(v_2), \qquad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2. \tag{1.12}$$

定义 1.9. 若 V 是斜对称空间，且 π 是定义在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 $\hbar$-表示，则其共轭 是酉算子 $\hbar$-表示

$$\overline{\pi}\colon \overline{V} \to \mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}), \qquad \overline{\pi}(\overline{v}) = \overline{\pi(-v)}, \tag{1.13}$$

其中 $\overline{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的共轭线性希尔伯特空间。

按照这一约定，我们可以写出

$$\mathbf{E}(\overline{v}) = \overline{\mathbf{E}(v)}, \qquad v \in V. \tag{1.14}$$

1.3. 高斯算子、量子二对数与量子指数映射。 固定 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$。设 V_1，V_2 为两个斜对称空间。对于一个乘积 $\hbar$-表示，我们定义酉算子

$$G(v_1, v_2) = G_\hbar(v_1, v_2) := e^{\frac{i\mathbf{v_1}\otimes\mathbf{v_2}}{2\pi\hbar}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \qquad v_i \in V_i, \tag{1.15}$$

称为 高斯算子。那么对于所有 v_i，$w_i \in V_i$，通过函数演算可得

$$G(v_1, v_2)\mathbf{E}(w_1 \oplus w_2)G(v_1, v_2)^* = \mathbf{E}((w_1 + (v_2, w_2)v_1) \oplus (w_2 + (v_1, w_1)v_2)), \tag{1.16}$$

$$G(v_1, v_2)^*\mathbf{E}(w_1 \oplus w_2)G(v_1, v_2) = \mathbf{E}((w_1 + (w_2, v_2)v_1) \oplus (w_2 + (w_1, v_1)v_2)). \tag{1.17}$$

更一般地，若有 $z = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in V_1 \otimes V_2$，使得 $\{v_i\}_{i=1}^n$（分别为 $\{w_i\}_{i=1}^n$）两两 ϵ-正交，则定义

$$G(z) := \prod_{i=1}^n G(v_i, w_i) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \tag{1.18}$$

这确实与因子的排列顺序以及 z 的表示无关。

定义 1.10。对于 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，考虑

$$W = W_{1/\hbar}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad W(z) := -\frac{\pi i}{2}\int_\Omega \frac{dy}{y}\,\frac{e^{-2iyz}}{\sinh(2\pi y)\sinh(2\pi\hbar y)}, \qquad z \in \mathbb{R}, \tag{1.19}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中任意一条曲线，从实轴上的 $-\infty$ 延伸至 $+\infty$，在原点周围于上半平面内有一个小凸起，并始终位于具有严格正虚部的分母极点下方。

我们定义*(Faddeev)* 量子二对数函数 $\varphi = \varphi_\hbar$ 以及与之密切相关的*(Woronowicz)* 量子指数函数 [2] $F = F_\hbar$ 如下：

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi(t) := \exp\left(\frac{i}{2\pi}W(t)\right), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1.20}$$

$$F\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, \qquad F(r) = \overline{\varphi}(\ln(r)), \qquad r > 0. \tag{1.21}$$

我们在附录 A 中进一步介绍量子二对数及其性质。例如，直接由引理 A.1 可得

- W 取实值，因此 φ 和 F 的值位于单位圆上，

[2] 按照这种术语，F 应被视为指数映射的一种类似物，其形式为 $t \mapsto e^{it}$，但限制在半群 $(\mathbb{R}_{>0},\ +)$ 上。关于这一解释的动机，见下文定理 1.16。

- F 可连续延拓至 0，且
$$F(0) = 1, \tag{1.22}$$
或者等价地，
- φ 可连续延拓至 $-\infty$，且
$$\varphi(-\infty) = 1. \tag{1.23}$$

给定希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的斜对称空间 V 的一个酉 $\hbar$-表示，我们用以下简写表示通过函数演算得到的相应酉算子：
$$\varphi(v) = \varphi(\mathbf{v}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \qquad v \in V. \tag{1.24}$$

定理 1.11。 对于 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，以下恒等式成立：
$$\varphi(v)\varphi(w) = \varphi(w)\varphi(v), \qquad \forall v, w \in V \ \textit{with}\ (v, w) = 0, \tag{1.25}$$
$$\varphi(v)\varphi(w) = \varphi(w)\varphi(v + w)\varphi(v), \qquad \forall v, w \in V \ \textit{with}\ (v, w) = 1. \tag{1.26}$$

这里，第一个恒等式是基本的函数演算，而第二个恒等式则是著名的*Kashaev* 五边形恒等式 [FK94、Wor00、FKV01]。更多信息请参阅附录 B。

定义 1.12。 希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的两个严格正算子$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 若斜交换，则存在 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$ 使得
$$\mathbf{A}^{it}\mathbf{B}^{is} = e^{2\pi i\hbar st}\mathbf{B}^{is}\mathbf{A}^{it}, \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{1.27}$$
更具体地说，我们称$\mathbf{A}$ 与$\mathbf{B}$ $\hbar$交换。

换言之，$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 是定义在 $\mathcal{H}$ 上的一个酉 $\hbar$-表示所导出的
$$V = \mathbb{R}a + \mathbb{R}b, \qquad (a, b) = 1,$$
其中$\mathbf{A}$ $= e^{\mathbf{a}}$ 且$\mathbf{B}$ $= e^{\mathbf{b}}$。注意， $\hbar$ 由算子对（$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$）唯一确定。我们还回顾记号（1.10），据此$\mathbf{A}^\alpha \star \mathbf{B}^\beta$ 是满足下述条件的唯一严格正算子
$$(\mathbf{A}^\alpha \star \mathbf{B}^\beta)^{it} = e^{-\pi i\hbar\alpha\beta t^2}\mathbf{A}^{i\alpha t}\mathbf{B}^{i\beta t}, \qquad \alpha, \beta, t \in \mathbb{R}. \tag{1.28}$$

现在回顾两个正算子$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 的形式和 $\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}$ 的概念，其中它们的平方根定义域的交稠密：它是满足下述条件的唯一正算子
$$\mathscr{D}((\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B})^{1/2}) = \mathscr{D}(\mathbf{A}^{1/2}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{B}^{1/2}),$$
$$\|(\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B})^{1/2}\xi\|^2 = \|\mathbf{A}^{1/2}\xi\|^2 + \|\mathbf{B}^{1/2}\xi\|^2, \qquad \forall \xi \in \mathscr{D}(\mathbf{A}^{1/2}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{B}^{1/2}).$$
更多信息请参见 F.3 节。注意，$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}$ 是严格正算子，当$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ 为严格正算子时。

注 1.13. 设 V 是一个斜对称空间，并在 V 上选取一个欧几里得结构。设 $V_{\mathbb{C}}$ 是其复化，并对每个 $t > 0, w \in V_{\mathbb{C}}$ 和 $\kappa \in \mathbb{C}$ 考虑函数
$$g_{t,w,\kappa}(v) = e^{-t\|v\|^2 + \langle w, v\rangle + \kappa}, \qquad v \in V.$$
如果 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$ 且（$\mathcal{H}$， π）是斜对称空间 V 的酉算子 $\hbar$-表示，记作 e
$$\pi(f)\xi = \int_V f(v)\pi(v)\xi \mathrm{d}v, \qquad \xi \in \mathcal{H}, f \in L^1(V),$$

并令

$$\mathcal{H}_0 = \text{linear span}\{\pi(g_{t,w,\kappa})\xi \mid \xi \in \mathcal{H}, t > 0, w \in V_{\mathbb{C}}, \kappa \in \mathbb{C}\}.$$

则 $\mathcal{H}_0$ 在 $\mathcal{H}$中稠密，并且对于任意 $v \in V$，有

$$\mathcal{H}_0 \subseteq \mathscr{D}(\mathbf{E}(v)),\ \mathbf{E}(v)\pi(g_{t,\ w,\ \kappa})\xi = \pi(g_{t,\ w+2tiv,\ \kappa+i\langle w,\ v\rangle})\xi, \qquad \xi \in \mathcal{H},\ t > 0,$$

$w \in V_{\mathbb{C}}$，$\kappa \in \mathbb{C}$.特别地，我们可以对任意有限个算子 $\mathbf{E}(v_1)$ .....，$\mathbf{E}(v_n)$取形式和。

命题 1.14。设 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$。对于 **A,B** $\hbar$-对易的严格正算子，有

$$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B} = F(\mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1})^* \mathbf{B} F(\mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1}). \tag{1.29}$$

我们在 F.3 节给出命题 1.14 的证明。据我们所知，这一结果在如此一般的情形下是新的。

注 1.15。根据 [Rui05, 附录 B], ，可以证明，当 $|\hbar| < 1$时，算子$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}$ 的定义域为 $\mathscr{D}(\mathbf{A}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{B})$，并且在该定义域上与算子$\mathbf{A} + \mathbf{B}$的代数和一致（按定义，其定义域为 $\mathscr{D}(\mathbf{A}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{B})$）。另一方面，当 $|\hbar| > 1$时，对称算子 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 不是本质自伴的，但$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}$ 是它的一个自伴扩张。

以下称为量子指数性质 [Wor00]。利用命题 1.14，这是由卡谢夫五边形关系通过函数演算直接得到的结果。

定理 1.　　16. 设 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$。若$\mathbf{A}$ 与$\mathbf{B}$ 是 $\hbar$-交换的严格正算子，则

$$F(\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}) = F(\mathbf{A})F(\mathbf{B}). \tag{1.30}$$

我们还记录以下性质，它由 (1.29) 立即得到：

引理 1.17. 假设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{C}$ 是严格正算子，且$\mathbf{A}$ 与$\mathbf{B}$ 反对称交换，并且存在 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$ 使得 ($\mathbf{A}$，$\mathbf{C}$) 和($\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$) $\hbar$-交换。那么$\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}$ 与$\mathbf{C}$ $\hbar$-交换，并且

$$\mathbf{C} \star (\mathbf{A} \boxplus \mathbf{B}) = \mathbf{C} \star \mathbf{A} \boxplus \mathbf{C} \star \mathbf{B}. \tag{1.31}$$

2. Pentagonal Fock–Goncharov flip

在本文余下部分中，我们固定一个 $n \geq 1$ 自然数，并令 $N = n + 1$。

2.1. A_n型斜对称空间。

定义 2.1。我们定义

$$C_N = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} \mid a + b + c = N\}. \tag{2.1}$$

我们用 $\triangledown_N$ 表示一个 $\binom{N+2}{2}$维斜对称空间，其基向量为$e_{a,b,c}$ ，对应于（a, b, c） $\in C_N$，其唯一非平凡的正配对如下：

$$(e_{a,b,c}, e_{a+1,b-1,c}) = (e_{a,b,c}, e_{a,b+1,c-1}) = (e_{a,b,c}, e_{a-1,b,c+1}) = \begin{cases} 1/2 & \text{if the common index is 0,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

我们将 $\triangledown_N$ 称为类型为 A_n 的斜对称空间（阶为 N）。

我们用 C'_N 表示截去了角顶点的 C_N，并用 $\triangledown'_N \subseteq \triangledown_N$ 表示由标记为 C'_N 的基向量张成的向量子空间。我们将 $\triangledown'_N$ 称为类型为 A_n 的“扭曲”斜对称空间，而 C'_N 则是与之对应的扭曲图。

我们用一个图来表示斜形式，其节点为 C_N；当斜积为 $\mathbf{1}$ 时，从 $(a,\ b,\ c)$ 到 $(a',\ b',\ c')$ 画一条有向箭头；当斜积为 $1/2$ 时，则画一条虚线有向箭头。

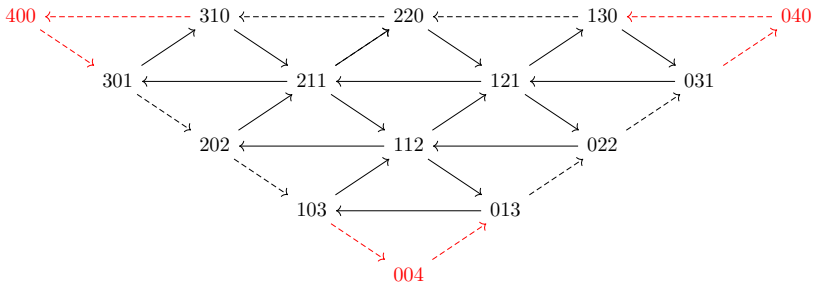


FIGURE 1. 图 C_4 图中包含 C'_4 内部的图。

定义 2.2。对于 $(a,\ b,\ c) \in C_N$ 和 $k \geqslant 0$，其中 $b+k \leq N$ 且 $0 \leq c-k$，我们定义

$$\left\{\begin{smallmatrix} a,b,c \\ a,b+k,c-k \end{smallmatrix}\right\} = \sum_{j=0}^{k} e_{a,b+j,c-j} \in \triangledown_N,$$

对于列/指标的循环移位，同样如此。

例如，我们有

$$\left\{\begin{smallmatrix} 3,0,2 \\ 3,1,1 \end{smallmatrix}\right\} \oplus \left\{\begin{smallmatrix} 3,2,0 \\ 1,2,2 \end{smallmatrix}\right\} = (e_{3,0,2} + e_{3,1,1}) \oplus (e_{3,2,0} + e_{2,2,1} + e_{1,2,2}) \in \triangledown_5^{\oplus 2}.$$

我们还使用简写记号

$$\nearrow_{s,k} = \left\{\begin{smallmatrix} N-s,0,s \\ N-s,k,s-k \end{smallmatrix}\right\}, \qquad \searrow_{s,k} = \left\{\begin{smallmatrix} s,N-s,0 \\ s-k,N-s,k \end{smallmatrix}\right\}, \qquad 0 \leq k \leq s \leq N, \tag{2.3}$$

并采用进一步的简写。

$$\nearrow_s = \nearrow_{s,s}, \qquad \searrow_s = \searrow_{s,s}, \qquad 0 \leq s \leq N. \tag{2.4}$$

类似地，记

$$\nwarrow_{s,k} = \left\{\begin{smallmatrix} 0,N-s,s \\ k,N-s,s-k \end{smallmatrix}\right\}, \qquad \swarrow_{s,k} = \left\{\begin{smallmatrix} N-s,s,0 \\ N-s,s-k,k \end{smallmatrix}\right\}, \qquad 0 \leq k \leq s \leq N \tag{2.5}$$

且 $\nwarrow_s = \nwarrow_{s,\ s}$，$\swarrow_s = \swarrow_{s,\ s}$，因此特别有

$$\swarrow_s = \nearrow_s, \qquad \nwarrow_s = \searrow_s, \qquad 0 \leq s \leq N \tag{2.6}$$

and

$$\swarrow_{s,k} = \nearrow_s - \nearrow_{s,s-k-1}, \quad \nwarrow_{s,k} = \searrow_s - \searrow_{s,s-k-1}, \qquad 0 \leq k < s \leq N. \tag{2.7}$$

为方便起见，我们在此记录上述向量之间配对的以下取值。

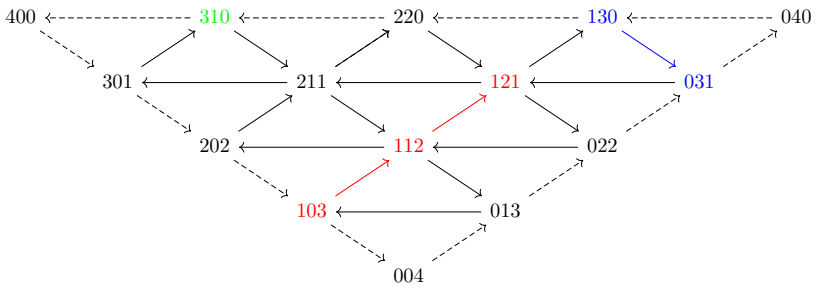


FIGURE 2. 向量 $\nearrow_{3,\ 2}$, $\searrow_{1,\ 1}$ 和 $\swarrow_{1,\ 0}$ 作为 C_4中的（无向）路径。

引理 2.3。 (1) 对于所有 $1 \leq s$、 $s' \leq n$、 $0 \leq k < s$ 和 $0 \leq k' < s'$,

$$(\nearrow_{s,k}, \nearrow_{s',k'}) = (\searrow_{s,k}, \searrow_{s',k'}) = \begin{cases} 1 & if \quad s' = s, k' > k, \\ 1/2 & if \quad s' = s+1, k' \leq k, \\ 1/2 & if \quad s' = s-1, k' < k, \\ 0 & if \quad |s - s'| \geq 2, \end{cases} \tag{2.8}$$

其余情形由斜对称性确定。

(2) 对于所有 $0 \leq s \leq N$, $1 \leq s' \leq n$ 和 $0 \leq k' < s'$,

$$(\nearrow_{s}, \nearrow_{s',k'}) = (\searrow_{s}, \searrow_{s',k'}) = \begin{cases} -1 & if \quad s' = s, \\ 1/2 & if \quad |s' - s| = 1, \\ 0 & if \quad |s' - s| \geq 2. \end{cases} \tag{2.9}$$

(3) 对于所有 $0 \leq s, t \leq N$,

$$(\nearrow_{s}, \nearrow_{t}) = (\searrow_{s}, \searrow_{t}) = 0. \tag{2.10}$$

(4) 对于所有 $1 \leq s, s' \leq n$, $0 \leq k < s$ 和 $0 \leq k' < s'$,

$$(\nearrow_{s,k}, \searrow_{s',k'}) = \delta_{k+k',s-1}(\delta_{k+s',n} - \delta_{k+s',N}). \tag{2.11}$$

(5) 对所有 $0 \leq s \leq N$、 $1 \leq s' \leq n$ 和 $0 \leq k' < s'$,

$$(\nearrow_{s}, \searrow_{s',k'}) = \begin{cases} 1 & if \quad s' = N - s, \\ -1/2 & if \quad |s' - (N-s)| = 1, \\ 0 & if \quad |s' - (N-s)| \geq 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

(6) 对所有 $1 \leq s \leq n$、 $0 \leq k < s$ 和 $0 \leq s' \leq N$,

$$(\nearrow_{s,k}, \searrow_{s'}) = 0. \tag{2.13}$$

(7) 对所有 $1 \leq s$、 $t \leq n$,

$$(\nearrow_{s}, \searrow_{t}) = \begin{cases} 1 & if \quad t = N - s, \\ -1/2 & if \quad |t - (N-s)| = 1, \\ 0 & if \quad |t - (N-s)| \geq 2. \end{cases} \tag{2.14}$$

证明。 检查即可立即得出。 □

在继续之前，我们还引入以下记号：

定义 2.4。我们记

$$\nearrow C_N = \{(a,b,c) \in C_N \mid 1 \leq a \leq n\} \subseteq C'_N,$$

因此，$\nearrow C_N$ 是C'_N 去掉右下方线条后的结果。我们令

$$\nearrow C'_N = \{(a,b,c) \in C_N \mid 1 \leq a \leq n, c > 0\} \subseteq C'_N,$$

因此，$\nearrow C'_N$ 是C'_N 去掉右下方和上方线条后的结果。

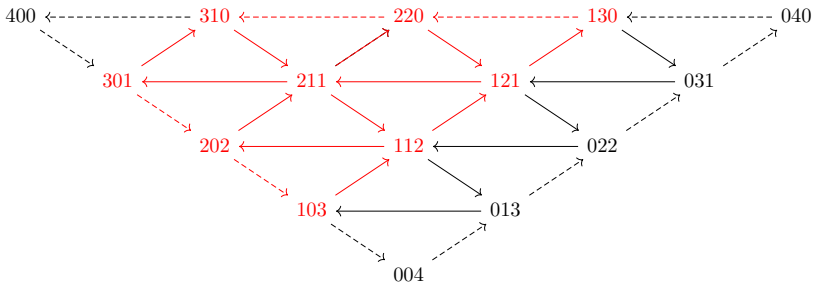
类似地，我们令

$$\searrow C_N = \{(a,b,c) \in C_N \mid 1 \leq b \leq n\} \subseteq C'_N,$$

因此，$\searrow C_N$ 是 C'_N 去掉左下方线条后的结果，并且

$$\searrow C'_N = \{(a,b,c) \in C_N \mid 1 \leq b \leq n, a > 0\} \subseteq C'_N,$$

因此，$\searrow C'_N$ 是 C'_N，去掉了其左下和右下的线。



↗FIGURE 3. 图 C_4 内部 C_4。

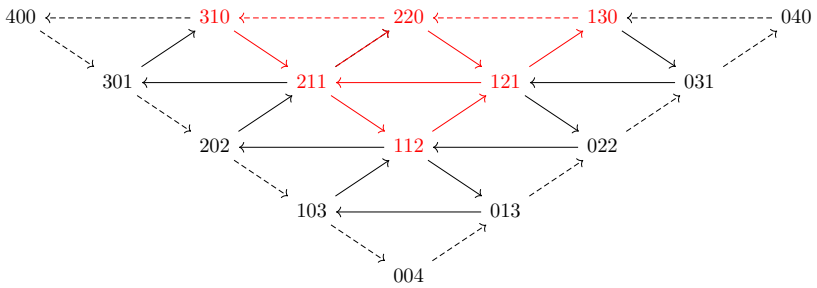


FIGURE 4. 图 $\searrow C'_4$ 内部 C_4。

定义 2.5。我们设

$$U_N^- \subseteq B_N^- \subseteq \nabla'_N \tag{2.15}$$

分别由标记为 $\nearrow C'_N$ 和 $\nearrow C_N$ 的基向量张成的向量空间。

类似地，我们记

$$U_N^+ \subseteq B_N^+ \subseteq \nabla_N' \tag{2.16}$$

分别由标记为 $\overset{\searrow}{C}{}_N'$ 和 $\overset{\searrow}{C}{}_N$的基向量张成的向量空间。

我们进一步定义

$$T_N^- = \mathrm{span}\{\overset{\nearrow}{e}_s \mid 1 \le s \le n\} \subseteq B_N^-, \qquad T_N^+ = \mathrm{span}\{\overset{\searrow}{e}_s \mid 1 \le s \le n\} \subseteq B_N^+, \tag{2.17}$$

使得

$$B_N^- = T_N^- \oplus U_N^-, \qquad B_N^+ = T_N^+ \oplus U_N^+. \tag{2.18}$$

引理 2.6。∇_N' 的子空间 B_N^- 和 B_N^+ 在斜配对下构成非退化配对。

证明。设

$$\lambda = \sum_{(a,b,c)\in \overset{\nearrow}{C}{}_N} \lambda_{a,b,c} e_{a,b,c}$$

设 B_N^-是一个与 B_N^+正交的向量。于是，对 a应用归纳法，并对形如 $e_{a,\ b,\ c}$（其中 $(a,\ b,\ c) \in C_N$）的向量取配对，再对 b 作递减归纳，可得 λ 必须在东北方向对角线上为常数，即

$$\lambda = \sum_{(a,b,c)\in \overset{\nearrow}{C}{}_N} \lambda_a e_{a,b,c}.$$

但是，对形如 $e_{a,\ b,\ 0}$的向量取配对（其中 $(a,\ b,\ 0) \in C_N$），可知，令 Λ 为其分量为 λ_a的列向量，则必须有

$$B\Lambda = 0,$$

其中 B 是类型 A_n 的 Cartan 矩阵（见下文 (2.20)）。因此 $\Lambda = 0$。 □

推论 2.7。设

$$D_N := \nabla_{N,\mathrm{red}}' \tag{2.19}$$

令 ∇_N' 为 (1.1) 中的约化。则通过从 ∇_N' 出发的商映射，我们得到嵌入

$$B_N^{\pm} \hookrightarrow D_N.$$

我们仍用记号 $e_{a,\ b,\ c}$ 等表示这些元素在 D_N中的像。

定义 2.8. 设 B 为 A_n 型的 Cartan 矩阵,

$$B \in M_n(\mathbb{Z}), \qquad B_{rs} = 2\delta_{r,s} - \delta_{|r-s|,1}. \tag{2.20}$$

我们置

$$\overset{\nearrow}{\varpi}_s := \sum_{t=1}^{n} (B^{-1})_{st} \overset{\nearrow}{e}_t \in T_N^-, \qquad 1 \le s \le n, \tag{2.21}$$

类似地

$$\overset{\searrow}{\varpi}_s := \sum_{t=1}^{n} (B^{-1})_{st} \overset{\searrow}{e}_t \in T_N^+, \qquad 1 \le s \le n. \tag{2.22}$$

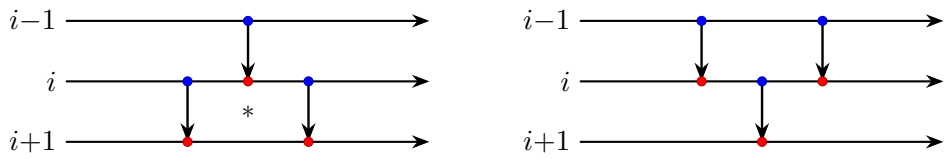


FIGURE 5. 辫子移动 $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ 的局部图修改。

由 (2.9) 和 (2.12) 可得，对所有 $1 \leq s, s' \leq n$ 和 $0 \leq k' < s'$，均有

$$(\overset{\nearrow}{\varpi}_s, \overset{\nearrow}{e}_{s',k'}) = (\overset{\searrow}{\varpi}_s, \overset{\searrow}{e}_{s',k'}) = -\frac{1}{2}\delta_{s,s'}, \qquad (\overset{\nearrow}{\varpi}_s, \overset{\searrow}{e}_{s',k'}) = \frac{1}{2}\delta_{s,N-s'}, \tag{2.23}$$

而由 (2.10) 和 (2.14) 可得

$$(\overset{\nearrow}{\varpi}_t, \overset{\nearrow}{\varpi}_s) = 0 = (\overset{\searrow}{\varpi}_t, \overset{\searrow}{\varpi}_s), \qquad (\overset{\nearrow}{\varpi}_t, \overset{\searrow}{e}_s) = (\overset{\nearrow}{e}_t, \overset{\searrow}{\varpi}_s) = \frac{1}{2}\delta_{s,N-t} \qquad 1 \leq s, t \leq n. \tag{2.24}$$

2.2. **着色辫子图**。设 B_m 是由 m 股构成、具有标准生成元 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{m-1}$ 的辫群。

定义 2.9。所谓正的 m股辫子词，是指由字母表 $\{\sigma_i\}_{i=1}^{m-1}$ 中的元素按序组成的集合；也就是说，不允许将生成元的逆元作为字母。

如果两个辫子词**i**、**i**′ 突变等价，即它们可以通过以下三类操作中的某个序列相互转化，其中前两类称为突变操作：

(1) 辫子变换，由子串替换 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ 构成；(2) 1- *or* $(m-1)$-*Demazure* 变换，分别由子串替换 $\sigma_1\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_1$ 和 $\sigma_{m-1}\sigma_{m-1} \leftrightarrow \sigma_{m-1}$ 构成；(3) 交换移动，由在 $|i-j| \geq 2$ 时进行的子串替换 $\sigma_i\sigma_j \leftrightarrow \sigma_j\sigma_i$ 构成。

每个正 m股辫子词 $\mathbf{i}$ 都通过以下归纳构造确定一个一维带角流形 $\Gamma_{\mathbf{i}}$：对于由单个生成元 σ_i 构成的字，对应的子集 $\Gamma_{\sigma_i} \in \mathbb{R}^2$ 由 m 个水平闭区间 $h_j = [0,1] \times \{-j+1\}$（$1 \leq j \leq m$）以及一条连接$h_i$ 和 h_{i+1}的垂直闭区间 $\{1/2\} \times [-i+1, -i]$ 的并给出。接着，我们规定，对于任意连接 $\mathbf{i} = \mathbf{i}' * \mathbf{i}''$，其对应的流形$\Gamma_{\mathbf{i}}$ 通过粘合 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 右边界上的每个点 $(1, -j)$ 与 $\Gamma_{\mathbf{i}''}$左边界上对应的点 $(0, -j)$，并将水平区间重新缩放至 $[0,1]$而得到。所得带角流形自然嵌入圆盘 $\mathbb{D}^2$，若两个这样的带角流形环境同痕，则视为相同。注意，此时 $\Gamma_{\mathbf{i}} = \Gamma_{\mathbf{i}'}$ 当且仅当 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}'$ 可通过一系列交换移动相连。

我们可以将 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 扩展为一个平面有向图，其顶点为角点和边界点，边为连接两个角点或一个角点与一个边界点的区间，并规定水平方向的边朝右、垂直边朝下。我们进一步将垂直边的源点标为蓝色，将垂直边的汇点标为红色。

我们将以这种方式得到的平面图 $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{i}}$ 称为辫图。下文中我们将简称为图。于是，说两个图 Γ, Γ' 通过一次突变操作相关，意味着我们可以找到代表元 $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{i}}$ 和 $\Gamma' = \Gamma_{\mathbf{i}'}$，使得$\mathbf{i}$ 和$\mathbf{i}'$



FIGURE 6. Demazure 变换的局部图修改 $\sigma_1\sigma_1 \mapsto \sigma_1$。

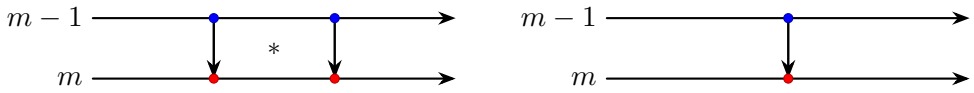


FIGURE 7. Demazure 变换的局部图修改 $\sigma_{m-1}\sigma_{m-1} \mapsto \sigma_{m-1}$.

通过该突变操作相关。在图的层面上，这类操作可以用局部方式表示：

(1) 如果 $\mathbf{i}$、$\mathbf{i}'$ 通过辫子移动相关联，则对应的有向图 $\Gamma_{\mathbf{i}}$、$\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 在图 5 所示的邻域之外完全相同。

(2) Demazure 变换的情形类似，见图 6 和图 7。

显然，变异可以直接在图的层面上定义，此时我们称 Γ 在一个单元格处可突变，如果 Γ 可以在局部表示为形式 5、6 或 7，其中可突变单元由 $*$ 指示。

现在设 V 为一个斜对称空间。

定义 2.10. 若 Γ 是一个辫图，则 V-着色 $\{v_f\}$ 是指对 Γ 的各个面f 以线性无关元素 $v_f \in V$ 进行标记的映射，该映射为

$$\ell\colon \mathrm{Faces}(\Gamma) \to V, \tag{2.25}$$

满足以下条件：

(1) 若两个面 f, g 之间没有连接红色顶点和蓝色顶点的边，则有 $(v_f, v_g) = 0$；(2) 若 f, g 是被一条连接红色顶点和蓝色顶点的边隔开的两个面，且从 f 进入 g 时红色顶点位于右侧，则有 $(v_f, v_g) = 1$。(3) 若 f, g 是被一条连接红色（分别为蓝色）顶点与边界顶点的边隔开的两个面，且从 f 进入 g 时边界顶点位于左侧，则有 $(v_f, v_g) = 1/2$（分别有 $(v_f, v_g) = -1/2$）。

图的变异也可以提升到 V-着色辫子图的层次：

定义 2.11. 若$\mathbf{i}'$ 由$\mathbf{i}$ 经一次辫子移动 $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ 得到，且 ℓ 是 $\Gamma_{\mathbf{i}}$的一个 V-标记，则我们按图 8 定义 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 的变异后的标记 $\mu_v(\ell)$；对于图中未出现的所有面， $\mu_v(\ell)$与 ℓ 一致。

类似地，如果$\mathbf{i}'$ 是通过一次编织变换 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$从$\mathbf{i}$ 得到的，则变异标记定义如图 9 所示。

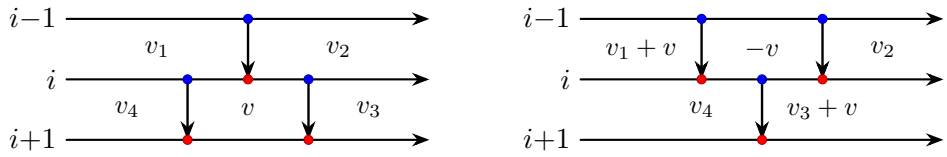


FIGURE 8. 辫子变换 $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$的局部 V-标记修改。

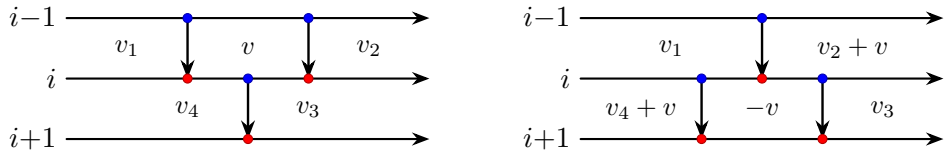


FIGURE 9. 辫子变换 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$的局部 V-标记修改。



FIGURE 10. 1-Demazure 变换的局部 V-标记修改。



FIGURE 11. $m-1$-Demazure 变换的局部 V-标记修改。

最后，如果$\mathbf{i}'$ 是通过一次 Demazure 变换从$\mathbf{i}$ 得到的，则变异标记定义如图 10 或图 11 所示。

容易验证，经过变异后， V-着色仍然是 V-着色。在这种情况下，标记由 V中的不同元素给出，因此我们也可以直接用标记来指称单元格，例如说“面 v 是一个可变面”。不过请注意，连续进行两次辫子变换 $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \to \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ 会使我们回到原图，但并非原来的 V-标记。

设 $(\Gamma_{\mathbf{i}}, \ell)$ 是与正编织字 $\mathbf{i}$ 对应的 V-标记图，且 $\mathbf{i}_0 \subseteq \mathbf{i}$ 是 $\mathbf{i}$ 的某个子串（不一定连续）。若以 $\mathbf{i} \setminus \mathbf{i}_0$ 表示从 $\mathbf{i}$ 中删除子字 $\mathbf{i}_0$，后得到的字，则图 $\Gamma_{\mathbf{i}\setminus\mathbf{i}_0}$ 是从 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中删除 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 内与 $\mathbf{i}_0$ 相关联的垂直边后构造得到的。因此， $\Gamma_{\mathbf{i}\setminus\mathbf{i}_0}$ 的面是 $(\Gamma_{\mathbf{i}}, \ell)$ 的面的并集。

定义 **2.12 定义。** 若 $\mathbf{i}_0 \subseteq \mathbf{i}$ 且 ℓ 是 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 上的 V-标记，则我们在 $\Gamma_{\mathbf{i}\setminus\mathbf{i}_0}$ 上定义标记

$$\bar{l}(\overline{f}) = \sum_{f \subseteq \overline{f}} l(f) \tag{2.26}$$

其中，求和遍及 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中所有包含在 $\Gamma_{\mathbf{i}\setminus\mathbf{i}_0}$ 的面 f 内的面 f。

直接验证可知，如果 ℓ 是一个 V-着色，那么 ℓ 也是一个 V^{-}-着色。

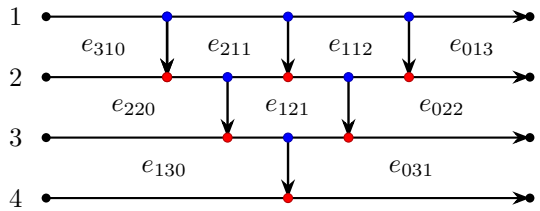


FIGURE 12. 用于 $N=4$ 的 ∇_N 标记图 $\Gamma_{\mathbb{E}}$。边界顶点以黑色绘制。

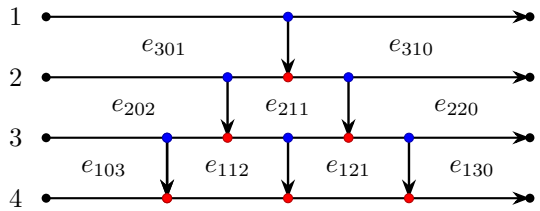


FIGURE 13. 用于 $N=4$ 的 ∇_N 标记图 $\Gamma_{\mathbb{F}}$。边界顶点以黑色绘制。

定义 2.13。设 p 是一个 V-标记图 $(\Gamma_{\mathbf{i}},\ell)$ 中从左边界顶点 a 出发并终止于右边界顶点 b 的有向路径。我们将其权 w_p 和调整后的权 u_p 定义为以下各项之和

$$w_p=\sum_{f\subseteq p} v_f\in V,\qquad u_p=w_p-w_{p_{b,b}}\in V, \tag{2.27}$$

其中我们用 $f\subseteq p$ 表示面 f 位于 p 之下，并且 $p_{b,\ b}$ 是图 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中连接边界源顶点 b 与边界汇点 b 的唯一有向路径。

考察图 8、9、10 和 11 可知，这条路径的权在辫变换和 Demazure 变换下保持不变。

我们将使用的基本彩色图如下：

定义 2.14. 我们将 $\Gamma_{\mathbb{E}}=(\Gamma_{\mathbf{w}},\ \ell)$ 定义为沿分解排列的 $\triangledown_N$-彩色图

$$\mathbf{w}_0=(\mathbf{w}_n,\mathbf{w}_{n-1},\dots,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1),\qquad \mathbf{w}_k=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k), \tag{2.28}$$

其中向量 $e_{a,\ b,\ c}$ 位于第 b 行的第 c 个单元格中。

类似地，我们将 $\Gamma_{\mathbb{F}}=(\Gamma_{\mathbf{w}_0},-\ell)$ 定义为沿分解排列的 $\triangledown_N$-彩色图

$$\overline{\mathbf{w}}_0=\overline{\mathbf{w}}_n\overline{\mathbf{w}}_{n-1}\dots\overline{\mathbf{w}}_2\overline{\mathbf{w}}_1,\qquad \overline{\mathbf{w}}_k=(\sigma_n,\sigma_{n-1},\dots,\sigma_{N-k}), \tag{2.29}$$

其中向量 $e_{a,\ b,\ c}$ 位于第 a 行的第 b 个单元格中。

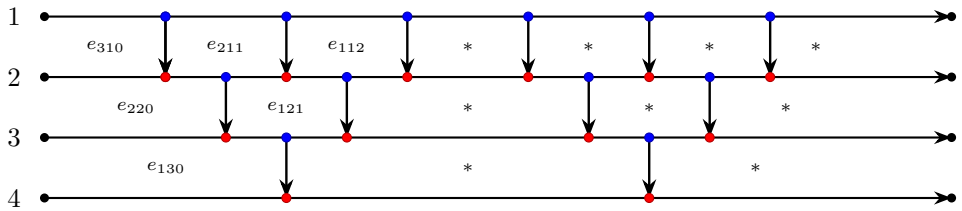
关于 $N=4$ 情形的示意图，参见图 12 和图 13。

为便于后续使用，我们在此给出以下引理。

引理 2.15. 令 $\Gamma'_{\mathbf{w}_0}$ 为 $\Gamma_{\mathbf{w}_0}$ 的 $\triangledown_N$-着色子图，即去掉每一行最右侧的所有竖线。考虑任意包含 $\triangledown_N \subseteq V$ 以及将 $\Gamma'_{\mathbb{E}}$ 扩张为一个 V-着色$\tilde{}$图结构 $(\tilde{\Gamma}_{\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0}, \ell)$。

$\tilde{}$于是，存在一个变异序列，可将$(\tilde{\Gamma}_{\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0})$ 化简为一个 V-标记图$(\Gamma_{\mathbf{w}_0}, \ell')$，使得 $\ell_{|\Gamma'_{\mathbf{w}_0}} = \ell_{|\Gamma_{\mathbf{w}_0}}$。

因此，在情况 $N = 4$下，引理指出，图 14 可以化简为图 15：



~ ~FIGURE 14. 标记图 $(\tilde{\Gamma}_{\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0}, \ell)$。

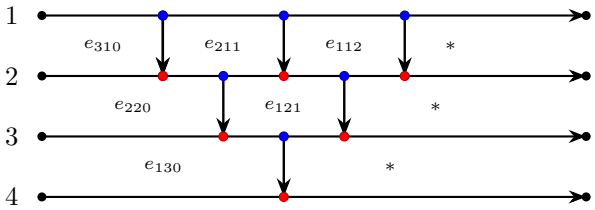


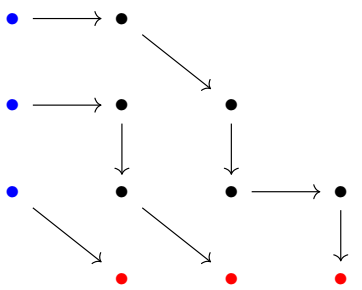
FIGURE 15. 标记图 $(\Gamma_{\mathbf{w}_0}, \ell')$。

证明。 实际上，我们声称，只使用这些变异就能找到所需的变异序列

$$\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i, \qquad \sigma_1\sigma_1 \mapsto \sigma_1. \tag{2.30}$$

为了高效地说明这一点，我们将以稍有不同的方式编码这些图，借鉴蛇形路径的思路，参见 [FG06]。

考虑所有可能的 $\mathscr{P}'_n$ 由 n 中的 $\mathbb{Z}^2$条不相交路径组成的族 P，其中第i条路径连接 $(0, i)$ 和 $(i, 0)$，并且每个单位正方形内只允许路径片段为 $\rightarrow$，$\downarrow$，$\searrow$ 的情况（即路径经过该正方形时）。我们可以方便地将这样一族路径编码为矩阵 $P \in M_n(\mathbb{Z})$，其第(k, l)个元素等于 i，当且仅当第 i条路径经过顶点(k, l)（若没有路径经过该顶点，则该元素为 0）。为方便起见，我们在该矩阵的左侧和底部补上常向量 $(1, 2, \ldots, n)$ 和 $(n, n-1, \ldots, 1)$。



，

$$P = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ \hline & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \in \mathscr{P}_3$$

（为了与图的位置保持一致，我们将从底部开始、从 0 起计数矩阵的行，并从左侧开始、从 0 起计数列。）

接着，我们在 $\mathscr{P}'_n$ 中考虑矩阵具有上述固定边界的族 $\mathscr{P}_n$，并要求其中任意一个 2×2 方块（包括含有边界项的方块）都属于以下类型之一：

$$\begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i & i-1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i & i-1 \\ i & i-1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i-1 & i-1 \\ i & i \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} i & i-1 \\ i & i \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} i-1 & i-2 \\ i & i-1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

所有项均介于 0 和 n 之间。

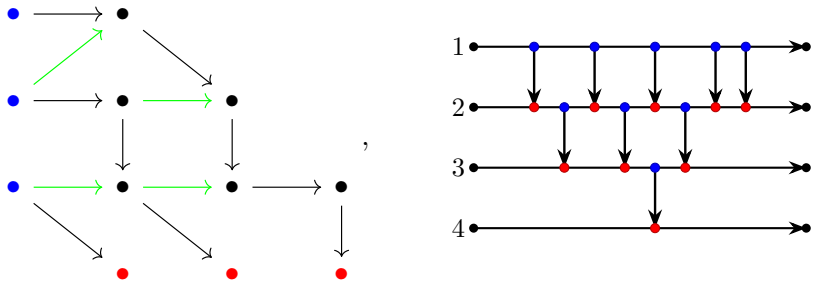
对于每个 $P \in \mathscr{P}_n$，我们可以按如下方式关联一个辫图 Γ_P：如果一个顶点与其右侧相邻顶点位于不同的路径上，就将它们连接起来；否则，将该顶点与其东北侧相邻顶点连接起来（后者必然位于另一条路径上）。必然地，如果一个顶点位于第 i 条路径上，它就与第 $i-1$ 条路径上的一个顶点相连。

接着我们构造一个映射

$$P \mapsto \Gamma_P, \tag{2.32}$$

将 P 关联到辫图 Γ_P：其第 i 行的单元格依次标记为 P 的第 i 条路径上的顶点；并且，当且仅当对应于 k 和 l 的顶点按上一段所述方式相连时，i 行第 k 个单元格的右侧边界上方才放置 $i-1$ 行的第 l 个单元格。

例如，对于（2.31），我们得到

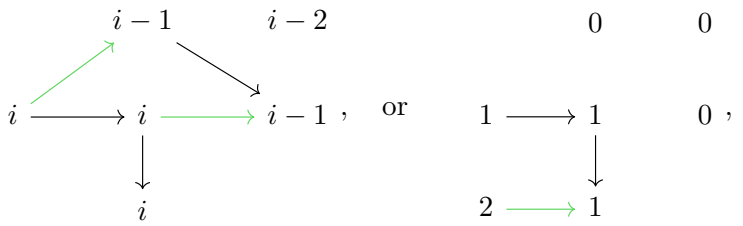


(2.33)

现在规定，对于 $P \in \mathscr{P}_n$，如果矩阵 P' 再次属于 $\mathscr{P}_n$，则称其可在位置 $(k,\ l)$ 处突变，其中 P' 除在一个条目 $(k,\ l)$ 处外处处等于 P，对于 $1 \le k,\ l \le n$，其中

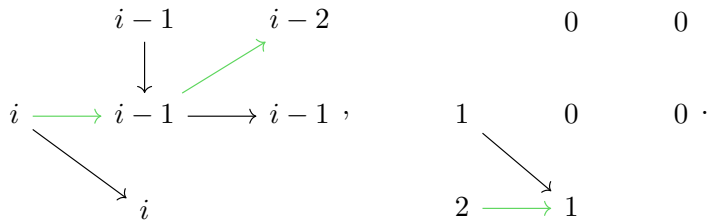
$$P'_{(k,l)} = P_{(k,l)} - 1.$$

容易验证，只有在路径经过的顶点 $(k,\ l)$ 处才能进行此类变异，例如经过第 i 个顶点时，其局部构型呈现为以下形式之一：



(2.34)

其中（k, l）为中心顶点。变异后，我们得到以下图：



(2.35)

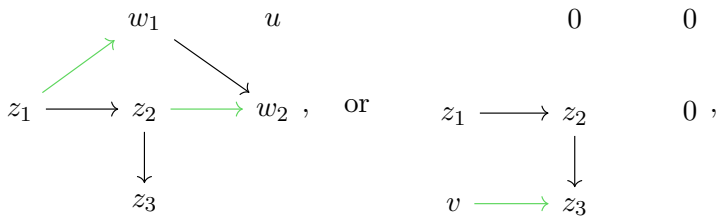
接下来可以立即进一步验证，在对应关系 (2.32) 下，这些变异恰好对应于 (2.30) 中的辫子变换。

最后，现在考虑 V 一个向量空间，并令 $\mathscr{P}_n(V)$ 为由有序对 (P, ℓ) 构成的集合，其中 $P \in \mathscr{P}_n$ 且 $\ell\colon\ P \to V$（将 P 视为其路径经过的顶点集合——其他顶点 (k, l) 可赋予零向量）。因此， $\mathscr{P}_n(V)$ 的元素可表示为取值于 $\mathbb{Z} \times V$ 的矩阵，例如：

$$\left[\begin{array}{c|ccc} (1, w_{10}) & (1, w_{11}) & 0 & 0 \\ (2, w_{20}) & (2, w_{21}) & (1, w_{22}) & 0 \\ (3, w_{30}) & (2, w_{31}) & (1, w_{32}) & (1, w_{33}) \\ \hline & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \in \mathscr{P}_3(V)$$

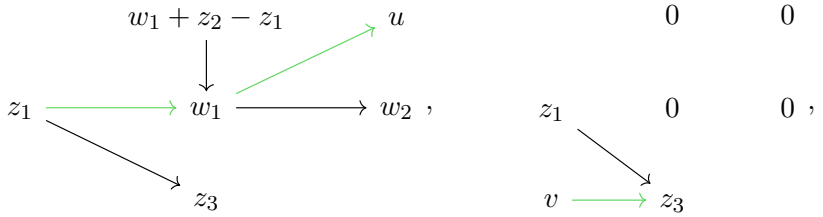
（无需对最底行赋权。）

现在还需要说明 $\mathscr{P}_n(V)$ 中这类带权元素如何进行变异：具体而言，像之前一样将 P 变异为 P'；若 P 的局部图属于 (2.34) 中的一种形式，且其赋权为



