一阶逻辑与若干几何图的孪生宽度

Colin Geniet
基础科学研究院（IBS）离散数学组，韩国大田

Gunwoo Kim
KAIST 计算机学院，韩国大田；基础科学研究院（IBS）离散数学组，韩国大田

Lucas Meijer
荷兰乌得勒支大学信息与计算科学系

arXiv:2512.21896v1 [cs.DM] 26 Dec 2025

摘要

对于某些几何图类，检验一阶公式是否可处理，恰好由图参数孪生宽度刻画。这一结论最早在[BCKKLT 的 IPEC '22], 中针对区间图等图类得到证明，其中这种等价性被称为界定；更一般地，当 H 是森林时，该结论也适用于圆图、有根有向路径图和 H-图。界定基于这样一个关键思想：几何图往往具有自然的顶点排序，因此可以运用关于有序图的孪生宽度理论。

针对他们工作中提出的两个问题，我们证明，非退化轴平行单位线段图的交图满足界定，但1.5D地形的可见图不满足界定。我们还证明，圆弧交图满足界定。

2012 年 ACM 学科分类计算理论 → 参数化复杂度和精确算法；计算理论 → 有限模型论；计算理论 → 计算几何；计算数学 → 图论

关键词和短语 孪生宽度、轴平行单位线段图、圆弧图、地形可见图、一阶逻辑、模型检测、固定参数可处理

经费支持 *Colin Geniet*：获基础科学研究院（IBS-R029-C1）资助。*Gunwoo Kim*：获基础科学研究院（IBS-R029-C1）资助。*Lucas Meijer*：获荷兰科学研究组织（NWO）项目 VI.Vidi.213.150 资助。

致谢 作者衷心感谢 Eunjung Kim 提出本研究所探讨的问题，并就这些主题进行了极具见地的讨论；也感谢 Sebastian Wiederrecht 在项目早期阶段参与了富有启发性的讨论。此外，我们还要感谢 Édouard Bonnet 对线段图的孪生宽度作出了非常有帮助的解释。

1 引言

给定一个图 G 和一个一阶（FO）公式 ϕ，一阶模型检验问题要求判断 G 是否满足 ϕ。一般而言，这是一个难题，已知为 AW[$*$]-难 [7], ，并且涵盖了诸如寻找指定大小的独立集或支配集，或在 G中寻找给定诱导子图等问题。对于一个图类$\mathcal{C}$，我们可以探究这一一阶逻辑模型检测问题是否存在固定参数可处理的（FPT）算法，即运行时间为 $f(|\phi|)\cdot|G|^{O(1)}$ 的算法，其中 f是某个（可计算的）函数。

经典上，这个问题一直在稀疏图类中得到研究，例如有界度图 [17] 以及更一般的处处稠密类 [12], ，这类图允许使用此类固定参数可处理算法。近年来，另一项与之不可比较的发展源于 Bonnet、Kim、Thomassé 和 Watrigant [5] 引入的图参数 孪生宽度：如果 $\mathcal{C}$ 是一个孪生宽度有界的图类，并且可以高效计算出该性质的见证（即所谓的收缩序列），

那么在$\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测是固定参数可处理的。

由于有界孪生宽度与有界度互不包含，具有 FPT 一阶逻辑模型检测的图类未必具有有界孪生宽度。不过，在许多引人注目的情形中，孪生宽度恰好构成高效一阶逻辑模型检测的界限：Bonnet、Giocanti、Ossona de Mendez、Simon、Thomassé 和 Toruńczyk [4] 的一项基础性结果表明，对于任意遗传的（即对诱导子图封闭的）$\mathcal{C}$ 类有序图 （即附带顶点全序的图，公式可以查询该序），在$\mathcal{C}$ 中的模型检验是固定参数可处理的，当且仅当$\mathcal{C}$ 具有有界孪生宽度[1]。通过利用一种“良好”的顶点序将问题归约到有序图，Bonnet、Chakraborty、Kim、Köhler、Lopes 和 Thomassé [2], 为区间图和有根有向路径图证明了类似结果，并将这种等价性称为界定。这一结论对圆图 [14]、任意固定森林的 H [6]图以及竞赛图 [11]也成立。我们将继续拓展几何交图领域的这类界定结果。

▶**定理 1.** 在以下每种情形中，假设 C 是遗传的，且 固定参数可处理 $\neq \mathsf{AW}[*]$，则类 C 具有有界双宽度，当且仅当 C 中的一阶逻辑模型检测是固定参数可处理的：