(2.36)

那么变异后，其权为



(2.37)

其余所有权保持不变。

若现在将 (2.32) 扩展至

$$\mathscr{P}_n(V) \to \{V\text{-colored graphs}\}, \tag{2.38}$$

通过将 $P \in \mathscr{P}_n(V)$ 映射为彩色图 (Γ_P, ℓ)，其中 ℓ 将 i 行第 k 个单元格赋值为 P 的第 i 条路径上第 k 个位置和第 $k-1$ 个位置的权之差，便可再次轻易验证，变异 (2.37) 对应于 (8) 和 (10) 中的变换

（注意，如果只想对加权图进行变异，则无需要求 V 上存在斜对称空间结构 $\Gamma_{\mathbf{i}}$。）

~现在我们终于可以推导出，$(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0, \ell)$ 可以化简为 $(\mathbf{w}_0, \ell')$。事实上，在 $\mathscr{P}_n(V)$ 的层面上，这意味着我们要找到一条变异路径，从 $P_n(2)$ 到 P_n，其中

$$P_n(2)_{(k,l)} \begin{cases} (N-k, \searrow e_{kl}) & \text{if} \quad l < k, \\ (N-l, \searrow f_{l,n-k}) & \text{if} \quad l \geq k. \end{cases}, \qquad P_{n,(k,l)} = (\max 0, N-k-l, \searrow e_{k-l,l}),$$

其中我们取 $\searrow e_{i,j} = 0$ （若定义不良），并且再次注意，我们不关心矩阵底部的↘边界行；向量 $f_{s,k} \in V$ 的选取应使它们在映射 (2.38) 下对应于标记 ℓ。

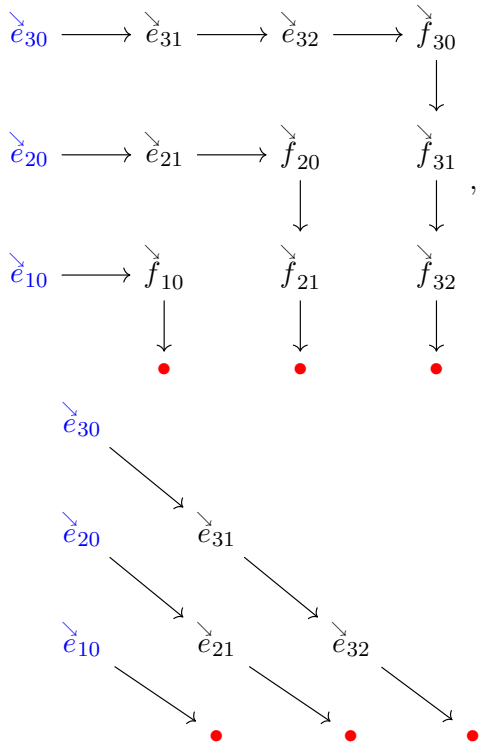
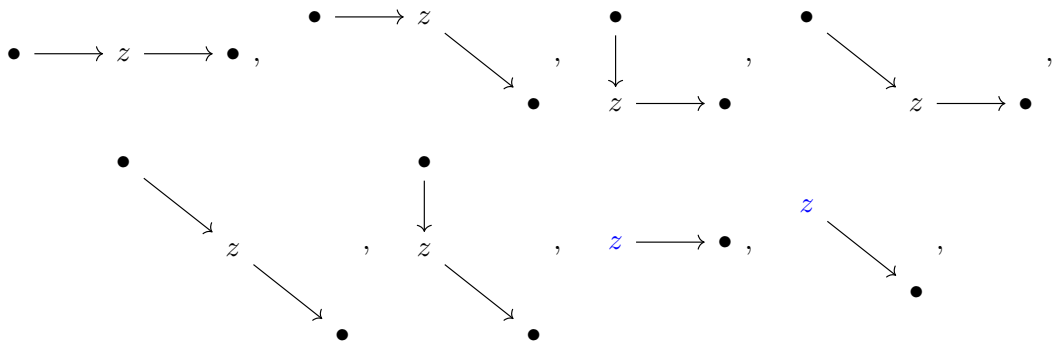


FIGURE 16. 情形 $P_3(2)$ 和 P_3

首先，很明显，我们可以在无权路径的层面上找到这样一列变异：这直接源于正辫群幺半群中关于 Demazure关系的约化组合学。不过，让我们用上述图给出一个直接证明：确实，如果在某个阶段，我们已经到达这样的情形：路径n、$n-1$、.....、$i+1$ 均为倾斜路径（仅由 $\searrow$- 箭头组成），那么第 i 条路径必定有一个形如 $\nearrow\downarrow$ 的拐角。如果这个拐角无法置于 (2.34) 中第一个图的左下角，那么这种形状的拐角必定会延伸到下一条路径 $i-1$。如果这种情况一直持续到我们到达第 1 行，就意味着第一行上有一个这种形状的拐角，因此我们可以对 (2.34) 中的第二个图应用变异。这意味着唯一没有变异的图是 P_n。

为了说明将 P_n(2) 约化为 P_n 也与权相容，我们注意到，从 (2.36) 到 (2.37) 的变异具有以下性质：如果一个权向量 z在变异前出现在以下某种构型中



那么，同一个权向量在变异后也会再次出现在这些形状之一的某处。特别是，原始权向量 $\searrow e_{N-i,k}$，对于 $1<i<N, 0\leq k<N-i$，始终会按照它们在该行上的原始顺序，出现在第 i 行的某处。根据基数可知，它们必定 就是图 P_n 中所示的权。

□

2.3. **通过形式和得到配分函数与标准生成元**。 现在设 $\hbar\in\mathbb{R}^\times$，并设 $(\mathcal{H},\pi)$ 是 V 在 $\mathcal{H}$ 上的酉算子 $\hbar$-表示。回顾记号 (1.8)。

定义 2.16。 设 (Γ,ℓ) 是一个 V-着色辫图。

配分函 数 (Γ,ℓ) 在边界条件 (a,b) 下定义为形式和

$$Z_{\Gamma,\ell,a,b}:=\boxplus_{p:a\to b}\mathbf{E}(u_p),\quad 1\leq a<b\leq m, \tag{2.39}$$

其中我们对所有路径求和： p： $a\to b$ 属于 Γ。

注意，上述形式和是有意义的（见注1.13）。若$\mathbf{i}$ 是 B_m中的一个正编织字，我们进一步简记为

$$Z_{\mathbf{i},\ell,a,b}=Z_{\Gamma_{\mathbf{i}},\ell,a,b}, \tag{2.40}$$

并记为

$$Z_{\mathbf{i},\ell}=Z_{\mathbf{i},\ell,1,m}=\boxplus_{p:1\to m}\mathbf{E}(w_p) \tag{2.41}$$

从左上边界顶点1出发并终止于右下边界顶点 m的路径的配分函数。

我们利用这一构造定义一些正算子，它们类似于子代数 $U_q(\mathfrak{n}^{\pm})\subseteq U_q(\mathfrak{sl}(N,\ \mathbb{C}))$的PBW生成元；这些子代数对应于严格上三角／下三角矩阵 $\mathfrak{n}^{\pm}\subseteq\mathfrak{sl}(N,\ \mathbb{C})$的幂零子代数。

对于 $1\leq r<s\leq N$，我们将由水平线 r 和 s 所界定的、图 12 中所示图的子图定义为 ∇_N 标记的 $\mathbb{E}$- 图 $\Gamma_{\mathbb{E}_{rs}}$。我们用 $\mathbf{i}_{\mathbb{E}_{rs}}$ 表示与子图 $\Gamma_{\mathbb{E}_{rs}}$ 对应的正编织字，其标记继承自 $\Gamma_{\mathbb{E}}$。类似地，我们按照图 13 所示构造 ∇_N 标记的 $\mathbb{F}$-图。

定义 2.17。我们将以下正算子称为标准生成元

$$\mathbf{E}_{rs} = Z_{\mathbf{i}_{\mathbb{E}_{rs}},\ell} = Z_{\Gamma_{\mathbb{E}},\ell,r,s},\quad 1 \le r < s \le N \tag{2.42}$$

and

$$\mathbf{F}_{rs} = Z_{\mathbf{i}_{\mathbb{F}_{rs}},\ell} = Z_{\Gamma_{\mathbb{F}},\ell,r,s},\quad 1 \le r < s \le N. \tag{2.43}$$

例 2.18。对于 $N=3$，我们有

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}(\searrow_{2,0}) \boxplus \mathbf{E}(\searrow_{2,1}),\quad \mathbf{E}_{2,3} = \mathbf{E}(\searrow_{1,0}),\quad \mathbf{E}_{1,3} = \mathbf{E}(\searrow_{2,0} + \searrow_{1,0})$$

$$\mathbf{F}_{2,3} = \mathbf{E}(\nearrow_{2,0}) \boxplus \mathbf{E}(\nearrow_{2,1}),\quad \mathbf{F}_{1,2} = \mathbf{E}(\nearrow_{1,0}),\quad \mathbf{F}_{1,3} = \mathbf{E}(\nearrow_{1,0} + \nearrow_{2,1}).$$

现在回顾在 (1.20) 中引入的量子二对数 $\varphi = \varphi_\hbar$，以及在 (1.24) 中引入的关联函数的函数演算记号。

引理 2.19。若 v 是 V-彩色图的一个可变面 $(\Gamma_{\mathbf{i}}, \ell)$，且 $\mathbf{i}'$ 是通过施加相应的辫子变换或 *Demazure* 变换得到的正编织字，则有

$$\varphi(v) Z_{\mathbf{i},\ell,a,b} \varphi(v)^* = Z_{\mathbf{i}',\mu_v(\ell),a,b}.$$

证明。我们考虑辫子变换 $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \mapsto \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ 的情形；其他情形的处理方式相同。

分别考虑图 8 中所示的 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 和 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 内面 v 的邻域 N_v、N_v'。在 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中不与 N_v 相交的路径集合与在 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 中不与 N_v' 相交的路径集合之间，存在一个自然的保权双射。于是，对于 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中任意一条不进入 N_v 的路径 p，有 $(u_p, v) = 0$，从而 $\varphi(v)\mathbf{E}(u_p)\varphi(v)^* = \mathbf{E}(u_p)$。因此，配分函数 $Z_{\mathbf{i},\ell,\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 中来自不与 N_v 相交的路径的贡献，在酉算子 $\varphi(v)$ 下与 $Z_{\mathbf{i}',\mu_v(\ell)\,a,b}$ 中来自不与 N_v' 相交的路径的贡献共轭。

同样的论证也可用于说明：由沿同一条水平线进入并离开 N_v 的路径，对 $Z_{\mathbf{i},\ell,a,b}$ 的贡献，与对 $Z_{\mathbf{i}',\mu_v(\ell)\,a,b}$ 的相应贡献共轭；对于从 N_v 沿直线 $i-1$ 进入、再沿直线 $i+1$ 离开的路径，其贡献也同样如此。事实上，观察图 8 可清楚看出，对于所有这类路径，我们仍有 $(u_p,\ v) = 0$，而且 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中这类路径的集合与相应集合 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 之间的自然双射保持权不变。

更一般地，对于 $r, s \in \{i-1, i, i+1\}$，令 $\Pi(\Gamma_{\mathbf{i}}, v, r, s)$ 表示 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中经水平线 r 进入并经水平线 s 离开的路径集合，并类似地定义 $\Pi(\Gamma_{\mathbf{i}'}, v, r, s)$。记

$$Z_{\Gamma_{\mathbf{i}}}(r,s) = \boxplus_{p \in \Pi(\Gamma_{\mathbf{i}}, v, r, s)} \mathbf{E}(u_p)$$

对应于配分函数中相应贡献的$Z_{\mathbf{i},\ \ell}$。我们声称 t

$$\varphi(v) Z_{\Gamma_{\mathbf{i}}}(i, i+1) \varphi(v)^* = Z_{\Gamma_{\mathbf{i}'}}(i, i+1). \tag{2.44}$$

为此，我们将 $\Pi(\Gamma,\ v,\ i,\ i+1)$中的路径分组成若干对$(p',\ p'')$，其中路径 p' 和p'' 在邻域 N_v之外完全相同，并且 p'' 先于 p'到达直线 $i+1$。于是我们有 $u_{p'} = u_{p''} + v$，$(v,\ u_{p'}) = -1$。因此，由命题 1.14 可得

$$\varphi(v)(\mathbf{E}(u_{p'}) \boxplus \mathbf{E}(u_{p''}))\varphi(v)^* = \mathbf{E}(u_{p''}).$$

另一方面，路径对 p', p'' 在 $\Gamma_{\mathbf{i}}$ 中对应于 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 中的一条路径 p，其调整后的权重恰好为 $u_{p''}$，因此我们得出 (2.44) 成立。

同样， Π（$\Gamma_{\mathbf{i}}, v, i-1, i$）中的每条路径 π 都对应于 $\Gamma_{\mathbf{i}'}$ 中的一对路径 π', π''，它们在 N_v 之外完全相同，而这次我们有 $(v, u_\pi) = 1$。因此，再次根据命题 1.14，我们有

$$\varphi(v) Z_{\Gamma_{\mathbf{i}}}(i-1, i) \varphi(v)^* = Z_{\Gamma_{\mathbf{i}'}}(i-1, i),$$

由此完成引理的证明。 □

推论 2.20（Serre 关系）。 这对正算子$(\mathbf{E}_{i-1,\ i+1}, \mathbf{E}_{i-1,\ i})$ 按照(1.27)的意义是 $\hbar/2$-对易的，$(\mathbf{E}_{i,\ i+1}, \mathbf{E}_{i-1,\ i+1})$也是如此。

证明。 这是因为$\mathbf{E}_{i-1,\ i}$ 和$\mathbf{E}_{i-1,\ i+1}$ 都可以计算为图 $\Gamma_{\mathbb{E}_{i-1,\ i+1}}$的相应配分函数；后者经过一系列辫子变换和 Demazure 变换后，可以得到与辫子词 $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$对应的配分函数。根据引理 2.19，利用相应的酉算子进行共轭，可将$\mathbf{E}_{i-1,\ i}$，$\mathbf{E}_{i-1,\ i+1}$ 变为$\mathbf{E}(u)$，$\mathbf{E}(v)$形式的正算子，其中 $(u,\ v) = 1/2$，因此推论得证。 □

现在，假设 Γ_1，Γ_2 分别对应于具有 Demazure 乘积且允许前缀$\sigma_1 \cdots \sigma_{m-1}$的 B_m-辫子词，并配备了斜对称空间V_1，V_2上的 V_1-和 V_2-着色 ℓ_1，ℓ_2。于是，我们可以考虑一个配分函数

$$Z_{(\Gamma_1, \ell_1)\times(\Gamma_2, \ell_2)} = \boxplus_{(p_1, p_2)} \mathbf{E}(w_{p_1} \oplus w_{p_2})$$

其对象为路径对 $(p_1,\ p_2)$：其中，p_1 是 Γ_1 中的一条路径，沿顶部水平线（编号为 1）进入，并沿底部水平线 m离开；p_2 是 Γ_2中的一条路径，从 1 进入并从 m离开。对于每条这样的路径 p_1，我们可以关联一个整数序列 $(n_1,\ \ldots n_{m-1})$，其中 n_i 表示位于水平线 i，$i+1$ 之间且在 p_1右侧的面的数量。对所有整数序列集合所施加的字典序定义了从 1 到 m 的 Γ_1 中所有路径 p_1 上的一个全序。等价地，在该全序中，若 q_1，p_1 首次分叉，则由路径 q_1 向下延伸的路径排在前面。我们以相同方式为 Γ_2 中从 1 到 m_2 的所有路径赋予一个全序，并在所有路径对 $(p_1,\ p_2)$ 的集合上采用字典序全序：先比较第一个因子，若相同则比较第二个因子。

现在回顾式 (1.21) 中的量子指数函数 $F = F_\hbar$。

引理 2.21. 设 Γ_1, Γ_2 是与 B_m-辫子词 $\mathbf{i}_1$,$\mathbf{i}_2$，对应的图，并分别赋予斜对称空间 V_1, V_2 上的 V_1-染色和 V_2-染色。那么，若 $\mathbf{i}_1$ 和 $\mathbf{i}_2$ 可通过若干次辫子变换和 *Demazure* 变换化为形如 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\mathbf{i}'$ 的字，其中$\mathbf{i}'$ 不包含 σ_{m-1}，则有

$$\overline{F}(Z_{(\Gamma_1, \ell_1)\times(\Gamma_2, \ell_2)}) = \overleftarrow{\prod_{(p_1, p_2)}} \varphi(\mathrm{w}_{p_1} \oplus \mathrm{w}_{p_2}), \tag{2.45}$$

其中，乘积遍历所有路径对 (p_1, p_2)，并按照上文所述的字典序全序排列，使最小的路径对成为乘积中最右侧的因子。

证明。 我们利用以下观察进行归纳法：若 v 是一个可变面，则公式 (2.45) 对 $(\Gamma_1,\ \Gamma_2)$ 成立，当且仅当它对 $(\mu_v(\Gamma_1)\ \Gamma_2)$ 成立。下面说明这一点

对于 μ_v 对应于图 9 中的辫子移动 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ 的情形。根据引理 2.19，我们有

$$\overline{F}(Z_{\Gamma_1,\Gamma_2}) = \varphi(v)^{*}\overline{F}(Z_{\mu_v\Gamma_1,\Gamma_2})\varphi(v). \tag{2.46}$$

现在注意到，Γ_1 中的路径良序列表可以通过以下三个步骤从 $\mu_v\Gamma_1$ 中相应的路径列表得到：首先，对于 $\mu_v\Gamma_1$中沿着线 $i-1$ 进入 $\mu_v(N)$、并沿着线 i离开的每条路径 π ，将 π 替换为 Γ_1 中的一对连续路径（π',π''），它们在 N之外与 π 相同，并且路径 π' 先于 π''到达 $N\subseteq\Gamma_1$ 中的线 i 。注意，对于 Γ_1，π'' 确实是 π' 在字典序中的后继。第二步是在所得列表中找出 $\mu_v\Gamma_1$ 中的每一对路径（p',p''）：它们沿着线 i 进入 $\mu_v(N)$，沿着线 $i+1$离开，在 $\mu_v(N)$之外相同，且 p'' 在 $\mu_v\Gamma_1$ 字典序中是 p' 的后继。然后，我们将连续的一对（p',p''）替换为 Γ_1 中的单条路径 p，该路径在 N之外与 p',p'' 相同，并通过线 i 进入 $\mu_v(N)$，再通过线 $i+1$ 离开。最后，列表中所有仍为 $\mu_v\Gamma_1$ 中的路径的剩余项，都是不与 N相交的路径；我们将其中每一条替换为 Γ_1中对应的相同路径。由此，根据公式 (2.46) 和 Kashaev 五边形恒等式可立即得出：若 (2.45) 对 $\mu_v\Gamma_1,\Gamma_2$ 成立，则对 Γ_1,Γ_2也成立。若 μ_v 对应于逆辫子移动或 Demazure 变换，同样的论证也适用。

现在，我们执行这样一串变换，将 $\mathbf{i}_1$ 变为形如 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\mathbf{i}'$的字，其中$\mathbf{i}'$ 不包含 σ_{m-1}。那么，在所得的图 $\Gamma_1^{\bullet}$ 中，存在一条唯一的路径，它从第 1 条线上的边界顶点出发，终止于第 m 条线上的边界顶点。对于这样的图 $\Gamma_1^{\bullet}$，使用上文相同的论证可知，对于 Γ_2中的任意可变面 v ，(2.45) 对 $\Gamma_1^{\bullet},\Gamma_2$ 成立，当且仅当它对 $\Gamma_1^{\bullet},\mu_v\Gamma_2$成立。因此，如果我们执行一串 braid 和 Demazure 变换，将 Γ_2 变为同样形式的图 $\Gamma_2^{\bullet}$ ，那么 $\Gamma_1^{\bullet},\Gamma_2^{\bullet}$ 中只有一对路径，且 (2.45) 成为一个重言式。引理得证。□

注 2.22。同一证明表明，$F(Z_{(\Gamma_1,\ell_1)\times(\Gamma_2,\overline{\ell_2})})$ 也可以展开为由相同因子构成、但顺序不同的乘积：我们先按照 Γ_2排序，再使用 Γ_1打破平局。

由于形式和在张量积下具有分配性，$\mathbf{E}_{rs}\otimes\mathbf{F}_{rs}$ 可以计算为配分函数 $Z_{\Gamma_{\mathbb{E}_{rs}}\times\Gamma_{\mathbb{F}_{rs}}}$，它对路径对 (p_E,p_F) 求和，其中 p_E是一条从顶部水平线（编号为 1）进入、从底部水平线 $s-r+1$ 离开的路径，而 p_F是一条从 1 进入、从 $s-r+1$离开的 $\Gamma_{\mathbb{F}_{rs}}$ 中的路径。

2.4. **$\mathcal{R}$-矩阵与编织 Fock–Goncharov 翻转**。考虑酉算子

$$\mathcal{R} = \prod_{a=1}^{\overrightarrow{n}}\prod_{b=a+1}^{\overrightarrow{n+1}} \overline{F}_{\hbar}(\mathbf{F}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b}). \tag{2.47}$$

对于 $1\le a<b\le N$，令 $\Gamma_{\mathbb{F}_a^{[1]},\,b}$ 为从 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a,\,b}}$ 中删除连接 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a,\,b}}$ 中最上方两条水平线的所有垂直边（最左侧的那条除外）后得到的图，并记 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a\,b}^{>1},}$ 为从 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a,\,b}}$ 中仅删除最左侧那条垂直边后得到的图。根据构造 (2.26)，图 $\Gamma_{\mathbb{F}_a^{[1]},\,b}$ 和 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a\,b}^{>1},}$ 继承了 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a,\,b}}$的 V-标记，并令

$$\mathbf{F}_{a,b}^{[1]} = Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{[1]}}), \qquad \mathbf{F}_{a,b}^{>1} = Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{>1}}),$$

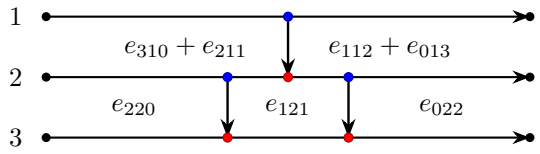


FIGURE 17. 标记图 $\Gamma_{\mathbb{E}_1^{[2]}}$，3 </style}关于 $N = 4$。

使得

$$Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}}) = Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{[1]}}) \boxplus Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{>1}}).$$

等价地，我们可以将原图$\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}}$ 中的$\mathbf{F}_{a,b}^{[1]}$ 和$\mathbf{F}_{a,b}^{>1}$ 视为“条件配分函数”：将（2.39）中的求和限制为仅包含经过（或不经过）水平线之间第一条垂直箭头的路径 a，$a+1$。

注意，$a = 1$ 在 $\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}}$ 的顶行中只有一条垂直边，因此对于任意 b，我们有

$$Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{1,b}^{>1}}) = 0.$$

类似地，对于 $1 \leq a < b \leq N$ 和 $1 \leq j \leq N - a$，令 $\Gamma_{\mathbb{E}_a^{[j]},b}$ 为从 $\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}}$中删除连接 $\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}}$ 中最上方两条水平线的所有垂直边（从左侧开始遇到的第j条边除外）后得到的图。根据构造（2.26），$\Gamma_{\mathbb{E}_a^{[j]},b}$ 继承了来自 $\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}}$的 V-标记，因此我们设

$$\mathbf{E}_{a,b}^{[j]} = Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}^{[j]}}).$$

由于在 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}})$ 中求和的每条路径都恰好经过上文提到的垂直边之一，我们有

$$\mathbf{E}_{a,b} = Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}}) = \boxplus_{j=1}^{N-a} Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}^{[j]}}).$$

换言之，配分函数 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}^{[j]}})$ 是来自 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}})$ 中那些经过顶部两条竖线之间第 j 条垂直边的路径的贡献。

我们在图 17 中展示了 $N = 4, (a,b) = (1,3)$ $j = 2$ 的构造。注意，对于 $j_1 < j_2$，在定义 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}})$ 的求和中，对 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}^{[j_1]}})$ 有贡献的路径，在引理 2.21 给出的字典序下小于对 $Z(\Gamma_{\mathbb{E}_{a,b}^{[j_2]}})$ 有贡献的路径。类似地，对 $Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{[1]}})$ 有贡献的路径小于对 $Z(\Gamma_{\mathbb{F}_{a,b}^{>1}})$ 有贡献的路径。由引理 2.21 可知，我们有如下因式分解

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b} \otimes \mathbf{E}_{a,b}) = \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b}^{>1} \otimes \mathbf{E}_{a,b})\ \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b}^{[1]} \otimes \mathbf{E}_{a,b}),$$

因此

$$\mathcal{R} = \prod_{a=1}^{\overrightarrow{n}} \prod_{b=a+1}^{\overrightarrow{n+1}} \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b}^{>1} \otimes \mathbf{E}_{a,b})\ \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b}^{[1]} \otimes \mathbf{E}_{a,b}). \tag{2.48}$$

引理 2.23。 我们有以下由 $\hbar/2$-交换的正算子对构成的集合:

$$(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b},\mathbf{F}^{>1}_{a,c}),\quad (\mathbf{E}_{a,c},\mathbf{E}_{a,b}),\quad a<b<c, \tag{2.49}$$

$$(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b},\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}),\quad (\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1},\mathbf{E}^{[k]}_{a,b}),\quad b>a+1,\quad j<k. \tag{2.50}$$

$$(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1},\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}),\quad (\mathbf{E}^{[j+1]}_{a,a+1},\mathbf{E}^{>j}_{a+1,b}),\quad (\mathbf{E}^{[j]}_{a+1,b},\mathbf{E}^{[k]}_{a,a+1}),\quad b>a+1,\quad j<k. \tag{2.51}$$

以下各对正算子强交换:

$$(\mathbf{F}^{[1]}_{a,c},\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}),\quad (\mathbf{E}_{a,c},\mathbf{E}_{a+1,b}),\quad a<b<c. \tag{2.52}$$

证明。我们处理算子对 $(\mathrm{F}^{[1]}_{a\,b},,\mathrm{F}^{>1}_{a\,c},)$ 的情形，其余情况可用相同的方法处理。思路是使用引理 2.19 构造一个酉算子，将算子 $(\mathrm{F}^{[1]}_{a\,b},,\mathrm{F}^{>1}_{a\,c},)$ 共轭到一个标准的 $\hbar/2$ 交换对。考虑图$\Gamma_{\mathbb{F}}$中位于水平线 a 与 c之间的部分。对应的辫子词形式为$\beta = \sigma_{c-a}\cdots\sigma_2\sigma_1\beta'$，通过一系列辫子变换和 Demazure 变换，我们可以将β'变换为字 $\beta'' =(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{c-a})\cdots\sigma_1\sigma_2\sigma_1$。在相应酉算子的作用下，$\mathrm{F}^{>1}_{a},_{c}$的共轭可表示为与$\beta = \sigma_{c-a}\cdots\sigma_2\sigma_1\beta''$相关的标记图中一条路径上的求和。此外，注意到，在 β 中删除除前两个 $\tilde{\sigma_1}$ $\hat{}$之外的所有出现项，从而得到字 β，不会影响用于计算 $(\mathrm{F}^{[1]}_{a\,b},,\mathrm{F}^{>1}_{a\,c},)$ 酉共轭的条件配分函数。但通过进一步的一系列辫子变换，我们可以将 $\widehat{\beta}$变为字 $\sigma_{c-a}\cdots\sigma_2\sigma_1\sigma_1\beta'''$，其中 $\beta''' =(\sigma_{c-a}\cdots\sigma_3\sigma_2)\cdots\sigma_3\sigma_2\sigma_3$。在这个后续图中，用于计算两个算子对 $(\mathrm{F}^{[1]}_{a\,b},,\mathrm{F}^{>1}_{a\,c},)$ 酉共轭的条件配分函数都只包含来自单一路径的贡献，并且这些路径的权 $\hbar/2$-按所需方式交换。□

推论 2.24. 对于 $b>a+1$，正算子 $(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>j}_{a+1,b},\ \mathbf{F}^{[1]}_{a\ ,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j+1]}_{a\ a+1},)$ 构成一对 $\hbar$-交换对，并且我们有一个五边形恒等式

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j+1]}_{a,a+1})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}^{[j+1]}_{a,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>j}_{a+1,b}) = \\ = \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>j}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j+1]}_{a,a+1}).$$

由 (2.49) 和 (2.52)，我们看到以下各对正算子强交换 :

$$[\mathbf{F}^{>1}_{a,c}\otimes\mathbf{E}_{a,c},\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b}] = 0 = [\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b},\mathbf{F}^{[1]}_{a,c}\otimes\mathbf{E}_{a,c}],\quad a<b<c.$$

这一观察使我们可以对 (2.48) 中的因子重新排序，得到

$$\mathcal{R} = \overrightarrow{\prod_{a=1}^{n}}\left\{\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1})\overrightarrow{\prod_{b=a+2}^{n+1}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b})\ \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b})\right\}. \tag{2.53}$$

引理 2.25。对于 $b>a+1$ 我们有

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b})\ \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b}) \tag{2.54}$$

$$= \overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a;a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1}). \tag{2.55}$$

证明。 根据引理 2.21，我们可以分解

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a;a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1})=\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N-a}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1}) \tag{2.56}$$

and

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b})=\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N-b+1}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,b}). \tag{2.57}$$

利用（2.50），将（2.56）中的量子指数因子移到（2.57）中与之对易的因子右侧，我们将（2.54）的左侧改写为

$$\overleftarrow{\prod_{j=N-b+2}^{N-a}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1})\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N-b+1}}\left\{\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,b})\right\}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b}). \tag{2.58}$$

现在我们利用引理 2.24 进行替换

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[1]}_{a,a+1})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}^{[1]}_{a,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b})$$
$$=\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[1]}_{a,a+1}),$$

然后利用引理 2.21 将其拆分

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b})=\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>1}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{[1]}_{a+1,b})$$

此时，我们可以再次应用引理 2.24 进行替换

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[2]}_{a,a+1})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,b}\otimes\mathbf{E}^{[2]}_{a,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>1}_{a+1,b})$$
$$=\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>1}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[2]}_{a,a+1}),$$

然后拆分

$$\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>1}_{a+1,b})=\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{>2}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{[2]}_{a+1,b}).$$

继续如此，我们将 (2.54) 的左端改写为

$$\overleftarrow{\prod_{j=N-b+2}^{N-a}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1})\cdot\overleftarrow{\prod_{j=1}^{N-b+1}}\left\{\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a+1,b})\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a,a+1})\right\}.$$

由 (2.51)，我们可以将因子 $F_\hbar(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b}\otimes\mathbf{E}^{[j]}_{a+1,b})$ 一直移到最左侧，并重新组合量子指数算子，得到 (2.54) 的右端。□

利用这个引理，很容易证明：

命题 2.26。 酉算子之间存在一个恒等式

$$\mathcal{R}=\overrightarrow{\prod_{a=1}^{n}}\overrightarrow{\prod_{b=a+1}^{n+1}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b})=\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}}\overrightarrow{\prod_{a=k}^{n}}\overline{F}_\hbar\left(\mathbf{F}^{[k]}_{a;a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1}\right). \tag{2.59}$$

证明。 对于 $n=1$，这两种因式分解完全相同；而秩为 $n-1$ 时的命题表明，在秩为 n 的情形下有如下等式：

$$\prod_{a=2}^{\overrightarrow{n}}\prod_{b=a+1}^{\overrightarrow{n+1}}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{>1}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b}\right)=\prod_{k=2}^{\overleftarrow{n}}\prod_{a=k}^{\overrightarrow{n}}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{[k]}_{a;a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1}\right).$$

因此，只要我们能证明下式，便可通过归纳法得到该命题：

$$\mathcal{R}=\left\{\prod_{a=2}^{\overrightarrow{n}}\prod_{b=a+1}^{\overrightarrow{n+1}}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{>1}_{a,b}\otimes\mathbf{E}_{a,b}\right)\right\}\cdot\prod_{a=1}^{\overrightarrow{n}}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{[1]}_{a;a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1}\right).\tag{2.60}$$

为此，对公式 (2.53) 反复应用引理 2.25，可得

$$\mathcal{R}=\prod_{a=1}^{\overrightarrow{n}}\left\{\prod_{b=a+1}^{\overrightarrow{n}}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{>1}_{a+1,b+1}\otimes\mathbf{E}_{a+1,b+1}\right)\right\}\overline{F}_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{[1]}_{a,a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,a+1}\right).\tag{2.61}$$

由于 $\mathbf{F}^{[1]}_{a,\ a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,\ a+1}$ 与 $\mathbf{F}^{>1}_{c,\ d}\otimes\mathbf{E}_{c,\ d}$ 对任意 $d>c>a+1$ 都强对易，我们可以将 (2.61) 中的因子 $F_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{[1]}_{a,\ a+1}\otimes\mathbf{E}_{a,\ a+1}\right)$ 自由地向右移过所有这类因子 $F_{\hbar}\left(\mathbf{F}^{>1}_{c,\ d}\otimes\mathbf{E}_{c,\ d}\right)$，从而得到 (2.60)，证明至此完成。□

前面给出的酉算子 $\mathcal{R}$ 的表达式，让人想起代数框架中熟悉的表达式（例如参见 [KS97，第 8.3 节 2]）。现在我们将推导该酉算子的另一种形式，并将其认定为簇理论中与 Fock–Goncharov 翻转相关联的量子变异算子。

定义 2.27. 对于任意 $1\leqslant i\leqslant r\leqslant b\leqslant n$，我们在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 上定义酉算子

$$B^{b,r,i}=\varphi\left(\overrightarrow{e}_{b-i+1,b-r}\oplus\overrightarrow{e}_{n-b+i,n-b}\right).\tag{2.62}$$

引理 2.28. 有

$$\left[B^{b,r,i},B^{b',r,i'}\right]=0,\qquad\forall 1\leqslant i,i'\leqslant r\leqslant b,b'\leqslant n.\tag{2.63}$$

证明. 记作

$$s=b-i+1,\qquad s'=b'-i'+1,$$

由 (2.8) 立即可得

$$\begin{aligned}&(\overrightarrow{e}_{b-i+1,b-r}\oplus\overrightarrow{e}_{n-b+i,n-b},\overrightarrow{e}_{b'-i'+1,b'-r}\oplus\overrightarrow{e}_{n-b'+i',n-b'})\\&\qquad=(\overrightarrow{e}_{s,b-r},\overrightarrow{e}_{s',b'-r})+(\overrightarrow{e}_{n-s+1,n-b},\overrightarrow{e}_{n-s'+1,n-b'})\\&\qquad=(\overrightarrow{e}_{s,b-r},\overrightarrow{e}_{s',b'-r})+(\overrightarrow{e}_{n-s+1,n-b},\overrightarrow{e}_{n-s'+1,n-b'})\\&\qquad=0.\end{aligned}$$

由 (1.25) 即得该引理。□

定义 2.29。 编织 *Fock–Goncharov* 翻转 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}'_\hbar \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ 定义为酉算子

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}' &= \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B^{b,r,i} && (2.64)\\
&= \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leqslant (n-r)-k\leqslant n-s}}} \varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k}\right) && (2.65)\\
&= \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leqslant (n-r)-k\leqslant n-s}}} \varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{N-s,(n-r)-k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{s,k}\right). && (2.66)
\end{aligned}$$

注意到，根据引理 2.28，在上述表达式中，只有第一个关于 r 的乘积必须排序。

注 2.30。 我们注意到， $\mathcal{F}'$ 不过是一个酉算子，它实现了框架化 SL_N 局部系统模空间的簇图表之间的量子簇变换；这些局部系统对应于通过一次对角翻转相互关联的理想三角剖分，参见 [FG06，第 10 节3]。

引理 2.31。 编织 *Fock–Goncharov* 翻转 $\mathcal{F}'$ 与 (2.47) 中的酉算子 $\mathcal{R}$ 重合。

证明。 我们应用引理 2.21，将命题 2.26 右端的 $\mathcal{R}$ 因式分解分解为由单项式 (2.62) 的量子二对数组成的乘积；再由引理 2.28，可以将这些因子重新排序，从而得到 (2.64) 中 $\mathcal{F}'$ 的表达式。□

注 2.32。 我们强调， $\mathcal{F}'$ 是相对于固定的酉算子 $\hbar$-表示$\mathcal{H} =$(*H*、 π) 定义的。若要强调这一点，我们将称之为作用于 $\mathcal{H}$ 上的编织 *Fock–Goncharov* 翻转，或相对于 (*H*、 π) 的编织 *Fock–Goncharov* 翻转。

现在我们引入记号

$$\begin{aligned}
B^{b,r,i}_{[12]} = B^{b,r,i}_{12} &= \varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b} \oplus 0\right),\\
B^{b,r,i}_{[23]} = B^{b,r,i}_{23} &= \varphi\left(0 \oplus \overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}\right),
\end{aligned}$$

and

$$B^{b,r,i}_{[13]} = \varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-i+1} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}\right),$$

并令 $\mathcal{F}'_{[12]}$、 $\mathcal{F}'_{[23]}$ 和 $\mathcal{F}'_{[13]}$ 为它们按 (2.64) 中顺序排列的相应乘积。

定理 2.33。 以下五边形关系成立：

$$\mathcal{F}'_{[23]}\mathcal{F}'_{[12]} = \mathcal{F}'_{[12]}\mathcal{F}'_{[13]}\mathcal{F}'_{[23]}. \tag{2.67}$$

这一结果众所周知，参见 [DGG16], 。不过，为方便读者，我们在附录 G 中给出一个直接的代数证明。

注 2.34。 可以证明， $\mathcal{F}'$ 是一个编织乘法酉算子，参见 [MRW17，第 3.2] 条定义。由于本文后续不再采用这种方法，我们就不详述其细节了。

2.5. **Fock–Goncharov 翻转**。我们继续采用第 2.4 节的设定。固定 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$ 以及希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个酉算子 $\hbar$-表示∇'_N。

由 (2.10) 和 (2.24)，以下定义是有意义的。

定义 2.35。我们定义

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_\hbar = G_\hbar\left(2\sum_{t=1}^{n} \overset{\nearrow}{\varpi}_t \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-t}\right) = G_\hbar\left(2\sum_{t=1}^{n} \overset{\nearrow}{e}_t \otimes \overset{\searrow}{\varpi}_{N-t}\right). \tag{2.68}$$

定理 2.36。酉算子

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\hbar = \mathcal{K}\mathcal{F}' \tag{2.69}$$

是一个乘法酉算子，即

$$\mathcal{F}_{23}\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}. \tag{2.70}$$

我们将 $\mathcal{F}$ 称为*Fock–Goncharov* 翻转。

证明。 由（1.17）和（2.13），我们立即得到，（2.70）的左端等于

$$\mathcal{F}_{23}\mathcal{F}_{12} = \mathcal{K}_{23}\mathcal{K}_{12}\mathcal{F}'_{23}\mathcal{F}'_{12}.$$

另一方面，对于（2.70）右端的因子，利用（2.23）可得

$$\begin{aligned}
&\varphi(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k})_{12}\mathcal{K}_{13}\mathcal{K}_{23} \\
&\qquad = \mathcal{K}_{13}\varphi(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s})\mathcal{K}_{23} \\
&\qquad = \mathcal{K}_{13}\mathcal{K}_{[23]}\varphi(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k})_{12},
\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}'_{12}$ 与 $\mathcal{K}_{13}\mathcal{K}_{23}$可交换，而由（2.68）中的最后一个恒等式和（2.23）可知

$$\varphi(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k})_{[13]}\mathcal{K}_{23} = \mathcal{K}_{23}\varphi(\overset{\nearrow}{e}_{s,k} \oplus \overset{\nearrow}{e}_s \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,(n-r)-k}).$$

使用定理 2.33 上方引入的记号，可得（2.70）的右端为

$$\mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23} = \mathcal{K}_{12}\mathcal{K}_{13}\mathcal{K}_{23}\mathcal{F}'_{[12]}\mathcal{F}'_{[13]}\mathcal{F}'_{[23]},$$

因此，由于 $\mathcal{F}'_{[23]} = \mathcal{F}'_{23}$和 $\mathcal{F}'_{[12]} = \mathcal{F}'_{12}$，只要证明

$$\mathcal{K}_{23}\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_{12}\mathcal{K}_{13}\mathcal{K}_{23}. \tag{2.71}$$

但利用 (2.23) 和 (1.16)，我们有

$$\mathcal{K}(\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_s) \otimes 1)\mathcal{K}^* = \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_s \oplus \overset{\searrow}{e}_s),$$

由此可直接得出（2.71）。 □

注 2.37。 注意，若对 $1 \leq i \leq r \leq b \leq n$ 我们记作

$$C^{b,r,i} = \varphi\left(-\overset{\swarrow}{e}_{b-i+1,r-i} \oplus -\overset{\nwarrow}{e}_{n-b+i,i-1}\right), \tag{2.72}$$

于是，由 (1.16)、(2.7) 和 (2.9) 可得另一种公式

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}''\mathcal{K}, \tag{2.73}$$

其中

$$\mathcal{F}'' = \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} C^{b,r,i} \tag{2.74}$$

$$= \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leqslant r-k-1\leqslant n-s}}} \varphi\left(-\overset{\swarrow}{e}_{s,k} \oplus -\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,r-k-1}\right). \tag{2.75}$$

3. Modularity of the Fock–Goncharov flip.

本节的目标是证明，对于适当的 $\triangledown'_N$ 的酉算子 $\hbar$-表示，Fock–Goncharov 翻转 (2.69) 是模的，其含义与 [SW01，定义 2.1] 中相同。

3.1. **模性**。

定义 3.1。 设 $\mathbb{W} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ 为一个酉算子。若存在作用在 $\mathcal{H}$ 上的严格正算子 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}$ ，使得 $\mathbb{W}$ 模 ，则称其为

$$\mathbb{W}^*(\hat{\mathbf{Q}}\otimes\mathbf{Q})\mathbb{W} = (\hat{\mathbf{Q}}\otimes\mathbf{Q}) \tag{3.1}$$

并且存在一个（必然唯一的）酉算子 $\mathbb{W}_c \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$，使得

$$\langle \xi\otimes\eta', \mathbb{W}(\eta\otimes\mathbf{Q}\xi')\rangle = \langle \overline{\eta}\otimes\mathbf{Q}\eta', \mathbb{W}_c(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle, \qquad \forall \xi', \eta' \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}), \xi, \eta \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

ˆ ˆ 我们称 $\mathbb{W}$ 关于 这对 $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$ 为模的，并称 $(\mathbb{W}、\mathbf{Q}、\mathbf{Q}\ \mathbb{W}_c)$ 为模数据。

注 3.2。 (1) 在假设 (3.1) 下，容易看出 (3.2) 成立当且仅当

$$\langle \hat{\mathbf{Q}}\xi\otimes\eta', \mathbb{W}(\eta\otimes\xi')\rangle = \langle \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\otimes\eta', \mathbb{W}_c(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}), \xi', \eta' \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

(2) 上述定义的表述形式与 [SW01，定义 2.1], 略有不同，但这两个定义的等价性已在 [SW01，命题 2.2] 中证明。[3]

ˆ**注 3.3.** 可以将$\mathbf{Q}$视为量子群上实现“反元平方的正平方根”的辅助对象（而$\mathbf{Q}$ 则是对偶量子群上相应的对象）。事实上，暂且假设有一个 Hopf $*$-代数 (M, Δ)，它通过有界算子在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上忠实地表示（且保持 $*$）：

$$\pi\colon M \to \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

[3]事实上，在下面援引条件的等价性时，我们使用了该性质的一个略强版本，但由 [SW01，命题 2.2] 的证明可立即看出该版本成立。我们还借此机会将无界算子的逆移到另一侧，这同样只是一个无关紧要的形式操作。最后，我们将该条件表述为作用在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 上的任意酉算子所满足的条件，而不仅仅是乘法酉元。

于是，人们希望借助反元 S，在共轭线性希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上构造一个对偶表示：

$$\pi^c\colon M\to\mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}),\qquad a\mapsto\overline{\pi(S(a)^*)}. \tag{3.4}$$

问题在于，这个表示一般不会保持 $*$，因为当 $S^2\neq$id 时，反元并不保持 $*$：

$$S(a)^*=S^{-1}(a^*),\qquad a\in M.$$

ˆ 因此人们试图在 $\mathcal{H}$ 上寻找一个算子$\mathbf{Q}$，以恢复 $*$-相容性：

$$\overline{\pi}\colon M\to\mathcal{B}(\overline{\mathcal{H}}),\qquad a\mapsto\overline{\hat{\mathbf{Q}}\pi(S(a)^*)\hat{\mathbf{Q}}^{-1}} \tag{3.5}$$

（忽略无界性／定义域方面的问题）。

现在，给定一个“良好”的乘法酉算子 $\mathbb{W}$（其中“良好”最终将恰好等价于模条件），人们直观地将其第一腿 M 看作一个“拓扑”Hopf $*$-代数；它由形如 $(\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W}$（其中 $\omega\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$）的元素（的某个完备化）组成，其余乘由下式实现

$$a\mapsto\mathbb{W}^*(1\otimes a)\mathbb{W}. \tag{3.6}$$

（见第 n 4）。在此设定下，M 的反元应作用于 $\mathbb{W}$ 的第一腿，形式如下

$$(S\otimes\mathrm{id})\mathbb{W}=\mathbb{W}^*,$$

由此得到（3.4）变为

$$\pi^c((\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W})=\overline{\pi((\mathrm{id}\otimes\overline{\omega})\mathbb{W})},\qquad\overline{\omega}(x)=\overline{\omega(x^*)}.$$

将 π 为恒等表示、ω 为向量泛函时（3.5）中 π 的定义展开，我们便得到方程（3.3），其中

$$\overline{\pi}((\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W})=(\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W}_c^*.$$

形式上，上述推演也由此得出结论：应当有

$$S^2(a)=\hat{\mathbf{Q}}^2a\hat{\mathbf{Q}}^{-2},\qquad a\in M,$$

ˆ 这解释了$\mathbf{Q}$ 实现“反元平方的正平方根”这一直觉。

请注意，要使所有这些直觉严谨化，需要付出大量艰苦的工作。然而，关键在于，在乘法酉元的解析框架中（与 Hopf $*$-代数的框架相对），方程（3.3）应当被视为出发点，由此可以进一步推导出一种类似于 Hopf $*$-代数理论的理论。

下面的定理是已知结果，见附录 C。我们将使用记号 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{P}=\frac{1}{2\pi i}d/dx$表示由下式确定的作用于 $L^2(\mathbb{R})$上的酉群的无穷小自伴生成元

$$(e^{it\mathbf{X}}f)(x)=e^{itx}f(x),\qquad(e^{2\pi it\mathbf{P}}f)(x)=f(x+t),\qquad f\in L^2(\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

定理 3.4。考虑 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ 以及

$$\mathbf{F}=e^{\mathbf{X}},\qquad\mathbf{L}=e^{-4\pi^2\hbar\mathbf{P}},$$

因此，$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{L}$ 构成一个 $\hbar$-交换对：

$$\mathbf{F}^{it}\mathbf{L}^{is}=e^{2\pi i\hbar st}\mathbf{L}^{is}\mathbf{F}^{it},\qquad s,t\in\mathbb{R}.$$

Put

$$\mathbf{K}=\mathbf{F}^{-1},\qquad\mathbf{E}=\mathbf{L}\star\mathbf{F}^{-1}.$$

然后，使用记号(1.20)，该酉算子

$$\mathbb{W} = \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\ln(\mathbf{L})\otimes\ln(\mathbf{K})\right)\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}\otimes\mathbf{E})$$

是一个相对于

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}, \qquad \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}^{\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}, \tag{3.8}$$

ˆ且 $(\mathbb{W}$,$\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}$ $\mathbb{W}_c)$ 是一个关于

$$\mathbb{W}_c = \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\ln(\overline{\mathbf{L}})\otimes\ln(\mathbf{K})\right)F_\hbar(\overline{\mathbf{F}}\otimes\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E}).$$

我们可以将此定理改述为：在 $n=1$ 的情形下，关联的图为

$$C_2' = \quad \begin{array}{ccccc} & & 110 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 101 & & \longleftarrow & & 011 \end{array} \quad ,$$

若采用由下式给出的、作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 $\triangledown_2'$ 的特定酉算子 $\hbar$-表示，则 Fock–Goncharov 酉算子 $\mathcal{F}$ 是模的

$$\mathbf{E}(e_{101}) = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{E}(e_{110}) = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}(e_{011}) = \mathbf{L}^{-1}.$$

注 3.5. 这个记号让人联想到 Hopf $*$-代数的海森堡双的一个退化表示

$$U_q(\mathfrak{b}^-) = \mathbb{C}\langle L, F \mid LF = q^2FL\rangle, \qquad F^* = F, L^* = L,$$
$$\Delta(L) = L\otimes L, \quad \Delta(F) = F\otimes L + 1\otimes F, \tag{3.9}$$

在此形式体系中使用 $q = e^{\pi i\hbar}$。事实上，如果将 $U_q(\mathfrak{b}^-)$ 的对偶实现为

$$U_q(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}\langle K, E \mid KE = q^2EK\rangle, \qquad E^* = E, K^* = K,$$
$$\Delta(K) = K\otimes K, \quad \Delta(E) = E\otimes 1 + K\otimes E, \tag{3.10}$$

那么， $U_q(\mathfrak{b})$ 与 $U_q(\mathfrak{b}^-)$ 之间（经归一化的）自然配对会导出海森堡对易关系

$$KL = q^2LK, \quad KF = FK, \quad EL = q^2LE, \quad EF - FE = (q-q^{-1})L,$$

w这与定理 3.4 中算子之间的关系相容。

还需注意，余乘 (3.6) 通过简单应用 Kashaev 五边形方程，与 (3.9) 中的余乘相容。由此可见，模结构 (3.8) 相当于对 (3.5) 中恒等表示 π asin 的对偶表示作如下修改：

$$\overline{\pi}(\mathbf{F}) = \overline{\mathbf{F}}\star\overline{\mathbf{L}}^{-1}, \qquad \overline{\pi}(\mathbf{L}) = \overline{\mathbf{L}}^{-1}.$$

为了将定理 3.4 中的模性推广到一般情形，聚焦于条件 (3.3) 引入以下辅助概念会很方便。

定义 3.6. 设 $\mathcal{G},\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间。若存在一个定义在 $\mathcal{G}$ 上的严格正算子 $\mathbf{Q}$ 以及一个酉算子 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})$，使得.....则称酉算子 $U\in\mathcal{B}(\mathcal{G}\otimes\mathcal{H})$ 是弱模的$\hat{}\ \tilde{}$。

$$\langle\hat{\mathbf{Q}}\xi\otimes\eta',U(\eta\otimes\xi')\rangle=\langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\otimes\eta',\widetilde{U}(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle,\qquad\forall\xi,\eta\in\mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}),\xi',\eta'\in\mathcal{H}.\tag{3.11}$$

$\hat{}\ \ \tilde{}$因此，我们称 $(U,\ \mathbf{Q}\ U)$ 为希尔伯特空间对 $(\mathcal{G},\ \mathcal{H})$ 的弱模数据。我们将$\mathbf{Q}$ 称为模算子。

下面这个（显而易见的）观察对于证明一般秩下 Fock–Goncharov 翻转的模性至关重要 $\mathcal{F}$。

$\hat{}\ \ \tilde{}\ \hat{}\ \tilde{}$**引理 3.7**。 设 $\mathcal{G},\mathcal{K},\mathcal{H}$ 为希尔伯特空间，并设$(V,\mathbf{Q}\ V)$ 和$(W,\mathbf{P}\ W)$ 分别是关于希尔伯特空间对$(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 和$(\mathcal{K},\mathcal{H})$的弱模数据。

$T\ \ \hat{}\ \ \hat{}\ \tilde{}$*hen<style id id='4'>(*$U,\mathbf{Q}\otimes\mathbf{P}\ U)$ 是关于$(\mathcal{G}\otimes\mathcal{K},\mathcal{H})$的弱模数据，其中

$$U=V_{13}W_{23}\in\mathcal{B}((\mathcal{G}\otimes\mathcal{K})\otimes\mathcal{H}),\qquad\widetilde{U}=\widetilde{V}_{13}\widetilde{W}_{23}\in\mathcal{B}((\overline{\mathcal{G}}\otimes\overline{\mathcal{K}})\otimes\mathcal{H}).\tag{3.12}$$

证明。 对于 $\xi,\ \eta\in\mathscr{D}(\hat{}\mathbf{Q})$ $\theta,\ \zeta\in\mathscr{D}(\hat{}\mathbf{P})$ 和 $\eta',\ \theta'\in\mathcal{H}$，我们计算得

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mathbf{Q}}\xi\otimes\hat{\mathbf{P}}\theta\otimes\eta',V_{[13]}W_{[23]}(\eta\otimes\zeta\otimes\theta')\rangle &= \langle\hat{\mathbf{Q}}\xi\otimes\eta',V(\eta\otimes(\omega_{\hat{\mathbf{P}}\theta,\zeta}\otimes\mathrm{id})(W)\theta')\rangle\\
&= \langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\otimes\eta',\widetilde{V}(\overline{\xi}\otimes(\omega_{\hat{\mathbf{P}}\theta,\zeta}\otimes\mathrm{id})(W)\theta')\rangle\\
&= \langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\otimes\hat{\mathbf{P}}\theta\otimes\eta',\widetilde{V}_{[13]}W_{[23]}(\overline{\xi}\otimes\zeta\otimes\theta')\rangle\\
&= \langle\hat{\mathbf{P}}\theta\otimes(\omega_{\overline{\xi},\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}}\otimes\mathrm{id})(\widetilde{V}^*)\eta',W(\zeta\otimes\theta')\rangle\\
&= \langle\overline{\hat{\mathbf{P}}\zeta}\otimes(\omega_{\overline{\xi},\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}}\otimes\mathrm{id})(\widetilde{V}^*)\eta',\widetilde{W}(\overline{\theta}\otimes\theta')\rangle\\
&= \langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\otimes\overline{\hat{\mathbf{P}}\zeta}\otimes\eta',\widetilde{V}_{[13]}\widetilde{W}_{[23]}(\overline{\xi}\otimes\overline{\theta}\otimes\theta')\rangle.
\end{aligned}$$

$\tilde{}$换言之，取 (3.12) 中的 $U,\ U$，我们得到

$$\langle(\hat{\mathbf{Q}}\xi\otimes\hat{\mathbf{P}}\theta)\otimes\eta',U((\eta\otimes\zeta)\otimes\theta')\rangle=\langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta\otimes\hat{\mathbf{P}}\zeta}\otimes\eta',\widetilde{U}(\overline{\xi\otimes\theta}\otimes\theta')\rangle.$$

$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$由于 $\mathscr{D}(\mathbf{Q})$ 与 $\mathscr{D}(\mathbf{P})$ 的代数张量积是张量积 $\mathbf{Q}\otimes\mathbf{P}$ 的一个核，$\hat{}\hat{}\ \tilde{}$我们由此得到，U确实是弱模的，并且 $(U,\mathbf{Q}\otimes\mathbf{P}\ U)$ 是关于 $(\mathcal{G}\otimes\mathcal{K},\ \mathcal{H})$ 的弱模数据。□

我们还有定理 3.4 的如下平凡扩张。

定理 3.8。 设 $(\mathbf{L},\mathbf{F})$ 和 $(\mathbf{K},\mathbf{E})$ 是分别作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 上的任意两对 $\hbar$-交换的严格正算子。则

$$U=\exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\ln(\mathbf{L})\otimes\ln(\mathbf{K})\right)\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}\otimes\mathbf{E})$$

$\hat{}\ \ \tilde{}$属于一个弱模数据 $(U,\mathbf{Q}\ U)$，其中

$$\hat{\mathbf{Q}}=\mathbf{L}^{\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}$$

and

$$\widetilde{U} = \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\ln(\overline{\mathbf{L}})\otimes\ln(\mathbf{K})\right) F_\hbar(\overline{\mathbf{F}}\otimes\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E}).$$

证明。 设 $\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{K},\mathcal{L}$ 为希尔伯特空间。显然，$(U,\mathbf{Q}\ U)$ 是 $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ 的弱模数据，当且仅当

$$(U_{[13]},\hat{\mathbf{Q}}\otimes 1,\widetilde{U}_{[13]})$$

是 $(\mathcal{G}\otimes\mathcal{K},\ \mathcal{H}\otimes\mathcal{L})$ 的弱模数据。同样，若 $u\colon\ \mathcal{G}\to\mathcal{K}$ 和 $v\colon\ \mathcal{H}\to\mathcal{L}$ 是 ˆ ˜酉算子，则 $(U,\ \mathbf{Q}\ U)$ 是 $(\mathcal{G},\ \mathcal{H})$ 的弱模数据，当且仅当

$$((u\otimes v)U(u^*\otimes v^*),u\hat{\mathbf{Q}}u^*,(\overline{u}\otimes v)\widetilde{U}(\overline{u}^*\otimes v^*))$$

是 $(\mathcal{K},\ \mathcal{L})$ 的弱模数据。

因此，该定理可由定理 3.4 和 Stone-von Neumann 定理立即推出。□

3.2. **一般秩下 Fock–Goncharov 翻转的模性**。我们首先构造一个具体的 $\hbar$-表示作用于 $\bigtriangledown'_N$，并将据此证明 Fock–Goncharov 翻转的模性。随后我们将证明，对于 $\bigtriangledown'_N$ 的任意$\hbar$-表示，模性同样成立。

↗回顾定义 2.4 和定义 2.5 中引入的记号。我们通过以下方式将 C_N 与集合等同起来

$$I = I_0\cup I_1,\quad I_0=\{s=(s,s)\mid 1\le s\le n\},\quad I_1=\{(s,k)\mid 1\le s\le n, 0\le k<s\}$$

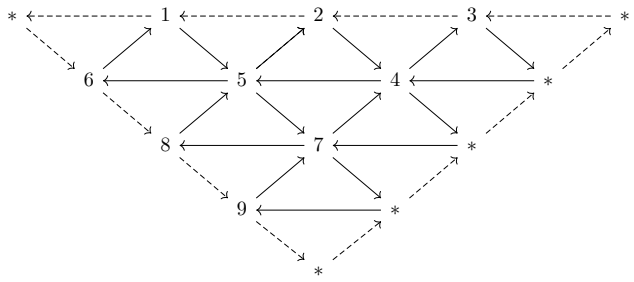
借助映射

$$I\cong\overset{\nearrow}{C}_N,\qquad (s,k)\mapsto(n-s+1,k,s-k).$$

我们对 I（以及 $\overset{\nearrow}{C}_N$）作全序，规定 $I_0=[1,n]$ 具有正规次序，I_0 中的元素排在 I_1中的元素之前，并且 I_1 按以下方式作全序

$$(s,k)<(s',k')\qquad\Longleftrightarrow\qquad s-k<s'-k'\text{ or }(s-k=s'-k'\text{ and }s>s'),\tag{3.13}$$

例如见图 18。



↗FIGURE 18. I 的次序，其与 C_4等同

考虑具有 $W=\mathbb{R}f\oplus\mathbb{R}\varpi$ 的辛斜对称空间

$$(f,\varpi)=1/2.\tag{3.14}$$

接着，我们考虑 I 个 $\{W_i \mid i \in I\}$ 份 W，其对应的向量记为 $f_i,\ \varpi_i$。进一步，我们令

$$V_N = \oplus_{i\in I} W_i, \tag{3.15}$$

对 $f_i,\ \varpi_i$ 的像在 V_N 中仍使用相同的记号。然后，我们可以通过归纳法（按逆序）唯一地构造一个斜对称空间的嵌入

$$B_N^- \subseteq V_N \tag{3.16}$$

要求满足以下关于 V_N 的基 $\{f_i, \varpi_i \mid i \in I\}$ 的规则：

(1) 若 $i \in I_1$ 且 $j \in I$，则

对于 $j < i$，$\overset{\nearrow}{e}_i$ 的第 j 个分量为零，•

$\overset{\nearrow}{e}_i$ 的第 i 个分量为 f，•

• 对于 $j > i$，$\overset{\nearrow}{e}_i$ 的第 j 个分量属于 $\mathbb{R}\varpi$，并且

(2) 若 $i \in I_0 \cong [1, n]$ 和 $j \in I$，则

- for $j < i$, the j-th component of $\overset{\nearrow}{\varpi}_i$ is zero,
- the i-th component of $\overset{\nearrow}{\varpi}_i$ is ϖ, and
- For $j > i$ the j-th component of $\overset{\nearrow}{\varpi}_i$ lies in $\mathbb{R}\varpi$, and is zero if $j \in I_0$.

根据 (2.13) 和 (2.14)，通过令以下定义，此嵌入可扩展到 $\triangledown_N'$

$$\overset{\searrow}{e}_s = -f_{N-s}, \qquad s \in [1, n]. \tag{3.17}$$

现在赋予 $L^2(\mathbb{R})$ 由下式确定的 W 的酉 $\hbar$ 表示

$$\mathbf{E}(f) = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{E}(\varpi) = \mathbf{L}^{1/2},$$

采用与定理 3.4 中相同的记号。更一般地，对于 $i \in I$，记 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个副本为 $\mathcal{H}_i$，并赋予它相应的 W_i 的酉 $\hbar$ 表示，且令

$$\mathcal{H} = \otimes_{i\in I} \mathcal{H}_i, \tag{3.18}$$

赋予其 $V_N = \oplus_{i\in I} W_i$ 的乘积酉 $\hbar$ 表示。通过嵌入 (3.16) 下的限制，我们也可以将其视为 $\triangledown_N'$ 或 B_N^- 的酉 $\hbar$ 表示。

进一步，对于 $1 \leq s \leq n$ 和 $0 \leq k < s$，记

$$\mathbb{U}^{(s,k)} = G\left(2\varpi_{(s,k)} \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}\right) \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi\left(f_{(s,k)} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r}\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{(s,k)} \otimes \mathcal{H}), \tag{3.19}$$

$$\mathbb{U}^{(s)} = G\left(2\varpi_s \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}). \tag{3.20}$$

$\mathbb{U}^{(s,k)}$还有如下另一种表达式。回忆一下，$\boxplus$ 表示形式和。

引理 3.9。我们有

$$\mathbb{U}^{(s,k)} = G\left(2\varpi_{(s,k)} \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}\right) \overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)}) \otimes \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right)\right). \tag{3.21}$$

证明。这可由定理 1.16 立即得出。 □

以下是关键观察，它将使我们能够确立 Fock– Goncharov 翻转 $\mathcal{F}$ 如式 (2.69) 所示的模性。

定理 3.10。 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) = \mathcal{B}\left((\otimes_{i\in I}\mathcal{H}_i)\otimes\mathcal{H}\right)$ 中，我们有一个酉算子等式

$$\mathcal{F} = \overrightarrow{\prod}_{i\in I}\mathbb{U}^{(i)}_{i,\bullet}. \tag{3.22}$$

这里我们使用腿编号记法，并在末尾保留 $\bullet$ 作为 $\mathcal{H}$-因子的指标。

证明。 对于 $\mathbb{U}^{(s,k)}{}_{(s,k)\bullet}$ 和 $\mathbb{U}^{(s)}_{s\bullet}$，我们仍可使用公式 (3.19) 和 (3.20)，此时将第一腿视为作用于 $\otimes_{i\in I}\mathcal{H}_i$ 的第 i 腿（并在所有其他腿上作用为恒等算子）。

根据 (1.17)，将所有高斯算子移过量子二对数后，我们发现 (3.22) 的右侧变为

$$\overrightarrow{\prod}_{i\in I}\mathbb{U}^{(i)}_{i,\bullet} = \mathcal{L}\overrightarrow{\prod}_{i\in I_1}\mathbb{V}^{(i)}$$

其中

$$\mathcal{L} = G\left(2\sum_{1\leq s\leq n}\left(\sum_{0\leq k\leq s}\varpi_{(s,k)}\right)\otimes\check{e}_{N-s}\right) \tag{3.23}$$

and

$$\mathbb{V}^{(i)} = \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}}\ \varphi\left(f_{(s,k)} + 2\sum_{(s',k')>(s,k)}(\check{e}_{N-s,n-r},\check{e}_{N-s'})\varpi_{(s',k')}\oplus\check{e}_{N-s,n-r}\right). \tag{3.24}$$

不过，我们很容易验证

$$f_{(s,k)} + 2\sum_{(s',k')>(s,k)}(\check{e}_{N-s,n-r},\check{e}_{N-s'})\varpi_{(s',k')} = \hat{e}_{s,k}. \tag{3.25}$$

$$\sum_{0\leq k\leq s}\varpi_{(s,k)} = \hat{\varpi}_s. \tag{3.26}$$

事实上，对于 (3.25)，我们只需验证

$$-(\check{e}_{n-s+1,n-r},\check{e}_{n-s'+1}) = (\hat{e}_{s,k},\hat{e}_{s',k'}),\qquad (s',k')>(s,k),$$

但这由 (2.8)、(2.9) 以及排序的定义 (3.13) 立即可得。类似地，对于 (3.26)，我们只需验证，对于 $1\leq s,\ s'\leq n$ 和 $0\leq k'<s'$，有

$$\sum_{0\leq k<s}(\varpi_{(s,k)},\hat{e}_{s',k'}) = (\hat{\varpi}_s,\hat{e}_{s',k'}).$$

但左边为

$$-\frac{1}{2}\delta_{s,s'}\delta_{k'<s} = -\frac{1}{2}\delta_{s,s'},$$

根据 (2.23)，这恰好就是右边。

由上述结果可知，$\mathcal{L}=\mathcal{K}$ 如式 (2.68) 所示，并且

$$\overrightarrow{\prod}_{i\in I}\mathbb{U}^{(i)}_{i,\bullet} \;=\; \mathcal{K}\overrightarrow{\prod_{(s,k)\in I_1}}\ \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}}\ \varphi\left(\hat{e}_{s,k}\oplus\check{e}_{N-s,n-r}\right).$$

但由 (G.6) 可得

$$\overrightarrow{\prod_{(s,k)\in I_1}}\ \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}}\ \varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{s,k}\oplus\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r}\right)=\mathcal{F}',$$

编织 Fock–Goncharov 翻转。证明至此完成。 □

结合定理 3.4 和引理 3.7，我们现在得到:

定理 3.11。 关于 $\triangledown_N'$ 上的酉 $\hbar$-表示(3.18)，*Fock– Goncharov* 翻转 $\mathcal{F}$ 是一个模乘法酉算子，其对应于

$$\hat{\mathbf{Q}}=\mathbf{L}_{\delta}^{1+|\hbar|^{-1}},\qquad \mathbf{Q}=\mathbf{K}_{\delta}^{-(1+|\hbar|^{-1})},\tag{3.27}$$

其中

$$\mathbf{L}_{\delta}=\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}\overset{\nearrow}{\varpi}_i),\qquad \mathbf{K}_{\delta}=\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}\overset{\searrow}{\varpi}_i).$$

此外，($\mathcal{F}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}$ $\mathcal{G}$) 是一个模数据，对应于

$$\mathcal{G}=\mathcal{L}\mathcal{G}'=\mathcal{G}''\mathcal{L}\tag{3.28}$$

with

$$\mathcal{L}=G\left(2\sum_{t=1}^{n}\overline{\overset{\nearrow}{\varpi}_t}\otimes\overset{\nwarrow}{e}_{N-t}\right)\tag{3.29}$$

and

$$\mathcal{G}'=\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leqslant(n-r)-k\leqslant n-s}}}\ \overline{\varphi}\left(\overline{\overset{\nearrow}{e}_{s,k}}\oplus-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,(n-r)-k}\right),\tag{3.30}$$

$$\mathcal{G}''=\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leq r-k-1\leq n-s}}}\ \overline{\varphi}\left(-\overline{\overset{\swarrow}{e}_{s,k}}\oplus\overset{\searrow}{e}_{N-s,r-k-1}\right).\tag{3.31}$$

证明。 注意到

$$(f_{(s,k)},2\varpi_{(s,k)})=1,\qquad (\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r},\overset{\searrow}{e}_{N-s})=1,$$

因此由引理 1.17 可得

$$(\mathbf{E}(2\varpi_{(s,k)}),\mathbf{E}(f_{(s,k)})),\qquad (\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r}),\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s}))$$

构成 $\hbar$-交换对。由定理 3.8，我们得出 $\mathbb{U}^{(s,k)}$ 关于算子是弱模的

$$\hat{\mathbf{Q}}_{(s,k)}=\mathbf{E}(\varpi_{(s,k)})^{1+|\hbar|^{-1}}.$$

由引理 3.7 并再次利用 (3.26)，现在可得 $\mathcal{F}$ 对于模算子是弱模的

$$\hat{\mathbf{Q}}=\otimes_{i\in I}\hat{\mathbf{Q}}_i=\mathbf{L}_{\delta}^{1+|\hbar|^{-1}}.$$

模性的证明以一个简单的观察作结：$\mathbf{L}_{\delta}\otimes\mathbf{K}_{\delta}^{-1}$ 与 $\mathcal{F}$ 对易。

为说明 (3.28) 补全了模数据，我们注意到，引理 3.7、定理 3.8 和定理 3.10，连同表达式 (3.21) 以及证明的第一部分，表明若定义

$$\mathcal{G} = \overrightarrow{\prod_{i\in I}} \widetilde{\mathbb{U}}^{(i)}_{i,\bullet}, \tag{3.32}$$

其中

$$\widetilde{\mathbb{U}}^{(s)} = G_\hbar(2\overline{\varpi}_s \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}) = G_{-\hbar}(2\overline{\varpi}_s \otimes (-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s}))$$

and

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{U}}^{(s,k)} &= G_\hbar(2\overline{\varpi_{(s,k)}} \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}) F_\hbar\left(\overline{\mathbf{E}(f_{(s,k)})} \otimes \mathbf{E}(-\overset{\searrow}{e}_{N-s}) \star \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right)\right) \\
&= G_{-\hbar}(2\overline{\varpi_{(s,k)}} \otimes (-\overset{\searrow}{e}_{N-s})) \overleftarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi_{-\hbar}\left(\overline{f_{(s,k)}} \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r} - \overset{\searrow}{e}_{N-s}\right) \\
&= G_{-\hbar}(2\overline{\varpi_{(s,k)}} \otimes (-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s})) \overleftarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi_{-\hbar}\left(\overline{f_{(s,k)}} \oplus -\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,r-s}\right) \\
&= G_{-\hbar}(2\overline{\varpi_{(s,k)}} \otimes (-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s})) \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi_{-\hbar}\left(\overline{f_{(s,k)}} \oplus -\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}\right) \\
&= \overline{G_\hbar(2\varpi_{(s,k)} \otimes \overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s}})} \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi_\hbar\left(f_{(s,k)} \oplus \overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}}\right).
\end{aligned}$$

As 从结构上看，利用这一点，(3.32) 的表达式与 (3.22) 形式相同

$$(\overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{s,k}}, \overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{s',k'}}) = (\overset{\searrow}{e}_{s,k}, \overset{\searrow}{e}_{s',k'}), \qquad 1 \leq s, s' \leq n, 0 \leq k \leq s, 0 \leq k' \leq s',$$

我们发现， $\mathcal{G}$ 确实具有 (3.28) 中的形式。

根据 (1.16) 和引理 2.3 中的公式，另一种形式 $\mathcal{G} = \mathcal{G}''\mathcal{L}$ 也可直接得到。□

目前，我们还不能断定，对于 $\triangledown'_N$ 的任意酉算子 $\hbar$-表示， $\mathcal{F}$ 都是模的。事实证明这的确成立，但要证明这一点，我们还需要更详细地了解与 Fock–Goncharov 翻转相关的 C*-代数和冯·诺依曼代数。下一节将讨论这一内容。

4. von Neumann algebras associated to the Fock–Goncharov flp

根据 [SW01 定理 2.3] （另见 [SW07 定理 5]），可以将模乘法酉算子 $\mathbb{W} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ 与一个冯·诺依曼代数 M 联系起来，该代数由 σ-弱闭包得到

$$M = M_{\mathbb{W}} := [(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*]^{\sigma\text{-weak}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{4.1}$$

这个冯·诺依曼代数还可以进一步提升为冯·诺依曼双代数，即 M配备了一个忠实、正规、幺的 $*$-同态

$$\Delta = \Delta_{\mathbb{W}} \colon M \to M \bar{\otimes} M, \quad x \mapsto \mathbb{W}^*(1 \otimes x)\mathbb{W}, \tag{4.2}$$

满足余结合条件。我们将 (M, Δ) 称为与 $\mathbb{W}$ 相关联的冯·诺依曼双代数。

ˆ 现在，如果 $\mathbb{W}$ 关于 (Q,Q) 是模的，则根据 [SW01，命题 2.2] ，有

$$\hat{\mathbb{W}} = \Sigma\mathbb{W}^*\Sigma = \mathbb{W}_{21}^*$$

ˆ ˆ ˆ 是相对于 (Q，Q) 的模乘法酉算子。我们将 $(M,\ \Delta) = (M\hat{}_{\mathbb{W}},\ \Delta\hat{}_{\mathbb{W}})$ 称为对偶冯·诺依曼双代数。具体而言，我们可以写成

$$\hat{M} = M_{\hat{\mathbb{W}}} := [(\omega \otimes \mathrm{id})\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*]^{\sigma\text{-weak}} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{4.3}$$

配备对偶余乘法

$$\hat{\Delta} = \Delta_{\hat{\mathbb{W}}} \colon \hat{M} \to \hat{M}\bar{\otimes}\hat{M}, \quad x \mapsto \hat{\mathbb{W}}^*(1 \otimes x)\hat{\mathbb{W}}. \tag{4.4}$$

本节旨在说明，对于 Fock–Goncharov 翻转，这些冯·诺依曼代数恰好是适当量子环面的完备化。为证明这一点，我们需要用到 [Rie93]，中的一些工具，下面先回顾这些内容。

4.1. C*与斜对称空间相关的代数。以下内容完全标准，但我们会谨慎地引入必要的形式体系。

对于斜对称空间 V和 $\hbar \in \mathbb{R}$，可以关联一个 C*-代数 $C_\hbar^*(V)$，使得 V 的酉表示与 $C_\hbar^*(V)$ 的非退化表示相对应。我们可以将 $C_\hbar^*(V)$ 视为 $C^*(V)$ 的群 C*-代数的一种变形；或者从 Pontryagin 对偶的角度，将其视为 C*-代数 $C_0(\hat{}V)$ 的一种变形 $C_0^\hbar(\hat{}V)$，其中 $\hat{}V$ 是 V 上实线性泛函构成的空间。这两种观点都有助于我们在下文的讨论中形成直觉。

将 V 与其线性对偶 $\hat{}V$ 之间的典范配对记作 [4]

$$\hat{w}(v) = \langle \hat{w}, v\rangle = \langle v, \hat{w}\rangle = \hat{w}\cdot v = v \cdot \hat{w}, \qquad v \in V, \hat{w} \in \hat{V}.$$

Put

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_\hbar \colon V \to \hat{V}, \qquad \langle v, \mathcal{J}w\rangle = -\frac{1}{2}\hbar(v,w), \qquad \forall v, w \in V. \tag{4.5}$$

ˆ 于是，我们可以赋予施瓦茨空间 $\mathcal{S}(V)$ 一种 $*$-代数结构，使得

$$f^*(\hat{v}) = \overline{f(\hat{v})}$$

and

$$\begin{aligned}
(f \times_\hbar g)(\hat{v}) &:= \iint_{V\times\hat{V}} f(\hat{v} - \mathcal{J}u)g(\hat{v} - \hat{w})e^{2\pi i\hat{w}\cdot u}\mathrm{d}u\mathrm{d}\hat{w} && (4.6)\\
&= \int_V f(\hat{v} - \mathcal{J}u)\hat{g}(u)e^{2\pi i\hat{v}\cdot u}\mathrm{d}u && (4.7)\\
&= \int_V \hat{f}(u)g(\hat{v} + \mathcal{J}u)e^{2\pi i\hat{v}\cdot u}\mathrm{d}u. && (4.8)
\end{aligned}$$

这里我们采用通常的傅里叶变换

$$\mathscr{F} \colon \mathcal{S}(\hat{V}) \to \mathcal{S}(V), \quad f \mapsto \hat{f}, \quad \hat{f}(v) = \int_{\hat{V}} f(\hat{w})e^{-2\pi iv\cdot\hat{w}}\mathrm{d}\hat{w}, \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{V}), v \in V, \tag{4.9}$$

[4]在 [Rie93]，中，人们通过 V 上的一个辅助正定内积来识别 $\hat{}V$ 和 V，借助该内积，$w \mapsto \hat{}w = \langle w, -\rangle$ 实际上可以视为一个具体映射，而不再只是对偶空间中元素的抽象记号。尽管在下文中这一辅助结构并非必需，读者仍可自由采用这种具体识别，以便更直接地理解 [Rie93] 中的论证。

$\hat{}$，其中 V 和 V 上的勒贝格测度经过规范化，使得反傅里叶变换为

$$\mathscr{F}^{-1}\colon \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(\hat{V}), \quad f \mapsto \check{f}, \quad \check{f}(\hat{v}) = \int_V f(w) e^{2\pi i \hat{v}\cdot w} \mathrm{d}w, \qquad f \in \mathcal{S}(V), \hat{v} \in \hat{V}. \tag{4.10}$$

$\hat{}$ 事实上，要证明 $(\mathcal{S}(V)\ \times_\hbar, *)$ 是一个结合的 $*$-代数，最简单的方法是考察通过 (4.9) 中的傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 在 $\mathcal{S}(V)$ 上诱导出的 $(\mathcal{S}(V)\ *_\hbar, \sharp)$ 的 $*$-代数结构，由此得到

$$(f *_\hbar g)(v) = \int_V f(u) g(v-u) e^{2\pi i v\cdot \mathcal{J}u} \mathrm{d}u, \qquad f^\sharp(u) = \overline{f(-u)}, \qquad f \in \mathcal{S}(V),$$

因此

$$\widehat{f \times_\hbar g} = \hat{f} *_\hbar \hat{g}, \qquad \widehat{f^*} = \hat{f}^\sharp. \tag{4.11}$$

事实上，容易验证 $(\mathcal{S}(V)\ *_\hbar, \sharp)$ 是一个关于范数$f \mapsto \|\hat{}f\|_1$的赋范结合 $*$-代数。将其完备化后，得到具有扭曲卷积 $*$-代数结构的赋范巴拿赫 $*$-代数 $(L^1(V)\ *_\hbar, \sharp)$。因此，下面的定义是有意义的，因为巴拿赫 $*$-代数在希尔伯特空间上的任意 $*$-表示都是压缩的（=范数递减）。

定义 4.1. 我们将 $C^*_\hbar(V)$ 定义为一个 C*-代数，它是 $(\mathcal{S}(V)\ *_\hbar, \#)$ 关于其泛 C*-范数的范数完备化

$$\|f\|_\hbar := \sup_\pi \{\|\pi(f)\|\},$$

其中 π 遍历所有作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的非退化 $*$-表示 $\pi\colon L^1(V) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

相应地，我们将 $C_0^\hbar(\hat{V})$ 定义为 $(\mathcal{S}(\hat{V})\ \times_\hbar, *)$ 关于 C*-范数的 C*-代数完备化

$$\|f\|_\hbar := \|\hat{f}\|_\hbar, \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{V}).$$

由构造可知，$C_0^\hbar(\hat{V})$ 与 $C^*_\hbar(V)$ 通过以下映射同构

$$C_0^\hbar(\hat{V}) \cong C^*_\hbar(V), \quad f \mapsto \hat{f} \text{ for } f \in \mathcal{S}(\hat{V}),$$

$\hat{}$，以下我们可以将这两个 C*-代数视为相同。对于 $f \in \mathcal{S}(V)$，为强调起见，我们用 $f_\hbar$ 表示其在 $C^*_\hbar(V)$ 中的副本，进而将 $\mathcal{S}(V)$ 到 $C^*_\hbar(V)$ 的包含映射记为

$$\mathcal{Q}\colon \mathcal{S}(\hat{V}) \to C^*_\hbar(V), \qquad f \mapsto f_\hbar. \tag{4.12}$$

另一方面，在傅里叶对偶一侧，区分这类情况的必要性较小，因此如果 $f \in \mathcal{S}(V)$，我们也只写作 $f \in C^*_\hbar(V)$。

引理 4.2. *V的酉 $\hbar$-表示 $(\mathcal{H}, \pi)$ 与 $C^*_\hbar(V)$的非退化 $*$-表示 $(\mathcal{H}, \pi)$ 之间存在一一对应，由下式确定*

$$\pi(f_\hbar) = \pi(\hat{f}) := \int_V \hat{f}(v)\pi(v)\mathrm{d}v, \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{V}). \tag{4.13}$$

证明。 这是众所周知的。证明如下：写成

$$(u \cdot f)(v) = e^{\pi i \hbar(u,v)} f(v-u), \qquad f \in L^1(V), u, v \in V,$$

容易验证，对于任意 $f \in L^1(V)$，映射

$$V \ni u \mapsto u \cdot f \in L^1(V),$$

关于 L^1-范数连续。进一步可以验证

$$L^1(V) \ni f \mapsto u \cdot f \in L^1(V)$$

对于任意 $u \in V$ 都是等距线性映射，其逆映射为

$$f \mapsto u^{-1} \cdot f.$$

最后，还要使用容易验证的乘子性质

$$g^\sharp *_\hbar (u \cdot f) = (u^{-1} \cdot g)^\sharp *_\hbar f, \qquad f, g \in L^1(V), u \in V.$$

□

例如，对于通过 (1.6) 给出的 V 的标准酉 $\hbar$-表示，相应的 $C^*_\hbar(V)$-表示由下式确定：

$$\pi(f)g = f *_\hbar g, \qquad f, g \in \mathcal{S}(V). \tag{4.14}$$

对酉傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 进行共轭后，我们得到 V 在 $L^2(\hat{V})$ 上的酉等价酉$\hbar$-表示 $\pi = \pi_{L^2(\hat{V})}$（我们仍记作同一符号），现在由下式确定：

$$(\pi(v)g)(\hat{w}) = e^{2\pi i v \cdot \hat{w}} g(\hat{w} + \mathcal{J}v), \qquad v \in V, \hat{w} \in \hat{V}, g \in \mathcal{S}(\hat{V}), \tag{4.15}$$

并且，利用 (4.8)，由下式确定在 $L^2(\hat{V})$ 上的 $C^*_\hbar(V)$ 的相应 $*$-表示：

$$\pi(f_\hbar)g = f \times_\hbar g, \qquad f, g \in \mathcal{S}(\hat{V}). \tag{4.16}$$

定义 4.3. 我们将 $(L^2(V)\ \pi)$ 或 $(L^2(\hat{V})\ \pi)$（其中 π 如 (4.14) 或 (4.16) 所示）称为 $C^*_\hbar(V)$ 的**标准 $*$-表示**，或称为 V 的**标准酉 $\hbar$-表示**。接着定义

$$L_\hbar(V) := [\pi(f_\hbar) \mid f \in \mathcal{S}(\hat{V})]^{\sigma-\text{weak}} \subseteq \mathcal{B}(L^2(\hat{V})), \tag{4.17}$$

这定义了一个冯·诺依曼代数，称为 V 的**扭曲群冯·诺依曼代数**。

如果 $*$-表示 $C^*_\hbar(V)$ 是非退化的，且可扩张为 $L_\hbar(V)$ 的（忠实）正规 $*$-表示，我们就称其为（忠实）**正规的**。对于相应的 V 的酉 $\hbar$-表示，我们也使用这一术语。

若 V 是辛的，且具有拉格朗日子空间 $W \subseteq V$，则通过例 1.6 中的构造可得到如下同一

$$C^*_\hbar(V) \cong \mathcal{K}(L^2(W)), \qquad L_\hbar(V) \cong \mathcal{B}(L^2(W)), \tag{4.18}$$

以及任意 酉 元 $\hbar$-表示会产生 $C^*_\hbar(V)$ 的忠实正规 $*$-表示。

特别地，若 V 是辛的或平凡的，则 $C^*_\hbar(V)$ 是核 C*-代数。由于斜对称空间直和上的酉 $\hbar$-表示恰好是各分量在同一希尔伯特空间上的逐点交换的 $\hbar$-表示对，由分解 (1.2) 可得

$$C^*_\hbar(V) \cong C^*(\mathrm{Rad}(V)) \otimes C^*_\hbar(V') \tag{4.19}$$

对任意斜对称空间都是核的，并且

$$C^*_\hbar(V \oplus W) \cong C^*_\hbar(V) \otimes C^*_\hbar(W) \tag{4.20}$$

对任意斜对称空间的直和都成立。此外，同构 (4.19) 还表明，$C^*_\hbar(V)$ 的标准 $*$-表示 π 对任意斜对称空间 V 都是忠实的；更一般地，分解 (4.19) 通过典范酉算子，具体实现为以 (4.14) 形式对标准表示（的张量积）进行识别

$$L^2(V \oplus W) \cong L^2(V) \otimes L^2(W).$$

由此也可得出

$$L_\hbar(V \oplus W) \cong L_\hbar(V) \bar{\otimes} L_\hbar(W).$$

现在，若对一般的斜对称空间 V 考虑如 (1.3) 所示的直和分解，并将 $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}e_i$ 视为 Z_i 的一个拉格朗日子空间，便可特别得到 C*-代数和冯·诺依曼代数的同构

$$C^*_\hbar(V) \cong C_0(\widehat{\mathrm{Rad}(V)}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R})), \qquad L_\hbar(V) \cong L^\infty(\widehat{\mathrm{Rad}(V)}) \bar{\otimes} \overline{\bigotimes}_{i=1}^{m} \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})). \tag{4.21}$$

以下结论可直接由上述分解推出。

引理 4.4。若 V 是一个斜对称空间，则 $L_\hbar(V)$ 是一个 I 型冯·诺依曼代数。当且仅当 V 是辛空间时，它才是因子。

以下引理是由这样一个事实推出的：若 $Z \subseteq V$ 是一个斜对称空间的子空间，我们总能选择 V 的分解 (1.3)，使得

$$Z = (Z \cap \mathrm{Rad}(V)) \oplus \bigoplus_{i=1}^{m} (Z \cap Z_i),$$

其中 $\emptyset$，$\{e_i\}$ 或 $\{e_i, \hat{}e_i\}$ 是 $Z \cap Z_i$的一组基。

引理 4.5. 若 $Z \subseteq V$ 是斜对称空间的一个包含，则 V 的标准酉算子$\hbar$-表示限制为 Z的忠实正规酉算子 $\hbar$-表示。

具体而言，所得嵌入 $L_\hbar(Z) \subseteq L_\hbar(V)$ 由下式确定：

$$f_\hbar = \int_Z \hat{f}(z)\pi(z)\mathrm{d}z, \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{Z}).$$

4.2. **带边界向量空间的 Rieffel 变形**。对于下文，了解可以扩大量子化映射 (4.12) 的定义域将十分重要。

$\hat{}$ 再次固定一个斜对称空间 V，并考虑 $C^\infty_b(V)$，即 V 上一致光滑的有界函数空间；这些函数满足 Banach 空间值函数 $\hat{}v \mapsto f_{\hat{v}} \in C_b(\hat{}V)$ 光滑，其中 $f_{\hat{v}}(\hat{}w) = f(\hat{}w - \hat{}v)$。于是，以下是命题 E.1 的一个特例。

引理 4.6。量子化映射 (4.12) 唯一延拓为一个映射

$$\mathcal{Q}\colon C^\infty_b(\hat{V}) \to M(C^*_\hbar(V)), \qquad f \mapsto f_\hbar, \tag{4.22}$$

$\hat{}$与 $M(C^*_\hbar(V))$ $C^*_\hbar(V)$的乘子 C*-代数相对应，使得对于 $g \in \mathcal{S}(V)$，有

$$f_\hbar g_\hbar = (f \times_\hbar g)_\hbar, \qquad g_\hbar f_\hbar = (g \times_\hbar f)_\hbar, \qquad f \in C^\infty_b(\hat{V}), g \in \mathcal{S}(\hat{V}),$$

其中 $f \times_\hbar g$ 和 $g \times_\hbar f$ 分别由(4.7) 和(4.8)定义。

ˆ 例如，在 $C_b^\infty(V)$ 中，我们有函数

$$e^{2\pi iv}\colon \hat{V} \to \mathbb{C}, \qquad \hat{w} \mapsto e^{2\pi iv\cdot\hat{w}}. \tag{4.23}$$

于是很容易从 (4.7) 和 (4.13) 得出，对于任意酉算子 $\hbar$-表示 π，都有与 (4.13) 反向的关系：

$$\pi(e_\hbar^{2\pi iv}) = \pi(v). \tag{4.24}$$

此外还有

$$e_\hbar^v \eta\, C_\hbar^*(V), \tag{4.25}$$

其中 η 表示 C*-代数的伴随关系，我们在附录 D 中回顾了这一概念。伴随关系 (4.25) 由以下内容唯一确定：

$$\pi(e_\hbar^{2\pi v}) = \mathbf{E}(v), \qquad v \in V, \tag{4.26}$$

for V 的任意酉算子 $\hbar$-表示（参见定理 E.2 后的讨论）。

ˆˆ 我们将如下应用这一点。假设我们有由集合索引的 V 和 V的对偶基 $\{f_i\}$ 和 $\{f_i\}$

$$I = I_0 \sqcup I_1. \tag{4.27}$$

我们通过以下方式利用这些基来标识 $V \cong \mathbb{R}^I \cong \hat{}V$

$$v = \sum_i v_i f_i, \qquad \hat{v} = \sum_i \hat{v}_i \hat{f}_i, \qquad v \in V, \hat{v} \in \hat{V}.$$

考虑凸闭锥

$$V \supseteq V_+ = V_+(I_0, I_1) := \{v \in V \mid v_i = \langle v, \hat{f}_i\rangle \geq 0, \forall i \in I_1\} \tag{4.28}$$

以及对偶扩展凸闭锥

$$\hat{V} \subseteq \hat{V}_+ = \hat{V}_+(I_0, I_1) := \mathbb{R}^{I_0} \times \mathbb{R}_{-\infty}^{I_1}, \qquad \mathbb{R}_{-\infty} = [-\infty, \infty), \tag{4.29}$$

赋予其积拓扑，并令 $\mathbb{R}_{-\infty}$ 的拓扑由 $\mathbb{R}$ 中的开区间以及对于 $a \in \mathbb{R}$的区间 $[-\infty, a)$生成。

考虑包含关系

$$C_0(\hat{V}) \subseteq C_0(\hat{V}_+) \subseteq C_b(\hat{V}_+) \subseteq C_b(\hat{V}), \tag{4.30}$$

ˆˆ 其中最后一个包含是通过限制到 V 得到的。由于 V 的平移作用连续延拓至 V_+，上述包含是 V-等变的，我们也可以考虑

$$C_0^\infty(\hat{V}) \subseteq C_0^\infty(\hat{V}_+) \subseteq C_b^\infty(\hat{V}_+) \subseteq C_b^\infty(\hat{V}). \tag{4.31}$$

Put

$$C_\hbar^*(V_+) := [f_\hbar \mid f \in C_0^\infty(\hat{V}_+)] \subseteq M(C_\hbar^*(V)). \tag{4.32}$$

定理 4.7。 </style}空间 (V_+) 是一个 C^*-代数。此外，

$$e_\hbar^w \eta\, C_\hbar^*(V_+), \qquad w \in V_+. \tag{4.33}$$

上述定理的证明可见附录 E。

要应用这个定理，需要用到特定的商映射。具体来说，假设

$$I' \subseteq I, \qquad \text{with } I'_i = I_i \cap I',$$

并假设我们有

$$(f_i, f_j) = 0, \qquad \forall i \in I_0 \setminus I'_0, j \in I'.$$

Put

$$V' = V(I'_0, I'_1) \subseteq V$$

作为一个斜对称子空间。虽然这个映射不允许在斜对称空间之间进行分裂，但在转到相应的 C*-代数时，这样的分裂是存在的：

定理 4.8. 存在唯一的非退化 *C**-代数同态

$$\pi_{I'} \colon C^*_\hbar(V_+) \to C^*_\hbar(V'_+), \qquad f_\hbar \mapsto f_{I',\hbar}, \qquad f \in C^\infty_0(\hat{V}_+), \tag{4.34}$$

其中 $f_{I'} = f \circ \iota_{I'} \in C^\infty_0(\hat{}V'_+)$ 对于

$$\iota_{I'} \colon \hat{V}'_+ \to \hat{V}_+, \qquad \iota_{I'}(\hat{v}')_i = \begin{cases} \hat{v}'_i & if \quad i \in I', \\ -\infty & if \quad i \in I_1 \setminus I'_1, \\ 0 & if \quad i \in I_0 \setminus I'_0. \end{cases} \tag{4.35}$$

此外，在此商映射下，我们有

$$\pi_{I'}(e^{f_i}_\hbar) = \begin{cases} e^{f_i}_\hbar & if \quad i \in I', \\ 0 & if \quad i \in I_1 \setminus I'_1, \\ 1 & if \quad i \in I_0 \setminus I'_0. \end{cases} \tag{4.36}$$

证明见附录 E 末尾。

注 4.9。 为将其与代数框架进行比较，应将 $C^*_\hbar(V)$ 视为 $\mathbb{C}_q[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ 的解析类比物，即一个斜 Laurent 多项式代数，其中（例如）

$$X_i X_j = q^{\varepsilon_{ij}} X_j X_i$$

对于 q 一个（形式）常数以及 $\varepsilon_{ij} \in \mathbb{Z}$。于是，尽管在此代数中不能将任何 X_i 置为零，但可以很容易地为相应的斜多项式代数$\mathbb{C}_q[X_1, \dots, X_n]$得到这样的商映射；当 $I = I_1$ 时，该代数正是 $C^*_\hbar(V_+)$ 的代数对应物。

4.3. **与 Fock–Goncharov 翻转相关的冯·诺依曼代数**。 在本节中，我们将明确确定与 Fock–Goncharov 翻转 $\mathcal{F}$ （如 (4.1) 和 (4.3) 中所示）相关的冯·诺伊曼代数 $M_\mathcal{F}$ 和 $M_\mathcal{F} = M_{\hat{\mathcal{F}}}$，其中特别地

$$\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^*_{21}.$$

我们首先证明， $\mathcal{F}$ 的模性以及相关的冯·诺伊曼代数 $M_\mathcal{F}$和 $\hat{} M_\mathcal{F}$，均不依赖于酉算子 $\hbar$ 对 $\bigtriangledown'_N$ 的具体表示选择。

$\hat{}$**定理 4.10.** 设 $\mathcal{F}$ 是任意一个 *Fock–Goncharov* 翻转。则对于$\hat{}$定理 *3.11* 中的$\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}$ 和 $\mathcal{G}$，有$(\mathcal{F}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}$ $\mathcal{G})$ 是一个模数据。