1. $\mathcal{C}$ 是圆上弧的交图的子类，**2.** $\mathcal{C}$ 是非退化轴平行单位线段的交图的子类（出于算法方面的考虑，类 $\mathcal{C}$ 中的图由其几何表示给出），或**3.** 更一般地，$\mathcal{C}$ 是长度取自固定有限集 $L \subset \mathbb{R}_+$ 的非退化轴平行线段交图的子类（同样由几何表示给出）。关于轴平行单位线段图的界定问题在 [2] 中被提出，而关于圆弧图的界定问题则在 [6]中被提出。

对于轴平行线段，定理中的“非退化”是指不允许两条水平线段（或两条垂直线段）相交。我们要求线段图的几何表示作为输入给出，因为计算这些表示是 NP 困难的 [15]。对于圆弧图，这并非问题，因为其表示可以在多项式时间内找到 [18]。

作为定理 1 的补充，我们还给出若干不可描绘的几何图类示例。首先，放宽定理 1 最后一项中的任何一项假设，都会破坏可描绘性：

▶**定理 2.** 存在一个遗传图类 C，具有 *FPT* 一阶逻辑模型检测性质，但孪生宽度无界，并且可表示为以下任意一种线段的交图：

1. 退化的轴平行单位线段，**2.** 处于一般位置、线段长度仅取两个值的轴平行线段（但这两个值可随图 $G \in \mathcal{C}$而变化），**3.** 处于一般位置且长度属于 $[1, 1+\epsilon]$ 的轴平行线段，其中 $\epsilon > 0$为任意固定值，或**4.** 处于一般位置的单位线段，即使线段斜率限于“垂直”、“水平加 ϵ”和“水平减 ϵ”。

从 [2, 图 8] 已知，只有两种长度的轴平行线段会产生不可描绘的图类（情形 2）。我们仍将其纳入结果，因为颇为有趣的是，单个图类$\mathcal{C}$ 便是定理 2 所述四种情形中不可描绘性的一个例子。我们的不可描绘图类$\mathcal{C}$ 与 [2, 图 8], 中构造的图类有显著区别；后者是对所有三正则图的编码。$\mathcal{C}$ 中的图由两个半图组成，二者沿任意排列通过长度略大于常数的路径连接。我们证明，这些图具有无界孪生宽度，但具有有界合并宽度 （孪生宽度的一种推广

[1] 在 FPT $\neq$ AW[$*$] 的假设下，或者等价地，假设对所有图 的模型检验不是 FPT。

，用于刻画 Dreier 和 Toruńczyk 提出的有界扩张类 [9]）。后者意味着单子依赖性，并使 FPT 一阶逻辑模型检测成为可能。

该构造的一种变体表明，对于 1.5D 地形的可见图（即由一列按 x 单调排列的点构成的多边形曲线），界定同样不成立，从而对 [2] 的一个问题给出了否定回答。

▶**定理 3.** *存在一类 1.5D 地形可见图 C，其遗传闭包允许进行固定参数可处理的一阶逻辑模型检测，但其孪生宽度无界。*

最后，圆弧图的界定（定理 1 的情形 1）可以表述为关于 H-图 的结果（即 H 的拓扑实现中连通子空间的交图），其中 H 取为一个圈。已知当 H 为任意固定森林 [6], 时，H-图也可以被界定；看来这两种证明可以结合起来，从而在 H 为至多含一个圈的固定图时得到界定。不过，我们注意到，对于任何更复杂的 H，界定都不成立：

▶**定理 4.** *存在一个图的遗传类 C，其一阶逻辑模型检测属于固定参数可处理，但具有无界孪生宽度和无界合并宽度，并且对于任意至少含有 2 个环的 H 连通图，类 C 中的图都是 H-图。*

定理 1 的证明概述

设$\mathcal{D}$ 为我们感兴趣的图类，例如所有圆弧图组成的图类。我们的目标如下：对于任意遗传子类$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$，在$\mathcal{C}$ 上存在 FPT 模型检测算法，当且仅当$\mathcal{C}$ 具有有界孪生宽度。受 [2, 14], 启发，我们通过证明如下形式的二分定理来得到这种等价性，其中$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$为任意子类：

- 要么我们能在多项式时间内为任意 $G \in \mathcal{C}$计算出一个收缩序列，从而证明 G 具有有界孪生宽度。于是 [5] 可在$\mathcal{C}$上实现 FPT 模型检测。要么$\mathcal{C}$ 是单子独立的，粗略地说，这
- 意味着$\mathcal{C}$ 中的图可以通过一阶逻辑编码任意图（定义见第 2.4 节）。在这种情况下，若 $\mathcal{C}$ 还具有遗传性，则所有图组成的类上的一阶逻辑模型检测可归约到$\mathcal{C}$ 上的一阶逻辑模型检测 [8], ，由此证明后者对于参数化复杂度类 AW[$*$] [7]而言是困难的。