证明。 设 V_N 是 (3.15) 中的辛空间，其关联的 $\hbar$-Heisenberg 表示作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上。该表示是忠实正规表示，因此，根据引理 4.5，它在 $\triangledown'_N$ 上的限制也是忠实正规表示。因此，特别地，我们可以将 $C^*_\hbar(\triangledown'_N)$ 与 $\subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 等同起来。

Le现在 $\mathcal{F}$ 是作用于 $\mathcal{H}$上的相应 Fock–Goncharov 翻转。由 (4.25)，我们有 e

$$\mathcal{F} \in M(C^*_\hbar(\triangledown'_N) \otimes C^*_\hbar(\triangledown'_N)) \tag{4.37}$$

ˆ 考虑其相应的模数据 $(\mathcal{F},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}\ \mathcal{G})$。若 π 是 $\triangledown'_N$的酉算子 $\hbar$-表示，视为 $C^*_\hbar(\triangledown'_N)$的非退化 $*$-表示，则我们要证明

$$(\mathcal{F}_\pi, \mathbf{Q}_\pi, \hat{\mathbf{Q}}_\pi, \mathcal{G}_\pi) := ((\pi\otimes\pi)\mathcal{F}, \pi(\mathbf{Q}), \pi(\hat{\mathbf{Q}}), (\overline{\pi}\otimes\pi)\mathcal{G})$$

是一个模数据。

现在 (3.2) 可以改写为

$$\omega((\mathrm{id}\otimes\omega_{\mathbf{Q}^{-1}\xi,\mathbf{Q}\eta})\mathcal{F}) = \omega(\overline{(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\eta})\mathcal{G}}^*), \qquad \forall\xi\in\mathscr{D}(\mathbf{Q}^{-1}), \forall\eta\in\mathscr{D}(\mathbf{Q}), \forall\omega\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_*,$$

which implies

$$(\mathrm{id}\otimes\omega_{\mathbf{Q}^{-1}\xi,\mathbf{Q}\eta})\mathcal{F} = \overline{(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi,\eta})\mathcal{G}}^*.$$

由于这些都是 $M(C^*_\hbar(\triangledown'_N))$ 的元素，我们可以应用 π，然后得到

$$\langle\xi\otimes\eta',\ (\pi\otimes\mathrm{id})(\mathcal{F})(\eta\otimes\mathbf{Q}\xi')\rangle = \langle\overline{\eta}\otimes\mathbf{Q}\eta',\ (\pi\otimes\mathrm{id})(\mathcal{G})(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle, \qquad \forall\xi',\eta'\in\mathscr{D}(\mathbf{Q})\ \ \xi,\eta\in\mathcal{H}.$$

ˆ由于$\mathbf{Q}_\pi\otimes\mathbf{Q}$ 显然与$(\pi\otimes\mathrm{id})\mathcal{F}$可交换，因此这也意味着

$$\langle\hat{\mathbf{Q}}_\pi\xi\otimes\eta', (\pi\otimes\mathrm{id})(\mathcal{F})(\eta\otimes\xi')\rangle = \langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}_\pi\eta}\otimes\eta', (\overline{\pi}\otimes\mathrm{id})(\mathcal{G})(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle,$$
$$\forall\xi,\eta\in\mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}_\pi), \xi',\eta'\in L^2(\triangledown'_N).$$

So,

$$(\omega_{\hat{\mathbf{Q}}_\pi\xi,\eta}\pi\otimes\mathrm{id})\mathcal{F} = (\omega_{\overline{\hat{\mathbf{Q}}_\pi\eta},\overline{\xi}}\overline{\pi}\otimes\mathrm{id})\mathcal{G}, \qquad \forall\xi,\eta\in\mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}_\pi).$$

由于这些是 $M(C^*_\hbar(\triangledown_N))$ 中的元素，我们可以再次应用 π，从而得到

$$\langle\hat{\mathbf{Q}}_\pi\xi\otimes\eta', \mathcal{F}_\pi(\eta\otimes\xi')\rangle = \langle\overline{\hat{\mathbf{Q}}_\pi\eta}\otimes\eta', \mathcal{G}_\pi(\overline{\xi}\otimes\xi')\rangle, \qquad \forall\xi,\eta\in\mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}_\pi), \xi',\eta'\in L^2(\triangledown'_N).$$

ˆ由于$\mathbf{Q}_\pi\otimes\mathbf{Q}_\pi$ 与 $\mathcal{F}_\pi$ 可交换，证毕。 □

请注意，这一结果并非空洞：对于任意 $N\geq 2$，都有 $\mathrm{Rad}(\triangledown'_N)\neq\{0\}$，因此 $C^*_\hbar(\triangledown'_N)$ 允许非忠实的非退化 $*$-表示。然而我们将证明，尽管如此，所有 Fock–Goncharov 翻转都会导出相同的冯·诺依曼双代数。

回忆一下 B_N^-， B_N^+，其定义见 (2.15)。

引理 4.11。 若 π 是 $\triangledown'_N$的酉算子 $\hbar$-表示，则其在 $B_N^\pm$ 上的限制是忠实正规。

证明。 根据引理 2.6，我们可以找到辛子空间 $Z^\pm$，使得

$$B_N^\pm \subseteq Z^\pm \subseteq \triangledown'_N.$$

现在由引理 4.5 以及辛空间上的任意酉算子 $\hbar$-表示都是忠实且正规的这一事实，即可得出结果。 □

若我们考虑 (4.17) 中的标准酉算子 $\hbar$-表示∇'_N ，则将其对应的 Fock–Goncharov 翻转 (2.69) 称为 标准 *Fock–Goncharov* 翻转，并在本节中固定使用这一记号

$$\mathcal{F} \in L_\hbar(\nabla'_N)\bar{\otimes}L_\hbar(\nabla'_N). \tag{4.38}$$

接下来我们将.....视为

$$M = M_{\mathcal{F}} \subseteq L_\hbar(\nabla'_N), \qquad \hat{M} = M_{\hat{\mathcal{F}}} \subseteq L_\hbar(\nabla'_N). \tag{4.39}$$

注意，由 $\mathcal{F}$ 的公式可立即得出，事实上

$$\mathcal{F} \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^+). \tag{4.40}$$

由引理 4.11，我们得到：

推论 4.12。 设 $\mathcal{F}$ 是标准的 *Fock–Goncharov* 翻转， π 是 ∇'_N 的一个酉算子 $\hbar$-表示。那么，取 $\mathcal{F}_\pi = (\pi \otimes \pi)\mathcal{F}$，我们得到

$$(M_{\mathcal{F}}, \Delta_{\mathcal{F}}) \cong (M_{\mathcal{F}_\pi}, \Delta_{\mathcal{F}_\pi}), \qquad (M_{\hat{\mathcal{F}}}, \Delta_{\hat{\mathcal{F}}}) \cong (M_{\hat{\mathcal{F}}_\pi}, \Delta_{\hat{\mathcal{F}}_\pi}).$$

因此，从现在起我们只将.....称为

$$(M_{\mathcal{F}}, \Delta_{\mathcal{F}}), \qquad (M_{\hat{\mathcal{F}}}, \Delta_{\hat{\mathcal{F}}})$$

as *Fock–Goncharov von Neumann* 双代数 和对偶 *von Neumann* 双代数 .

进一步特化推论 4.12，我们得到：

推论 4.13。 考虑辛商空间

$$\nabla'_N \twoheadrightarrow D_N$$

如（2.19）所示。设 π 是 D_N的任意酉算子 $\hbar$-表示。

那么，将 π 视为 ∇'_N的酉算子 $\hbar$-表示时，所关联的 *Fock–Goncharov* 翻转 $\mathcal{F}$实现了 *Fock–Goncharov von Neumann* 双代数及其对偶的一个同构副本。

注意，由（4.40）可将其视为

$$M_{\mathcal{F}} \subseteq L_\hbar(B_N^-), \qquad M_{\hat{\mathcal{F}}} \subseteq L_\hbar(B_N^+).$$

我们的下一个目标是证明这些实际上是等式。

为 $B_N^\pm$ 赋予相应的基

$$\{\overset{\nearrow}{f}_i \mid i \in I\} = \{\overset{\nearrow}{\varpi}_t, \overset{\nearrow}{e}_{(s,k)} \mid 1 \leq t, s \leq n, 0 \leq k < s\}, \tag{4.41}$$

$$\{\overset{\searrow}{f}_i \mid i \in I\} = \{\overset{\searrow}{\varpi}_t, \overset{\searrow}{e}_{(s,k)} \mid 1 \leq t, s \leq n, 0 \leq k < s\}. \tag{4.42}$$

对于赋予这些基的 $B_N^\pm$ ，我们使用(4.28)和(4.29)中引入的记号。

我们固定∇'_N 的一个酉算子 $\hbar$-表示，并令其关联的 Fock–Goncharov 翻转为 $\mathcal{F}$。

引理 4.14。 对于 $1 \leq r \leq n$、 $r \leq b \leq n$ 和 $1 \leq i \leq r$，令 $B^{b,\,r,\,i}$ 如(2.62)中所述。则

$$B^{b,r,i} \in M(C_\hbar^*(B_{N,+}^-) \otimes C_\hbar^*(B_{N,+}^+)).$$

特别是，

$$\mathcal{F} \in M(C_\hbar^*(B_{N,+}^-) \otimes C_\hbar^*(B_{N,+}^+)). \tag{4.43}$$

注意，(4.43) 比 (4.37) 强得多，因为转到乘子代数时，包含关系 $C_\hbar^*(B_N^-) \subseteq C_\hbar^*(B_{N,+}^-)$ 的方向会反转；关于这一点的经典直觉，参见 (4.30)。

证明。 由 (4.33)，我们有

$$\mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r}) = e_\hbar^{2\pi \overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r}}\, \eta\, C_\hbar^*(B_{N,+}^-),$$

类似地

$$\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}) = e_\hbar^{2\pi \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}}\, \eta\, C_\hbar^*(B_{N,+}^+).$$

于是，由观察结果 (D.3)，我们有

$$\mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}) = \mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r}) \otimes \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b})\, \eta\, C_\hbar^*(B_{N,+}^-) \otimes C_\hbar^*(B_{N,+}^+).$$

现在，由于 F 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数，根据函数演算（引理 D.6 及其后的注），可得

$$B^{b,r,i} = \varphi(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}) = \overline{F}(\mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r}) \otimes \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b})) \\ \in M(C_\hbar^*(B_{N,+}^-) \otimes C_\hbar^*(B_{N,+}^+)).$$

$\mathcal{F}$ 的陈述立即可得。 □

引理 4.15. 设**A**和**B**是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$上的两个自伴算子，并假设$\mathrm{Spec}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}$。假设 u 是 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 中的一个酉算子，使得

$$(1 \otimes u) G_\hbar(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = G_\hbar(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(1 \otimes u).$$

于是， u与所有 $e^{it\mathbf{B}}$都可交换，因此也与**B**可交换。

证明。 将**A** 特化为 $t \in \mathbb{R}$ ，并使用函数演算即可立即得到。 □

引理 4.16. 设**A** 和**B** 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$上的两个严格正算子，并假设$\mathrm{Spec}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$。假设 u 是 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ 中的一个酉算子，使得

$$(1 \otimes u) F_\hbar(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = F_\hbar(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(1 \otimes u).$$

于是， u与所有$\mathbf{B}^{it}$都可交换，因此也与**B**可交换。

证明。 再次利用函数演算，假设蕴含

$$uF_\hbar(t\mathbf{B}) = F_\hbar(t\mathbf{B})u, \qquad \forall t > 0.$$

换言之，令 $\mathbf{H} = \ln(\mathbf{B})$，我们有

$$u\overline{\varphi}_\hbar(\mathbf{H} + t)u^* = \overline{\varphi}_\hbar(\mathbf{H} + t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.44}$$

现在假设 $\hbar > 0$。由于 $\varphi_\hbar$ 可延拓为上半平面 $\mathbb{H}$上的全纯函数，因此等式 (4.44) 对任意 $t \in \mathbb{H}$仍然成立（作为无界正规算子之间的等式）。由于 $\varphi_\hbar$ 满足，重写 (A.12)，函数方程

$$\overline{\varphi}_\hbar(z + 2\pi i) = (1 + e^{i\pi\hbar^{-1}} e^{\hbar^{-1}z})\overline{\varphi}_\hbar(z), \tag{4.45}$$

由（4.44）可得

$$ue^{\hbar^{-1}\mathbf{H}}u^* = e^{\hbar^{-1}\mathbf{H}}.$$

因此， u 与 $\mathbf{H}$ 对易，引理得证。

在 $\hbar < 0$ 的情形下，证明可通过取伴随算子得到。 □

现在注意到，由引理 2.3 可应用定理 4.8，从而得到非退化的 $*$-表示

$$\pi_t = \pi_{\{t\}}, \qquad \pi_{(s,k)} = \pi_{\{s,(s,0)\}}, \qquad t \in I_0, (s,k) \in I_1 \tag{4.46}$$

$C_\hbar^*(B_N^-, +)$。记

$$I_0'(t) = \{t\}, \quad I_1'(t) = \emptyset, \quad I_0'(s,k) = \{s\}, \qquad I_1'(s,k) = \{(s,0)\},$$

我们可以将其识别为（分别对应 $i = t$ 或 $i = (s,k)$）

$$B^-(I_0'(i), I_1'(i)) \subseteq W_i, \qquad \overset{\nearrow}{\varpi}_t \mapsto \varpi_t, \quad \varpi_s \mapsto \varpi_{(s,k)}, \quad \overset{\nearrow}{e}_{s,0} \mapsto f_{(s,k)},$$

与 (3.15) 中的 W_i 相同，因此可将上述 π_i 视为作用在 $\mathcal{H}_i = L^2(\mathbb{R})$ 上的 $C_\hbar^*(B_N^-, +)$ 的非退化 $*$-表示。根据引理 4.14，我们可以将这些投影映射应用于 $\mathcal{F}$ 的第一腿。于是立即可见，

$$(\pi_i \otimes \mathrm{id})\mathcal{F} = \mathbb{U}^{(i)}, \qquad i \in I, \tag{4.47}$$

其中 $\mathbb{U}^{(i)}$ 如 (3.19) 和 (3.20) 所示。这是证明以下定理的主要依据：

定理 4.17. 设 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，并设 $\mathcal{F}$ 是一个 *Fock–Goncharov* 翻转，其对应的对偶 *von Neumann* 代数为 $M = M^{\hat{}}_{\mathcal{F}}$。那么

$$\hat{M} = L_\hbar(B_N^+).$$

证明. 假设 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$。由于我们已经知道 $\hat{} M \subseteq L_\hbar(B_N^+)$，因此需要证明

$$\hat{M}' \subseteq L_\hbar(B_N^+)' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

但假设 $x \in \hat{} M'$，即

$$\mathcal{F}(1 \otimes x) = (1 \otimes x)\mathcal{F}. \tag{4.48}$$

那么 (4.48) 给出

$$\mathbb{U}^{(i)}(1 \otimes x) = (1 \otimes x)\mathbb{U}^{(i)}, \qquad i \in I. \tag{4.49}$$

根据 $\mathbb{U}^{\,i}$ 的表达式 (3.20) 和 (3.21)，我们得到）

$$[(1 \otimes x), G(2\varpi \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s})] = 0 = \left[(1 \otimes x), \overline{F}\left(\mathbf{E}(f) \otimes \left(\boxplus_{s \leqslant r \leqslant n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right)\right)\right]$$

对所有 $1 \leq s \leq n$ 和 $s \leq r \leq n$均成立。应用引理 4.15 和引理 4.16，并使用记号 $[-,-] = 0$ 表示两个算子之间的强交换，我们得到

$$[x, \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s})] = 0 = [x, \boxplus_{s \leqslant r \leqslant n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})], \qquad \forall 1 \leq s \leq n.$$

定理现由下述命题的第一部分推出。 □

回顾定义 2.17 中的标准生成元，其中我们将其简写为

$$\mathbf{E}_s := \mathbf{E}_{s,s+1} = \boxplus_{s \leqslant r \leqslant n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r}), \qquad 1 \leq s \leq n. \tag{4.50}$$

我们还使用记号

$$\mathbf{K}_s := \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s}), \qquad 1 \leq s \leq n. \tag{4.51}$$

命题 4.18。 (1) 算子 $\{\mathbf{E}_s \mid 1 \leq s \leq n\}$ 生成 $L_\hbar(U_N^+)$。

(2) 算子 $\{\mathbf{K}_s、\ \mathbf{E}_s \mid 1 \le s \le n\}$ 生成 $L_\hbar(B_N^+)$。

证明。 (1) 假设 x 是一个与所有 $\mathbf{E}_s$ 强对易的算子，其中 $1 \le s \le n$。我们对 $N-s$ 使用归纳法，证明 x 随后也与所有 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s,\ k})$ 强对易，其中 $0 \le k < s$，进而与所有 $\mathbf{E}(e_{a,\ b,\ c})^{it}$ 强对易，其中 $(a,\ b,\ c) \in \overset{\searrow}{C}'_N$，这足以证明该引理。

基础情形显然成立，因为 $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{1,\ 0})$。

于是，假设对于固定的 s，我们知道 x 与所有 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s,\ k})$ 强对易，其中 $0 \le k < s$，并且也与 $\mathbf{E}_{N-s-1}$ 强对易。令

$$\mathbf{A} = \boxplus_{N-s-1 \le r < n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,n-r}), \qquad \mathbf{B} = \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,0}),$$

我们有 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ $-\hbar$ 交换，因此由 (1.29) 可写为

$$\mathbf{E}_{N-s-1} = \mathbf{A} \boxplus \mathbf{B} = F_\hbar(\mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{B} F_\hbar(\mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1})^*.$$

因此，由 (2.8) 和引理 1.17，我们推出

$$e^{-\pi\hbar s} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s,0})^{it} \mathbf{E}_{N-s-1} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s,0})^{-it} = F_\hbar(e^{-2\pi\hbar s} \mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{B} F_\hbar(e^{-2\pi\hbar s} \mathbf{A} \star \mathbf{B}^{-1})^*. \tag{4.52}$$

根据假设，x 与左边交换；又由于对于任意正算子 $\mathbf{C}$，$F_\hbar(e^{-s}\mathbf{C})$ 强收敛到 $\mathbf{1}$（由控制收敛定理及 (1.22) 可知），因此令 (4.52) 右边的 $\hbar s$ 趋于 $-\infty$，可知 x 也必与 $\mathbf{B} = \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,0})$ 交换。

类似地，现在改写为

$$\mathbf{E}_{N-s-1} = \mathbf{B} \boxplus \mathbf{A} = F_\hbar(\mathbf{B} \star \mathbf{A}^{-1})^* \mathbf{A} F_\hbar(\mathbf{B} \star \mathbf{A}^{-1}),$$

同样的论证可得，x 也必与 $\mathbf{A} = \boxplus_{N-s-1 \le r < n} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,n-r})$ 交换。

现在对变量 k 再作一次归纳即可得出结论：若假设 x 与 $\boxplus_{N-s-1 \le r \le n-k} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,n-r})$ 交换，那么采用与上面相同的论证，不过现在以 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s,k})^{it}$ 作共轭，可得 x 也与 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,n-k})$ 以及 $\boxplus_{N-s-1 \le r \le n-k-1} \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{s+1,n-r})$ 交换。引理的证明部分 (1) 至此完成。

(2) 这由（1）立即得出。 □

同样，我们可以确定与 $\mathcal{F}$ 相关联的冯·诺依曼代数 $M = M_{\mathcal{F}}$，方法是将 M 解释为与 $\mathcal{F}$ 相关联的对偶冯·诺依曼代数。首先，我们有命题 4.18 的如下类似结果。为此，我们引入记号

$$\mathbf{F}_s := \mathbf{F}_{s,s+1} = \boxplus_{0 \leqslant r \leqslant s-1} \mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_{s,r}), \qquad 1 \le s \le n, \tag{4.53}$$

$$\mathbf{L}_s := \mathbf{E}(\overset{\nearrow}{e}_s), \qquad 1 \le s \le n. \tag{4.54}$$

命题 4.19。 (1) 算子 $\{\mathbf{F}_s \mid 1 \le s \le n\}$ 生成 $L_\hbar(U_N^-)$。

(2) 算子 $\{\mathbf{L}_s, \mathbf{F}_s \mid 1 \le s \le n\}$ 生成 $L_\hbar(B_N^-)$。

证明。 证明与命题 4.18 的证明完全类似。 □

ˆ 为了得到定理 4.17 的类似结果，我们首先求出 $\mathcal{F}$ 的显式公式。

引理 4.20。我们有

$$\hat{\mathcal{F}} = \hat{\mathcal{K}}\hat{\mathcal{F}}' \tag{4.55}$$

其中

$$\hat{\mathcal{K}} = \overline{G}(2\sum_{t=1}^{n}(-\overset{\nwarrow}{\varpi}_t) \otimes (-\overset{\swarrow}{e}_{N-t}))$$

and

$$\hat{\mathcal{F}}' = \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant s\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant s-1\\ 0\leqslant (n-r)-k\leqslant n-s}}} \overline{\varphi}(-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,(n-r)-k} \oplus -\overset{\swarrow}{e}_{s,k}).$$

证明。 这直接由 (2.73) 得出。 □

现在注意到，我们有一个斜对称空间的同构

$$\theta\colon \triangledown_N \to \overline{\triangledown_N}, \qquad e_{a,b,c} \mapsto \overline{-e_{b,a,c}} \tag{4.56}$$

并且在此同构下

$$-\overset{\swarrow}{e}_{s,k} \mapsto \overline{\overset{\searrow}{e}_{s,k}}, \qquad -\overset{\nwarrow}{e}_{s,k} \mapsto \overline{\overset{\nearrow}{e}_{s,k}}, \qquad 1 \leq s \leq n, 0 \leq k \leq s.$$

这导出了冯·诺依曼代数的一个 $*$-同构

$$\Theta\colon L_\hbar(\triangledown_N') \to \overline{L_\hbar(\triangledown_N')}, \qquad \mathbf{E}(v) \mapsto \mathbf{E}(\theta(v)) \tag{4.57}$$

使得

$$\Theta(L_\hbar(B_N^-)) = \overline{L_\hbar(B_N^+)}, \qquad \Theta(L_\hbar(B_N^+)) = \overline{L_\hbar(B_N^-)}. \tag{4.58}$$

另一方面，由 (4.55) 并与 (2.66) 比较可得，标准的 Fock–Goncharov 翻转满足

$$(\Theta\otimes\Theta)(\hat{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}, \qquad (\Theta\otimes\Theta)(\mathcal{F}) = \overline{\hat{\mathcal{F}}}. \tag{4.59}$$

于是，根据推论 4.12，我们得到定理 4.17 的如下类似结果：

定理 4.21. 设 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，且设 $\mathcal{F}$ 为一个 *Fock–Goncharov* 翻转。那么

$$M_{\mathcal{F}} = L_\hbar(B_N^-).$$

本节最后，我们确定余积 (4.2) 和 (4.4) 在标准生成元上的作用。注意，由命题 4.18 和命题 4.19 可知，这就完全确定了余积。

命题 4.22. 对于 M 的生成元 $\mathbf{L}_s$、$\mathbf{F}_s$，以及 M 的生成元 $\mathbf{K}_s$、$\mathbf{E}_s$，我们有

$$\Delta(\mathbf{L}_s) = \mathbf{L}_s \otimes \mathbf{L}_s, \qquad \hat{\Delta}(\mathbf{K}_s) = \mathbf{K}_s \otimes \mathbf{K}_s,$$
$$\Delta(\mathbf{F}_s) = (\mathbf{F}_s \otimes \mathbf{L}_s) \boxplus (1 \otimes \mathbf{F}_s), \qquad \hat{\Delta}(\mathbf{E}_s) = (\mathbf{E}_s \otimes 1) \boxplus (\mathbf{K}_s \otimes \mathbf{E}_s).$$

证明。 回忆恒等式 (4.47)。然后将 π_i 应用于五边形恒等式的第一腿

$$\mathcal{F}_{23}\mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{23}^* = \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13},$$

我们得到

$$(\mathrm{id}\otimes\hat{\Delta})\mathbb{U}^{(i)} = \mathbb{U}_{13}^{(i)}\mathbb{U}_{12}^{(i)}. \tag{4.60}$$

若取 $i=s\in I_0$，则得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\hat{\Delta})G(2\varpi_s\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s}) &= G(2\varpi_s\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s})_{13}G(2\varpi_s\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s})_{12}\\ &= G(2\varpi_s\otimes(\overset{\searrow}{e}_{N-s}\otimes 1\dot{+}1\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s})),\end{aligned}$$

因此，由函数演算可得

$$\hat{\Delta}(\overset{\searrow}{e}_{N-s})=\overset{\searrow}{e}_{N-s}\otimes 1\dot{+}1\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s},$$

因此 $\Delta(\mathbf{K}_s)=\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{K}_s$。或者，我们也可以直接由例如 (2.69) 验证

$$(\mathbf{K}^{-it}\otimes\mathbf{K}^{-it})\mathcal{F}(\mathbf{K}^{it}\otimes 1)=\mathcal{F},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

另一方面，现在取 $i=(s,\ 0)$，由 (4.60) 和 (3.21) 可得

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes\hat{\Delta})\left(G\left(2\varpi_{(s,k)}\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s}\right)\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}_s\right)\right)\\ &=G\left(2\varpi_{(s,k)}\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s}\right)_{12}\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}_s\right)_{13}G\left(2\varpi_{(s,k)}\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s}\right)_{12}\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}_s\right)_{12}.\end{aligned}$$

那么，由 (1.17)、(3.14) 以及证明的第一部分可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\hat{\Delta})\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}_s\right) &= \overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s})\otimes\mathbf{E}_s\right)\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes\mathbf{E}_s\right)_{12}\\ &= \overline{F}\left(\mathbf{E}(f_{(s,k)})\otimes((\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{E}_s)\boxplus(\mathbf{E}_s\otimes 1))\right),\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 (1.30)。同样，由函数演算（参见引理 4.16 的证明），我们可以得出

$$\hat{\Delta}(\mathbf{E}_s)=(\mathbf{E}_s\otimes 1)\boxplus(\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{E}_s).$$

现在注意到，对于 (4.57) 中的 Θ，我们有

$$\overline{\Theta}(\overline{\mathbf{K}_{N-s}})=\mathbf{L}_s^{-1},\qquad \overline{\Theta}(\overline{\mathbf{E}_{N-s}})=\mathbf{L}_s^{-1}\star\mathbf{F}_s.$$

由 (4.59) 可得

$$\Delta(\mathbf{L}_s)=\mathbf{L}_s\otimes\mathbf{L}_s,\qquad \Delta(\mathbf{L}_s^{-1}\star\mathbf{F}_s)=(\mathbf{L}_s^{-1}\star\mathbf{F}_s\otimes 1)\boxplus(\mathbf{L}_s^{-1}\otimes\mathbf{L}_s^{-1}\star\mathbf{F}_s),$$

因此

$$\Delta(\mathbf{F}_s)=(\mathbf{L}_s\otimes\mathbf{L}_s)\star(\Delta(\mathbf{L}^{-1}\star\mathbf{F}_s))=(\mathbf{F}_s\otimes\mathbf{L}_s)\boxplus(1\otimes\mathbf{F}_s).$$

□

4.4. 模对偶性。 本小节简要说明模对偶性如何在此情形下出现。

设 (V,ϵ) 是一个 n 维斜对称空间。设 $\pi_\hbar$ 是 Example 1.5 中定义在 $L^2(V)$ 上的标准 $\hbar$ 表示，现在我们显式地用 $\hbar$ 为微分运算编上索引。我们还将相应的无穷小生成元记为 $\hbar$，于是对于 $t\in\mathbb{R},v\in V$，$\mathbf{E}_\hbar(v)^{it}=\pi_\hbar(tv)$。

设 $u_\hbar$ 是酉算子

$$u_\hbar\colon L^2(V)\to L^2(V),\qquad (ug)(w)=|\hbar|^{n/2}g(\hbar w),\qquad g\in L^2(V),w\in V.$$

那么我们得到一个正规 $*$-同构

$$\Theta_\hbar=\mathrm{Ad}(u_\hbar)\colon L_{\hbar^{-1}}(V)\cong L_\hbar(V),\qquad \mathbf{E}_{1/\hbar}(v)\mapsto u_\hbar\mathbf{E}_{1/\hbar}(v)u_\hbar^*=\mathbf{E}_\hbar(v)^{1/\hbar}=\mathbf{E}_\hbar(\hbar^{-1}v).\tag{4.61}$$

定理 4.23. 设 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta_\hbar)$ 为参数 $\hbar$ 下的 *Fock–Goncharov* 冯·诺依曼双代数。那么，(4.61) 中的 $\Theta_\hbar$ 给出了一个同构

$$(L_{1/\hbar}(B_N^-), \Delta_{1/\hbar}) \cong (L_\hbar(B_N^-), \Delta_\hbar).$$

证明。注 意到，在写作 $\mathbf{v}_\hbar = \ln(\mathbf{E}_\hbar(v))$ 时，同构 $\Theta_\hbar$ 仅通过以下方式作用：

$$\Theta_\hbar(\mathbf{v}_{1/\hbar}) = \hbar^{-1}\mathbf{v}_\hbar.$$

现在考虑 Fock–Goncharov 翻转的分解 (2.69)。那么，一方面，我们看到

$$(\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\mathcal{K}_{\hbar^{-1}}) = G_{1/\hbar}\left(2\hbar^{-2}\sum_{t=1}^{n} \overset{\nearrow}{\varpi}_t \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-t}\right) = G_\hbar\left(2\sum_{t=1}^{n} \overset{\nearrow}{\varpi}_t \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-t}\right) = \mathcal{K}_\hbar.$$

另一方面，由 (A.15) 可得

$$\varphi_{1/\hbar}(z/\hbar) = \varphi_\hbar(z), \qquad z \in \mathbb{R},$$

因此，对于 (2.62) 中定义的 $\mathcal{F}'$ 的任意因子 $B^{b,\ r,\ i} = B^{b,\ r\ i}_{\hbar}$，我们得到

$$\begin{aligned}(\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(B^{b,r,i}_{1/\hbar}) &= (\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\varphi_{1/\hbar}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b})) \\ &= \varphi_{1/\hbar}(\hbar^{-1}(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b})) = \varphi_\hbar(\overset{\nearrow}{e}_{b-i+1,b-r} \oplus \overset{\searrow}{e}_{n-b+i,n-b}) = B^{b,r,i}_\hbar,\end{aligned}$$

因此 $(\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\mathcal{F}'_{1/\hbar}) = \mathcal{F}'_\hbar$。

由上可知 $(\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\mathcal{F}_{1/\hbar}) = \mathcal{F}_\hbar$，因此特别地，对于任意$x \in L_{1/\hbar}(B_N^-)$，我们有

$$(\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\Delta_{1/\hbar}(x)) = (\Theta_\hbar \otimes \Theta_\hbar)(\mathcal{F}^*_{1/\hbar}(1 \otimes x)\mathcal{F}_{1/\hbar}) = \mathcal{F}^*_\hbar(1 \otimes \Theta_\hbar(x))\mathcal{F}_\hbar = \Delta_\hbar(\Theta_\hbar(x)),$$

证明至此完成。 □

5. Quantized Borel groups as locally compact quantum groups

本节将证明，Fock–Goncharov 冯·诺依曼双代数 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 是一个局部紧量子群，意义如 [KV03]所述。

5.1. 与模乘法酉算子相关的不变权。 关于冯·诺依曼代数权理论的简要概述，请参阅附录 F。

取 $\mathcal{H}$ 一个希尔伯特空间，其上关联的迹 Tr 定义在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上，如 (F.1) 所示。对于 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathbf{T}$ 一个正算子，考虑变形后的 $\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}}$，如 (F.4) 所示；于是，令 $\chi_{[0,r]}$ 为 $[0,r]$ 的示性函数，并且

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{T}\chi_{[0,r]}(\mathbf{T}),$$

我们有

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}}(x) = \sup_{r>0}\sum_i \omega_{\mathbf{T}_r^{1/2}e_i, \mathbf{T}_r^{1/2}e_i}(x) = \sup_{r>0}\sum_i \|x^{1/2}\mathbf{T}_r^{1/2}e_i\|^2, \qquad x \geq 0,$$

其中 $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的任意标准正交基。

ˆ 设 $\mathbb{W}$ 是作用于 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ 上的乘法酉算子，且（$\mathbb{W}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}$ $\mathbb{W}_c$）是一个模数据。重写（3.2）式可得

$$\langle \xi' \otimes \eta, \mathbb{W}(\eta' \otimes \mathbf{Q}\xi)\rangle = \langle \xi' \otimes \overline{\xi}, \overline{\mathbb{W}_c}^*(\eta' \otimes \overline{\mathbf{Q}\eta})\rangle, \qquad \forall \xi, \eta \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}), \xi', \eta' \in \mathcal{H}. \tag{5.1}$$

下面是对 [Wor03 定理 1.1], 的一个变体，另见 [VVD03]。

命题 5.1。 设 $\mathbb{W} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ 是相对于$(\mathbf{Q}, \hat{}\mathbf{Q})$的模乘法酉算子，其关联的冯·诺依曼代数为 $M, \hat{}M$ ，如(4.1) 和(4.3)中所示。设 $a \in \hat{}M'$。则正规权

$$\varphi = \mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}^2,a}\colon \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \to [0,\infty], \qquad x \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}^2}(axa^*)$$

相对于.....是左不变的

$$\Delta = \Delta_{\mathbb{W}}\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H}), \qquad x \mapsto \Delta(x) = \mathbb{W}^*(1\otimes x)\mathbb{W}, \qquad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

其含义是

$$\varphi((\omega\otimes\mathrm{id})\Delta(x)) = \varphi(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{m}_\varphi^+,\ \textit{all states}\ \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*^+. \tag{5.2}$$

证明。 假设 $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$。若 ξ 是 $\mathcal{H}$ 中的单位向量，则只需证明相对于 $\omega = \omega_{\xi,\xi}$ 的 (5.2)。由于 x 是低于 x 的正秩一算子之和所构成的有向集的上确界，因此只需对 $x = \theta_{\eta,\eta}$ （如 (0.2) 中所示）证明 (5.2)，其中 $\|\eta\| = 1$ 且 $axa^* = \theta_{a\eta,a\eta} \in \mathfrak{m}^+{}_{\mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}^2}}$。注意，后者蕴含 $a\eta \in \mathscr{D}(\mathbf{Q})$。

由于 $\hat{}\mathbb{W} \in M\bar{\otimes}M$，我们现在计算得出，确实，对于 $\{e_n\}$ 的一个标准正交基 $\mathcal{H}$，

$$\begin{aligned}
\varphi((\omega_{\xi,\xi}\otimes\mathrm{id})\Delta_{\mathbb{W}}(x)) &= \sup_{r>0}\sum_n (\omega_{\xi,\xi}\otimes\omega_{a^*\mathbf{Q}_r e_n, a^*\mathbf{Q}_r e_n})(\mathbb{W}^*(1\otimes\theta_{\eta,\eta})\mathbb{W}) \\
&= \sup_{r>0}\sum_{m,n} (\omega_{\xi,\xi}\otimes\omega_{a^*\mathbf{Q}_r e_n, a^*\mathbf{Q}_r e_n})(\mathbb{W}^*(\theta_{e_m,e_m}\otimes\theta_{\eta,\eta})\mathbb{W}) \\
&= \sup_{r>0}\sum_{m,n} |\langle e_m\otimes\eta, \mathbb{W}(\xi\otimes a^*\mathbf{Q}_r e_n)\rangle|^2 \\
&= \sup_{r>0}\sum_{m,n} |\langle e_m\otimes a\eta, \mathbb{W}(\xi\otimes \mathbf{Q}_r e_n)\rangle|^2 \\
&\underset{(5.1)}{=} \sup_{r>0}\sum_{m,n} |\langle e_m\otimes \overline{\chi_{[0,r]}(\mathbf{Q})e_n}, \overline{\mathbb{W}_c}^*(\xi\otimes\overline{\mathbf{Q}a\eta})\rangle|^2 \\
&= \sup_{r>0} \|(1\otimes\overline{\chi_{[0,r]}(\mathbf{Q})})\overline{\mathbb{W}_c}^*(\xi\otimes\overline{\mathbf{Q}a\eta})\|^2 \\
&= \|\overline{\mathbb{W}_c}^*(\xi\otimes\overline{\mathbf{Q}a\eta})\|^2 \\
&= \|\xi\otimes\overline{\mathbf{Q}a\eta}\|^2 \\
&= \|\mathbf{Q}a\eta\|^2 \\
&= \varphi(x).
\end{aligned}$$

□

5.2. **Rieffel 变形上的不变权重**。为了在 Fock–Goncharov 翻转的情形下应用命题 5.1，我们需要了解斜对称空间的扭曲群冯·诺伊曼代数上的权。

我们从以下众所周知的观察开始。固定 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，并固定 V 一个斜对称空间，其上带有标准酉算子 $\hbar$-表示 $(L^2(\hat{V})\ \pi)$ 及相应的冯·诺依曼代数

$$L_\hbar(V) \subseteq \mathcal{B}(L^2(\hat{V}))$$

如 (4.17) 所示。我们还考虑 V 和 $\hat{V}$ 在 $L^2(\hat{V})$ 上的（通常的）酉表示，定义如下：

$$(e_v f)(\hat{w}) = e^{2\pi i v\cdot\hat{w}} f(\hat{w}), \qquad f \in L^2(\hat{V}), v \in V, \hat{w} \in \hat{V}, \tag{5.3}$$

$$(\theta_{\hat{v}} f)(\hat{w}) = f(\hat{w} - \hat{v}), \qquad f \in L^2(\hat{V}), \hat{v}, \hat{w} \in \hat{V}. \tag{5.4}$$

注意，由 (4.15) 可得

$$\pi(v) = e_v \theta_{-\mathcal{J}v}, \tag{5.5}$$

其中 $\mathcal{J}$ 如 (4.5) 所示。

引理 5.2. 存在唯一的 σ-弱连续作用 α，使得 V 在 $L_\hbar(V)$ 上满足

$$\alpha_{\hat{v}}(\pi(v)) = e^{-2\pi i \hat{v}\cdot v}\pi(v), \qquad \forall v \in V, \hat{v} \in \hat{V}. \tag{5.6}$$

此外，该作用是遍历的，并且对于 $f \in \mathcal{S}(V)$ 有

$$\alpha_{\hat{v}}(f_\hbar) = (f_{\hat{v}})_\hbar, \qquad f_{\hat{v}}(\hat{w}) = f(\hat{w} - \hat{v}), \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{V}), \hat{v}, \hat{w} \in \hat{V}. \tag{5.7}$$

证明。 令 $\theta_{\hat{v}}$ 如 (5.4) 所示，则可见

$$x \mapsto \alpha_{\hat{v}}(x) = \theta_{\hat{v}} x \theta_{\hat{v}}^*$$

满足（5.6），因此确实在 $L_\hbar(V)$ 上实现了一个 V-作用。利用例如（4.13）和（4.15），可得（5.7）。

为证明该作用是遍历的，再考虑酉算子

$$\pi'(v) = e_v \theta_{\mathcal{J}v}, \qquad v \in V.$$

由（5.5）可知

$$[\pi(v), \pi'(w)] = 0, \qquad v, w \in V,$$

因此，$\pi'(w)$ 也与所有 $x \in L_\hbar(V)$ 交换。于是，若 $x \in L_\hbar(V)$ 和 $\alpha_{\hat{v}}(x) = x$ 对所有 $\hat{v} \in V$ 都成立，则 x 与所有 $\theta_{\hat{v}}$ 以及所有 $e_v\theta_{\mathcal{J}v}$ 交换，因而与所有 $\theta_{\hat{v}}$ 和 e_v 交换。但后者作为冯·诺依曼代数生成了 $\mathcal{B}(L^2(\hat{V}))$，所以 x 必须是标量。□

现在回顾（F.31）中的构造和记号。

引理 5.3。 该权

$$\int_{\hat{V}}^{\hbar} := \varphi_\alpha \colon L_\hbar(V)_+ \to [0, \infty]$$

与 α 相关联的是一个迹型正规半有限权重。

证明。 φ_α 的忠实性由 φ_α的一般理论和构造得出。利用一般理论工具也可以证明半有限性，但我们给出一种直接方法：首先注意到，如果 f，$g \in \mathcal{S}(\hat{V}) \subseteq L^2(\hat{V})$，那么

$$k_{f,g} \colon v \mapsto \langle f, \pi(v) g\rangle = \int_{\hat{V}} e^{2\pi i v\cdot\hat{w}} g(\hat{w} + \mathcal{J}v)\overline{f(\hat{w})}\mathrm{d}\hat{w} = \int_V e^{-2\pi i v\cdot\mathcal{J}w}\hat{g}(w - v)\overline{\hat{f}(w)}\mathrm{d}w$$

属于 $\mathcal{S}(V)$。于是取 f，$g \in \mathcal{S}(V)$，其中 $\|g\|_2 = 1$，并令

$$h = f^* \times_\hbar f, \qquad k = k_{g,g}.$$

ˆ 于是取 $\omega = \omega_{g,\ g}$，并注意到 $kh \in \mathcal{S}(V)$，我们得到

$$\int_{\hat{V}}^{\hbar} h_\hbar = \int_{\hat{V}} \omega(\alpha_{\hat{v}}(h_\hbar))\mathrm{d}\hat{v} = \int_{\hat{V}}\int_{V} k(v)\hat{h}(v)e^{-2\pi i v\cdot\hat{v}}\mathrm{d}v\mathrm{d}\hat{v} = k(0)\hat{h}(0) = \hat{h}(0) = \int_{\hat{V}} h(\hat{v})\mathrm{d}\hat{v}.$$

特别地，$h_\hbar \in \mathfrak{m}^+_{\varphi_\alpha}$，并且由于这类 $h_\hbar$ 生成 $L_\hbar(V)$，我们得到 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$是半有限的。

最后，注意到 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$的定义和 (5.6) 立即给出

$$\int_{\hat{V}}^{\hbar} \pi(v)x\pi(v)^* = \int_{\hat{V}}^{\hbar} x, \qquad x \in L_\hbar(V)_+, v \in V.$$

这意味着 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$的模自同构群在 $\pi(v)$上为零。但由于后者生成 $L_\hbar(V)$，可知 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$的模自同构群是平凡的，即$\int_{\hat{V}}^{\hbar}$是一个迹。□

ˆ 特别地，我们从上述证明中记录下，$f,\ g \in \mathcal{S}(V)$满足 $f_\hbar g_\hbar \in \mathfrak{m}_{\varphi_\alpha}$，其中

$$\int_{\hat{V}}^{\hbar} f_\hbar g_\hbar = \int_{\hat{V}} f(\hat{v})g(\hat{v})\mathrm{d}\hat{v}. \tag{5.8}$$

引理 5.4. $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$ˆ的 *GNS* 空间可以唯一地识别为 $L^2(\hat{V})$，使得相应的 *GNS* 映射满足

$$\Lambda(f_\hbar) = f \in L^2(\hat{V}), \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{V}). \tag{5.9}$$

证明. 下文将用到关于迹的（幺模）希尔伯特代数的概念，参见 [Tak03,Chapter VI]。

ˆ $*$-代数 $(\mathcal{S}(V)\ \times_\hbar, *)$ 关于 2-范数构成一个希尔伯特代数

$$\|f\|_2^2 = \int_{\hat{V}}^{\hbar} f_\hbar^* f_\hbar = \int_{\hat{V}} |f(\hat{v})|^2\mathrm{d}\hat{v},$$

其中最后一个等式即为 (5.8)。例如，根据 [Tak03, 命题 VIII.3.16], 可知，$L_\hbar(V)$ 上相应的权必等于 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$，这足以得出该引理。□

我们猜想下面的引理是已知的，但我们不知道有何直接参考文献。

引理 5.5. 设 $Z \subseteq V$ 是一个子空间，并令

$$\hat{W} = \mathrm{Ker}(Z) = \{\hat{v} \in \hat{V} \mid \hat{v}_{|Z} = 0\} \subseteq \hat{V}.$$

那么对于 $x \in L_\hbar$（V），有

$$L_\hbar(Z) = \{x \in L_\hbar(V) \mid \alpha_{\hat{w}}(x) = x \ for\ all\ \hat{w} \in \hat{W}\}. \tag{5.10}$$

这个引理的证明遗憾地会有些技术性，但它只是以下众所周知事实的量子化版本：我们可以将其识别为

$$L^\infty(\hat{V}/\hat{W}) = \{f \in L^\infty(\hat{V}) \mid \forall \hat{w} \in \hat{W}, \text{for almost all } \hat{v} \in \hat{V} : f(\hat{v}+\hat{w}) = f(\hat{v})\}.$$

ˆˆˆ 确实，如果我们现在识别 $Z = V/W$ 并考察 Pontryagin 对偶图景，就得到

$$L(Z) = L^\infty(\hat{Z}), \quad L(V) = L^\infty(\hat{V}),$$

这就是（5.10）的经典对应形式。

证明。 将 (5.10) 的右侧记为 N。显然， $N \subseteq L_\hbar(V)$ 是一个 von Neumann ˆ 子代数，并且具有 $L_\hbar(Z) \subseteq N$。同样显然， V-作用 α 限制为 N，其中它 ˆ ˆ ˆ ˆ 在 $Z = V/W$ 上分解。具体地，将 Z 的这一作用写作 β，于是它 ˆ 限制为 Z 在 $L_\hbar(Z)$ 上的通常 α-作用。

ˆ显然， Z 在 N 上的作用 β 仍然是遍历的。它也仍然是可积的，因为相应的权

$$\varphi_\beta(x) = \int_{\hat{Z}} \beta_{\hat{z}}(x)\mathrm{d}\hat{z}, \qquad x \in U_+$$

限制为 $L_\hbar(Z)$ 上的迹半有限权 $\int_{\hat{Z}}^\hbar$，因此所有形如以下形式的元素

$$xyz, \qquad y \in N, x, z \in \mathfrak{m}_{\int_{\hat{Z}}^\hbar} = (\mathfrak{n}_{\int_{\hat{Z}}^\hbar})^2 = (\mathfrak{n}_{\int_{\hat{Z}}^\hbar})^* \mathfrak{n}_{\int_{\hat{Z}}^\hbar}$$

都是可积的。

与引理 5.5 中证明迹性的论证相同，还可得模自同构 $\sigma_t^{\varphi_\beta}$ 在 $L_\hbar(Z)$ 上是平凡的。根据竹崎定理 [Tak03，定理 X.4.2] ，可知存在一个条件期望 $E\colon N \to L_\hbar(Z)$，使得

$$\varphi_\beta = \int_{\hat{Z}}^\hbar \circ E.$$

这个条件期望由以下方式唯一确定

$$E(x)p = pxp, \qquad x \in N,$$

对于 p 的投 影到 $L^2(\hat{Z}) \subseteq L^2(N)$ 上，其中这个等距嵌入由 vi 给出 a

$$L^2(\hat{Z}) \subseteq L^2(N), \quad f \mapsto \Lambda_{\varphi_\beta}(f_\hbar), \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{Z}).$$

要证明 $L_\hbar(Z) = N$，现在只需证明 $p = 1$。但注意，由遍历性和可积性，可以唯一地定义一个等距映射

$$\mathcal{G}\colon L^2(N) \otimes L^2(N) \to L^2(\hat{Z}, L^2(N)), \quad \Lambda_{\varphi_\beta}(x) \otimes \Lambda_{\varphi_\beta}(y) \mapsto \left(\hat{z} \mapsto \Lambda_{\varphi_\beta}(\beta_{-\hat{z}}(y)x)\right), \quad x, y \in \mathfrak{n}_{\varphi_\beta}. \tag{5.11}$$

然而，利用上述对 ($L_\hbar(Z)$ $\int_{\hat{Z}}^\hbar$) 的 GNS 映射的识别 (5.9)，并运用

$$\beta_{\hat{z}}(f_\hbar) = \alpha_{\hat{z}}(f_\hbar) = (f_{\hat{z}})_\hbar, \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{Z}), \hat{z} \in \hat{Z},$$

可知，将 $\mathcal{G}$ 限制到 $L^2(N) \otimes L^2(\hat{Z})$ 上满足

$$\mathcal{G}(\Lambda_{\varphi_\beta}(x) \otimes \Lambda(f_\hbar)) = \left(\hat{z} \mapsto \Lambda_{\varphi_\beta}(((f_{-\hat{z}})_\hbar)x)\right), \qquad x \in \mathfrak{n}_{\varphi_\beta}, f \in \mathcal{S}(\hat{Z}).$$

因此，通过傅里叶变换进行共轭 $\mathscr{F}$并识别 $L^2(N)\otimes L^2(Z) \cong L^2(Z, L^2(N))$，ˆ我们看到 $\mathcal{G} = (1 \otimes \mathscr{F})\mathcal{G}(1 \otimes \mathscr{F}^*)$ 给出了酉变换

$$\hat{\mathcal{G}}\colon L^2(Z, L^2(N)) \to L^2(Z, L^2(N)), \qquad F \mapsto (z \mapsto \pi(z)F(z)).$$

由于 $\mathcal{G}$在 $L^2(N) \otimes L^2(N)$ 上是等距的，且 $\mathcal{G}_{|L^2(N)\otimes L^2(\hat{Z})}$ 是到 $\mathcal{G}$ 的值域上的酉算子，这意味着确实有 $L^2(N) = L^2(\hat{Z})$，证明完毕。□

引理 5.6. 设 $Z \subseteq V$ 为一个向量子空间，并令 $W = \mathrm{Ker}(Z) \subseteq V$。存在唯一的正规、半有限、忠实算子值权重

$$\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}} : L_\hbar(V)_+ \to L_\hbar(Z)^{\mathrm{ext}}_+ \tag{5.12}$$

使得对于 $L_\hbar(V)$ 上的任意正规态 ω，都有

$$\omega_{|L_\hbar(Z)}\left(\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}(x)\right) = \int_{\hat{W}} \omega(\alpha_{\hat{w}}(x))\mathrm{d}\hat{w}, \qquad x \in L_\hbar(V)_+.$$

此外，适当归一化 Z 上的勒贝格测度后，有

$$\int^{\hbar}_{\hat{V}} = \int^{\hbar}_{\hat{Z}} \circ \mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}.$$

证明。 考虑带有受限 W-作用 $\alpha_{|W}$ 的 $L_\hbar(V)$，我们只需定义

$$\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}} = T_{\alpha_{\hat{W}}}$$

如同 (F.30) 中那样；根据引理 5.5，它确实是到……上的算子值权

$$L_\hbar(V)^{\alpha_{|\hat{W}}} = L_\hbar(Z).$$

Nor 现在将 Z 上的勒贝格测度归一化，使得对于正的 $f \in C_c(V)$，我们有 e

$$\int_{\hat{Z}} E_{\hat{W}}(f)(\hat{z})\mathrm{d}\hat{z} = \int_{\hat{V}} f(\hat{v})\mathrm{d}\hat{v}, \qquad \text{where } E_{\hat{W}}(f)(\hat{v}+\hat{W}) = \int_{\hat{W}} f(\hat{v}+\hat{w})\mathrm{d}\hat{w}.$$

任取商映射 $V \twoheadrightarrow Z$ 的一个线性分裂 $s\colon Z \to V$。注意到 $\alpha_{s(\hat{z})}$ 在 $L_\hbar(Z) \subseteq L_\hbar(V)$ 上限制为 α_z，于是对于 $x \in L_\hbar(V)+$ 和 $\omega \in L_\hbar(V)^+_*$，我们得到一个态:

$$\begin{aligned}
\int^{\hbar}_{\hat{Z}} \left(\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}(x)\right) &= \int_{\hat{Z}} (\omega \circ \alpha_{\hat{z}}) \left(\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}(x)\right) \mathrm{d}\hat{z} \\
&= \int_{\hat{Z}}\int_{\hat{W}} (\omega \circ \alpha_{s(\hat{z})} \circ \alpha_{\hat{w}})(x)\mathrm{d}\hat{w}\mathrm{d}\hat{z} \\
&= \int_{\hat{V}} (\omega \circ \alpha_{\hat{v}})(x)\mathrm{d}\hat{v} \\
&= \int^{\hbar}_{\hat{V}} x.
\end{aligned}$$

□

注记 5.7。 若 $W \subseteq V$ 是与 Z 互补的任意向量空间，即 $V = Z \oplus W$，则容易看出

$$\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}(x) = \left(\int^{\hbar}_{\hat{W}} x\right) 1, \qquad x \in L_\hbar(W)_+ \subseteq L_\hbar(V)_+,$$

其中我们将 W 在限制下视为 W 的对偶空间。

在下文中，我们将进一步扰动权 $\int^{\hbar}_{\hat{V}}$。具体而言，如果 $v \in V$，我们可以构造正规半有限忠实权

$$\int^{\hbar,\mathbf{E}(v)}_{\hat{V}} = \varphi_{\alpha,\mathbf{E}(v)}$$

其定义见（F.4）。这一定义是有意义的，因为 $\int_{\hat{V}}^{\hbar}$ 是正规半有限忠实迹权，而 $\mathbf{E}(v)$ 与 $L_\hbar(V)$ 相隶属。

现在回顾引理 4.4：若 V 是辛的，则 $L_\hbar(V)$ 是 I 型因子。令 Tr 表示 $L_\hbar(V)$ 上的迹，并将其归一化，使极小投影的迹为 1。由迹的唯一性可知（经过适当归一化后）

$$\mathrm{Tr} = \int_{\hat{V}}^{\hbar}.$$

以下是我们需要的关键结果。

引理 5.8。假设 V 是辛的。令 $Z \subseteq V$，置 $W = \mathrm{Ker}(Z) \subseteq V$，并选取一个子空间 $W \subseteq V$，使得

$$V = Z \oplus W$$

作为向量空间。假设 $z \in Z$、$w \in W$。那么存在 $a \in L_\hbar(W) \subseteq L_\hbar(V)$，使得

$$\int_{\hat{Z}}^{\hbar,\mathbf{E}(z)} = \left(\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(z+w)}(a - a^*)\right)_{|L_\hbar(Z)_+}. \tag{5.13}$$

证明。在下文中，我们再次通过限制映射将 W 与 W 的对偶等同起来。

考虑 σ-弱连续的一参数自同构群

$$\gamma_t \colon L_\hbar(W) \to L_\hbar(W), \qquad x \mapsto \mathbf{E}(z)^{it} x \mathbf{E}(z)^{-it}.$$

这显然定义良好，并且将权 $\int_{,\mathbf{E}(w)}^{\hbar}{}_{\hat{W}}$ 缩放为：

$$\int_{\hat{W}}^{\hbar,\mathbf{E}(w)} \circ \gamma_t = e^{2\pi\hbar t(w,z)} \int_{\hat{W}}^{\hbar,\mathbf{E}(w)}.$$

取一个非零正的 $c \in \mathfrak{n}_{\int_{\hat{W}}^{\hbar}}$，并令

$$b = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} \gamma_t(\widetilde{c}) \mathrm{d}t, \qquad \widetilde{c} = \chi_{[0,1]}(\mathbf{E}(w)) c \chi_{[0,1]}(\mathbf{E}(w)),$$

我们看到，可以找到一个非零的 $b \in L_\hbar(W)$，它是平方 $\int_{,\mathbf{E}(w)}^{\hbar}{}_{\hat{W}}$-可积的，且 $\mathbf{E}(w)^{1/2} b$ 有界，并且 b 和 $\mathbf{E}(w)^{1/2} b$ 对 γ_t 解析。将 b 归一化，使得

$$\int_{\hat{W}}^{\hbar,\mathbf{E}(w)} bb^* = 1, \tag{5.14}$$

并令那么

$$a = \gamma_{i/2}(b) \in L_\hbar(W).$$

那么 $\mathbf{E}(w)^{1/2} a$ 也有界，并且 $\mathbf{E}(w)^{1/2} a$ 在 γ_t 上是解析的。

现在对于 $y \in L_\hbar(V)$ 和 $\mathbf{T} \in L_\hbar(V)_+^{\mathrm{ext}}$，记 $y^* \cdot \mathbf{T} \cdot y \in L_\hbar(V)_+^{\mathrm{ext}}$ 为该元素

$$\omega(y^* \cdot \mathbf{T} \cdot y) = \omega(y^* - y)(\mathbf{T}), \qquad \omega \in M_*^+.$$

接下来我们断言

$$\mathscr{E}_{\hat{W}}^{\hbar}(a^* \cdot \mathbf{E}(z+w) \cdot a) = \mathbf{E}(z). \tag{5.15}$$

事实上，取 $\xi \in \mathscr{D}(\text{的 } \mathbf{E}^{1/2}) \subseteq L^2(\hat{V})$。然后利用记号 (5.4) 计算可得

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi,\xi}(\mathbf{E}(z)) &= \|\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi\|^2 && (5.16)\\
&\underset{(5.14)}{=} \left(\int_{\hat{W}}^{\hbar,\mathbf{E}(w)} bb^*\right)\|\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi\|^2 && (5.17)\\
&= \left(\int_{\hat{W}}^{\hbar}(\mathbf{E}(w)^{1/2}b)^*(\mathbf{E}(w)^{1/2}b)\right)\|\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi\|^2 && (5.18)\\
&\underset{\text{Remark 5.7}}{=} \omega_{\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi,\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi}\left(\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}\left((\mathbf{E}(w)^{1/2}b)^*(\mathbf{E}(w)^{1/2}b)\right)\right) && (5.19)\\
&= \int_{\hat{W}}\|\mathbf{E}(w)^{1/2}b\theta^*_{\hat{w}}\mathbf{E}(z)^{1/2}\xi\|^2\mathrm{d}\hat{w} && (5.20)\\
&= \int_{\hat{W}}\|\mathbf{E}(w)^{1/2}b\mathbf{E}(z)^{1/2}\theta^*_{\hat{w}}\xi\|^2\mathrm{d}\hat{w} && (5.21)\\
&= \int_{\hat{W}}\|\mathbf{E}(w)^{1/2}\mathbf{E}(z)^{1/2}a\theta^*_{\hat{w}}\xi\|^2\mathrm{d}\hat{w} && (5.22)\\
&= \int_{\hat{W}}\|\mathbf{E}(z+w)^{1/2}a\theta^*_{\hat{w}}\xi\|^2\mathrm{d}\hat{w} && (5.23)\\
&= \omega_{\xi,\xi}\left(\int_{\hat{W}}^{\hbar}a^*\cdot\mathbf{E}(z+w)\cdot a\right). && (5.24)
\end{aligned}$$

将 (5.15) 的左边记为 $\mathbf{T}$，由 (F.5) 可知 $\mathbf{E}(z)^{1/2} \subseteq \mathbf{T}^{1/2}$。由于两边均为自伴，这足以得出它们相等。因此，(5.15) 中等号成立。

现在选取 $x \in L_\hbar(Z)$。于是我们计算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(z+w)}(axx^*a^*) &= \int_{\hat{V}}^{\hbar}x^*a^*\cdot\mathbf{E}(z+w)\cdot ax\\
&= \int_{\hat{Z}}^{\hbar}\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}\left(x^*\cdot(a^*\cdot\mathbf{E}(z+w)\cdot a)\cdot x\right)\\
&= \int_{\hat{Z}}^{\hbar}x^*\cdot\left(\mathscr{E}^{\hbar}_{\hat{W}}\left(a^*\cdot\mathbf{E}(z+w)\cdot a\right)\right)\cdot x\\
&\underset{(5.15)}{=} \int_{\hat{Z}}^{\hbar}x^*\cdot\mathbf{E}(z)\cdot x\\
&= \int_{\hat{Z}}^{\hbar,\mathbf{E}(z)}xx^*.
\end{aligned}$$

□

推论 5.9. 假设 V 是辛的，并假设

$$V = Z \oplus W$$

作为向量空间。设 $v \in V$。那么存在 $a \in L_\hbar(W) \subseteq L_\hbar(V)$ 使得其限制

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(v),a} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(v)}(a - a^*)$$

对 $L_\hbar(Z)$ 而言，这是一个正规半有限忠实权。

注记 5.10。如果我们记

$$\varphi = (\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(v),a})_{|L_\hbar(Z)},$$

那么，显然，将 $\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(v),\ a}$ 的 GNS 映射 Λ限制到 $\mathfrak{n}_\varphi$，便得到一个对应于 φ的 GNS 映射，从而给出一个嵌入

$$L^2(L_\hbar(Z),\varphi) \subseteq L^2(L_\hbar(V),\mathrm{Tr}_{\mathbf{E}(v),a}), \qquad \Lambda(x) \mapsto \Lambda(x), \qquad x \in \mathfrak{n}_\varphi,$$

该嵌入交织标准的 $L_\hbar(Z)$-双模结构（参见 [Tak02，定理 IX.4.2]）。

5.3. **酉余表示**。本节将在以下情形中重新考察模性的概念。

定义 5.11。设 $\mathbb{W}$是一个乘法酉算子，其作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上。$\mathbb{W}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{G}$ 上的一个酉余表示是一个作用在 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{G}$ 上的酉算子 $\mathbb{U}$，满足

$$\mathbb{U}_{23}\mathbb{W}_{12} = \mathbb{W}_{12}\mathbb{U}_{13}\mathbb{U}_{23}. \tag{5.25}$$

注意，若 $\mathbb{W}$ 是模的，且其对应的冯·诺依曼双代数为 $(M,\ \Delta)$，那么对 (5.25) 的第二和第三腿进行切片可得

$$\mathbb{U} \in M\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{G}),$$

于是 (5.25) 可以改写为

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\mathbb{U} = \mathbb{U}_{13}\mathbb{U}_{23}.$$

命题 5.12. 设 $\mathbb{U} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{G})$ 是乘法酉算子 $\mathbb{W}$的一个酉余表示。假设存在一个酉算子 $\mathbb{U}^c \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{G})$ 和一个严格正ˆ算子 $\mathbf{Q}$ 作用于 $\mathcal{G}$，使得

$$(\mathbb{U}^*_{21}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbb{U}^c_{21}) \tag{5.26}$$

是弱模数据。那么 $\mathbb{U}^c$ 也为酉余表示。

证明. 模条件可以改写为

$$\langle \xi'\otimes\eta, \mathbb{U}(\eta'\otimes\hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle = \langle \xi'\otimes\overline{\xi}, \mathbb{U}^{c,*}(\eta'\otimes\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle, \qquad \forall \xi,\eta\in\mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}), \xi',\eta'\in\mathcal{H}. \tag{5.27}$$

于是，$\{e_i\}$ 是 $\mathcal{H}$的一组标准正交基。另一方面，对于 $\xi'_i,\ \eta'_i \in \mathcal{H}$ 以及ˆ$\xi,\ \eta\in\mathscr{D}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathcal{G}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \xi'_1\otimes\xi'_2\otimes\eta, \mathbb{W}^*_{12}\mathbb{U}_{23}\mathbb{W}_{12}(\eta'_1\otimes\eta'_2\otimes\hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle \\
&\qquad = \langle (\mathbb{W}(\xi'_1\otimes\xi'_2))\otimes\eta, \mathbb{U}_{23}(\mathbb{W}(\eta'_1\otimes\eta'_2))\otimes\hat{\mathbf{Q}}\xi\rangle \\
&\qquad = \sum_i \langle (\omega_{e_i,\xi'_1}\otimes\mathrm{id})(\mathbb{W})\xi'_2\otimes\eta, \mathbb{U}((\omega_{e_i,\eta'_1}\otimes\mathrm{id})(\mathbb{W})\eta'_2\otimes\hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle \\
&\qquad = \sum_i \langle (\omega_{e_i,\xi'_1}\otimes\mathrm{id})(\mathbb{W})\xi'_2\otimes\overline{\xi}, \mathbb{U}^{c,*}((\omega_{e_i,\eta'_1}\otimes\mathrm{id})(\mathbb{W})\eta'_2\otimes\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle \\
&\qquad = \langle \xi'_1\otimes\xi'_2\otimes\overline{\xi}, \mathbb{W}^*_{12}\mathbb{U}^{c,*}_{23}\mathbb{W}_{12}(\eta'_1\otimes\eta'_2\otimes\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle.
\end{aligned}$$

ˆ另一方面，现在选取 $\{e_k\}$ 作为 $\mathcal{G}$ 的一组标准正交基，并将$p_r = \chi_{(r,r^{-1})}(\mathbf{Q})$ 设为 $r > 0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \eta, \mathbb{U}_{13}(1 \otimes 1 \otimes p_r)\mathbb{U}_{23}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle \\
&\quad = \sum_{i,j,k} \langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \eta, \mathbb{U}_{13} e_i \otimes e_j \otimes p_r e_k\rangle \langle e_i \otimes e_j \otimes p_r e_k, \mathbb{U}_{23}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle \\
&\quad = \sum_{i,j,k} \langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1} p_r e_k}, \mathbb{U}_{13}^{c,*} e_i \otimes e_j \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\rangle \langle e_i \otimes e_j \otimes \overline{\xi}, \mathbb{U}_{23}^{c,*}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}} p_r e_k})\rangle \\
&\quad = \sum_{k} \langle \xi_1' \otimes \xi_2', (\mathrm{id} \otimes \omega_{\overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1} p_r e_k}, \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}})(\mathbb{U}^{c,*})\eta_1' \otimes (\mathrm{id} \otimes \omega_{\overline{\xi}, \overline{\hat{\mathbf{Q}} p_r e_k}})(\mathbb{U}^{c,*})\eta_2'\rangle \\
&\quad = \sum_{k} \langle \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1} p_r e_k}, (\omega_{\xi_1', \eta_1'} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{U}^{c,*})\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\rangle \langle \overline{\xi}, (\omega_{\xi_2', \eta_2'} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{U}^{c,*})\overline{\hat{\mathbf{Q}} p_r e_k}\rangle \\
&\quad = \langle \overline{\xi}, (\omega_{\xi_2', \eta_2'} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{U}^{c,*}) p_r (\omega_{\xi_1', \eta_1'} \otimes \mathrm{id})(\mathbb{U}^{c,*})\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta}\rangle \\
&\quad = \langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \overline{\xi}, \mathbb{U}_{23}^{c,*}(1 \otimes 1 \otimes p_r)\mathbb{U}_{13}^{c,*}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle.
\end{aligned}$$

令 $r \to 0$ 趋于极限，得到

$$\langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \eta, \mathbb{U}_{13}\mathbb{U}_{23}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \hat{\mathbf{Q}}\xi)\rangle = \langle \xi_1' \otimes \xi_2' \otimes \overline{\xi}, \mathbb{U}_{23}^{c,*}\mathbb{U}_{13}^{c,*}(\eta_1' \otimes \eta_2' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle.$$

比较上述两个表达式，并利用 $\mathbb{U}$ 的余表示性质，可得

$$\mathbb{W}_{12}^* \mathbb{U}_{23}^{c,*} \mathbb{W}_{12} = \mathbb{U}_{23}^{c,*} \mathbb{U}_{13}^{c,*},$$

即 $\mathbb{U}^c$ 是一个酉余表示。 □

我们将如下应用这一结论。考虑在 $L_\hbar(\triangledown_N')$ 的忠实正规表示中构造的 Fock–Goncharov 翻转 $\mathcal{F}$，见 (3.2)。令 ˆ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{21}^*$ 为其对偶。那么，ˆ$\mathcal{F}$ 可视为关于其自身的酉余表示。

ˆ**推论 5.13**。设 $\mathcal{F}$ 是一个 *Fock–Goncharov* 翻转，并设 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{Q}$ $\mathcal{G}$ 如定理 *4.10* 中所述。ˆ 则 $\mathcal{G}_{21}$ 是关于 $\mathcal{F}$ 的酉余表示。

ˆ**证明**。 这可直接由命题 5.12、 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$的酉余表示这一事实，以及($\mathcal{F}$，$\mathbf{Q}$ $\mathcal{G}$) 构成弱模数据这一事实推出。□

注 5.14。 或者，也可以证明，若 $\mathbb{W}$ 是模的，则 (5.12) 中的酉算子 $\mathbb{U}^c$ 与 [SW07，定义 11], 中所定义的 $\mathbb{U}$ 的对偶表示相同，由此也可立即推出推论 5.13。

5.4. **与 Fock–Goncharov 翻转相关联的局部紧量子群**。现在我们已准备好给出本文的主要结果。

我们首先作出 如下观察：我们有一个斜对称空间的同构

$$\vartheta\colon \triangledown_N' \cong \overline{\triangledown_N'}, \quad e_{a,b,c} \mapsto \overline{-e_{c,b,a}}. \tag{5.28}$$

这给出了一个关联的 $*$-同构

$$\Theta\colon L_\hbar(\triangledown_N') \to \overline{L_\hbar(\triangledown_N')}, \qquad \mathbf{E}(v) \mapsto \mathbf{E}(\vartheta(v)). \tag{5.29}$$

引理 5.15。 映射 Θ 限制为一个同构

$$(L_\hbar(B_N^+), \hat{\Delta}^{\mathrm{op}}) \cong (\overline{L_\hbar(B_N^+)}, \overline{\hat{\Delta}}). \tag{5.30}$$

证明。 利用 $\mathcal{F}$ 标准的 Fock–Goncharov 翻转以及定理 3.11 中的 $\mathcal{G}$，我们很容易验证

$$(\mathrm{id} \otimes \Theta)\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}.$$

因此

$$\hat{\mathbb{V}} := (\Theta^{-1} \otimes \mathrm{id})\mathcal{G} = (\Theta^{-1} \otimes \Theta^{-1})(\overline{\mathcal{F}})$$

也是一个乘法酉算子。

ˆ ˆ 另一方面，由推论 5.13 可知， $\mathbb{V}_{21}$ 是一个酉 $\mathcal{F}$-余表示，因此

$$\hat{\mathcal{F}}_{12}^* \hat{\mathbb{V}}_{32} \hat{\mathcal{F}}_{12} = \hat{\mathbb{V}}_{31} \hat{\mathbb{V}}_{32}, \qquad \text{i.e.} \qquad \hat{\mathcal{F}}_{23}^* \hat{\mathbb{V}}_{13} \hat{\mathcal{F}}_{23} = \hat{\mathbb{V}}_{12} \hat{\mathbb{V}}_{13}.$$

由此可得

$$\hat{\mathbb{V}}_{23} \hat{\mathbb{V}}_{12} \hat{\mathbb{V}}_{23}^* = \hat{\mathbb{V}}_{12} \hat{\mathbb{V}}_{13} = \hat{\mathcal{F}}_{23}^* \hat{\mathbb{V}}_{13} \hat{\mathcal{F}}_{23}.$$

由于 ˆ$\mathbb{V}$ 的第二个腿等于 $L_\hbar(B_N^+)$，我们得到

$$\hat{\Delta}(x) = \hat{\mathbb{V}}(x \otimes 1)\hat{\mathbb{V}}^* = \hat{\mathcal{F}}^*(1 \otimes x)\hat{\mathcal{F}}, \qquad x \in L_\hbar(B_N^+).$$

现在 Θ： $L_\hbar(B_N^+) \cong \overline{L_\hbar(B_N^+)}$，我们计算得

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}(x) = \Sigma\hat{\mathbb{V}}(x \otimes 1)\hat{\mathbb{V}}^*\Sigma &= (\Theta^{-1} \otimes \Theta^{-1})(\overline{\mathcal{F}}_{21}(1 \otimes \Theta(x))\overline{\mathcal{F}}_{21}^*) \\ &= (\Theta^{-1} \otimes \Theta^{-1}))(\overline{\hat{\mathcal{F}}}^*(1 \otimes \Theta(x))\overline{\hat{\mathcal{F}}}), \qquad x \in L_\hbar(B_N^+).\end{aligned}$$

这就证明了引理。 □

现在我们回顾局部紧量子群的概念 [KV00, KV03]。

定义 5.16. 一个局部紧量子群 由冯·诺依曼双代数 (M, Δ) 构成，并且存在左不变正规半有限忠实权 φ 和右不变正规半有限忠实权 ψ，满足：

$$\varphi((\omega \otimes \mathrm{id})\Delta(x)) = \varphi(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{m}_\varphi^+, \text{ all states } \omega \in M_*^+, \tag{5.31}$$

$$\psi((\mathrm{id} \otimes \omega)\Delta(x)) = \psi(x), \qquad \forall x \in \mathfrak{m}_\psi^+, \text{ all states } \omega \in M_*^+. \tag{5.32}$$

这些左不变和右不变正规半有限忠实权在乘以一个正标量的意义下是唯一的。

定理 5.17. *Fock–Goncharov* 冯·诺依曼双代数$(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 是一个局部紧量子群。

证明. 设

$$V = D_N, \qquad Z = B_N^-$$

如推论 2.7 中所示。由引理 2.6 可知，我们可以选取一个补子空间$W \subseteq D_N$，使其与 Z 满足

$$V = Z \oplus W, \qquad (w, b) = 0, \qquad \forall b \in B_N^+. \tag{5.33}$$

特别地， $L_\hbar(W)$与 $L_\hbar(B_N^+)$逐点交换。

通过相对于不可约正规元素进行 Fock–Goncharov 翻转来实现（$L_\hbar(B_N^-)$ Δ）$*$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的 $L_\hbar(D_N)$-表示由推论 4.13 所述。由于我们可以将 $L_\hbar(D_N) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 识别为一体，因此我们处于命题 5.1 的情形；结合针对 (5.33) 应用的推论 5.9，我们得到 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 具有一个左不变正规半有限忠实权。

由自对偶性 (4.59)，$(L_\hbar(B_N^+),\ \hat{}\Delta)$ 也具有一个左不变正规半有限忠实权。但根据引理 5.15，这意味着 $(L_\hbar(B_N^+),\ \hat{}\Delta^{\mathrm{op}})$ 具有一个左不变正规半有限忠实权，即 $(L_\hbar(B_N^+),\ \hat{}\Delta)$ 具有一个右不变正规半有限忠实权。再次利用自对偶性，可推出 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 具有一个右不变正规半有限忠实权，证毕。□

6. Modular structure of $(L_\hbar(B_N^-),\Delta)$

我们继续采用前几节中的设定和记号。

定理 5.17 表明，Fock–Goncharov von Neumann 双代数 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 是一个局部紧量子群。按照量子群理论中的惯例，我们用一个符号表示这个局部紧量子群，使得上述冯·诺依曼代数是它的函数代数，也是其对偶的群冯诺依曼代数 。鉴于 B_N^- 与 B_N^+ 之间的对偶性，我们据此采用以下记号

$$(L^\infty(\mathbb{B}_{N,\hbar}^+),\Delta) := (L_\hbar(B_N^-),\Delta), \tag{6.1}$$

Pontryagin 对偶也同理，记作：

$$(L^\infty(\mathbb{B}_{N,\hbar}^-),\hat{\Delta}) := (L_\hbar(B_N^+),\hat{\Delta}). \tag{6.2}$$

现在，根据 [KV00、KV03]，的一般理论，局部紧量子群$\mathbb{B}_N^+$，$\hbar$ 带有多种相关的模数据，我们将在本节中确定这些数据。

6.1.，$\hbar$ 的左 Haar 测度。我们首先更明确地确定 $L_\hbar(B_N^-)$ 上的左不变正规半有限忠实权。

$\widehat{\ }$记 $B_N^- = B_N^-$ 为对偶向量空间。根据引理 5.4，我们可以唯一地识别

$$L^2(M) \cong L^2(\hat{B}_N^-)$$

使得，对于与 $\int^{\hbar\hat{}B_N^-}$ 相关联的 GNS 映射 Λ，我们有

$$\Lambda(f_\hbar) = f \in L^2(\hat{B}_N^-), \qquad f \in \mathcal{S}(\hat{B}_N^-). \tag{6.3}$$

$L_\hbar(B_N^-)$ 所关联的标准表示由下式唯一确定：

$$f_\hbar g = f \times_\hbar g, \qquad f,g \in \mathcal{S}(\hat{B}_N^-),$$

其对应的 B_N^- 的酉算子 $\hbar$-表示由 (4.15)（或等价地由 (5.5)）给出。由于 $\int^{\hbar\hat{}B_N^-}$ 具有迹性，我们还知道，关于这一标准表示，$L_\hbar(B_N^-)$ 的模共轭由下式给出

$$Jg = \overline{g}, \qquad g \in \mathcal{S}(\hat{B}_N^-). \tag{6.4}$$

现在，由推论 4.13、命题 5.1 和引理 5.8 可知，$(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 具有一个左不变正规半有限忠实权

$$\varphi = \int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar,\mathbf{E}(2d_l)},$$

对于某个特定的 $d_l \in B_N^-$。更准确地说，根据这些结果以及以下事实：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_\delta^{-(1+|\hbar|^{-1})} = \mathbf{E}(-(1+|\hbar|^{-1})\sum_i \overset{\searrow}{\varpi}_i),$$

我们可以取任意满足以下条件的 $d_l \in B_N^-$：存在 $w \in \triangledown_N'$，其在 B_N^+ 上消失，并且

$$2d_l + w = -2(1+|\hbar|^{-1})\sum_i \overset{\searrow}{\varpi}_i.$$

根据引理 2.6，d_l 必定是 B_N^- 中满足以下条件的唯一元素：

$$(d_l, z) = -(1+|\hbar|^{-1})\sum_{i=1}^{n}(\overset{\searrow}{\varpi}_i, z), \qquad \forall z \in B_N^+. \tag{6.5}$$

引理 6.1。我们有

$$2d_l = (1+|\hbar|^{-1}) \sum_{(a,b,c)\in\overset{\nearrow}{C}_N} ac\, e_{a,b,c} = (1+|\hbar|^{-1}) \sum_{\substack{1\le s\le n\\ 0\le k<s}} (N-s)\overset{\nearrow}{e}_{s,k}.$$

证明。利用 (6.5)，由引理 2.3 直接计算即可得出。 □

因此，总结如下：

定理 6.2. $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的左不变正规半有限忠实权为

$$\varphi = \int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar,\mathbf{E}(2d_l)}, \qquad \mathbf{E}(2d_l) = \mathbf{E}(\sum_{\substack{1\le s\le n\\ 0\le k<s}} (N-s)\overset{\nearrow}{e}_{s,k})^{1+|\hbar|^{-1}}. \tag{6.6}$$

现在，根据一般理论 [PT73，Vae01]，我们也可以确定

$$L^2(L_\hbar(B_N^-), \varphi) \cong L^2(\hat{B}_N^-) \tag{6.7}$$

借助唯一的 GNS 映射

$$\Lambda_\varphi \colon \mathfrak{n}_\varphi \to L^2(\hat{B}_N^-)$$

使得

$$\Lambda_\varphi(x) = \Lambda(x\mathbf{E}(d_l)), \qquad x \in L_\hbar(B_N^-) \text{ and } x\mathbf{E}(d_l) \text{ bounded with closure in } \mathfrak{n}_{\int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar}}.$$

推论 6.3. 在上述 *GNS* 表示中，权 φ *in*(6.6) 的模算子由下式给出

$$\nabla_\varphi = \mathbf{E}(2d_l)J\mathbf{E}(2d_l)^{-1}J, \qquad \nabla_\varphi^{it} = \mathbf{E}(2d_l)^{it}J\mathbf{E}(2d_l)^{it}J.$$

6.2. 的右 Haar 测度$\mathbb{B}_N^+,\ \hbar$。 现在我们明确确定 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的右不变正规半有限忠实权。

首先注意到，(4.58) 和 (4.59) 中的映射 θ and Θ 导出了同构

$$\Theta\colon (L_\hbar(B_N^+),\hat{\Delta}) \cong (\overline{L_\hbar(B_N^-)},\overline{\Delta}),\qquad \Theta\colon (L_\hbar(B_N^-),\Delta) \cong (\overline{L_\hbar(B_N^+)},\overline{\hat{\Delta}}). \tag{6.8}$$

另一方面，由引理 5.15 可知，(5.28) 和 (5.29) 中的映射 ϑ and Θ 导出了一个同构

$$\Theta\colon (L_\hbar(B_N^+),\hat{\Delta}^{\mathrm{op}}) \cong (\overline{L_\hbar(B_N^+)},\overline{\hat{\Delta}}). \tag{6.9}$$

通过复合，(6.8) 和 (6.9) 得到

$$\upsilon=\theta\vartheta^{-1}\theta\colon \bigtriangledown_N'\cong\overline{\bigtriangledown_N'},\quad e_{a,b,c}\mapsto\overline{-e_{a,c,b}},\qquad \Upsilon\colon L_\hbar(\bigtriangledown_N')\cong\overline{L_\hbar(\bigtriangledown_N')},\qquad \mathbf{E}(\upsilon)\mapsto\mathbf{E}(\upsilon(\upsilon))$$

从而诱导出一个同构

$$\Upsilon\colon (L_\hbar(B_N^-),\Delta^{\mathrm{op}}) \cong (\overline{L_\hbar(B_N^-)},\overline{\Delta}).$$

Now

$$\overline{\int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar}}\circ\Upsilon=\int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar},$$

因此，由于

$$\upsilon^{-1}(\overline{d_l})=d_r,\qquad 2d_r=-(1+|\hbar|^{-1})\sum_{(a,b,c)\in\overset{\nearrow}{C}_N}ab\,e_{a,b,c}=-(1+|\hbar|^{-1})\sum_{\substack{1\le s\le n\\0\le k<s}}(N-s)\overset{\swarrow}{e}_{s,k},$$

我们得到:

定理 6.4. $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的右不变正规半有限忠实权为

$$\psi=\int_{\hat{B}_N^-}^{\hbar,\mathbf{E}(2d_r)},\qquad \mathbf{E}(2d_r)=\mathbf{E}(\sum_{\substack{1\le s\le n\\0\le k<s}}(N-s)\overset{\swarrow}{e}_{s,k})^{-(1+|\hbar|^{-1})}.$$

6.3. 的模元$\hbar$。 若 (M,Δ) 是一个局部紧量子群，其左、右正规半有限忠实权分别为 φ,ψ，则存在唯一的严格正算子 $\delta\,\eta\,M$（即对于所有 $t\in\mathbb{R},\ \delta^{it}\in M$），它是类群，即

$$\Delta(\delta)=\delta\otimes\delta,\qquad \Delta(\delta^{it})=\delta^{it}\otimes\delta^{it},$$

并且，可能需要对 ψ 重新缩放，使得我们有

$$\psi=\varphi_\delta,$$

其中 φ_δ 是满足下式的唯一正规半有限忠实权

$$\varphi_\delta(x^*x)=\varphi(\delta^{1/2}x^*x\delta^{1/2}),\qquad \forall x\in M\text{，其中 }x\circ\delta^{1/2}\text{ 有界且闭包为 }x\delta^{1/2}\in\mathfrak{n}_\varphi. \tag{6.10}$$

称 δ 为（$M,\ \Delta$）的模元。

引理 6.5. υ 的$\mathbf{E}(\upsilon)$ 对于 $\upsilon\in T_N^-$ 是类群元素。

证明。 固定 $v \in T_N^-$。我们需要计算

$$\Delta(\mathbf{E}(v)^{it}) = \mathcal{F}^*(1 \otimes \mathbf{E}(v)^{it})\mathcal{F}.$$

但利用表达式 (2.73)，并注意到

$$(\overset{\nwarrow}{e}_{s,k}, v) = 0, \qquad 0 \leq k < s \leq n$$

由 (2.12) 和 (2.14)，根据 (1.17) 可得

$$\Delta(\mathbf{E}(v)^{it}) = \mathcal{K}^*\mathcal{F}''^*(1 \otimes \mathbf{E}(v)^{it})\mathcal{F}''\mathcal{K} = \mathcal{K}^*(1 \otimes \mathbf{E}(v)^{it})\mathcal{K} = \mathbf{E}(v)^{it} \otimes \mathbf{E}(v)^{it}$$

正如所述。 □

定理 6.6. $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的模元等于

$$\delta = \mathbf{L}_\delta^{-2(1+|\hbar|^{-1})}, \qquad \mathbf{L}_\delta = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n} \overset{\nearrow}{\varpi}_i). \tag{6.11}$$

证明。 这直接由定理 6.2 和定理 6.4，以及以下事实可得

$$2d_r - 2d_l = -(1+|\hbar|^{-1}) \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 0 \leq k < s}} (N-s)(\overset{\swarrow}{e}_{s,k} + \overset{\nearrow}{e}_{s,k}) = -(1+|\hbar|^{-1}) \sum_{1 \leq s \leq n} (N-s)s\overset{\nearrow}{e}_s$$

$$= -2(1+|\hbar|^{-1}) \sum_{i=1}^{n} \overset{\nearrow}{\varpi}_i,$$

并且根据引理 6.5，$\mathbf{L}_\delta$ 确实是类群。 □

注意，按照定理 6.2 和定理 6.4 对 φ 和 ψ 进行缩放后，我们确实得到

$$\psi = \varphi_\delta.$$

6.4. 、 的缩放常数$_{,\hbar}$。若 (M, Δ) 是一个局部紧量子群，具有左不变正规半有限忠实权 φ，则与 φ 相关联的模自同构群 $(\sigma_t^\varphi)_{t \in \mathbb{R}}$ 属于 M，由下式确定：

$$\sigma_t^\varphi(x) = \nabla_\varphi^{it} x \nabla_\varphi^{-it}, \qquad x \in M.$$

于是存在唯一的数 $\nu > 0$，称为 (M, Δ) 的缩放常数，使得若 δ 是 (M, Δ) 的模元，则有

$$\sigma_t^\varphi(\delta) = \nu^t \delta$$

（例如参见 [KV03，命题 2.13.(18)]）。

现在，对于 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的情形，我们立即看到

$$\sigma_t^\varphi(x) = \nabla_\varphi^{it} x \nabla_\varphi^{-it} = \mathbf{E}(2d_l)^{it} x \mathbf{E}(2d_l)^{-it}, \qquad x \in L_\hbar(B_N^-), t \in \mathbb{R}.$$

结合具体表达式 (6.11) 和简单计算

$$2 \sum_{\substack{1 \leq s,t \leq n \\ 0 \leq k < s}} (N-s)(\overset{\nearrow}{e}_{s,k}, \overset{\nearrow}{\varpi}_t) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 0 \leq k < s}} (N-s) = \sum_{1 \leq s \leq n} (N-s)s = \tau_n,$$

其中 τ_n 是 n个四面体数

$$\tau_n = \binom{n+2}{3},$$

这便导出:

定理 6.7. $L_\hbar(B_N^-(\ \Delta))$ 的缩放常数等于

$$\nu = e^{-2\pi\beta_\hbar\tau_n}, \qquad \beta_\hbar = \operatorname{sgn}(\hbar)(|\hbar|^{1/2} + |\hbar|^{-1/2})^2.$$

注 6.8. 这尤其表明，$\mathbb{B}_N^+$ 不可能是 $*$-代数量子群，如 [VD98], 所述，因为后者的缩放常数等于 1 [DCVD10，定理 3.4]。

6.5. **反元**。设 $\mathbb{W} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})$ 是一个模乘法酉算子，其对应的模数据为 $(\mathbb{W},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}\ \mathbb{W})$。设 $(M,\ \Delta)$ 是其对应的冯·诺依曼双代数。于是根据 [SW01，定理 2.3]（应用于 $\mathbb{W}$的对偶），巴拿赫空间

$$A = A_{\mathbb{W}} = [(\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*] \tag{6.12}$$

是一个 C*-代数，$\Delta_{\mathbb{W}}$ 在其上的限制是一个非退化的 $*$-同态

$$\Delta_{\mathbb{W}}\colon A \to M(A\otimes A).$$

于是存在唯一的闭无界算子

$$S\colon \mathscr{D}(S) \subseteq A \to A$$

使得 $\{(\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*\}$ 是 S 的一个核，并且在那里满足

$$S((\mathrm{id}\otimes\omega)\mathbb{W}) = (\mathrm{id}\otimes\omega)(\mathbb{W}^*), \qquad \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{6.13}$$

此外，根据同一定理，还存在唯一的对合反乘自同构

$$R\colon M \to M$$

即酉反演，以及一个 σ-弱连续的一参数自同构群

$$\tau_t\colon M \to M, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6.14}$$

称为缩放群，使得 τ_t 在 A上范数连续，并且在 A 上有等式

$$S = R\circ\tau_{-i/2},$$

其中，$\tau_{-i/2}$ 的定义域由所有满足以下条件的 $a \in A$ 组成：$t \mapsto \tau_t(a)$在半条带 $\{z \in \mathbb{C} \mid -i/2 \le \mathrm{Im}(z) \le 0\}$上具有范数连续延拓，并且在该条带的内部全纯。于是，缩放群可具体通过以下方式实现

$$\tau_t(x) = \hat{\mathbf{Q}}^{2it}x\hat{\mathbf{Q}}^{-2it}, \qquad x \in M, t \in \mathbb{R}.$$

以下定理告诉我们，上述数据仅取决于（M，Δ）。这是对 [SW07，定理 5] 的一个小变体。

定理 6.9。设 $\mathbb{W}$、$\mathbb{V}$ 为模乘法酉算子，且由它们产生的冯·诺依曼双代数同构

$$(M_{\mathbb{W}}, \Delta_{\mathbb{W}}) \underset{\theta}{\cong} (M_{\mathbb{V}}, \Delta_{\mathbb{V}}). \tag{6.15}$$

那么，θ *intertwines* 相应的酉反演和缩放群。

证明。对于定理的第一部分，只需证明 θ 将式 (6.12) 中的 C*-代数$A_{\mathbb{W}}$ 与 C*-代数 $A_{\mathbb{V}}$交织起来，因为随后只需应用 [SW07 定理 5]即可。

现在，由于冯·诺伊曼代数之间的任意同构总可以通过酉共轭实现，在将它们的定义正规表示与一个重数希尔伯特空间作张量积后，我们不妨假设给定的就是一个冯·诺依曼双代数 (M, Δ)，其中 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，以及两个模乘法酉算子

$$\mathbb{W}, \mathbb{V} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$$

使得

$$M = [(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*]^{\sigma\text{-weak}} = [(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathbb{V} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*]^{\sigma\text{-weak}},$$

并且使得

$$\Delta(x) = \mathbb{W}^*(1 \otimes x)\mathbb{W} = \mathbb{V}^*(1 \otimes x)\mathbb{V}, \qquad x \in M.$$

现在，$\mathbb{V} \in M \bar{\otimes} \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 (M, Δ) 的一个酉余表示，其含义是

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\mathbb{V} = \mathbb{V}_{13}\mathbb{V}_{23}.$$

但由于 $\Delta = \Delta_{\mathbb{W}}$，这意味着

$$\mathbb{V}_{13} = \mathbb{W}^*_{12}\mathbb{V}_{23}\mathbb{W}_{12}\mathbb{V}_{23},$$

ˆ 因此，由 $\mathbb{W} \in M(A_{\mathbb{W}} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$（[SW01，定理 2.3] 应用于 $\mathbb{W} = \mathbb{W}^*_{21}$）可知 $\mathbb{V} \in M(A_{\mathbb{W}} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$。所以 $\mathbb{V}$ 也是 $(A_{\mathbb{W}}, \Delta_{\mathbb{W}})$ 的一个表示，按 [SW07], 的意义而言；此外，它还是右吸收的，也就是说，对于 $(M_{\mathbb{W}}, \Delta_{\mathbb{W}})$ 的任意其他酉余表示 U，我们都有一个酉共轭

$$\mathbb{V}_{13}U_{23} \cong \mathbb{V}_{13},$$

利用恒等式

$$\mathbb{V}_{13}U_{23} = U_{32}\mathbb{V}_{13}U^*_{32},$$

这可由 U 是酉余表示且 $\Delta = \Delta_{\mathbb{V}}$ 这一事实立即推出。

接着，由 [SW07 第 4] 节开头的论证可知，存在一个正规同构

$$\hat{\theta}\colon \hat{M}_{\mathbb{W}} \to \hat{M}_{\mathbb{V}}, \qquad (\mathrm{id} \otimes \hat{\theta})\mathbb{V} = \mathbb{W}.$$

但这立即意味着

$$A_{\mathbb{W}} = [(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathbb{W} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*] = [(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathbb{V} \mid \omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*] = A_{\mathbb{V}}.$$

□

现在，若（M, Δ）是一个带有左不变正规半有限忠实权 φ 的局部紧量子群，则存在唯一的乘法酉算子 $\mathbb{W}$，作用于 $L^2(M) \otimes L^2(M)$，称为左正则表示，使得

$$(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathbb{W}^*)\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi((\omega \otimes \mathrm{id})\Delta(x)), \qquad \forall \omega \in M_*, \forall x \in \mathfrak{n}_\varphi. \tag{6.16}$$

推论 6.10. 若 $\mathbb{W}$ 是一个模乘法酉算子，且$(M_{\mathbb{W}}, \Delta_{\mathbb{W}})$ 定义了一个局部紧量子群，那么按照(6.13)定义的其酉反演和缩放群，与 [KV03]中定义的相同。

证明. 根据 [KV00，命题 6.10]，附属于一个局部紧量子群的左正则乘法酉算子是模的。由此，推论可直接由定理 6.9 得出，因为对于左正则表示，局部紧量子群的反元由 (6.13) 确定。□

现在让我们再次回到局部紧量子群 $\mathbb{B}_N^+ = (L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$。应用 (6.14)、定理 3.11 和定理 4.10，可得：

定理 6.11。$\mathbb{B}_N^+$ 的缩放群由下式给出

$$\tau_t(x) = \mathbf{L}_\delta^{2i(1+|\hbar|^{-1})t} x \mathbf{L}_\delta^{-2i(1+|\hbar|^{-1})t}, \qquad x \in L_\hbar(B_N^-). \tag{6.17}$$

特别地，实现缩放群的酉单参数群（[KV00，定义 6。9]）为

$$P^{it} = \mathbf{L}_\delta^{2i(1+|\hbar|^{-1})t} J \mathbf{L}_\delta^{2i(1+|\hbar|^{-1})t} J. \tag{6.18}$$

根据 [SW01，定理 2.3]，还可以得知，记 $x^T = x^*$，酉反元R 由下式唯一确定

$$(R \otimes T)(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{G}}, \tag{6.19}$$

其中 $\mathcal{F}$ 是一个 Fock–Goncharov 翻转，$\mathcal{G}$ 如定理 3.11 所示。由 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{G}$的具体公式，我们很容易得到：

定理 6.12。$\mathbb{B}_N^+$ 的酉反演由下式确定

$$R(\mathbf{E}(\vec{e}_{s,k})) = \mathbf{E}(-\swarrow\!\!\!\!e_{s,k}), \qquad 0 \le k \le s \le n. \tag{6.20}$$

回顾记号 (6.10)，一般理论 [KV00，第 7] 节给出

$$\varphi R = \varphi_\delta.$$

6.6. **对偶模结构**。给定一个局部紧量子群 $(M,\ \Delta)$，我们已经提到，其相关左正则乘法酉算子 $\mathbb{W}$由 (6.16) 定义，是模的。进一步可以证明，$(M,\ \Delta)$（由 (4.3) 和 (4.4) 定义）仍是一个局部紧量子群。因此，有一种典范的方式来识别

$$L^2(\hat{M}) \cong L^2(M). \tag{6.21}$$

也就是说，记

$$\lambda(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})\mathbb{W}, \qquad \omega \in M_*.$$

考虑

$$\mathcal{I} = \{\omega \in M_* \mid \exists C \ge 0 : |\omega(x^*)| \le C\|\Lambda_\varphi(x)\| \text{ for all } x \in \mathfrak{n}_\varphi\},$$

并令对于 $\omega \in \mathcal{I}$，$\hat{\Lambda}(\lambda(\omega))$ 为 $L^2(M)$ 中满足下式的唯一向量

$$\langle \Lambda_\varphi(x), \hat{\Lambda}(\lambda(\omega))\rangle = \omega(x^*), \qquad x \in \mathfrak{n}_\varphi, \omega \in \mathcal{I}.$$

$\hat{}$ 接下来可以证明，能够为 (M, Δ) 选取左不变正规半有限忠实权，使得 $\lambda(\mathcal{I}) \subseteq \mathfrak{n}_{\hat{\varphi}}$，并且映射

$$\Lambda_{\hat{\varphi}}(\lambda(\omega)) \mapsto \hat{\Lambda}(\lambda(\omega)), \qquad \omega \in \mathcal{I}$$

延拓为酉算子，从而得到恒等式 (6.21)。

现在让我们回到由 (6.1) 确定的具体局部紧量子群 $\mathbb{B}_N^+$ 及其对偶 $\mathbb{B}_N^-$。记 ρ 为线性对合

$$\rho\colon B_N^- \to B_N^-, \qquad \rho(\nearrow e_{s,k}) = -\swarrow e_{s,k}, \qquad 0 \leq k \leq s \leq N, \tag{6.22}$$

并写作

$$\hat{\rho}\colon \hat{B}_N^- \to \hat{B}_N^-, \qquad \hat{v} \mapsto \hat{v} \circ \rho.$$

命题 6.13。 设$\hat{}J$是 $L^\infty(\mathbb{B}_N^-)$的模共轭，它通过(6.21)和(6.7)作用在 $L^2(\hat{}B_N^-)$上。那么

$$\hat{J}g = \overline{g \circ \hat{\rho}}, \qquad g \in L^2(\hat{B}_N^-). \tag{6.23}$$

证明。 对于一个一般的局部紧量子群 (M, Δ)，其左不变正规半有限忠实权为φ，酉反演为 R，右不变正规半有限忠实权 $\psi = \varphi R$ 的 GNS 映射 Γ 可以唯一地实现在 $L^2(M)$ 上，使得

$$\Gamma(x) = \Lambda_\varphi(x\delta^{1/2}), \qquad x \in M \text{ with } x \circ \delta^{1/2} \text{ bounded and } x\delta^{1/2} \in \mathfrak{n}_\varphi,$$

$\hat{}$而对于上述的 x， J 由下式确定

$$\hat{J}\Gamma(x) = \Lambda_\varphi(R(x)^*). \tag{6.24}$$

现在考虑这些元素

$$\pi(f) = \int_V f(v)\pi(v)\mathrm{d}v \in L_\hbar(B_N^-), \qquad f \in L^1(B_N^-)$$

与 (4.14) 中一样，因此相对于 (6.3)，我们有

$$\Lambda(\pi(f)) = \check{f}, \qquad f \in \mathcal{S}(V).$$

那么很容易看出，对于

$$\mathcal{E}(B_N^-) = \{f\colon v \mapsto P(v)e^{-|v|^2/2} \mid P \text{ polynomial}\}$$

（在 B_N^- 上任取一个欧几里得范数），对于任意 $w \in B_N^-$， $\pi(f)\circ\mathbf{E}(w)$ 有界，其中

$$\pi(f)\mathbf{E}(w) = \pi(\kappa_w f), \qquad (\kappa_w f)(v) = e^{\pi\hbar(v,w)}f(v + iw).$$

因此，对于 $f \in \mathcal{E}(B_N^-)$，我们有

$$\pi(f) \in \mathfrak{n}_\varphi, \quad \pi(f) \circ \delta^{1/2} \text{ bounded and } \pi(f)\delta^{1/2} \in \mathfrak{n}_\varphi,$$

并且，利用 $-(1 + |\hbar|^{-1})\sum_{i=1}^n \nearrow \varpi_i = d_r - d_l$,

$$\Lambda_\varphi(\pi(f)) = (\kappa_{d_l} f)^\vee, \qquad \Gamma(\pi(f)) = (\kappa_{d_r} f)^\vee, \qquad f \in \mathcal{E}(B_N^-).$$

由 (6.24) 和 (6.20) 可得

$$\hat{J}((\kappa_{d_r} f)^\vee) = (\kappa_{d_l}\overline{f \circ -\rho})^\vee. \tag{6.25}$$

利用这一点

$$\rho(d_l) = d_r, \qquad (\rho v, w) = -(v, \rho w), \qquad v, w \in B_N^-,$$

（6.25）可简化为

$$\hat{J}(f^\vee) = (\overline{f \circ -\rho})^\vee, \qquad f \in \mathcal{E}(B_N^-).$$

进一步的简化，加上 $\mathcal{E}(B_N^-)$ 在 $L^2(\hat{}B_N^-)$ 中稠密这一事实，便得到 (6.23)。□

7. Left regular representation of $\mathbb{B}_N^+$, $\hbar$ and duality

7.1. 左正则表示。 本节中，我们将更明确地确定 $(L_\hbar(B_N^-)\ \Delta)$ 的左正则表示 $\mathbb{W}$（见 (6.16)）。我们从以下引理开始。

引理 7.1。 $L_\hbar(B_N^-)$ 在 $L^2(\hat{B}_N^-)$ 上的标准右表示 ρ 定义为

$$\rho(x)\xi = Jx^*J\xi, \qquad \xi \in L^2(\hat{B}_N^-),$$

可具体确定为

$$\rho(\mathbf{E}(v)) = \mathbf{E}(\overline{v}), \tag{7.1}$$

其中，我们考虑 B_N^- 在 $L^2(\hat{B}_N^-)$ 上由下式给出的酉 $\hbar$-表示

$$(\mathbf{E}(\overline{v})^{it}g)(\hat{w}) = e^{2\pi i t v\cdot\hat{w}}g(\hat{w} - t\mathcal{J}v), \qquad g \in L^2(\hat{B}_N^-), \hat{w} \in \hat{B}_N^-, v \in B_N^-, t \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

证明。 这可由 (4.15) 和 (6.4) 直接得出。 □

一般而言，若 M 是一个冯·诺依曼代数，我们将视为在 $L^2(M)$ 上的 $\underline{M}$ 的标准右表示通过下式诱导出在 $L^2(M)$ 上的普通正规 $*$-表示

$$\overline{x}\xi = \rho(x^*)\xi = JxJ\xi, \qquad x \in M, \xi \in L^2(M).$$

与（7.1）相容地，我们得到

$$\overline{\mathbf{E}(v)} = \mathbf{E}(\overline{v}), \qquad v \in B_N^-.$$

现在进一步在 $L^2(\hat{B}_N^-)$ 上赋予酉 T_N^+-表示，使得

$$(\mathbf{E}(v)^{it}g)(\hat{v}) = g(\hat{v} + 2t\mathcal{J}v), \qquad g \in L^2(\hat{B}_N^-). \tag{7.3}$$

回顾（2.64）、（2.68）和（3.31）中引入的酉算子。

定理 7.2. $L_\hbar(B_N^-(B_N^-)\ \Delta)$ 的左正则表示 $\mathbb{W}$ 由下述酉算子给出

$$\mathbb{W} = \overline{\mathcal{G}''}\mathcal{K}\mathcal{F}' \in \mathcal{B}(L^2(\hat{B}_N^-) \otimes L^2(\hat{B}_N^-)). \tag{7.4}$$

注意，由于

$$\mathcal{F}' \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^-), \quad \overline{\mathcal{G}''} \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}\overline{L_\hbar(B_N^-)}, \quad \mathcal{K} \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(T_N^+),$$

我们确实可以通过 $L_\hbar(B_N^-)$ 的标准作用，以及 $L_\hbar(B_N^-)$ 和 $L_\hbar(T_N^+)$ 分别的作用 (7.2) 和 (7.3) 来理解这个公式。

证明。 设 $\mathcal{H}$ 是 $\triangledown_N'$ 的一个不可约酉 $\hbar$-表示，且 $\mathcal{F}$ 是与之关联的 Fock–Goncharov 翻转，其关联的模数据为 $(\mathcal{F},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Q}\ \mathcal{G})$。取

$$a \in L_\hbar(B_N^+)' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

根据命题 5.1，正规权

$$\varphi = \mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}^2,a}$$

相对于……是左不变的

$$\Delta\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\bar{\otimes}\mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad x \mapsto \mathcal{F}^*(1\otimes x)\mathcal{F}.$$

根据 (5.9)，我们可以选择 a，使得 φ 在 $L_\hbar(B_N^-)$ 上仍然是半有限的；根据注记 5.10，我们可以将 $L_\hbar(B_N^-)$ 的 GNS 映射 Λ_φ 视为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 对应映射的限制，并且与标准左右表示相容。注意，由于 $a \in L_\hbar(B_N^+)'$，我们有 a 与 $\mathbf{Q}$ （强）可交换。

现在，φ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的 GNS 映射可以在$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 上具体实现为

$$L^2(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}, \qquad \Lambda_\varphi(\theta_{\xi,\eta}) \cong \xi \otimes \overline{\mathbf{Q}a\eta} \in \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}, \qquad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}). \tag{7.5}$$

进一步注意，如果 $x \in \mathfrak{n}_\varphi$，那么根据 φ的左不变性，对于任意 $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_*$，也有$(\omega \otimes \mathrm{id})\Delta(x) \in \mathfrak{n}_\varphi$。因此，如果 $\xi, \xi', \zeta, \zeta' \in \mathcal{H}$，且 $\{e_k\}$ 是 $\mathcal{H}$的标准正交基，我们计算对于$\eta, \eta' \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}^2)$有：

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_\varphi(\theta_{\xi,\eta}), \Lambda_\varphi((\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id})\Delta(\theta_{\xi',\eta'}))\rangle &= \langle \xi, (\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id})(\Delta(\theta_{\xi',\eta'}))a^*\mathbf{Q}^2 a\eta\rangle \\
&= \langle \zeta \otimes \xi, \Delta(\theta_{\xi',\eta'})(\zeta' \otimes a^*\mathbf{Q}^2 a\eta)\rangle \\
&= \langle \zeta \otimes \xi, \mathcal{F}^*(1 \otimes \theta_{\xi',\eta'})\mathcal{F}(\zeta' \otimes a^*\mathbf{Q}^2 a\eta)\rangle \\
&= \sum_k \langle \mathcal{F}(\zeta \otimes \xi), e_k \otimes \xi'\rangle\langle e_k \otimes \eta', \mathcal{F}(\zeta' \otimes a^*\mathbf{Q}^2 a\eta)\rangle \\
&= \sum_k \langle \mathcal{F}(\zeta \otimes \xi), e_k \otimes \xi'\rangle\langle e_k \otimes a\eta', \mathcal{F}(\zeta' \otimes \mathbf{Q}^2 a\eta)\rangle \\
&\underset{(3.2)}{=} \sum_k \langle \mathcal{F}(\zeta \otimes \xi), e_k \otimes \xi'\rangle\langle e_k \otimes \overline{\mathbf{Q}a\eta}, \overline{\mathcal{G}}^*(\zeta' \otimes \overline{\mathbf{Q}a\eta'})\rangle \\
&= \langle \xi \otimes \overline{\mathbf{Q}a\eta}, (\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\mathcal{F}_{12}^*\overline{\mathcal{G}}_{13}^*)(\xi' \otimes \overline{\mathbf{Q}a\eta'})\rangle \\
&= \langle \Lambda_\varphi(\theta_{\xi,\eta}), (\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id})(\mathcal{F}^*\overline{\mathcal{G}}^*)\Lambda_\varphi(\theta_{\xi',\eta'})\rangle.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\Lambda_\varphi((\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id})\Delta(y))\rangle = (\omega_{\zeta,\zeta'} \otimes \mathrm{id})(\mathcal{F}^*\overline{\mathcal{G}}^*)\Lambda_\varphi(y), \qquad y \in \mathfrak{n}_\varphi, \zeta, \zeta' \in \mathcal{H}. \tag{7.6}$$

现在利用 (2.69) 和 (3.28)，我们可以写成

$$\mathcal{F}^*\overline{\mathcal{G}}^* = \mathcal{F}'^*\mathcal{K}^*\overline{\mathcal{L}}^*\overline{\mathcal{G}''}^*.$$

由于$\hat{}$As 也是一个模数据，因此从与上面相同的计算可知，$\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*$限制为 $L^2(\hat{}B_N^-) \otimes L^2(\hat{}B_N^-)$，其酉算子为 $\mathbb{P}^*$，满足

$$(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathbb{P}^*)\Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi((\omega \otimes \mathrm{id})(\mathcal{K}^*(1 \otimes x)\mathcal{K})), \qquad \forall \omega \in L_\hbar(B_N^-)_*, \forall x \in \mathfrak{n}_\varphi.$$

不过，沿用引理 6.5 的证明，我们很容易看出

$$\mathcal{K}^*(1 \otimes \mathbf{E}(v))\mathcal{K} = \mathbf{E}(\sum_{t=1}^n 2(v, \overset{\searrow}{e}_{N-t})\overset{\nearrow}{\varpi}_t \oplus v), \qquad v \in B_N^-. \tag{7.7}$$

经过简单计算，我们便可看出，确实如此：$\mathbb{P} = \mathcal{K}$，其第二条腿通过 (7.3) 作用。

As

$$\mathcal{F}' \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^-), \qquad \mathcal{G}'' \in \overline{L_\hbar(B_N^-)}\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^-),$$

$L_\hbar(B_N^-)$ 在 $L^2(L_\hbar(B_N^-)) \subseteq L^2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ 上的标准表示之间的相容性，结合 (7.6)，使我们得以得出 (7.4) 成立。□

7.2. **对偶表示**。 接下来，我们旨在为 $\mathbb{W}$ 找到一个公式，使其更符合 (2.69) 中的表达形式，并令 $\mathcal{F}'$ 采用 (2.47) 中的 $\mathcal{R}$ 形式。

首先回顾（6.9）：如果我们将

$$\mathcal{F} \in L_\hbar(B_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^+),$$

且 $L_\hbar(B_N^-)$ 在其标准形式下表示于 $L^2(\hat{}B_N^-)$ 上，那么存在唯一的正规 $*$-表示 $\hat{}\pi$，它将 $L_\hbar(B_N^+)$ 表示于 $L^2(\hat{}B_N^-)$ 上，并满足

$$(\mathrm{id}\otimes\hat{\pi})\mathcal{F} = \mathbb{W}.$$

若将（2.42）中标准生成元的像记作

$$\mathbf{E}(\hat{\varpi}_r) := \hat{\pi}(\mathbf{E}(\overset{\searrow}{\varpi}_r)), \qquad \hat{\mathbf{E}}_{rs} := \hat{\pi}(\mathbf{E}_{rs}), \qquad 1 \le r < s \le N,$$

那么显然有

$$\mathbb{W} = G_\hbar\left(2\sum_{t=1}^{n}\overset{\nearrow}{e}_t \otimes \hat{\varpi}_{N-t}\right)\overrightarrow{\prod_{r=1}^{n}}\overrightarrow{\prod_{s=r+1}^{n+1}}\overline{F}_\hbar(\mathbf{F}_{rs}\otimes\hat{\mathbf{E}}_{rs}).$$

$\hat{}$ 我们的目标是更明确地确定算子 $\mathbf{E}(\hat{}\varpi_r)$ 和 $\mathbf{E}_{rs}$ 。

我们先给出以下显然的观察，这可直接由所涉及结构的定义得出（关于陈述的第二部分，参见（7.2））：

引理 7.3. B_N^- 的标准酉算子 $\hbar$-表示与 (7.3) 中的 T_N^+ 的酉算子 $\hbar$-表示可扩张为 $\bigtriangledown_N'$ 的酉算子 $\hbar$-表示：

$$\mathbf{E}(v)^{it}\mathbf{E}(w)^{is} = e^{2\pi i\hbar st(v,w)}\mathbf{E}(w)^{is}\mathbf{E}(v)^{it}, \qquad w \in B_N^-, v \in T_N^+.$$

$L_\hbar(B_N^-)$-表示也满足类似的规则：

$$\mathbf{E}(v)^{it}\mathbf{E}(\overline{w})^{is} = e^{2\pi i\hbar st(v,w)}\mathbf{E}(\overline{w})^{is}\mathbf{E}(v)^{it}, \qquad w \in B_N^-, v \in T_N^+.$$

因此，若记

$$\mathbf{E}(\overline{v}) = \mathbf{E}(-v), \qquad v \in T_N^+,$$

那么我们也得到 $\bigtriangledown_N'$ 的酉算子 $\hbar$-表示。因此，若令

$$\mathrm{H}(\bigtriangledown_N') = \bigtriangledown_N' \widetilde{\oplus} \overline{\bigtriangledown_N'},$$

$\tilde{}$其中，$\widetilde{\oplus}$ 表示取唯一的斜对称双线性形式，使其在 $\bigtriangledown_N'$ 和$\bigtriangledown_N'$上的限制为通常的形式，并且交叉形式为

$$(u,\overline{v}) = (w,\overline{z}) = 0, \quad (u,\overline{z}) = -(u,z), \quad (w,\overline{v}) = (w,v), \qquad u,v \in B_N^-, w,z \in T_N^+,$$

上述公式合起来构成 $H(\bigtriangledown_N')$的一个酉算子 $\hbar$-表示，其中

$$\mathbf{E}(v\oplus\overline{w}) = \mathbf{E}(v)\star\mathbf{E}(\overline{w}), \qquad v,w \in \bigtriangledown_N'. \tag{7.8}$$

由上述内容，根据（3.28），我们可以将（7.4）改写为

$$\mathbb{W} = \mathcal{K}\overline{\mathcal{G}'}\mathcal{F}' \in \mathcal{B}(L^2(\hat{B}_N^-)\otimes L^2(\hat{B}_N^-)), \tag{7.9}$$

其中 $\mathcal{G}'$ 如 (3.30) 所示。然后，使用第 3.2 节和 (4.46) 中的记号，我们得到 $i = s$，即

$$(\pi_i\otimes\mathrm{id})\mathbb{W} = G(2\varpi_s\otimes\overset{\searrow}{e}_{N-s}),$$

这足以得出以下引理：

引理 7.4。有

$$\mathbf{E}(\hat{\varpi}_s) = \mathbf{E}(\overset{\searrow}{\varpi}_s), \qquad 1 \leq s \leq n, \tag{7.10}$$

其中 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{\varpi}_s)$ 由 (7.3) 确定。

另一方面，如果 $i = (s, k)$，则有

$$\begin{aligned}(\pi_i \otimes \mathrm{id})\mathbb{W} &= G(2\varpi_i \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}) \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi\left(f_i \oplus \overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}}\right) \overrightarrow{\prod_{s\leqslant r\leqslant n}} \varphi\left(f_i \oplus \overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r}\right) \\ &= G(2\varpi_i \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s})\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_i) \otimes \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}})\right)\right) \\ &\qquad \times \overline{F}\left(\mathbf{E}(f_i) \otimes \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right)\right).\end{aligned}$$

由于我们可以写成

$$\mathbf{E}(\overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}}) = \mathbf{E}(\overline{\overset{\searrow}{e}_{N-s,r-s}}) * \mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s}),$$

并且所有的 $\overline{\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,r-s})}$ 和 $\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r'})$ 都强交换，因此可知 $\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r})$ 与 $\overline{\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})}$ $-\hbar$-交换；进一步地，利用形式和的交换性，我们可以将上述关于 $\mathbb{W}$ 的表达式有意义地化简为

$$\begin{aligned}(\pi_i \otimes \mathrm{id})\mathbb{W} &= G(2\varpi_i \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s}) \\ &\qquad \times \overline{F}\left(\mathbf{E}(f_i) \otimes \left(\left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}})\right) \boxplus \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right)\right)\right).\end{aligned}$$

另一方面，这也必须等于

$$(\pi_i \otimes \mathrm{id})\mathbb{W} = G(2\varpi_i \otimes \overset{\searrow}{e}_{N-s})\overline{F}\left(\mathbf{E}(f_i) \otimes \hat{\mathbf{E}}_s\right).$$

因此我们得到：

定理 7.5。对于所有 和 $1 \leq s \leq n$，有

$$\hat{\mathbf{E}}_s = \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overline{-\overset{\nwarrow}{e}_{N-s,n-r}})\right) \boxplus \left(\boxplus_{s\leqslant r\leqslant n}\mathbf{E}(\overset{\searrow}{e}_{N-s,n-r})\right). \tag{7.11}$$

现在我们说明，如何将这个公式推广到所有标准生成元，并将其表示为配分函数的形式。

首先注意，我们有两个从 U_N^+ 到 $\mathrm{H}(\triangledown'_N)$ 的嵌入，即

$$U_N^+ \to \mathrm{H}(\triangledown'_N), \quad e_{abc} \mapsto e_{abc} = e_{abc} \oplus 0, \qquad e_{abc} \mapsto f_{abc} = 0 \oplus \vartheta(e_{abc}), \tag{7.12}$$

其中 ϑ 如 (5.28) 所示。由此我们得到一个扭曲直和

$$U_N^+ \widetilde{\oplus} U_N^+ \subseteq \mathrm{H}(\triangledown'_N). \tag{7.13}$$

引理 7.6. $U_N^+ \widetilde{\oplus} U_N^+$ 上的交叉关系由以下内容确定

$$(e_{abc}, f_{a'b'c'}) = 0, \qquad c \neq 0 \text{ or } c' \neq 0, \qquad (e_{ab0}, f_{a'b'0}) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = a', \\ -1/2 & \text{if } |a - a'| = 1 \\ 0 & \text{if } |a - a'| \geq 2. \end{cases} \tag{7.14}$$

证明。通过直接验证即可得出。 □

与 $U_N^+\widetilde{\oplus}U_N^+$ 相关的图 $\overset{\searrow}{C}{}'_N(2)$（相对于其给定的基）是通过将第二个（水平镜像的）副本 $\overset{\searrow}{C}{}'_N$（第二个直和项）叠放在 $\overset{\searrow}{C}{}'_N$（第一个直和项）上方得到的；在位置相同的顶点之间用向上的实箭头连接，在相距一个位置的顶点之间用向下的半箭头连接。参见图 19。

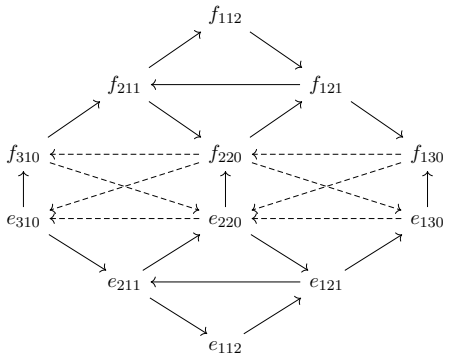


FIGURE 19. 图 $\overset{\searrow}{C}{}'_4(2)$。

现在再次回顾第 2.2 节和第 2.3 节的设定，以及图 12 中的 $\triangledown_N$-标记图$\mathbb{E}\ =\ (\Gamma_{\mathbb{E}},\ \ell)$，它对应于字 $\mathbf{w}_0 \in B_N$（如式 (2.28) 所示）。我们稍微改写了标记，使其明确取值于 B_N^+（图 20）。注意，该标记

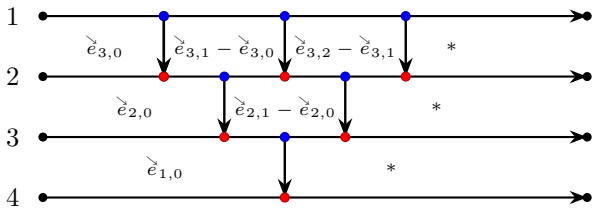


FIGURE 20. U_4^+-标记图 $\mathbb{E}_4 = (\Gamma_{\mathbb{E}_4},\ \ell)$。

最右侧的标记在计算配分函数时并不需要，因此无需指定它。特别是，就所有实际用途而言，我们可以认为该标记取值于U_N^+。

现在再次考虑将$\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0$ 与自身拼接而成的字$\mathbf{w}_0$ 。接着，我们通过函数 $\ell(2)$，用 $U_N^+(2)$的元素为相应的平面有向图$\Gamma_{\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0}$标记（图 21）。我们将所得的 $U_N^+(2)$彩色图记为 $\mathbb{E}(2)$。

容易验证，这种标记确实与图结构一致（再次说明，最右侧的标记仅用于填充，这些向量的具体取值与后续计算无关）。

注意到，$\mathrm{H}(\triangledown'_N)$ 在 $L^2(\hat{}B_N^-)$ 上的酉 $\hbar$-表示（7.13）通过（7.8）限制为 $U_N^+\widetilde{\oplus}U_N^+$ 的酉 $\hbar$-表示。令 $Z_\bullet$ 为与标记图 $\bullet$ 相关联的分区算子。

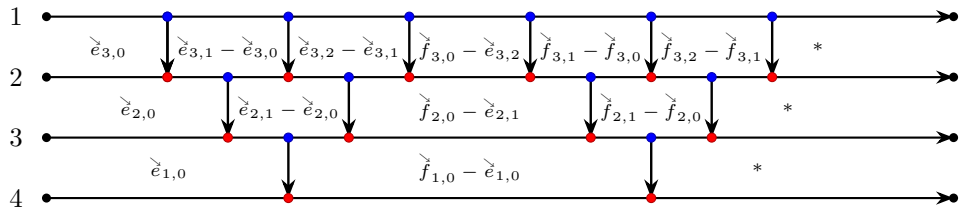


FIGURE 21. $U_4^+(2)$ 标记图 $\mathbb{E}_4(2) = (\Gamma_{\mathbb{E}_4(2)}, \ell(2))$。

定理 7.7。我们有

$$\hat{\mathbf{E}}_{rs} = Z_{\mathbb{E}_{[r,s]}(2)}.$$

证明。考虑嵌入

$$\iota\colon U_N^+ \to U_N^+ \widetilde{\oplus} U_N^+, \qquad v \mapsto v \oplus 0. \tag{7.15}$$

我们将证明，存在一个酉算子 u 使得

$$Z_{\mathbb{E}_{[r,s]}(2)} = u Z_{\Gamma_{\mathbb{E}_{[r,s]}}, \iota\circ\ell} u^*. \tag{7.16}$$

这足以确立该定理：事实上，此时二者都

$$\mathbf{E}_{rs} \mapsto Z_{\mathbb{E}_{[r,s]}} \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}_{rs} \mapsto \hat{\mathbf{E}}_{rs}$$

是由 $L_\hbar(U_N^+)$ 的正规 $*$-表示导出的。由于它们在 $\mathbf{E}_r$ 上一致，根据命题 4.18，它们必定相等。

根据引理 2.19，如果我们能通过一系列特定的变异，将 $(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_0, \ell(2))$ 化为 $(\mathbf{w}_0, \ell)$（忽略后者最右边的列），那么我们就证明了 (7.16)。但这正是引理 2.15 的内容。□

8. QUANTUM $SL^+(N,\mathbb{R})$ AS A LOCALLY COMPACT QUANTUM GROUP

由任意局部紧量子群 $\mathbb{B} = (L^\infty(\mathbb{B}, \Delta)$ 都可以构造其 Drinfeld 双 $D\mathbb{B}$，它再次是一个局部紧量子群 [BV05]。

ˆ˚ 更准确地说，将 $\mathbb{B}$ 的对偶写作 $\mathbb{B} = (L(\mathbb{B}), \Delta)$，考虑

$$L^\infty(D\mathbb{B}) = L^\infty(\mathbb{B}) \bar{\otimes} L(\mathbb{B}) \subset \mathcal{B}(L^2(\mathbb{B}) \otimes L^2(\mathbb{B}))$$

其余乘法为

$$\Delta_{D\mathbb{B}} = (\mathrm{id} \otimes \sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \mathsf{ad}(\mathbb{W}) \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \hat{\Delta}),$$

其中，$\mathsf{ad}(\mathbb{W})(x) = \mathbb{W} x \mathbb{W}^*$ 表示通过左正则乘法酉算子 $\mathbb{W}$进行共轭，而 σ 是张量翻转。$L^\infty(D\mathbb{B})$ 的酉反演和缩放群分别为

$$R_{D\mathbb{B}} = (R \otimes \hat{R})\mathsf{ad}(\mathbb{W}) = \mathsf{ad}(\mathbb{W}^*)(R \otimes \hat{R}), \quad \tau_t^{D\mathbb{B}} = \tau_{-t} \otimes \hat{\tau}_t,$$

分别为。

我们关注 $\mathbb{B} = \mathbb{B}_N^-, \hbar$ 的情形，并采用第 6 节开头引入的记号，将 $L^\infty(\mathbb{B}) = L(\mathbb{B}_N^+, \hbar) = L_\hbar(B_N^+)$ 和 $L(\mathbb{B}) = L(\mathbb{B}_N^-, \hbar) = L_\hbar(B_N^-)$ 视为 $L^\infty(D\mathbb{B}_N^-, \hbar) = L_\hbar(B_N^+) \bar{\otimes} L_\hbar(B_N^-)$。

我们用 $L_\hbar(T_N)$ 表示 $L_\hbar(B_N^+)\bar{\otimes}L_\hbar(B_N^-)$ 内由以下算子生成的 $L_\hbar(T_N^{\pm})$ 的对角副本

$$\mathbf{D}_s=\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{L}_s,\qquad 1\leq s\leq n,$$

比较 (4.51)、(4.54)，并考虑由 $L_\hbar(U_N^+)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^-)$ 和 $L_\hbar(T_N)$ 生成的冯·诺伊曼子代数 $M\subseteq L^\infty(D\mathbb{B}_N^-,\ \hbar)$。

命题 8.1. 冯·诺依曼代数 M 是 $L^\infty(D\mathbb{B}_N^-,\ \hbar)$ 的 *Baaj–Vaes* 子代数。也就是说，我们有 $\Delta_{D\mathbb{B}_N^-,\ \hbar}(M)\subseteq M\bar{\otimes}M$，且 M 在 $L^\infty(D\mathbb{B}_N^-,\ \hbar)$ 的酉反演和缩放群作用下保持不变。

证明。 考虑 Fock–Goncharov 翻转 $\mathcal{F}=\mathcal{K}\mathcal{F}'=\mathcal{F}''\mathcal{K}$。利用 (2.65) 可以很容易验证 $\mathcal{F}'\in L_\hbar(U_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^+)$，或者等价地，$\mathcal{F}'_{21}\in L_\hbar(U_N^+)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^-)\subseteq M$。此外，检查 (2.75) 可得 $\mathcal{F}''_{21}\in M$，但请注意，$\mathcal{F}''_{21}$ 不包含在 $L_\hbar(U_N^+)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^-)$ 中。由定理 6.9 的证明可知，我们也可以类似地将 $\mathbb{W}=\mathcal{K}\mathbb{W}'=\mathbb{W}''\mathcal{K}$ 写成 $\mathbb{W}'_{21}\in L_\hbar(U_N^+)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^-)\subseteq M$ 和 $\mathbb{W}''_{21}\in M$，另见第 7.2 节开头的讨论。

现在我们将 $D=D\mathbb{B}_N^-{}_{,\hbar}$ 简记为此，并注意到 $\widehat{\mathbb{B}_N^-{}_{,\hbar}}$ 的左正则表示由 $\mathbb{W}=\mathbb{W}^*_{21}=(\mathbb{W}')^*_{21}\mathcal{K}^*_{21}=\mathcal{K}^*_{21}(\mathbb{W}'')^*_{21}$ 给出。根据命题 4.22，我们有 $\hat{\Delta}(\mathbf{L}_s)=\mathbf{L}_s\otimes\mathbf{L}_s$，且 $\Delta(\mathbf{K}_s)=\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{K}_s$，其中 $1\leq s\leq n$。利用 (2.10) 可验证 $\hat{\Delta}(\Delta\otimes\Delta)(\mathbf{D}_s)$ 与 $\mathcal{K}_{32}$ 强交换，其中 $1\leq s\leq n$，由此可得

$$\Delta_D(L_\hbar(T_N))\subseteq(\mathbb{W}')^*_{23}(L_\hbar(T_N)\bar{\otimes}L_\hbar(T_N))(\mathbb{W}')_{23}\subseteq M\bar{\otimes}M.$$

接下来我们断言 $\Delta_D(1\otimes L_\hbar(U_N^-))\subseteq M\bar{\otimes}M$。根据命题 4.19，只需对 (4.53) 中定义的 $1\leq s\leq n$ 的标准生成元 $\mathbf{F}_s$ 验证$\Delta_D(1\otimes\mathbf{F}_s^{it})\in M\bar{\otimes}M$。由命题 4.22 可得

$$\begin{aligned}\Delta_D(1\otimes\mathbf{F}_s)&=(\mathbb{W}')^*_{23}\mathcal{K}^*_{23}(1\otimes\mathbf{F}_s\otimes 1\otimes\mathbf{L}_s\boxplus 1\otimes 1\otimes 1\otimes\mathbf{F}_s)\mathcal{K}_{23}\mathbb{W}'_{23}\\&=(\mathbb{W}')^*_{23}(1\otimes\mathbf{F}_s\otimes\mathbf{K}_s\otimes\mathbf{L}_s\boxplus 1\otimes 1\otimes 1\otimes\mathbf{F}_s)\mathbb{W}'_{23},\end{aligned}$$

利用 $\mathcal{K}^*(\mathbf{E}(\vec{e}_{s,\ k})\otimes 1)\mathcal{K}=\mathbf{E}(\vec{e}_{s,\ k})\otimes\mathbf{E}(\overleftarrow{e}_{N-s})$ 对所有 $0\leq k\leq s-1$ 均成立这一事实，并由 (2.23) 可知。再次将此与 $\mathbb{W}'\in L_\hbar(U_N^-)\bar{\otimes}L_\hbar(U_N^+)$ 结合，我们得出 $\Delta_D(1\otimes\mathbf{F}_s^{it})\in M\bar{\otimes}M$对 $1\leq s\leq n$成立，正如所需。利用命题 4.18，可以类似地验证 $\Delta_D(L_\hbar(U_N^+)\otimes 1)\subseteq M\bar{\otimes}M$，从而我们可以得出 $\Delta_D(M)\subseteq M\bar{\otimes}M$。

接下来我们利用 (6.20) 证明 M 在 Drinfeld 双的酉反演下保持不变。首先，我们注意到 $(\hat{R}\otimes R)(\mathbf{D}_s)=\mathbf{D}_s^{-1}$ 对 $1\leq s\leq n$ 成立，并利用 $\mathbf{D}_s^{-1}$ 与 $\mathcal{K}_{21}$ 强交换这一事实，结合 $\mathbb{W}''_{21}\in M$，我们得到 $R_D(L_\hbar(T_N))\subseteq M$。对于 $1\leq s\leq n$ 的标准生成元 $\mathbf{F}_s$，我们得到

$$\begin{aligned}R_D(1\otimes\mathbf{F}_s)&=\mathbb{W}''_{21}\mathcal{K}_{21}(\hat{R}\otimes R)(1\otimes\mathbf{F}_s)\mathcal{K}^*_{21}(\mathbb{W}''_{21})^*\\&=\mathbb{W}''_{21}\mathcal{K}_{21}(1\otimes\mathbf{F}_s*\mathbf{L}_s^{-1})\mathcal{K}^*_{21}(\mathbb{W}''_{21})^*\\&=\mathbb{W}''_{21}(\mathbf{K}_s^{-1}\otimes\mathbf{F}_s*\mathbf{L}_s^{-1})(\mathbb{W}''_{21})^*,\end{aligned}$$

并再次利用 $\mathbb{W}''_{21}\in M$和命题 4.19，我们推出 $R_D(1\otimes L_\hbar(U_N^-))\subseteq M$。类似地，可以验证 $R_D(L_\hbar(U_N^+)\otimes 1)\subseteq M$。

最后，回顾定理 6.11 和定理 3.11，可知 $L_\hbar(B_N^\pm)$ 的缩放群分别由与 $\hat{\mathbf{Q}}^{it}$ 和 $\mathbf{Q}^{it}$的共轭来实现。这里 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}_\delta^{1+|\hbar|^{-1}}$，其中$\mathbf{L}_\delta = \mathbf{E}(\sum \vec{\omega}_i)$，且 $\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{-(1+|\hbar|^{-1})\,\delta}$，其中 $\mathbf{K}_\delta = \mathbf{E}(\sum \overset{\searrow}{\omega}_i)$。显然，对于所有 $t \in \mathbb{R}$，每个$\mathbf{D}_s$ 都由 τ_t^D保持不变。此外，由 (2.23) 可知，标准生成元$\mathbf{F}_s$ 在经 $\hat{\mathbf{Q}}^{it}$ 共轭后保持不变，至多相差一个标量。类似地，算子$\mathbf{E}_s$ 在经$\mathbf{Q}^{it}$ 共轭后保持不变，至多相差一个标量。因此，我们得出 M 在缩放群作用下保持不变。□

根据 [BV05，命题 A.5]，我们得出，对于一个唯一确定的局部紧量子群 $\mathbb{G}$，$M = L^\infty(\mathbb{G})$。

定义 8.2。我们将 $\mathbb{G} = SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 称为全正量子 $SL(N,\ \mathbb{R})$-群.

[BV05] 的一般理论使我们能够用量子化 Borel 群 $\mathbb{B}_{N,\,\hbar}^\pm$ 来描述 $D\mathbb{B}_{N,\,\hbar}^-$ 和 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 的基本结构。关于 $SL_\hbar^+(N,\ \mathbb{R})$ 及其表示论的更详细研究将留待今后进行。

Appendix A. The quantum dilogarithm function

对于 $a_+, a_- \in \mathbb{R}^\times$，令

$$W_{a_+,a_-}(z) = -\frac{\pi i}{2}\int_\Omega \frac{dy}{y}\,\frac{e^{-2iyz}}{\sinh(a_+y)\sinh(a_-y)}, \qquad z \in \mathbb{R}, \tag{A.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{C}$中一条从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的曲线，在原点附近向上半平面微微凸起。收集首项后，可将其化简为另一种表达式

$$W_{a_+,a_-}(z) = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{a_+}{a_-}+\frac{a_-}{a_+}\right) + \frac{\pi^2 z^2}{a_+a_-} - 2\pi\widetilde{W}_{a_+,a_-}(z), \tag{A.2}$$

其中 $\widetilde{W}_{a_+,a_-}(z)$ 由实积分定义

$$\widetilde{W}_{a_+,a_-}(z) = \int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(\frac{\sin(2yz)}{2\sinh(a_+y)\sinh(a_-y)} - \frac{z}{a_+a_-y}\right). \tag{A.3}$$

现在回想 (1.19)，可知

$$W_{a_+,a_-}(z) = W_{a_+/a_-}(2\pi z/|a_+|). \tag{A.4}$$

记

$$\varphi_{a_+,a_-}(z) = \exp\left(\frac{i}{2\pi}W_{a_+,a_-}(z)\right) = \exp\left(\frac{1}{4}\int_\Omega \frac{dy}{y}\,\frac{e^{-2iyz}}{\sinh(a_+y)\sinh(a_-y)}\right), \tag{A.5}$$

所得函数 $a_+ = a_-^{-1} =: b$ 就是量子二对数，例如见 [Fad95、Kas01、FG09]。由 (A.4)，我们有变换公式

$$\varphi_{a_+,a_-}(z) = \varphi_{a_-/a_+}(2\pi z/|a_+|). \tag{A.6}$$

最后，

$$G(a_+,a_-;z) = \exp(i\widetilde{W}_{a_+,a_-}(z)) \tag{A.7}$$

给出了 [Rui97] 中引入的双曲伽马函数（另见 [Rui05，附录 A]）。

注意

$$W_{1/\hbar}(t) = \operatorname{sgn}(\hbar)W_{1/|\hbar|}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \hbar \in \mathbb{R}^\times.$$

因此，我们得到 $W_{1/|\hbar|}$ 的以下另一种表达式，参见 [GK21，命题 2.4]。

引理 A.1。由 $\theta>0$，可得

$$W_\theta(t)=\int_0^\infty \frac{\ln(1+s^{-\theta})}{s+e^{-t}}\mathrm{d}s,\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{A.8}$$

这是 W_θ 在 [Wor00] 中的表达式。

接下来，我们回顾一下所需的量子二对数的一些结构性质。

固定 $\theta>0$。Fi rst 注意到，由 (1.19) 可知， W_θ 全纯地延拓到条带

$$\{z\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}(z)|<\pi(1+\theta^{-1})\}.$$

此外，它还满足函数恒等式

$$W_\theta(x+\pi i)-W_\theta(x-\pi i)=2\pi i\ln(1+e^{\theta x}),\qquad x\in\mathbb{R}$$

（见 [Wor00，引理 1.1]）。因此

$$V_\theta(z):=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}W_\theta(z)\right)=\varphi_{-\theta^{-1}}(z)=1/\varphi_{\theta^{-1}}(z) \tag{A.9}$$

存在亚纯延拓

$$V_\theta\colon\mathbb{C}\to\hat{\mathbb{C}}.$$

（我们使用记号 (A.9)，以与 [Wor00] 保持一致。）注意，写出 g

$$\chi=\pi(\theta+\theta^{-1})/24, \tag{A.10}$$

我们从 (A.2) 得到恒等式

$$V_\theta(z)=e^{-i\chi}e^{-i\theta z^2/8\pi}G(2\pi,2\pi/\theta;z) \tag{A.11}$$

正如 [Rui05，方程（A.18）] 中所述。

以下引理汇集了 [Wor00 第1节和附录 A] 以及 [Rui05 附录 A] 中的结果（后一个参考文献将 [Wor00]中的某些结果扩展到了变形参数的更大定义域）。

命题 A.2. 令 $\theta>0$。亚纯函数 V_θ 满足以下性质 :

(1) 其零点位于

$$Z=\{\pi i\left((2k+1)+(2l+1)\theta^{-1}\right)\mid k,l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

而其极点位于 $-Z$。零点 z 的重数按满足条件的有序对 $(k,l)\in\mathbb{Z}^2_{\geq 0}$ 的数量计算，其中 $z=\pi i((2k+1)+(2l+1)\theta^{-1})$；极点的重数也同理。特别地，若 θ 是无理数，则所有零点和极点均为单极点。

(2) 它满足以下函数方程：对于 $z\in\mathbb{C}$,

$$V_\theta(z+2\pi i)=(1+e^{i\pi\theta}e^{\theta z})V_\theta(z), \tag{A.12}$$

$$V_\theta(z+2\pi i/\theta)=(1+e^{\pi i/\theta}e^{z})V_\theta(z). \tag{A.13}$$

(3) 它满足以下函数方程：对于 $z\in\mathbb{C}$,

$$V_\theta(z)V_\theta(-z)=V_\theta(z)/\overline{V_\theta(-\bar{z})}=e^{-2i\chi}e^{-i\theta z^2/4\pi}. \tag{A.14}$$

(4) 函数 V_θ 和 $V_{1/\theta}$ 之间的关系为

$$V_{1/\theta}(z) = V_\theta(z/\theta), \qquad z \in \mathbb{R}. \tag{A.15}$$

(5) 对于固定的 $0 < \rho < \min\{1, \theta\}$，且当 y 在$\mathbb{R}$的某个紧子集上一致变化时，我们有

$$V_\theta(x + iy) = 1 + \mathcal{O}(e^{\rho x}), \qquad x \to -\infty, \tag{A.16}$$

$$e^{i\theta(x+iy)^2/4\pi} V_\theta(x + iy) = e^{-2i\chi} + \mathcal{O}(e^{-\rho x}), \qquad x \to +\infty. \tag{A.17}$$

特别地，对于任意条带 $S_b = \{z \in \mathbb{C} \mid -b \leq \mathrm{Im}(z) \leq b\}$，存在 $a \geq 0$，使得对于任意 $\lambda > 0$，函数 $z \mapsto V_\theta(z)e^{-\lambda z^2}$ 在 $\{z \in S_b \mid |\mathrm{Re}(z)| \geq a\}$上有界。

为了证明特定乘法酉元的模性，我们需要一些关于 V_θ 的（经 θ 缩放的）傅里叶对偶及其逆的信息。

令 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示具有其自然 Fr´echet 拓扑的施瓦茨空间函数类，并令$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ 表示其对偶，即温和分布空间。我们将分布与函数的配对也记作

$$\langle f, g\rangle = \langle f(x), g(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \qquad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

下文将使用重标度的傅里叶变换，因此

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta xy/2\pi} g(y)\mathrm{d}y, \qquad \check{g}(y) = \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta xy/2\pi} g(x)\mathrm{d}x, \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{A.18}$$

其在温和分布空间上的扩张也类似，

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)g(y)\mathrm{d}y := \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}} \check{f}(y)g(y)\mathrm{d}y := \int_{\mathbb{R}} f(x)\check{g}(x)\mathrm{d}x,$$
$$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

特别地，我们考虑 $L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$，因此可以将 $L^\infty(\mathbb{R})$中元素的傅里叶对偶视为温和分布。

由于 V_θ限制在 $\mathbb{R}$上时取值于单位圆，因而$1/V_\theta = V_\theta$是其复共轭，我们可以按照上述温和分布的意义，考虑 V_θ 和 V_θ 的逆傅里叶对偶。

命题 A.3. 设 $\theta > 0$，并令

$$a = \pi(1 + \theta^{-1}).$$

Then

$$\hat{\overline{V}}_\theta(y) = \alpha_\theta(y)\hat{V}_\theta(y), \tag{A.19}$$

其中

$$\alpha_\theta(y) = e^{a\theta y/2\pi} e^{-i\theta y^2/4\pi}. \tag{A.20}$$

这里，(A.19) 右端先验地定义在 Fr´échet 稠密定义域 $\mathscr{D} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上，其中 f 满足 $\alpha_\theta f$ 再次属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$。特别是，该结果表明，所得的 $\hat{}$ 泛函唯一地延拓为温和分布，即 α_θ 是 V_θ 的乘子。

命题 A.3 中的结果也出现在 [Wor00, 附录 B], 中，不过有$\theta > 2$这一限制。我们利用 [Rui05, 附录 A] 中的结果，将这一结果推广到任意 $\theta > 0$。

证明。令 χ如 (A.10) 所示，记

$$\widetilde{V}_\theta(y) = e^{-i\pi/4}e^{-2i\chi}e^{i\theta y^2/4\pi}V_\theta(y - ia).$$

˜那么， V_θ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，除了在 0 处有一个简单极点，并且可延拓为一个在上半平面上全纯的亚纯函数。由估计式 (A.16) 和 (A.17)，我们˜知道 V_θ 在无穷远处有界，因此可以定义温和分布

$$D(y) = P.V.(\widetilde{V}_\theta(y)) - \pi i\mathrm{Res}_0(\widetilde{V}_\theta)\delta_0(y). \tag{A.21}$$

ˆ 我们断言这恰好就是分布 $V_\theta(y)$。事实上，由于这两个分布都是温和分布，只需在以下集合上证明它们相等

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \{g\colon x \mapsto P(x)e^{-x^2/2} \mid P \text{ polynomial}\},$$

它是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的 Fr´echet 稠密子空间（[RS81，定理 V.13]），并且在傅里叶对偶性下保持不变。

现在由 [Rui05, (A.21)] 可知，对任意 $0 < \delta < a$,

$$V_\theta(z) = \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}+i\delta} e^{i\theta yz/2\pi}\widetilde{V}_\theta(y)\mathrm{d}y, \qquad -a < \mathrm{Im}(z) < -\delta,$$

这里注意到，根据命题 A.2.(5) 中 $x \mapsto V_\theta(x + iy)$ 在无穷远处的行为，被积函数在 $\mathbb{R} + i\delta$ 上是 L^1。于是对 $g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ 和前述 Ω，由命题 A.2.(5)，当 $0 < \varepsilon$ 足够小时，以下一系列等式是合理的：

$$\begin{aligned}
\langle D(y), g(y)\rangle &= \int_\Omega \widetilde{V}_\theta(y)g(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}+i\delta} \widetilde{V}_\theta(y)g(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{\theta}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}-i\varepsilon}\hat{g}(x)\int_{\mathbb{R}+i\delta}\widetilde{V}_\theta(y)e^{i\theta xy/2\pi}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}-i\varepsilon}\hat{g}(x)V_\theta(x)\mathrm{d}x \\
&= \langle\hat{V}_\theta(y), g(y)\rangle.
\end{aligned}$$

因此，接下来我们可以写成

$$\hat{V}_\theta(y) = D(y). \tag{A.22}$$

ˆ 为完成证明，现在只需证明 V_θ 属于与 α_θ 相乘的定义域，并证明 (A.19) 成立。但显然，由 (A.21) 和 (A.22) 可得

$$\hat{\overline{V}}_\theta(y) = P.V.(\overline{\widetilde{V}}_\theta(-y)) + \pi i\overline{\mathrm{Res}_0(\widetilde{V}_\theta)}\delta_0(y).$$

因此，由 (A.14) 可得

$$\overline{\widetilde{V}}_\theta(-y) = \alpha_\theta(y)\widetilde{V}_\theta(y), \qquad y \in \mathbb{R}^\times,$$

并且 $\alpha_\theta(0) = 1$。 □

AppendixB. Pentagon equation

本节将详细说明定理 1.11 的证明。据我们所知，文献中基本有两种论证方法：[Wor00] 中抽象的算子代数方法（但其证明对参数范围有所限制），以及 [FKV01] 中的方法，该方法通过考察具体算子 $\mathbf{X}$，$\mathbf{P}$ ，并利用积分变换证明 (1.11)，同时将变形参数扩展到复数域中的某个特定区域。本节将说明，只需稍作修改，便可完善 [Wor00] 中的方法，从而给出该定理的完整证明；随后我们还将评论这一结果与 [FKV01] 中所得结果的等价性。

固定 $\hbar \in \mathbb{R}^\times$，设 $\mathbf{A} = e^{\mathbf{a}}$,$\mathbf{B} = e^{\mathbf{b}}$ 是希尔伯特空间上的两个严格正且 $\hbar$-交换的算子，即满足 (1.27)。令 $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ 为满足下述条件的唯一自伴算子

$$e^{it(\mathbf{a}\dot{+}\mathbf{b})} = (\mathbf{A} \star \mathbf{B})^{it}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

其中 $\mathbf{A} \star \mathbf{B}$ 如 (1.28) 所定义。事实上，很容易证明 $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ 是定义在其定义域交集上的和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的唯一自伴扩张：考虑下文的具体表示 (B.3)，并利用恒等式论证 $\mathbf{X} + \mathbf{P}$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上本质自伴

$$(e^{-\pi i \mathbf{X}^2} \mathbf{P} e^{\pi i \mathbf{X}^2}) f = \mathbf{X} f + \mathbf{P} f, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{B.1}$$

我们需要证明，取 $\varphi_\hbar$ 如 (1.20) 所定义时，有

$$\varphi_\hbar(\mathbf{a})\varphi_\hbar(\mathbf{b}) = \varphi_\hbar(\mathbf{b})\varphi_\hbar(\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b})\varphi_\hbar(\mathbf{a}), \qquad \forall \hbar > 0 \tag{B.2}$$

（由对称性，利用 $\varphi_\hbar = \varphi_{-\hbar}$， $\hbar < 0$ 的情形也可得出。）

或者，取 $b \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $b^2 = \hbar$。于是根据斯通-冯诺依曼定理，不妨取

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), \qquad \mathbf{a} = 2\pi b \mathbf{P}, \qquad \mathbf{b} = 2\pi b \mathbf{X}, \tag{B.3}$$

其中 $\mathbf{X}$，$\mathbf{P}$ 如 (3.7) 中所示。然后使用记号 (A.5)，并写成

$$e_b(z) = \varphi_{b^{-1},b}(z) = \varphi_{b^2}(2\pi b z), \qquad z \in \mathbb{C},$$

我们得到，(B.2) 等价于证明

$$e_b(\mathbf{P}) e_b(\mathbf{X}) = e_b(\mathbf{X}) e_b(\mathbf{X} \dot{+} \mathbf{P}) e_b(\mathbf{P}). \tag{B.4}$$

现在，(B.2) 已在 [Wor00，定理 6.1] 中针对 $0 < \hbar < 1/2$得到证明。事实上，仔细检查可以发现，该证明对 $0 < \hbar < 1$仍然成立。确实，这部分论证中唯一关键使用的性质是函数

$$x \mapsto \frac{1 - \varphi_\hbar(\ln(x))}{x}$$

在 0 的邻域内保持有界，这由 $0 < \hbar < 1$ 命题 A.2.(4) 保证。

现在由 (1.19) 可知

$$W_{1/\theta}(x) = W_\theta(x/\theta), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{B.5}$$

因此，(B.2) 对所有 $\hbar \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ 都成立，或者说，(B.4) 对所有 $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ 都成立。由此可轻易推出缺失的情形 $b = 1$：对于每个 $z \in \mathbb{R}$， $b \mapsto e_b(z)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上连续；这一点（根据控制收敛定理）足以保证，对于每个严格正算子 $\mathbf{a}$， $b \mapsto e_b(\mathbf{a})$ 都是强连续的。因此，两边

在 $b\to 1$ 趋近 $b=1$ 时都强收敛到它们在 $b=1$ 处的取值，由此可知 (B.4) 对所有 $b>0$ 都成立。

现在我们来评述 [FKV01] 的证明。首先注意，$W_{b^{-1},\ b}(z)$ 如 (A.1) 所示，对于任意 $b\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$ （取半径为 $\delta<|b|^{\pm 1}$ 的积分路径 Ω 中的半圆）仍然定义良好，因而在半平面 $H_+=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)\ >0\}$ 上定义了一个函数

$$W\colon H_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad (b,z)\mapsto W_{b,b^{-1}}(z)$$

该函数对每个 z 都是关于 b 的全纯函数。

事实上，从 (A.1) 可轻易看出，对于取值于紧区域的 b，$W(b,\ x)$ 保持有界；对负实轴上的所有 x，这一界是一致的；并且该函数关于 b 连续，对所有 x 均一致。因此我们得到一个巴拿赫空间值全纯函数

$$W^-\colon H_+\to C_b(\mathbb{R}_{\le 0}),\qquad W^-(b)(x)=W_{b,b^{-1}}(x),$$

因此也得到一个全纯函数

$$e^-\colon H_+\to C_b(\mathbb{R}_{\le 0}),\qquad e^-(b)(x)=e_b(x).$$

另一方面，恒等式 (A.14)、重整化 (A.6) 以及关于 b 的全纯性导出了恒等式

$$e_b(-x)=e^{-2\pi i(b^2+b^{-2})/24}e^{ix^2/2}\overline{e_{\overline{b}}(x)},\qquad x\in\mathbb{R},b\in H_+,$$

由此可以立即得出，我们实际上得到了一个取值于巴拿赫空间的全纯函数

$$e\colon H_+\to C_b(\mathbb{R}),\qquad e(b)(x)=e_b(x).$$

因此，只需证明 (B.4) 在 H_+ 中具有聚点的任意 b 子集上成立即可。根据 [Wor00，定理 6.1]，中的结果，可以取 $(0,\ 1/\sqrt{2})$ 作为这样的集合。在 [FKV01，第 6] 节中，$\overline{\ }$ 则是在象限 $\mathbb{R}_{>0}+i\mathbb{R}_{>0}\subseteq H_+$ 上直接证明 (B.4)。

Appendix C. Modularity of the rank 1 Fock–Goncharov flip

本节给出定理 3.4 的证明。这就是 [WZ02，命题 2.3] 的证明，只是不对变形参数作任何限制。

我们将需要谱测度的概念：回顾一下，如果 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，$\mathbf{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子，并且 $\xi,\ \xi'\in\mathcal{H}$，则相应的 谱测度 是由 $\mu_{\xi',\ \xi}$ 在 $\mathbb{R}$ 上确定的（绝对）有界（复）测度

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}\mu_{\xi',\xi}(x)=\langle\xi',g(\mathbf{H})\xi\rangle,\qquad g\in C_b(\mathbb{R}).$$

我们还回顾一下，若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且$\mathbf{H}$ 是 $\mathcal{H}$上的自伴算子，那么对于任意 $\xi\in\cap_{z\in\mathbb{C}}\mathscr{D}(e^{z\mathbf{H}})$，映射

$$\mathbb{C}\to\mathcal{H},\qquad z\mapsto e^{z\mathbf{H}}\xi$$

自动是一个巴拿赫空间值全纯函数。

命题 C.1. 考虑作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 上的算子

$$\mathbf{F}=e^{\mathbf{X}},\qquad \mathbf{L}=e^{-4\pi^2\hbar\mathbf{P}},\qquad \mathbf{E}=\mathbf{L}\star\mathbf{F}^{-1},\qquad \mathbf{K}=\mathbf{F}^{-1}$$

如定理 *3.4* 的陈述所述。则存在一个子空间 $V\subseteq L^2(\mathbb{R})$，使得

- $V\subseteq\mathscr{D}(\mathbf{F}^z)\cap\mathscr{D}(\mathbf{L}^z)\cap\mathscr{D}(\mathbf{E}^z)\cap\mathscr{D}(\mathbf{K}^z)$ *for all* $z\in\mathbb{C}$,

- V在每个 $\mathbf{F}^z$、$\mathbf{L}^z$、$\mathbf{E}^z$、$\mathbf{K}^z$ 下都保持不变，并且
- 对于每个 $z \in \mathbb{C}$，空间 V都是算子 $\mathbf{F}^z$、$\mathbf{L}^z$、$\mathbf{E}^z$ 和 $\mathbf{K}^z$ 的核。

证明。 我们可以取 V 为所有形如 $x \mapsto e^{\alpha x+\beta x^2}$ 且满足$\alpha \in \mathbb{C}$ 和 $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ 的函数的线性张成。事实上，V 在傅里叶对偶下保持不变，并且容易看出，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，它都是 $e^{z\mathbf{X}}$ 的核，且在每个此类算子的作用下保持不变。由傅里叶对偶性可知，对于每个 $z \in \mathbb{C}$，$e^{z\mathbf{P}}$ 也具有这一性质。最后，由 (B.1) 还可推出，V 是每个此类 $\mathbf{E}^z$ 的核，并且在所有 $\mathbf{E}^z$ 的作用下保持不变。□

现在考虑定理 3.4 的设定和记号。按照定义 3.6 的术语，只需证明三元组 $(\mathbb{W}, \mathbf{L}^{\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}, \mathbb{W}_c)$ 是弱模数据，因为显然 $\mathbb{W}$ 与

$$\hat{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{L}^{\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}} \otimes \mathbf{K}^{-\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}.$$

我们稍作改写，将 (3.3) 写成 (5.27) 的形式，以便更贴合 [WZ02]的设定。具体而言，令

$$Z = \mathbb{W}_{21}^* = F_\hbar(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \exp\left(-\frac{i}{2\pi\hbar} \ln(\mathbf{K}) \otimes \ln(\mathbf{L})\right) \tag{C.1}$$

并令

$$\widetilde{Z} = \mathbb{W}_{c,21} = \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar} \ln(\mathbf{K}) \otimes \ln(\overline{\mathbf{L}})\right) F_\hbar(\mathbf{K}^{-1} \star \mathbf{E} \otimes \overline{\mathbf{F}}).$$

那么对于 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}^{\frac{1+|\hbar|^{-1}}{2}}$，我们需要证明

$$\langle \xi' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'}, \widetilde{Z}^*(\xi \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle = \langle \xi' \otimes \eta, Z(\xi \otimes \eta')\rangle, \qquad \forall \xi, \xi' \in L^2(\mathbb{R}), \eta \in \mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}), \eta' \in \mathscr{D}(\hat{\mathbf{Q}}^{-1}). \tag{C.2}$$

我们先给出以下显然的引理，它可由函数演算立即推出。

引理 C.2. 设$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子。那么对所有ξ、ξ'、η、$\eta' \in \mathcal{H}$，有

$$\langle \xi' \otimes \overline{\eta'}, \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\mathbf{a} \otimes \overline{\mathbf{b}}\right)(\xi \otimes \overline{\eta})\rangle = \langle \xi' \otimes \eta, \exp\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\right)(\xi \otimes \eta')\rangle. \tag{C.3}$$

现在证明 (C.2)。首先注意，在这个恒等式中，我们可以将范围限制在 $\xi, \xi', \eta, \eta' \in V$，其中 V 如命题 C.1 所述，因为该空间构成 $\hat{\mathbf{Q}}^{\pm 1}$的一个核。下文中，我们固定这样的η, η', ξ, ξ'。

Put

$$\mathbf{C} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}, \qquad \widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{K}^{-1} \star \mathbf{E} \otimes \overline{\mathbf{F}},$$
$$E_\hbar = \exp\left(-\frac{i}{2\pi\hbar}(\ln(\mathbf{K}) \otimes \ln(\mathbf{L})\right), \quad \widetilde{E}_\hbar = \exp\left(-\frac{i}{2\pi\hbar}(\ln(\mathbf{K}) \otimes \ln(\overline{\mathbf{L}})\right),$$

对于 $y \in \mathbb{R}$，写作

$$\varphi(y) = \langle \xi' \otimes \eta, \mathbf{C}^{iy/2\pi\hbar} E_\hbar(\xi \otimes \eta')\rangle, \qquad \psi(y) = \langle \xi' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'}, \widetilde{\mathbf{C}}^{iy/2\pi\hbar} \widetilde{E}_\hbar(\xi \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle.$$

根据我们对 ξ',η,η' 的选择，我们有

$$z\mapsto \mathbf{C}^{iz}(\xi'\otimes\eta),\qquad z\mapsto \widetilde{\mathbf{C}}^{iz}(\xi'\otimes\overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'})$$

是全纯映射 $\mathbb{C}\to\mathcal{H}$，这意味着 φ,ψ 可延拓为全纯函数。

由$\mathbf{L}$与$\mathbf{F}$之间的斜交换关系，以及$\mathbf{L}$与$\mathbf{F}$之间的斜交换关系，我们得到

$$\langle\xi'\otimes\mathbf{L}^{-\overline{z}}\eta,\mathbf{C}^{iy/2\pi\hbar}E_\hbar(\xi\otimes\mathbf{L}^z\eta')\rangle=e^{yz}\varphi(y),\tag{C.4}$$

$$\langle\xi'\otimes\overline{\mathbf{L}}^{-\overline{z}}\,\overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'},\widetilde{\mathbf{C}}^{iy/2\pi\hbar}\widetilde{E}_\hbar(\xi\otimes\overline{\mathbf{L}}^{z}\,\overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle=e^{-yz}\psi(y).\tag{C.5}$$

由于左侧及其导数在 $y\in\mathbb{R}$ 中有界（对固定的 $z\in\mathbb{R}$），我们发现 φ,ψ 及其导数在无穷远处比指数衰减更快，因此特别地 $\varphi,\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$。此外，若将与 $\xi'\otimes\eta$ 和 $E_\hbar(\xi\otimes\eta')$相关的 $\ln(\mathbf{C})$ 的谱测度记为 μ，并将与 $\xi'\otimes\hat{}\mathbf{Q}^{-1}\eta'\tilde{}$ 和 $E_\hbar(\xi\otimes\mathbf{Q}\eta)$相关的 $\ln(\tilde{}\mathbf{C})$ 的谱测度记为 ν，则我们看到

$$\varphi(y)=\int_{\mathbb{R}}e^{ixy/2\pi\hbar}\mathrm{d}\mu(x),\qquad \psi(y)=\int_{\mathbb{R}}e^{ixy/2\pi\hbar}\mathrm{d}\nu(x),$$

因此可知 μ,ν 关于勒贝格测度绝对连续。然后，使用记号 (A.18)，其中 $\theta:=|\hbar|^{-1}$，并令 $\varepsilon=\mathrm{sgn}(\hbar)$，我们看到

$$\mathrm{d}\mu(x)=(4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\hat{\varphi}(\varepsilon x)\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}\nu(x)=(4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\hat{\psi}(\varepsilon x)\mathrm{d}x.\tag{C.6}$$

现在由 (C.5) 可知，特别地，令 $z=-(1+\theta)/2$，则

$$\psi(y)=e^{-(1+\theta)y/2}\langle\xi'\otimes\overline{\eta'},\widetilde{\mathbf{C}}^{iy/2\pi\hbar}\widetilde{E}_\hbar(\xi\otimes\overline{\eta})\rangle$$

But

$$\begin{aligned}
&\langle\xi'\otimes\overline{\eta'},\widetilde{\mathbf{C}}^{iy/2\pi\hbar}\widetilde{E}_\hbar(\xi\otimes\overline{\eta})\rangle\\
&\quad=\langle(\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E})^{-iy/2\pi\hbar}\xi'\otimes\overline{\mathbf{F}}^{-iy/2\pi\hbar}\overline{\eta'},\widetilde{E}_\hbar(\xi\otimes\overline{\eta})\rangle\\
&\quad=\langle(\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E})^{-iy/2\pi\hbar}\xi'\otimes\overline{\mathbf{F}^{iy/2\pi\hbar}\eta'},\exp\left(-\frac{i}{2\pi\hbar}(\ln(\mathbf{K})\otimes\ln(\overline{\mathbf{L}})\right)(\xi\otimes\overline{\eta})\rangle\\
&\quad\underset{(C.3)}{=}\langle(\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E})^{-iy/2\pi\hbar}\xi'\otimes\eta,\exp\left(-\frac{i}{2\pi\hbar}(\ln(\mathbf{K})\otimes\ln(\mathbf{L})\right)(\xi\otimes\mathbf{F}^{iy/2\pi\hbar}\eta')\rangle\\
&\quad=\langle\xi'\otimes\eta,((\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E})^{iy/2\pi\hbar}\otimes1)E_\hbar(1\otimes\mathbf{F}^{iy/2\pi\hbar})(\xi\otimes\eta')\rangle\\
&\quad\underset{(1.17)}{=}\langle\xi'\otimes\eta,((\mathbf{K}^{-1}\star\mathbf{E})^{iy/2\pi\hbar}\otimes1)(\mathbf{K}\otimes\mathbf{F})^{iy/2\pi\hbar}E_\hbar(\xi\otimes\eta')\rangle\\
&\quad\underset{(1.28)}{=}e^{i\pi\hbar(y/2\pi\hbar)^2}\langle\xi'\otimes\eta,(\mathbf{E}^{iy/2\pi\hbar}\otimes\mathbf{F}^{iy/2\pi\hbar})E_\hbar(\xi\otimes\eta')\rangle\\
&\quad=e^{iy^2/4\pi\hbar}\varphi(y).
\end{aligned}$$

因此我们得出

$$\psi(y)=e^{-(1+\theta)y/2}e^{iy^2/4\pi\hbar}\varphi(y).\tag{C.7}$$

现在再次回顾命题 A.3 中的记号和结论。由 (C.7) 可知

$$\alpha_\theta^\varepsilon(\varepsilon y)\psi(y)=\varphi(y).\tag{C.8}$$

现在我们可以计算得出

$$\begin{aligned}
\langle \xi' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'}, \widetilde{Z}^*(\xi \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle &= \langle \xi' \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}^{-1}\eta'}, \overline{F}_\hbar(\widetilde{\mathbf{C}})\widetilde{E}_\hbar(\xi \otimes \overline{\hat{\mathbf{Q}}\eta})\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} V_\theta^{-\varepsilon}(x)\mathrm{d}\nu(x) \\
&\underset{\text{(C.6)}}{=} (4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\langle V_\theta^{-\varepsilon}(x), \hat{\psi}(\varepsilon x)\rangle \\
&= (4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\langle (V_\theta^{-\varepsilon})^\wedge(\varepsilon y), \psi(y)\rangle \\
&\underset{\text{(A.19)}}{=} (4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\langle (V_\theta^{\varepsilon})^\wedge(\varepsilon y), \alpha_\theta^{\varepsilon}(\varepsilon y)\psi(y)\rangle \\
&\underset{\text{(C.8)}}{=} (4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\langle (V_\theta^{\varepsilon})^\wedge(\varepsilon y), \varphi(y)\rangle \\
&= (4\pi^2|\hbar|)^{-1/2}\langle V_\theta^{\varepsilon}(x), \hat{\varphi}(\varepsilon x)\rangle \\
&\underset{\text{(C.6)}}{=} \int_{\mathbb{R}} V_\theta^{\varepsilon}(x)\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle \xi' \otimes \eta, F_\hbar(\mathbf{C})E_\hbar(\xi \otimes \eta')\rangle \\
&= \langle \xi' \otimes \eta, Z(\xi \otimes \eta')\rangle.
\end{aligned}$$

Appendix D. Multiplier C*-algebras and affiliated elements

定义 D.1. C*-代数 A 的乘子是一个线性映射 $m\colon A \to A$，存在一个线性映射 $m^*\colon A \to A$（必然唯一）使得

$$(m^*b)^*a = b^*(ma), \qquad \forall b, a \in A.$$

根据闭图定理，乘子自动是范数连续的。乘子空间$M(A)$在复合运算下成为一个含幺 C*-代数，并且上述
$*$-结构。将

$$A \subseteq M(A), \qquad a \mapsto (a' \mapsto aa'),$$

我们有 $M(A)$ 包含 A，且其为一个范数闭双边理想。

如果 B 是一个包含 A 作为 $*$ 理想的 C*-代数，我们就得到一个 $*$-同态

$$B \to M(A), \qquad b \mapsto (a \mapsto ba).$$

If A 是一个 本质理想，因此由 $b \in B$ 和 $bA = 0$ 可推出 $b = 0$，我们得到一个 $*$-嵌入 g

$$B \hookrightarrow M(A),$$

在 A 上充当恒等元。因此， $M(A)$ 是包含 A 作为本质理想的最大 C*-代数。

例如，如果 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，我们就有如下识别

$$C_b(X) \cong M(C_0(X)), \qquad f \mapsto (g \mapsto fg).$$

再举一例，设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。那么

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong M(\mathcal{K}(\mathcal{H})), \qquad x \mapsto (y \mapsto xy).$$

如果 A， B 是 C*-代数，则一个 $*$-同态

$$\pi\colon A \to M(B)$$

称为非退化，如果

$$B = [\pi(A)B].$$

若 A 是一个 $*$-代数，且 $\pi\colon A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 $*$-表示，则称 π 非退化，如果

$$\mathcal{H} = [\pi(A)\mathcal{H}].$$

考察 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$，这等价于要求 $\pi\colon A \to M(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$ 是非退化的。

每当 $\pi\colon A \to M(B)$ 是 C*-代数之间的非退化 $*$-同态时， π 都存在唯一的扩张，使其成为一个幺元 $*$-同态

$$\pi\colon M(A) \to M(B).$$

我们还需要用到伴随关系以及伴随元素 [Wor91]（另见 [WN92、Wor95]）。

定义 D.2. 设 A 是一个 C*-代数。设 $z \in M(A)$ 满足 $\|z\| \leq 1$ 并且

$$A = [(1 - z^*z)^{1/2}A]. \tag{D.1}$$

于是我们将 T_z 定义为无界稠密定义算子

$$\mathscr{D}(T_z) := (1 - z^*z)^{1/2}A \to A, \qquad (1 - z^*z)^{1/2}a \mapsto za. \tag{D.2}$$

由 (D.1) 易见， T_z 定义良好。

定义 D.3。若稠密定义的线性算子 $T\colon \mathscr{D}(T) \to A$ 满足：对于上述某个 z，有 $T = T_z$，则称其从属于 A。记号：

$$T\eta A, \qquad A^\eta = \{T \mid T\eta A\}.$$

注 D.4。• 可以证明，当且仅当 $T_z = T_w$，参见 [Wor91 后面的注释，命题 2.2]。因此，如果 $T\eta A$，则可以将 $z = z_T \in M(A)$ 记作满足 (D.1) 和 $T = T_z$ 的唯一压缩算子。

- 任意 $T \in M(A)$ 都从属于 A，取

$$z = T(1 + T^*T)^{-1/2}.$$

反之，如果 $T\eta A$ 且 T 范数有界，则 $T \in M(A)$。

例如，若 X 是局部紧豪斯多夫空间，则可证明（[Wor91，例 2]）：

$$C_0(X)^\eta = C(X) = \{\text{continuous functions } X \to \mathbb{C}\},$$

其中我们通过乘法将 $f \in C(X)$ 视为作用在 $C_0(X)$ 上的算子 $T = M_f$：

$$\mathscr{D}(M_f) = \{g \in C_0(X) \mid fg \in C_0(X)\}, \qquad M_f g = fg, \qquad g \in C_0(X).$$

As 另一个例子是，可证明（[Wor91，例 3]），对于 $\mathcal{H}$ 希尔伯特空间，

$$\mathcal{K}(\mathcal{H})^\eta = \{\text{closed, densely defined operators on } \mathcal{H}\},$$

将 T 映射为 $z_T(1 - z_T^*z_T)^{-1/2}$（后者是指无界算子的意义下）。

我们将用到以下关于伴随元素的简单观察，并将其汇集在以下引理中。相关陈述的证明见 [Wor91，定理 1.2] 和 [WN92，定理 6.1]。

引理 D.5。设 A, B 是 C*-代数。

• 若 $\pi\colon A \to M(B)$ 是一个非退化的 $*$-同态，则对于任意 $T\,\eta\,A$，存在唯一的 $\pi(T)\eta B$，使得

$$z_{\pi(T)} = \pi(z_T).$$

• 若 $T\,\eta\,A$ 且 $S\,\eta\,B$，则存在唯一的 $(T\otimes S)\,\eta\,(A\otimes B)$ 使得

$$\mathscr{D}(T)\odot\mathscr{D}(S)\subseteq\mathscr{D}(T\otimes S),\quad (T\otimes S)(a\otimes b)=Ta\otimes Sb,\qquad a\in\mathscr{D}(T),b\in\mathscr{D}(S).\tag{D.3}$$

若 A 是一个 C*-代数，我们称关联元素 $T\,\eta\,A$ 正规，如果 z_T 是正规的。此时我们需要以下形式的函数演算（参见 [Wor91，定理 1.5、定理 1.6] 及其后的讨论）。首先注意，若

$$\alpha\colon\{z\mid |z|<1\}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto z(1-|z|^2)^{-1/2}$$

且 $g\in C_0(\mathbb{C})$，则 $g\circ\alpha$ 是开单位圆盘上的 C_0-函数，特别是可延拓为闭单位圆盘上的连续函数。

引理 D.6 (函数演算)。 假设 A 是一个 C*-代数，且 $T\,\eta\,A$ 正规。则存在唯一的映射

$$C(\mathbb{C})\to A^{\eta},\qquad f\mapsto f(T)$$

使得 $f(T)=\pi(f)$ 对于 π 非退化 $*$-同态

$$\pi\colon C_0(\mathbb{C})\to M(A),\qquad g\mapsto (g\circ\alpha)(z_T).$$

例如，如果 $A\subseteq\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 A 的非退化忠实 $*$-表示，那么任何正规$T\,\eta\,A$ 都可视为作用在 $\mathcal{H}$ 上的（无界）正规算子 $\mathbf{T}$；而与 $f(T)$ 对应的算子则是 $f(\mathbf{T})$，这是通过 $\mathcal{H}$ 上正规算子的通常函数演算得到的。特别地，我们只需将 f 定义为闭集上的连续函数

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{T})=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathbf{T}-\lambda \text{ bijective as a map } \mathscr{D}(\mathbf{T})\to\mathcal{H}\}.$$

特别是在$\mathbf{T}$是作用在 $\mathcal{H}$ 上的自伴正算子的情况下，我们需要这一观察，因此

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{T})\subseteq[0,\infty).$$

Appendix E. Rieffel's deformation theory

尽管第 4.1 节的材料仅涉及对非常特定的函数代数的变形，我们仍回顾 [Rie93] 的一些一般框架，以便于查阅其中得到的结果。

ˆ 令 A 为任意 C*-代数，配备 V 通过 $*$-自同构给出的作用 α（不一定范数连续）。接着令 $A^u\subseteq A$ 为范数连续元素构成的 C*-子代数，即满足以下条件的那些 $a\in A$

$$\hat{v}\mapsto\alpha_{\hat{v}}(a)\tag{E.1}$$

是范数连续的。我们将 $A^\infty\subseteq A^u$ 定义为光滑函数的 $*$-代数，即那些其赋值于巴拿赫空间的函数 (E.1) 具有任意阶偏导数的函数。

ˆ 若现在 A 是任意一个 C*-代数，我们可以赋予有界函数的 C*-代数 $C_b(V,\ A)$ ˆ$V \to A$ 以平移作用[5]

$$(\tau_{\hat{v}} f)(\hat{w}) = f(\hat{w} - \hat{v}), \qquad \hat{v}, \hat{w} \in \hat{V},$$

ˆ ˆ ˆ 并考虑上述相应的 $*$-代数 $C_b^\infty(V, A)$。令 $\mathcal{S}(V, A) \subseteq C_b^\infty(V, A)$ 表示相应的施瓦茨函数空间 f，即满足如下条件的函数：对于 f 的任意迭代偏导数 g，函数 ˆ$v \mapsto p$(ˆv)g(ˆv) 对 V 上的任意多项式函数 ˆp 都有界。于是我们得到一个良定义的映射

$$\times_\hbar \colon C_b^\infty(\hat{V}, A) \times \mathcal{S}(\hat{V}, A) \to \mathcal{S}(\hat{V}, A), \qquad (f \times_\hbar g)(\hat{v}) = \int_V f(\hat{v} - \mathcal{J}u)\hat{g}(u)e^{2\pi i\hat{v}\cdot u}\mathrm{d}u,$$

参见 [Rie93，命题 3.3]。于是存在唯一的结合代数结构 $\times_\hbar$，定义在 ˆ ˆ$C_b^\infty(V, A)$ 上，使上述映射成为一个模，并且 $C_b^\infty(V, A)$ 通过逐点 $*$-结构和范数成为一个预 C*-代数

$$\|f\| = \sup_{\|g\|_A \leq 1} \|f \times_\hbar g\|_A, \qquad \|g\|_A^2 = \left\| \int_{\hat{V}} g(\hat{v})^* g(\hat{v}) \mathrm{d}\hat{v} \right\|, \qquad f \in C_b^\infty(\hat{V}, A), g \in \mathcal{S}(\hat{V}, A),$$

参见 [Rie93，第 4] 章。我们记

$$C_{b,\hbar}^\infty(\hat{V}, A) = \text{ norm-completion of } C_b^\infty(\hat{V}, A).$$

ˆ 若 A 是带有 V的范数连续作用 α 的任意 C*-代数，我们记作

$$\widetilde{\alpha} \colon A^\infty \to C_b^\infty(\hat{V}, A), \qquad a \mapsto (\hat{v} \mapsto \alpha_{\hat{v}}(a)),$$

ˆ 并赋予 A^∞ 从 $C_b^\infty(V,\ A)$ 通过该映射继承而来的 pre-C*-代数结构。我们将 A^∞的完备化记为 $A_\hbar$，并将 A^∞嵌入此完备化所得的映射记为

$$\mathcal{Q}_A \colon A^\infty \to A_\hbar, \qquad a \mapsto a_\hbar.$$

ˆ ˆ 例如，若 $A = C_0(V)$，不难证明 $A^\infty = \mathcal{S}(V)$，并且由此得到的量子化 ˆ$C_{0,\ \hbar}(V)$ 恰好就是此前构造的 $C_\hbar^*(V)$。

对我们而言，赋值的结构性质将十分重要

$$A \mapsto A_\hbar.$$

为此，我们先回顾以下结果，该结果出自 [Rie93，命题 5.9]。

ˆ**命题 E.1.** 设 B 是带有范数连续 V-作用的 C*-代数。考虑ˆ$C = M(B)$ 及其自然的（不一定是范数连续的） V-作用。那么存在唯一的单射 $*$-同态

$$B_\hbar \to C_\hbar, \qquad b_\hbar \mapsto b_\hbar, \qquad b \in B^\infty,$$

将 $B_\hbar$ 实现为 $C_\hbar$的本质双边 $*$-理想。

特别地，我们可以将 $C_\hbar \subseteq M$视为$B_\hbar$。

结合前述命题，结合[Rie93、定理 5.7、命题5.8和命题 5.10]即可得出以下定理。

[5]我们改变了相对于 [Rie93], 的平移作用方向，使其与本文的其他约定保持一致。由此产生的符号变化当然无关紧要。

定理 E.2. 设 A和 B 是带有范数连续 V-作用的 C^*-代数，并假设$\theta\colon A \to M(B)$ 是一个非退化的 V-等变 $*$-同态。那么存在唯一的非退化 $*$-同态

$$\theta_\hbar\colon A_\hbar \to M(B_\hbar), \qquad a_\hbar \mapsto \theta(a)_\hbar, \qquad a \in A^\infty.$$

此外，如果 θ 是忠实的，那么 $\theta_\hbar$ 也是忠实的；如果 θ 的值域包含于 B （分别地，满射且值域为 B），那么 $\theta_\hbar$ 的值域也包含于 $B_\hbar$ （分别地，满射且值域为 $B_\hbar$）。

上述构造具有函子性，即如果 $\theta\colon A \to M(B)$ 和 $\kappa\colon B \to M(C)$ 是非退化的 $*$-同态，那么

$$(\kappa \circ \theta)_\hbar = \kappa_\hbar \circ \theta_\hbar.$$

我们将如下应用这一点。

首先假设我们有一个子空间 $W \subseteq V$。那么，相应的投影映射$q\colon V \twoheadrightarrow W$ 导出非退化的 $*$-同态

$$\pi\colon C_0(\hat{W}) \to C_b(\hat{V}) = M(C_0(\hat{V})), \qquad f \mapsto f \circ q.$$

此外，当赋予 W 以 V 通过商映射作用的平移作用时，这个 $*$-同态是 V-等变的。这导出了一个非退化的 $*$-同态

$$C_{0,\hbar}(W) \to M(C_{0,\hbar}(V)) = M(C_\hbar(V)).$$

乍看之下，左侧可能不同于将 W 本身视为斜对称空间时，$C_0(W)$ 的典范量子化 $C^*_\hbar(W)$。然而可以验证，对于形如 $f_\hbar$、其中 $f \in \mathcal{S}(W)$ 的元素，上述 $\hat{}$ 映射与下面定义在这些元素上的映射一致：

$$C^*_\hbar(W) \to M(C^*_\hbar(V)), \qquad f_\hbar \mapsto \int_W \hat{f}(w) e_\hbar^{2\pi i w} \mathrm{d}w, \qquad f \in \mathcal{S}(W),$$

沿用 (4.24) 中的记号。因此，我们可以明确地将 $C_{0,\hbar}(W) = C^*_\hbar(W)$ 解释为。

特别地，若 $v \in V$ 且取 $W = \mathbb{R}v$，则可以典范地将其识别为

$$\hat{W} \cong \mathbb{R}, \qquad \hat{w} \mapsto \hat{w} \cdot v \tag{E.2}$$

其对应的商映射为

$$\hat{V} \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{w} \mapsto \hat{w} \cdot v. \tag{E.3}$$

由此得到一个典范的非退化包含

$$\pi_{v,\hbar}\colon C_0(\mathbb{R}) = C_0(\hat{W}) = C_{0,\hbar}(\mathbb{R}) = C^*_\hbar(\mathbb{R}v) \hookrightarrow M(C^*_\hbar(V)). \tag{E.4}$$

因此，若 $f \in C(\mathbb{R})$，则可以考虑 $f \eta C_0(\mathbb{R})$，并通过引理 D.5 得到相应的一个元素

$$f_\hbar = \pi_v(f) \in C^*_\hbar(V).$$

特别是，如果函数

$$z = z_f\colon \mathbb{R}\hat{v} \to \mathbb{C}, \quad \hat{w} \mapsto z(\hat{w}) = \frac{f(\hat{w})}{(1 + |f(\hat{w})|^2)^{1/2}}$$

属于 $C_b^\infty(\mathbb{R}\hat{}v)$，那么我们构造的函子性具体给出

$$f_\hbar = T_{z_\hbar}.$$

例如，将此应用于恒等函数 $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，我们得到（按照引理 D.6 中对指数映射应用函数演算后）元素 $e_\hbar^v$，它如式 (4.26) 所示附属于 $C_\hbar^*(V)$。

现在回到第 4.1 节末尾的设定：我们已选取 V 和 V 的对偶基 $\hat{}\hat{}\{f_i\},\ \{f_i\}$，以及一个划分 $I=I_0\sqcup I_1$。于是，$\hat{}\hat{}\hat{}V$ 在自身上的平移作用可延拓为 V 在 V_+ 上的连续作用（其中 $-\infty$ 是一个不动点）。因此，根据上文发展的理论，我们看到 (4.31) 量子化为一列包含关系

$$C_{0,\hbar}(\hat{V})\subseteq C_{0,\hbar}(\hat{V}_+)\subseteq C_{u,\hbar}(\hat{V}_+)\subseteq C_{u,\hbar}(\hat{V})\subseteq M(C_{0,\hbar}(\hat{V})) \tag{E.5}$$

（其中，$C_u(V)$ 和 $C_u(V_*)$ 分别表示 $C_b(V)$ 和 $C_b(V_+)$ 中平移作用下的范数连续元素）。根据构造，这就已经表明，按上述记号由 (4.32) 定义的 $C_\hbar^*(V_+)$ 确实是一个 C*-代数，等于 $C_{0,\ \hbar}(V_+)$。

现在我们来完成定理 4.7 证明的剩余部分。假设 $v\in V_+$。于是，(E.3) 可扩张为一个商映射

$$\hat{V}_+\to[-\infty,\infty),\qquad \hat{w}\mapsto v\cdot\hat{w}.$$

由此得到的非退化 $*$-同态

$$C_0([-\infty,\infty))=C_{0,\hbar}([-\infty,\infty))\to M(C_\hbar^*(V_+))$$

便只是相应映射的限制

$$\pi_{v,\hbar}\colon C_b(\mathbb{R})=M(C_0(\mathbb{R}))\to M(C_\hbar^*(V)).$$

因此，只需注意到指数函数 $x\mapsto e^x$ 可扩张为定义在 $[-\infty,\infty)$ 上的连续函数，从而确定一个隶属于 $C_0([-\infty,\infty)$ 的元素。

定理 4.8 可类似地通过函子性得出。事实上，先假设 $I_0=I_0'$。那么，(4.35) 中的 $\iota_{I'}$ 是一个 $\hat{}V$-等变闭嵌入，其中 $\hat{}V'$ 赋予了由商映射 $\hat{}_V\twoheadrightarrow\hat{}V'$ 导出的 $\hat{}V$ 的平移作用。因此，(4.34) 可由定理 E.2 得出。接着，公式 (4.36) 源于如下事实：同样通过函子性，$\pi_{I'}(e_\hbar^{f_i})$ 必须与 $e_\hbar^{f_i\circ\iota_{I'}}$ 一致。

对于一般定理，现在我们可以直接假设 $I_1'=I_1$，并且 I_0' 满足：对每个 $i\in I_0'\setminus I_0$，$(f_i,\ f_j)\ =0$。但在这种情况下，满足 $i\in I_0\setminus I_0'$ 的 f_i 都属于 ϵ 的核，而包含映射 $V'\subseteq V$ 确实 允许通过截面在斜对称空间之间进行分裂

$$s\colon V\to V',\qquad \sum_{i\in I}v_if_i\mapsto\sum_{i\in I'}v_{i'}f_i'.$$

由此可知，任意 $\hbar$-表示 π 都会通过 V' 导出一个 $\hbar$-表示 π，其作用于 V

$$\pi(v):=\pi(s(v)),$$

因此我们得到一个满射的 $*$-同态

$$\pi_{I'}\colon C_\hbar^*(V)\to C_\hbar^*(V'),\quad f_\hbar\mapsto(f\circ\hat{s})_\hbar,\qquad f\in\mathcal{S}(\hat{V}).$$

将此映射扩展到 $M(C_\hbar^*(V))$，并限制到 $C_\hbar^*(V_+)$，即可得到定理 4.8 中的映射 $\pi_{I'}$。由于我们也可以将扩展后的映射 $\pi_{I'}$ 应用于作为 $C^*(V)$ 的附属元素的 $e_\hbar^v$，因此这也立即证明了此情形下的 (4.36)。

Appendix F. von Neumann algebras and their weight theory

关于冯·诺伊曼代数及其权理论，我们将 Tak02、Tak03] 作为主要参考文献。

F.1. 冯·诺伊曼代数。 冯·诺伊曼代数 M 是任意允许存在一个作为巴拿赫空间的预对偶的含单位 C*-代数。在 M 上由此产生的弱*-拓扑与预对偶的选择无关，称为 σ-弱 拓扑或超弱 拓扑。于是，可以典范地将 M 的预对偶选为空间 $M_* \subseteq M^*$，即由 σ-弱连续泛函组成的空间。

例如，如果 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，那么 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个冯·诺伊曼代数，其中 $\mathcal{B}(\mathcal{H})_*$ 是形如以下形式的泛函

$$\omega(x) = \sum_i \langle \xi_i, x\eta_i \rangle, \qquad \sum_i \|\xi_i\|^2 < \infty, \sum_i \|\eta_i\|^2 < \infty.$$

对于含单位 $*$-子代数 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，以下条件是等价的：

- $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个冯·诺伊曼代数，其 σ-弱拓扑由 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的拓扑诱导。
- M 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中是 σ-弱闭的。
- $M = M''$，其中对于子集 $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，我们定义

$$S' = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid \forall y \in S : xy = yx\}.$$

通常，只有在上述条件得到满足时，才将 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 称为冯·诺伊曼代数，即 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是所谓的正规嵌入。

更一般地，冯·诺伊曼代数之间的单位 $*$-同态 $\pi\colon M \to N$ 称为正规，如果它是 σ-弱到 σ-弱连续的；这等价于要求它是某个范数连续线性映射 $\pi_*\colon N_* \to M_*$ 的对偶。例如，冯·诺伊曼代数之间的任意 $*$-同构都自动是正规的。

冯·诺伊曼代数 M 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的正规单位 $*$-表示 是任意正规单位 $*$-同态 $\pi\colon M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。可以证明，任意冯·诺伊曼代数 M 都具有希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的忠实正规单位 $*$-表示 π，并且此时必然有 $\pi(M) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个（正规嵌入的）冯·诺伊曼代数，其中 $M \cong \pi(M)$。

若 $\pi\colon M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个正规酉 $*$-表示，而 $\mathcal{G}$ 是另一个希尔伯特空间，则我们得到另一个正规 $*$- 表示

$$\pi \otimes 1\colon M \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}), \quad x \mapsto \pi(x) \otimes 1,$$

称为对 π 的放大。

另一方面，若 $\pi\colon M \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个正规酉 $*$-表示，而 $p \in \pi(M)'$ 是一个自伴投影，则我们得到另一个正规 $*$-表示

$$\pi_p\colon M \to \mathcal{B}(p\mathcal{H}), \quad x \mapsto \pi(x)p,$$

称为 π 的压缩（由 p 给出）。于是可以证明：

引理 F.1。 设 $*$是冯·诺依曼代数M的一个忠实正规含幺 π 表示，则其任意其他正规含幺 $*$表示，均与 M 的一个放大的压缩酉等价。

F.2. 权的基本理论。 设 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个冯·诺依曼代数，并令 M_+ 为 M 中正元素构成的锥。

定义 F.2. 称权在 M 上为任意映射

$$\varphi\colon M_+ \to [0,\infty]$$

满足

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \qquad \varphi(0)=0, \qquad \varphi(ax)=a\varphi(x), \qquad a\in\mathbb{R}_{>0}, x, y\in M_+.$$

称该权

- 若对于任意强收敛递增网 $x_i \nearrow x$ in M_+，均有 th，则称其为正规 at
$$\varphi(x)=\lim_i \varphi(x_i),$$
- 若 $\varphi(x)=0$ for $x\in M_+$ implies $x=0$，则称其忠实，
- 半有限 若 $\mathfrak{m}_\varphi$ 的线性张成
$$\mathfrak{m}_\varphi^+=\{x\in M_+ \mid \varphi(x)<\infty\}$$
在 M 中关于 σ-弱拓扑稠密，并且
- 迹性的若
$$\varphi(xx^*)=\varphi(x^*x), \qquad \forall x\in M.$$

我们用 $\mathfrak{W}_M$ 表示所有权的集合，用 $\mathfrak{W}_M^{\mathrm{nsf}}$ 表示所有正规、半有限、忠实的（=nsf）权的集合（我们也使用显而易见的变体）。

显然，任何可表示为正规态逐点上确界的权都是正规权；反过来，对于任意正规权 φ，有

$$\varphi(x)=\sup_{\omega\in\mathcal{G}_\varphi}\omega(x), \qquad \forall x\in M_+,$$

其中

$$\mathcal{G}_\varphi=\{\omega\in M_*^+ \mid \omega\le\varphi\},$$

并且，对于 $\omega\in M_*^+$，若此性质在 M_+ 上逐点成立，我们记作 $\omega\le\varphi$。

例 F.3。 假设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间。那么通过通常迹，我们在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上得到一个正规、半有限、忠实的迹权

$$\mathrm{Tr}(x)=\sum_i\langle e_i, xe_i\rangle, \qquad x\ge 0, \tag{F.1}$$

其中 $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一个标准正交基。任何其他标准正交基都会给出相同的迹。

例 F.4。 更一般地，若 $\mathbf{T}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个（严格）正算子，则可定义一个正规半有限（忠实）权

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}}(x)=\sup_{r\ge 0}\mathrm{Tr}(\mathbf{T}_r^{1/2}x\mathbf{T}_r^{1/2})=\sup_{r\ge 0}\mathrm{Tr}(x^{1/2}\mathbf{T}_r x^{1/2}), \qquad x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})_+, \tag{F.2}$$

其中，$\mathbf{T}_r=\mathbf{T}^{\chi_{[0,r)}}$(**T**) 对于 χ_Y 集合 Y 上的示性函数。事实上，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上任意半有限正规权都具有这种形式，且对应唯一的 **T**。

例 F.5. 例 F.4 中的构造可以推广到带有正规半有限忠实迹 τ 的任意冯·诺伊曼代数 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$。具体而言，设 $\mathbf{T}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个正算子，并且按照冯·诺伊曼代数的意义，与……相隶属 M：

$$u\mathbf{T}u^* = \mathbf{T}, \qquad \forall u \text{ unitary in } M'. \tag{F.3}$$

于是，对所有 $0 \leq r$，都有 $\mathbf{T}_r \in M$，并且可以像之前那样，将 τ 变形为半有限正规权 $\tau_{\mathbf{T}}$：

$$\tau_{\mathbf{T}}(x) = \sup_{r\geq 0} \tau(\mathbf{T}_r^{1/2} x \mathbf{T}_r^{1/2}) = \sup_{r\geq 0} \tau(x^{1/2}\mathbf{T}_r x^{1/2}), \qquad x \in M_+. \tag{F.4}$$

现在回顾 GNS 构造：设 φ 是一个正规半有限忠实权，令

$$\mathfrak{n}_\varphi = \{x \in M \mid x^*x \in \mathfrak{m}_\varphi^+\}.$$

于是，$\mathfrak{n}_\varphi$ 是 M 中的左理想；若 φ 还是迹性的，则它也是双边理想，且满足 $\mathfrak{n}_\varphi^* = \mathfrak{n}_{\varphi^\circ}$。一般而言，有

$$\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{n}_\varphi^* \mathfrak{n}_\varphi.$$

由极化可知，φ 可以延拓为定义在 $\mathfrak{m}_\varphi$ 上的线性泛函，而 $\mathfrak{n}_\varphi$ 则关于内积成为一个希尔伯特空间：

$$\langle x, y\rangle_\varphi := \varphi(x^*y), \qquad x, y \in \mathfrak{n}_\varphi.$$

对于完备化，记作 $L^2(M,\ \varphi)$；或者在 φ 已知的情况下，简记为 $L^2(M)$。从 $\mathfrak{n}_\varphi$ 到 $L^2(M)$ 的自然嵌入记作

$$\Lambda = \Lambda_\varphi \colon \mathfrak{n}_\varphi \to L^2(M).$$

进一步可以证明，存在唯一的正规忠实幺正 $*$-表示 M on$L^2(M)$，使得

$$x\Lambda(y) = \Lambda(xy), \qquad x \in M, y \in \mathfrak{n}_\varphi.$$

著名的*Tomita–Takesaki* 定理指出，存在唯一的反线性对合等距算子 J_φ（模共轭）和严格正算子 ∇_φ（模算子），作用于 $L^2(M)$，使得

$$\mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^* \subseteq \mathscr{D}(\nabla_\varphi^{1/2}), \qquad J_\varphi \nabla_\varphi^{1/2} \Lambda_\varphi(x) = \Lambda_\varphi(x^*), \qquad x \in \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*.$$

此外，有

$$\nabla_\varphi^{it} M \nabla_\varphi^{-it} = M, \qquad J_\varphi M J_\varphi = M'.$$

M 所诱导的一参数自同构群称为模单参数群：

$$\sigma_t^\varphi \colon M \to M, \quad x \mapsto \nabla_\varphi^{it} x \nabla_\varphi^{-it}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

它补偿了任意正规半有限忠实权的非迹性：正规半有限忠实权 φ 是迹性的，当且仅当对所有 $t \in \mathbb{R}$，$\sigma_t^\varphi = \mathrm{id}$；而一般的正规半有限忠实权满足

$$\varphi \circ \sigma_t^\varphi = \varphi, \qquad \varphi(xx^*) = \varphi(\sigma_{-i/2}^\varphi(x)^* \sigma_{-i/2}^\varphi(x)), \qquad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{n}_\varphi \cap \mathfrak{n}_\varphi^*,$$

其中记号表示 $\mathfrak{n}_\varphi^* \cap \mathfrak{n}_\varphi \subseteq \mathscr{D}(\sigma_{-i/2}^\varphi)$。对于 $z \in \mathbb{C}$，若闭条带上存在一个（必然唯一的）σ-弱连续函数 $w \to \sigma_w^\varphi(x)$，则 $x \in \mathscr{D}(\sigma_z^\varphi)$

$$\{w \mid \mathrm{Im}(w) \text{ between } 0 \text{ and } \mathrm{Im}(z)\}$$

它在内部是全纯的（作为一个赋范空间值函数），并且对 $t \in \mathbb{R}$ 延拓 $\sigma_t^\varphi(x)$。

例 F.6. 回到例 F.4 的设定。则若 $\mathbf{T}$是严格正的，且$\varphi = \mathrm{Tr}_{\mathbf{T}}$，便可将其识别为

$$L^2(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\varphi) \cong \mathcal{H} \otimes \overline{\mathcal{H}}$$

以唯一的方式使得

$$\Lambda(\theta_{\xi,\eta}) = \xi \otimes \overline{\mathbf{T}^{1/2}\eta}, \qquad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathscr{D}(\mathbf{T}^{1/2}).$$

在这种情况下，模共轭和模算子由下式给出

$$J_\varphi(\xi \otimes \overline{\eta}) = \eta \otimes \overline{\xi}, \qquad \nabla_\varphi^{it}(\xi \otimes \overline{\eta}) = \mathbf{T}^{it}\xi \otimes \overline{\mathbf{T}^{it}\eta}, \qquad \xi,\eta \in \mathcal{H},$$

因此，特别地，模单参数群为

$$\sigma_t^{\varphi}(x) = \mathbf{T}^{it} x \mathbf{T}^{-it}, \qquad x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), t \in \mathbb{R}.$$

我们还简要说明附属于代数的正算子（如（F.3）中所述）如何被视为权集合的对偶。具体而言，将冯·诺依曼代数 M 的扩展正锥M_+^{ext}定义为所有满足以下条件的元素

$$x\colon M_*^+ \to [0,\infty], \qquad \omega \mapsto \omega(x)$$

使得存在一个递增网 $x_i \in M_+$，满足

$$\omega(x) = \sup_i \omega(x_i), \qquad \omega \in M_*^+.$$

因此，必有

$$(\omega+\omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x), \qquad 0(x) = 0, \qquad (a\omega)(x) = a\omega(x), \qquad a \in \mathbb{R}_{>0}, \omega \in M_+^*,$$

并且 x 满足正规性条件

$$\omega(x) = \lim_\alpha \omega_\alpha(x)$$

只要 ω_α是 M_*^+中依范数收敛到 ω的递增网。于是，称 $x \in M_{\mathrm{ext}+}$半有限，如果

$$M_*^+ = \text{closure of } \{\omega \in M_*^+ \mid \omega(x) < \infty\},$$

若 $\omega(x) = 0$，则称其为忠实，其中 $\omega = 0$ 对 $\omega \in M_*^+$成立。

那么，若 $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，(忠实)半有限$x \in M_+^{\mathrm{ext}}$与作用于 $\mathcal{H}$ 且从属于 M的（严格）正算子$\mathbf{x}$之间存在一一对应，由下式确定：

$$\omega_{\xi,\xi}(x) = \begin{cases} \|\mathbf{x}^{1/2}\xi\|^2 & \text{if } \xi \in \mathscr{D}(\mathbf{x}^{1/2}), \\ \infty & \text{if } \xi \notin \mathscr{D}(\mathbf{x}^{1/2}). \end{cases} \tag{F.5}$$

扩展锥的抽象概念使得可以直接计算其元素上的权：对于一般的冯·诺依曼代数，我们有一个 $\mathbb{R}_{>0}$-双线性配对

$$\mathfrak{W}_M^{\mathrm{nsf}} \times M_+^{\mathrm{ext}} \to [0,\infty], \qquad \varphi(x) = \sup_{\omega,y} \omega(y),$$

其中 ω 取遍 $\mathcal{G}_\varphi$，而 y 取遍

$$\mathcal{G}_x = \{y \in M_+ \mid y \le x\},$$

其中，对于 $y \in M_+$，若该关系在 M_*^+ 上逐点成立，我们记作 $y \le x$。

F.3. 形式和。 若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 $\mathbf{T}$,$\mathbf{S}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的正算子，则

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}} + \mathrm{Tr}_{\mathbf{S}}$$

仍然是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的正规权；若 $\mathbf{T}$，$\mathbf{S}$ 是严格正的，则该权是忠实的。根据例 F.4 中的结果，我们可以作出如下定义：

定义 F.7. 若 $\mathbf{T}$，$\mathbf{S}$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的严格正算子，且 $\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}} + \mathrm{Tr}_{\mathbf{S}}$ 是半有限的，则它们的形式和[6] $\mathbf{T} \boxplus \mathbf{S}$ 是满足下述条件的唯一严格正算子

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}\boxplus\mathbf{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{T}} + \mathrm{Tr}_{\mathbf{S}}.$$

$\mathrm{Tr}_{\mathbf{T}} + \mathrm{Tr}_{\mathbf{S}}$ 是半有限的，当且仅当 $\mathscr{D}(\mathbf{T}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{S})$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

考虑 (3.7) 中的 $\mathbf{X}$，$\mathbf{P}$，以及经过重标度的算子

$$\mathbf{P}_\hbar = 4\pi^2\hbar\mathbf{P}. \tag{F.6}$$

根据斯通-冯诺依曼定理，只要证明下述结论，命题 1.14 就成立：

命题 F.8. $L^2(\mathbb{R})$ 上的正算子满足以下恒等式：

$$e^{-\mathbf{P}_\hbar} \boxplus e^{-\mathbf{P}_\hbar + \mathbf{X}} = \varphi_\hbar(\mathbf{X}) e^{-\mathbf{P}_\hbar} \varphi_\hbar(\mathbf{X})^*. \tag{F.7}$$

我们需要做一些准备工作。

对于 $r > 0$，我们考虑这些条带

$$S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < r\}, \qquad S_{-r} = \{z \in \mathbb{C} \mid -r < \mathrm{Im}(z) < 0\}, \tag{F.8}$$

$$T_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq r\}, \qquad T_{-r} = \{z \in \mathbb{C} \mid -r \leq \mathrm{Im}(z) \leq 0\}. \tag{F.9}$$

对于一般的希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 及其自伴算子

$$\mathbf{T} \colon \mathscr{D}(\mathbf{T}) \to \mathcal{H}, \qquad \mathscr{D}(\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{H},$$

以及任意 $r \in \mathbb{R}^\times$，我们定义

$$\mathrm{Hol}(T_r, \mathcal{H}) = \{F \colon T_r \to \mathcal{H} \mid F \text{ continuous on } T_r \text{ and holomorphic on } S_r\}$$

and

$$H_r(\mathbf{T}) = \{F \in \mathrm{Hol}(T_r, \mathcal{H}) \mid \forall z \in T_r, t \in \mathbb{R} : F(z + t) = e^{it\mathbf{T}} F(z)\}.$$

以下结果见 [Tak03，引理 VI.2.3]。

引理 F.9. 映射

$$H_r(\mathbf{T}) \to \mathscr{D}(e^{-r\mathbf{T}}), \qquad F \mapsto F(0) \tag{F.10}$$

是一个定义良好的线性同构，其中

$$e^{-r\mathbf{T}}(F(0)) = F(ir), \qquad F \in H_r(\mathbf{T}).$$

[6]记号 $\mathbf{T} \dotplus \mathbf{S}$ 更为常见，但我们更倾向于使用后一种记号来表示算子 $\mathbf{T} + \mathbf{S}$ 在定义域为 $\mathscr{D}(\mathbf{T}) \cap \mathscr{D}(\mathbf{S})$ 时的闭包。

我们将 (F.10) 的逆映射记作

$$\mathscr{D}(e^{-r\mathbf{T}}) \to H_r(\mathbf{T}), \qquad \xi \mapsto F_\xi, \tag{F.11}$$

使得

$$e^{-r\mathbf{T}}\xi = F_\xi(ir), \qquad \xi \in \mathscr{D}(e^{-r\mathbf{T}}).$$

此外，显然对所有 $z \in T_r$, $\mathscr{D}(e^{-r\mathbf{T}}) \subseteq \mathscr{D}(e^{z\mathbf{T}})$, 其中

$$e^{iz\mathbf{T}}\xi = F_\xi(z), \qquad \xi \in \mathscr{D}(e^{-r\mathbf{T}}). \tag{F.12}$$

现在我们回到 $L^2(\mathbb{R})$ 这一特例，并收集关于 (F.6) 中定义域 $e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}$ with$\mathbf{P}_\hbar$ asin 的一些额外信息。

对于 $r \in \mathbb{R}^\times$, 记

$$\mathrm{Hol}(S_r) = \{F\colon S_r \to \mathbb{C} \mid F \text{ holomorphic}\},$$

and

$$H(S_r) = \{f \in \mathrm{Hol}(S_r) \mid \sup_{0<b<1} \int_{\mathbb{R}} |f(x+irb)|^2 \mathrm{d}x < \infty\} \subseteq \mathrm{Hol}(S_r).$$

引理 F.10。 若 $0 < b$ *and* $f \in H(S_{\pi b\hbar})$, 则存在 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-b\mathbf{P}_\hbar/2})$ 使得

$$\xi(x) \overset{a.e.}{=} \lim_{n\to\infty} f(x + i/n^2), \tag{F.13}$$

由此我们得到一个线性同构

$$H(S_{\pi b\hbar}) \cong \mathscr{D}(e^{-b\mathbf{P}_\hbar/2}), \quad f \mapsto f_\xi. \tag{F.14}$$

此外，在这种情况下，我们有

$$(e^{-b\mathbf{P}_\hbar/2}\xi)(x) \overset{a.e.}{=} \lim_{n\to\infty} f(x + \pi i b\hbar - i/n^2) \tag{F.15}$$

并且，对于所有 $z \in H(S_{\pi b\hbar})$,

$$(e^{-z\mathbf{P}_\hbar/2}\xi)(x) \overset{a.e.}{=} f(z+x). \tag{F.16}$$

证明。 这只是对 [Sch94, 引理 1.1] 的重新表述（它是 Paley–Wiener 定理的一个应用）。更确切地说， [Sch94, 引理 1.1] 给出了 (F.13)、(F.14) 的满射性以及 (F.15)。(F.16) 中的恒等式和 (F.14) 的单射性，随后可通过将第一部分应用于 f 在 $S_{\pi b'\hbar}$ 上的限制（其中 $0 < b' < b$）得到。□

如果 $f \in H(S_{\pi\hbar})$ 和 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2})$ 通过 (F.13) 相关联，我们记作

$$f = f_\xi.$$

类似地，如果 $f \in H(S_{\pi\hbar})$，我们将通过 (F.16) 与 f 相关联的唯一元素记作 $F \in H_{\pi\hbar}(2\pi\mathbf{P})$, 因此

$$F(z)(x) \overset{\text{a.e.}}{=} f(z+x). \tag{F.17}$$

那么，确实， f_ξ 和 F_ξ 在此对应关系下与 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2})$相关。接着，我们还将 $f \in H(S_{\pi\hbar})$ 的定义域扩展到 $T_{\pi\hbar}$，如下所示:

$$f(x + i\pi\hbar) = F(i\pi\hbar)(x), \qquad f(x) = F(0)(x),$$

需要理解的是，这仅在几乎处处有定义。

引理 F.11。 设 χ 是定义域 $\Omega \supseteq T_{\hbar\pi}$ 上的全纯函数，并假设存在 C、$D > 0$，使得

$$|\chi(x+iy)| \leq Ce^{D|x|}, \qquad \forall x+iy \in T_{\pi\hbar}. \tag{F.18}$$

假设 $f \in H(S_{\pi\hbar})$，并定义 $g \in \mathrm{Hol}(S_{\pi\hbar})$ 如下

$$g(z) = \chi(z)f(z), \qquad z \in S_{\pi\hbar}.$$

Then

$$\sup_{0<b<1} \int_{\mathbb{R}} |g(x+ib)|^2 \mathrm{d}x = \max\left\{ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} |g(x+\pi i\hbar)|^2 \mathrm{d}x \right\}. \tag{F.19}$$

证明。 对于任意满足 $\|\eta\|_2 \leq 1$ 的 $\eta \in C_c(\mathbb{R})$，我们得到一个全纯函数

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(z+t)\overline{\eta(t)}\mathrm{d}t = \langle \overline{\chi}(z+\mathbf{X})\eta, F(z)\rangle.$$

利用 (F.18) 以及 $\|F(z)\|_2$ 的一致有界性，此函数满足 Phragmén–Lindelöf 定理的条件，因此可得

$$\begin{aligned}\sup_{0<b<1} \left| \int_{\mathbb{R}} g(t+\pi\hbar b)\overline{\eta(t)}\mathrm{d}t \right|^2 &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}\cup(\mathbb{R}+\pi i\hbar)} |\langle \overline{\chi}(z+\mathbf{X})\eta, F(z)\rangle|^2 \\ &\leq \max\left\{ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} |g(x+\pi i\hbar)|^2 \mathrm{d}x \right\}.\end{aligned}$$

对所有此类 η 取上确界，可得

$$\sup_{0<b<1} \int_{\mathbb{R}} |g(t+\pi\hbar b)|^2 \mathrm{d}t \leq \max\left\{ \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}} |g(x+\pi i\hbar)|^2 \mathrm{d}x \right\}.$$

反向结论由 (F.13)、(F.15) 和法图引理得出。 □

引理 F.12. 我们有

$$\mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2 \dot{+} \mathbf{X}/2}) = e^{i\mathbf{X}^2/4\pi\hbar}\mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}), \tag{F.20}$$

with

$$e^{-\mathbf{P}_\hbar/2 \dot{+} \mathbf{X}/2} = e^{i\mathbf{X}^2/4\pi\hbar}e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}e^{-i\mathbf{X}^2/4\pi\hbar}, \tag{F.21}$$

证明。 恒等式 (F.21) 由 (B.1) 得出，而 (F.20) 则可立即推出。□

引理 F.13. 我们有 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2 \dot{+} \mathbf{X}/2})$ 当且仅当存在 $f \in H(S_{\pi\hbar})$使得 $f_{|\mathbb{R}} = \xi$ 且

$$\int_{\mathbb{R}} (1+e^x)|f(x+\pi i\hbar)|^2 \mathrm{d}x < \infty. \tag{F.22}$$

证明。 首先假设 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2 \dot{+} \mathbf{X}/2})$。由引理 F.10 和等式 (F.20)，我们可以找到 f, $g \in H(S_{\pi\hbar})$，其对应的 $F, G \in H_{\pi\hbar}(2\pi\mathbf{P})$ 满足

$$F(0) = \xi, \qquad G(0) = e^{-i\mathbf{X}^2/4\pi\hbar}\xi.$$

我们断言，此时

$$g(z) = e^{-iz^2/4\pi\hbar}f(z), \qquad \forall z \in S_{\pi\hbar}. \tag{F.23}$$

事实上，取 $\eta \in C_c(\mathbb{R})$。于是我们得到全纯函数

$$S_{\pi\hbar} \ni z \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(z+t)\overline{\eta}(t)\mathrm{d}t = \langle \eta, G(z)\rangle.$$

另一方面，也有

$$S_{\pi\hbar} \ni z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(z+t)e^{-i(z+t)^2/4\pi\hbar}\overline{\eta}(t)\mathrm{d}t = \langle e^{i(\overline{z}+\mathbf{X})^2/4\pi\hbar}\eta, F(z)\rangle$$

是全纯的。由于这些函数连续延拓到 $\mathbb{R}$ 上的同一个函数，因此它们必定相等。这立即推出（F.23）。

由于现在 $g \in H(S_{\pi\hbar})$ 和 $\chi(z) = e^{-iz^2/4\pi\hbar}$ 满足引理 F.11 中的条件，我们可以由等式（F.19）得出（F.22）成立。

反过来，若 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2})$ 的关联函数为 $f = f_\xi$，且满足（F.22），则通过（F.23）定义$g \in \mathrm{Hol}(S_{\pi\hbar})$。再次应用引理 F.11，可得 $g \in H(S_{\pi\hbar})$。但由恒等式（F.13），这恰好意味着

$$\xi \in e^{i\mathbf{X}^2/4\pi\hbar}\mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) = \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2+\mathbf{X}/2})$$

如所需。 □

对于下一个引理，我们回顾一下，$\varphi_\hbar$ 在实轴上是模为 1 的，因此

$$\overline{\varphi_\hbar(\overline{z})}\varphi_\hbar(z) = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{F.24}$$

另一方面，由恒等式 (A.13) 可得

$$\varphi_\hbar(z - \pi i\hbar) = (1+e^z)\varphi_\hbar(z+\pi i\hbar), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{F.25}$$

因此，结合 (F.24) 可得

$$|\varphi_\hbar(x+\pi i\hbar)| = (1+e^x)^{-1/2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{F.26}$$

引理 F.14. 我们有

$$\mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2+\mathbf{X}/2}) = \varphi_\hbar(\mathbf{X})\mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}). \tag{F.27}$$

证明。 首先假设 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2+\mathbf{X}/2})$，并令 $f = f_\xi$。那么，由于 $\varphi_\hbar^{-1}$ 在条带 $S_{\pi\hbar}$ 上全纯，我们得到

$$z \mapsto g(z) := f(z)/\varphi_\hbar(z)$$

定义了一个属于全纯函数空间$(S_{\pi\hbar})$的函数。现在，由 (A.16) 和 (A.17) 中的增长估计，函数 $\chi(z) = 1/\varphi(z)$ 满足引理 F.11 的条件。又由于根据引理 F.13，不等式 (F.22) 成立，因此由恒等式 (F.26) 和引理 F.11 可得$g \in H(S_{\pi\hbar})$。但由于

$$\xi(x)/\varphi_\hbar(x) \overset{\text{a.e.}}{=} \lim_{n\to 0} g(x + \frac{i}{n^2}).$$

现在反过来假设，对于 $\eta \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2})$，$\xi = \varphi_\hbar(\mathbf{X})\eta$。令 $g = f_\eta$ 为其在 $H(S_{\pi\hbar})$ 中的关联函数，并令 $G = F_\eta \in H_{\pi\hbar}(2\pi\mathbf{P})$。设

$$z \mapsto f(z) := \varphi_\hbar(z)g(z)$$

将其视为 $\mathrm{Hol}(S_{\pi\hbar})$ 中的函数。于是我们可以将 f 延拓为 $\mathbb{R}+\pi i\hbar$ 上的可测函数，使得

$$f(x+\pi i\hbar) \overset{\text{a.e.}}{=} \lim_{n\to\infty} f(x+\pi i\hbar - i/n^2),$$

再次利用（F.26），我们计算得

$$\int_{\mathbb{R}} (1+e^x)|f(x+\pi i\hbar)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x+\pi i\hbar)|^2}{|\varphi_\hbar(x+\pi i\hbar)|^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |g(x+\pi i\hbar)|^2\mathrm{d}x = \|G(\pi i\hbar)\|^2 < \infty.$$

此外，由引理 F.11 再次应用可知，我们还有 $f \in H(S_{\pi\hbar})$。由于 ξ 是 f 在 $\mathbb{R}$ 上的边界值，因此由引理 F.13 可得 $\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2+\mathbf{X}/2})$。□

现在我们可以证明恒等式（F.7）。事实上，只需证明，当 θ_ξ 为投影到单位向量 $\xi \in L^2(\mathbb{R})$ 上的投影时，我们有

$$\mathrm{Tr}_{e^{-\mathbf{P}_\hbar}}(\theta_\xi) + \mathrm{Tr}_{e^{-\mathbf{P}_\hbar+\mathbf{X}}}(\theta_\xi) = \mathrm{Tr}_{\varphi_\hbar(\mathbf{X})e^{-\mathbf{P}_\hbar}\varphi_\hbar(\mathbf{X})^*}(\theta_\xi). \tag{F.28}$$

现在，左侧有限当且仅当

$$\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}) \cap \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2+\mathbf{X}/2}), \tag{F.29}$$

而右侧有限当且仅当 $\varphi_\hbar(\mathbf{X})^*\xi \in \mathscr{D}(e^{-\mathbf{P}_\hbar/2})$。根据引理 F.14，这两者是相同的向量集合。此外，对于该集合中的向量，利用（F.26）以及上述引理中的计算，我们可再次轻易得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{\varphi_\hbar(\mathbf{X})e^{-\mathbf{P}_\hbar}\varphi_\hbar(\mathbf{X})^*}(\theta_\xi) &= \|e^{-\mathbf{P}_\hbar/2}\varphi_\hbar(\mathbf{X})^*\xi\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{|f_\xi(x+\pi i\hbar)|^2}{|\varphi_\hbar(x+\pi i\hbar)|^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1+e^x)|f_\xi(x+\pi i\hbar)|^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f_\xi(x+\pi i\hbar)|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} e^x|f_\xi(x+\pi i\hbar)|^2\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Tr}_{e^{-\mathbf{P}_\hbar}}(\theta_\xi) + \mathrm{Tr}_{e^{-\mathbf{P}_\hbar+\mathbf{X}}}(\theta_\xi).
\end{aligned}$$

F.4. 冯·诺依曼代数上的作用。假设 G是一个局部紧豪斯多夫群。设 M是一个冯·诺依曼代数。若给定 $*$-自同构α_g （ $g \in G$ ），使其构成代数作用，并满足如下连续性条件：对所有 $x \in M$，映射 $G \curvearrowright M$是-弱连续的，则称 G作用于 M，并记作α。

$$\alpha(x)\colon G \to M, \qquad g \mapsto \alpha_g(x)$$

是 σ-弱连续的。于是， G的不动点构成一个冯·诺依曼子代数 M

$$M^\alpha = \{x \in M \mid \forall g \in G : \alpha_g(x) = x\}.$$

于是，取 M上的左 Haar 积分 λ ，便可在 M 上定义一个唯一映射

$$T_\alpha\colon M_+^{\mathrm{ext}} \to M_+^{\alpha,\mathrm{ext}} \tag{F.30}$$

使得

$$\omega_{M^\alpha}(T_\alpha(x)) = \int_G (\omega\circ\alpha_g)(x)\mathrm{d}\lambda(g), \qquad \omega \in M_*^+, x \in M_+^{\mathrm{ext}}.$$

将 T_α 称为一个算子值权。它同样满足正规性条件：如果 $x_i \nearrow x$ 强收敛，则 $T_\alpha(x_i) \nearrow T_\alpha(x)$强收敛。

特别地，如果 α 是遍历的，即 $M^\alpha = \mathbb{C}1_M$，那么 T_α 本身就是一个正规权，我们将其记为 φ_α。因此，对于 ω 任意的 正规态，在 M 上，

$$\varphi_\alpha(x) = \int_G (\omega \circ \alpha_g)(x)\mathrm{d}\lambda(g), \qquad x \in M_+^{\mathrm{ext}}. \tag{F.31}$$

这个权必然是忠实的。若 φ_α 也半有限，则称遍历作用是可积的 。

Appendix G. Proof of Theorem 2.33

回顾

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B^{b,r,i}. \tag{G.1}$$

通过类似于引理 2.28 中的直接计算，可以得到以下结果 lt.

引理 G.1. 假设 $1 \leqslant i \leqslant r \leqslant b \leqslant n$ ，并且对三元组 (b', r', i') 同样有

$$\left[B^{b,r,i}, B^{b',r',i'}\right] \tag{G.2}$$

只要满足以下任一条件：

(1) $r' = r$;

(2) $|b' - i' - b + i| > 1$;

(3) $b' - i' = b - i + 1, \quad b' < b, \quad b' - r' \leqslant b - r$;

(4) $b' - i' = b - i + 1, \quad b' \geqslant b, \quad b' - r' > b - r$;

(5) $b' - i' = b - i, \quad (b' - b)(b' - r' - b + r) > 0$.

推论 G.2. 关系式 (G.2) 在 $r' > r$ 且满足以下任一条件时成立：

(1) $b' < b$; (2) $r' - i' < r - i$; (3) $r' - i' = r - i$ 且 $b' - r' > b - r$。

证明。 我们证明情形 (1)，另外两种情形的证明类似。首先注意，$b' < b$ 和$r' > r$ 推出 $b' - r' < b - r$。根据引理 G.1，我们只需考虑以下可能性

$$b' - i' = b - i,$$
$$b' - i' = b - i \pm 1.$$

这三种情形的结论均由引理 G.1 得出。 □

令

$$B^{b,r} = \prod_{i=1}^{r} B^{b,r,i} \qquad \text{and} \qquad B^b = \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}} B^{b,r}.$$

这样我们就有

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{r \leqslant b \leqslant n}} B^{b,r}.$$

应用推论 G.2 的第 (1) 部分，我们看到翻转 $\mathcal{F}'$ 可以写为

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant b \leqslant n}} B^{b}. \tag{G.3}$$

In 在下文中，我们还将使用以下关于 $\mathcal{F}'$ 的表达式。第一个 s

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant j \leqslant r}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant c \leqslant n-r+1}} B^{n-c+1,r,r-j+1}. \tag{G.4}$$

并且可通过应用引理 G.1 的第 (1) 部分，将 (G.1) 写成

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n}} \overleftarrow{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}} \overleftarrow{\prod_{r \leqslant b \leqslant n}} B^{b,r,i}, \tag{G.5}$$

并对 $j = r - i + 1$、$c = n - b + 1$ 重新参数化得到。

第二个是

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant b \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n-b+1}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}} B^{n-r+i,b+i-1,i}, \tag{G.6}$$

并且在 $r' > r$ 且推论 G.2 的条件 (2) 或 (3) 成立时，可通过将因子 $B^{b',r',i'}$ 移到 $B^{b,r,i}$ 之后，从 (G.5) 得到。

最后，第三个公式以类似的方式推导得出，如下：

$$\mathcal{F}' = \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant b \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n-b+1}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}} B^{b+r-1,b+i-1,i}. \tag{G.7}$$

现在，定理 2.33 的整个证明只需在 [DGG16] 中将一幅图示展开即可。（这里我们觉得有必要说明，在我们看来，数学思考应当反其道而行之——从公式走向图示。）

我们首先利用公式 (G.3) 和 (G.6) 将左侧改写为

$$\overrightarrow{\prod_{1 \leqslant b \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant b}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}} B^{b,r,i}_{[23]} \cdot \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant b \leqslant n}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant r \leqslant n-b+1}} \overrightarrow{\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}} B^{n-r+i,b+i-1,i}_{[12]}.$$

现在我们将逐步变换这个表达式，使其在经过 s 步后变为

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}\cdot\\
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant s+1}}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n+a-s-1,r,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i,s+i-a+1}\cdot\right.\\
&\left.\overrightarrow{\prod_{n-s+1\leqslant r\leqslant n-a+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[13]}^{a+r-1,a+i-1,i}\right)\\
&\overrightarrow{\prod_{s+2\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-b+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,b+i-1,i}\overrightarrow{\prod_{n-s+1\leqslant r\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}.
\end{aligned}$$

经过 n 步后，我们得到表达式

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}\cdot\\
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-a+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[13]}^{a+r-1,a+i-1,i}\cdot\\
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i},
\end{aligned}$$

它等于右侧，因为这三个因子分别由公式 (G.4)、(G.7) 和 (G.1) 给出。执行第 s 步包括应用引理 G.3 并交换可交换的因子。也就是说，应用引理后，在对 a 求积的括号内，我们得到

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[12]}^{n-r+1,s+1,c+2}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i+1,c+i+2}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[13]}^{n-c-1,s+r-c-1,r}\\
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n-c-1,r,i}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} B_{[23]}^{n-c-1,n-s,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{n-s+1\leqslant r\leqslant n-a+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[13]}^{a+r-1,a+i-1,i}.
\end{aligned}$$

然后我们注意到，第二行中的因子 $B_{[23]}$ 与因子 $B_{[13]}$可交换。这样一来， $\mathcal{F}'_{[23]}\mathcal{F}'_{[12]}$ 等于

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}\cdot\\
&\overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant s+1}}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[12]}^{n-r+1,s+1,s-a+2}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i+1,s+i-a+2}\cdot\right.\\
&\left.\overrightarrow{\prod_{n-s\leqslant r\leqslant n-a+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[13]}^{a+r-1,a+i-1,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n+a-s-1,r,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} B_{[23]}^{n+a-s-1,n-s,i}\right)\\
&\overrightarrow{\prod_{s+2\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-b+1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,b+i-1,i}\overrightarrow{\prod_{n-s+1\leqslant r\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}.
\end{aligned}$$

利用（2.2），现在可以很容易地验证以下结论。首先，因子

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[12]}^{n-r+1,s+1,s-a+2}$$

可以一路交换到乘积的最左侧

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant n-s-1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i},$$

于是我们表达式中的第一个大因子变为

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant s}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant s+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[12]}^{n-r+1,s+1,s-a+2} =$$

$$= \overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant s+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}.$$

其次，各因子

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} B_{[23]}^{n+a-s-1,n-s,i}$$

可以类似地一路交换到因子的最右侧

$$\overrightarrow{\prod_{s+2\leqslant b\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-b+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,b+i-1,i},$$

于是最后一个因子变为

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant s+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} B_{[23]}^{n+a-s-1,n-s,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{n-s+1\leqslant r\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i} = \overrightarrow{\prod_{n-s\leqslant r\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}.$$

至此，我们有

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant s+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-b+1}} B_{[12]}^{n-i+1,b,b-r+1}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant b\leqslant n-s-2}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant b}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i}\cdot$$

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant a\leqslant s+2}}\left(\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n+a-s-2,r,i}\cdot \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i+1,s+i-a+2}\cdot\right.$$

$$\left.\overrightarrow{\prod_{n-s\leqslant r\leqslant n-a+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[13]}^{a+r-1,a+i-1,i}\right)$$

$$\overrightarrow{\prod_{s+3\leqslant b\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-b+1}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,b+i-1,i}\ \overrightarrow{\prod_{n-s\leqslant r\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{r\leqslant b\leqslant n}}\ \overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{b,r,i},$$

这正是经过 $s+1$ 步后的表达式 $\mathcal{F}'_{[23]}\mathcal{F}'_{[12]}$。证明至此完成。

引理 G.3. 以下等式成立（此处 $c=s-a$）：

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n-c-1,r,i}\cdot\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i,c+i+1}=$$
$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[12]}^{n-r+1,s+1,c+2}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[12]}^{n-r+i,s+i+1,c+i+2}$$
$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} B_{[13]}^{n-c-1,s+r-c-1,r}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n-c-1,r,i}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} B_{[23]}^{n-c-1,n-s,i}.$$

证明。 如往常一样，利用 (2.2)，我们看到左边等于

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} B_{[23]}^{n-c-1,r,i}B_{[12]}^{n-r+i,s+i,c+i+1},$$

这又等于

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}}\varphi\left(0\oplus\overset{\nearrow}{e}_{n-c-i,n-c-r-1}\oplus\overset{\searrow}{e}_{c+i+1,c+1}\right)\varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{n-c-r,n-s-r}\oplus\overset{\searrow}{e}_{c+r+1,r-i}\oplus 0\right)$$

应用量子二对数的五边形关系（容易验证 (1.26) 成立），我们得到

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant r}} C_{[12]}^{r,i}C_{[13]}^{r,i}C_{[23]}^{r,i}.$$

其中

$$\begin{aligned}
C_{[12]}^{r,i}&=B_{[12]}^{n-r+i,s+i,c+i+1}=\varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{n-c-r,n-s-r}\oplus\overset{\searrow}{e}_{c+r+1,r-i}\oplus 0\right)\\
C_{[13]}^{r,i}&=\varphi\left(\overset{\nearrow}{e}_{n-c-r,n-s-r}\oplus\left(\overset{\searrow}{e}_{c+r+1,r-i}+\overset{\nearrow}{e}_{n-c-i,n-c-r-1}\right)\oplus\overset{\searrow}{e}_{c+i+1,c+1}\right)\\
C_{[23]}^{r,i}&=B_{[23]}^{n-c-1,r,i}=\varphi\left(0\oplus\overset{\nearrow}{e}_{n-c-i,n-c-r-1}\oplus\overset{\searrow}{e}_{c+i+1,c+1}\right).
\end{aligned}$$

注意

$$C_{[13]}^{r,r}=B_{[13]}^{n-c-1,s+r-c-1,r}.$$

然后，利用我们最喜爱的交换关系 (2.2)，可得

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} C_{[12]}^{r,1}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-s-1}}\left(C_{[13]}^{k,k}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant j\leqslant k}}\left(C_{[23]}^{k,j}C_{[13]}^{k+1,j}C_{[12]}^{k+1,j+1}\right)\right)C_{[13]}^{n-s,n-s}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} C_{[23]}^{n-s,i}.$$

再次利用五边形关系，可得

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} C_{[12]}^{r,1}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-s-1}}\left(C_{[13]}^{k,k}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant j\leqslant k}}\left(C_{[12]}^{k+1,j+1}C_{[23]}^{k,j}\right)\right)C_{[13]}^{n-s,n-s}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} C_{[23]}^{n-s,i},$$

并进一步通过交换将其化为以下形式

$$\overrightarrow{\prod_{1\leqslant r\leqslant n-s}} C_{[12]}^{r,1}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant j\leqslant k}} C_{[12]}^{k+1,j+1}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-s}} C_{[13]}^{k,k}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant k\leqslant n-s-1}}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant j\leqslant k}} C_{[23]}^{k,j}\overrightarrow{\prod_{1\leqslant i\leqslant n-s}} C_{[23]}^{n-s,i}.$$

这依次等于所需的表达式。 □

References

[BS93] S. Baaj 和 G. Skandalis。《C*-代数交叉积的乘法酉元与对偶性》´*`。 *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **26** (4) (1993)：425–488。[BV05] S. Baaj 和 S. Vaes。《局部紧量子群的双重交叉积》 *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* **4** 1 2005 135 173 ( ) ( )：–。[BZBJ 18] D. Ben-Zvi、A. Brochier 和 D. Jordan。《曲面上的量子群积分》 *Journal of Topology* **11** 4 2018 874 917 ( ) ( )：-。[BZ05] A. Berenstein 和 A. Zelevinsky。《量子簇代数》 *Advances in Mathematics* **195** (2) (2005)：405–455。[BT03] A. G. Bytsko 和 J. Teschner。《模双的 R 算子、余乘积与哈尔测度，其中 $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$》 *Communications in mathematical physics* **240** (1) (2003)：171–196。[Com68] F. Combes。《C*-代数上的权》*`。 *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **47** (1) (1968)：57–100。[DM21] B. Davison 和 T. Mandel。《量子簇代数量子θ基的强正性》 *Inventiones mathematicae* **226** (3) (2021)：725–843。[DCVD10] K. De Commer 和 A. Van Daele。《嵌入局部紧量子群中的乘子霍普夫代数》 *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* **40** (4) (2010)：1149–1182。[DGG16] T. Dimofte、M. Gabella 和 A. B. Goncharov。《 K $3d$ *ournal*分解与规范理论》, *of High Energy Physics* **2016** 11 2016 1 147 ( ) ( )：-。[Dri87] V. G. Drinfeld, 《量子群》。载于： *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* **1** 1986 *American Mathematical Society* 1987 798 820 (加利福尼亚州伯克利，)，( )：–。[Fad95] L. D. Faddeev, 《离散海森堡–外尔群与模群》 *Letters in Mathematical Physics* **34** 3 1995 249 254 ( ) ( )：–。[FK94] L. D. Fadeev 和 R. M. Kashaev。《量子二对数》 *Modern Physics Letters A* **9** (5) (1994)：427–434。[FKV01] L. D. Faddeev、R. M. Kashaev 和 A. Yu. Volkov。《强耦合量子离散刘维尔理论 I：代数方法与对偶性》 *Communications in Mathematical Physics* **219** (1) (2001)：199–219。[FG06] V. Fock 和 A. Goncharov。《局部系统模空间与高阶 Teichmüller 理论》¨ *Pub-lications Mathématiques de l'IHÉS* **103** (2006)：1–211。[FG09] V. V. Fock 和 A. B. Goncharov。《量子二对数与量子簇簇簇的表示》 *Inventiones mathematicae* **175** (2) (2009)：223–286。[FZ02] S. Fomin 和 A. Zelevinsky。《簇代数 I：基础》 *Journal of the American mathematical society* **15** 2 2002 497 529 ( ) ( )：–。[FI14] I. B. Frenkel 和 I. Ip。《分裂实量子群的正表示与未来展望》 *International Mathematics Research Notices* **8** (2014)：2126–2164。[GK21] S. Garoufalidis 和 R. Kashaev。《Faddeev量子二重对数的复苏》。载于： *Geometry: A collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev. IRMA lectures in Mathematics Topology andand Theoretical Physics* **33** 2021 257 272 ( )：–。 [GHKK18] M. Gross、P. Hacking、S. Keel 和 M. Kontsevich。《簇代数的典范基》 *ournal of the American Mathematical Society* **31** 2 2018 497 608 ( ) ( )：–。[Ip12] I. Ip。《分裂实量子群的正表示与调和分析》 *ProQuest LLC Ann Arbor* 2012 , , *MI. Thesis (Ph.D.) – Yale University* ( )。[Ip13] I. Ip。《量子平面的表示、其量子双以及 $GL_q^+(2,\mathbb{R})$ 上的调和分析》 *Selecta Mathematica New Series* **19** (4) (2013)：987–1082。[Ip15] I. Ip。《非单纽结分裂实量子群的正表示》 *Journal of Algebra* **425** 2015 245 276 ( )：–。[Ip17] I. Ip。《正表示、乘子 Hopf 代数与连续典范基》 *Stringtheory, integrable systems and representation theory, RIMS Kokyuroku Bessatsu* B62 (2017)：71–86。[Jim85] M. Jimbo。《( ) 的 q U $\mathfrak{g}$ *Letters in Mathemat-* 差分类比与杨–巴克斯特方程》。( ) ( )：–。[Kas01] R. Kashaev。《量子 Teichmüller 理论中德恩扭转的谱》。( )：–。 *ical Physics* **10** 1 1985 247 252

[KS97] A. Klimyk 和 K. Schm
¨ *Texts and Monographs* udgen。《量子
in Physics Springer 1997
群及其表示》，（）。[KK03] E. Koelink 和 J. Kustermans。《局部紧量子群中的 $SU(1,1)$ 在 $SL(2,\mathbb{C})$ 中的正规化子的类比》。《 *Communications in mathematical physics* **233** (2)》（2003）：231–296。[Kus05] J. Kustermans。《局部紧量子群》。载于：
Quantum independent increment processes Lecture Notes in Mathematics **1865** 2005 99 180
，（）：–。[
KV00] J. Kustermans 和 S. Vaes。《局部紧量子群》。《 *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **33** 6 2000 837 934
》（）：–。[
KV03] J. Kustermans 和 S. Vaes。《冯·诺伊曼代数框架中的局部紧量子群》。《 *Mathematica Scandinavica* **92** (1)》（2003）：68–92。[KVD97] J. Kustermans 和 A. Van Daele。《由代数量子群产生的 C^*-代数量子群》。《 *International Journal of Mathematics* **8** (8)》（1997）：1067–1139。[Lus93] G. Lusztig。《《量子群导论》》。《 *Progress in Mathematics* **110**》，Birkha¨user Boston，马萨诸塞州（1993）。[MRW17] R. Meyer、S. Roy 和 S. L. Woronowicz。《C*-量子群的半直积：乘法酉元方法》。《 *Communications in Mathematical Physics* **351** (1)》（2017）：249–282。[PT73] G. K. Pedersen 和 M. Takesaki。《冯·诺伊曼代数的拉东–尼科迪姆定理》。《 *Acta Mathematica* **130** 1973 53 87
》（）：–。[
PT99] B. Ponsot 和 J. Teschner。《通过非紧量子群上的调和分析进行 Liouville 自举》： *arXiv preprint* arXiv:hep-th/9911110。[PT01] B. Ponsot 和 J. Teschner。《 $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ 的表示的连续级数的克莱布希–戈丹系数与拉卡–维格纳系数》。《 *Communications in Mathematical Physics* **224** (3)》（2001）：613– 655。[RS81] M. Reed 和 B. Simon。《《现代数理物理方法 I：泛函分析》》。《Aca-demic Press》（1981）。[Rie93] M. A. Rieffel。《作用的变形量子化：
$\mathbb{R}^d$ *Memoirs of the American Mathematical Society* **106** 506 1993
》。（）（）。
[Rui97] S. N. M. Ruijsenaars。《一阶解析差分方程与可积量子系统》。《*Journal of Mathematical Physics* **38** (2)》（1997）：1069–1146。[Rui05] S. N. M. Ruijsenaars。《关于 AΔOs $\exp(ia_\pm d/dz)$ $+\exp(2\pi z/a_\mp)$ 的酉联合特征函数变换》。《 *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* **12** (2)》（2005）：253–294。[Sch94] K. Schm
¨ $\mathbb{R}_q^2$ $X_{q\ \gamma}$ SL_q 2 $\mathbb{R}$ *Communications in mathematical physics* **159** 2 1994 217 237
udgen。《，，以及（，）的可积算子表示》。（）（）：–。[Sch12] K. Schm
¨ *Graduate Texts in Mathematics* **265** 1 2012
udgen。《希尔伯特空间上的无界自伴算子》。（）（），施普林格出版社。[SS17] G. Schrader 和 A. Shapiro。《由量子群导出的连续张量范畴 I：代数方面》： *arXiv preprint* arXiv:1708.08107。[SW01] P. M. So
- *Letters in Mathematical Physics* **57** 2001 239 252
ltan 和 S. L. Woronowicz。《关于可管理乘法酉元的注》。（）：–。[SW07] P. M. So
- *Journal of Functional Analysis* **252** 1 2007 42 67
ltan 和 S. L. Woronowicz。《从乘法酉元到量子群 II》。（）（）：–。[Tak02] M. Takesaki。《《算子代数理论 I》》。《 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **124**》，施普林格出版社，柏林（2002）。[Tak03] M. Takesaki。《《算子代数理论 II》》。《 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* **125**》，施普林格出版社，柏林（2003）。[Vae01] S. Vaes。《冯·诺伊曼代数的拉东–尼科迪姆定理》。《 *Journal of Operator Theory* **46** (3)》（2001）：477–489。[VVD03] S. Vaes 和 A. Van Daele。《海森堡对易关系、交换平方以及局部紧量子群上的哈尔测度》。载于：
Operator algebras and mathematical physics: conference Proceedings Constanta (Romania) July 2–7 2001. Theta Foundation Bucarest 2003 379 400
，，，，（）：–。[VD
98] A. Van Daele。《群对偶的代数框架》。《 *Advances in Mathematics* **140** (2)》（1998）：323–366。[VD01] A. Van Daele。《某些局部紧量子群上的哈尔测度》： *arXiv preprint* arXiv:math/0109004。

[Wor91] S. L. Woronowicz。《与 C*-代数相关的无界元及非紧量子群》。《 *Communications in mathematical physics* **136 (2)**》（1991）：399–432。[Wor95] S. L. Woronowicz。《由无界元生成的 C * *Reviews in Mathematical*-代数》。 *Physics* **7** 3 1995 481 521 （） （）：–。[Wor96] S. L. Woronowicz。《从乘法酉元到量子群》。《 *International Journal of Mathematics* **7** 1 1996 127 149 》（）：–。[Wor00] S. L. Woronowicz。《量子指数函数》。《 *Reviews in Mathematical Physics* **12 (6)**》（2000）：873–920。[Wor03] S. L. Woronowicz。《某些量子群上的 Haar 权》。载于： *Group 24: Physical and Mathematical Aspects of Symmetries Proceedings of the 24th International Colloquium on Group Theoretical* , , , （）： *Methods in Physics Paris 15–20 July 2002. Institute of Physics Conference Series* **173** 2003 763–772。[WN92] S. L. Woronowicz 和 K. Napi ´ * *Reports* orkowski。《C - *on mathematical physics* **31** 3 1992 353 371 代数框架中的算子理论》。（） （）：–。[WZ02] S. L. Woronowicz 和 S. Zakrzewski。《量子“ $ax+b$ *Reviews in Mathematical Physics*”群》。（）：–。 **14** 2002 797 828

Vrije Universiteit Brussel

Email address: kenny.de.commer@vub.be

Northwestern University

Email address: gus.schrader@northwestern.edu

University of Edinburgh

Email address: alexander.shapiro@ed.ac.uk

University of Glasgow

Email address: christian.voigt@glasgow.ac.uk