需要指出的是，如果$\mathcal{C}$ 具有有界孪生宽度，那么它就是单子依赖的（即非单子独立）。因此，子类$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ 具有有界孪生宽度，当且仅当它是单子依赖的；这正是 [2] 中界定 的准确定义。上述二分定理略强于界定，因为它还要求能够高效地找到收缩序列。当$\mathcal{C}$ 是遗传类，且假设 FPT $\neq$AW[$*$] 成立时，这一加强结果给出了以下三者之间的等价性：$\mathcal{C}$ 具有有界孪生宽度、$\mathcal{C}$ 是单子依赖的，以及$\mathcal{C}$ 存在 FPT 模型检验算法。还需要指出的是，在有限模型论中，一个重要猜想认为，最后两者总是等价的：

▶**猜想 5** ([10, 猜想 8。2]). *对于任意遗传类 C，C 中的图存在 FPT 一阶逻辑模型检测算法，当且仅当 C 是单子依赖的。*

我们的结果证实了这一结论的特殊情形，其中孪生宽度解释了这种等价性。

回到证明概述，我们来解释如何实现上述二分定理。出发点是通过矩阵中的障碍刻画孪生宽度

[2] 遗传性假设是必要的，以避免出现模型检验因平凡原因而容易的类，例如如下形式的图： n 个顶点构成的任意图，加上 2^n 个孤立顶点作为填充。

矩阵 [5]：给定任意一个 0–1 矩阵 M，可以高效地找到一个收缩序列 M （孪生宽度较小的见证），或一个网格。给定图 G 的几何表示，我们构造一个辅助矩阵 M_G。例如，对于圆弧图，我们将圆与 $\{1, \ldots, n\}$ 模 n 同一起来；当存在一条从 i 顺时针延伸至 j 的圆弧时，矩阵 M 在位置（i, j）处为 1。然后我们证明以下两个事实：

- 首先， G可以通过一系列保持孪生宽度不变的操作从 M_G 重构而来。因此，如果 M_G 具有有界孪生宽度，那么 G也具有有界孪生宽度。这种方法效率很高：可以根据 M_G的收缩序列，快速计算出 G 的收缩序列。其次，如果 M_G 包含足够大的网格，那么 G
- 就包含一种称为横截对的复杂结构。众所周知，如果$\mathcal{C}$ 中的图包含任意大的横截对，那么$\mathcal{C}$ 就是单子独立的 [2]。为证明这一点，我们假设所用的 G 几何表示在适当意义下是极小化的。

因此，要么可以为辅助矩阵$\{M_G : G \in \mathcal{C}\}$找到收缩序列，从而也能为$\mathcal{C}$找到收缩序列；要么这些矩阵包含任意大的网格，因此$\mathcal{C}$ 包含任意大的横截对，并且是单子独立的。对于 APUS 图，还需要额外的一步：我们构造局部辅助矩阵，它们对应于线段表示中的 1×1 正方形。如果任何这样的矩阵包含网格，我们就能找到一个横截对；如果所有局部矩阵的孪生宽度都有界，那么整个图的孪生宽度也有界。

开放问题

延续平面中对象的交图这一主题，我们探讨单位圆盘图是否是可描绘的。将我们的技术推广到这一情形的困难，可能在于如何定义并使用恰当的最小化概念。具有固定有限组允许半径的圆盘，其行为应当类似于单位圆盘；但我们预计，若允许两个半径的比值无界，或在 $[1, 1+\epsilon]$ 中允许任意半径，则可描绘性会失效，其构造类似于定理 2 中的构造。我们还可以研究矩形的正方形的交图。我们预计，我们的技术可以轻松应用于轴对齐单位正方形，但不确定在没有轴对齐约束的情况下，可描绘性是否仍然成立。

人们还可以考虑孪生宽度以外的其他参数。由于我们在定理 2 和 3 中的不可描绘构造使用合并宽度来实现 FPT 模型检测，因此，寻找合并宽度刻画单子依赖性和 FPT 模型检测的几何图类是合理的。要解决这一问题，可能需要通过某些障碍来刻画合并宽度，这是一个困难的开放问题。可以观察到，对于轴平行线段，这种等价性并不成立： [2, Figure 8] 的构造表明，对于任意二分图 $H = (V, W, E)$，都可以得到一个轴平行线段图，即 H 的二分细分，并在 V 和 W之间添加一个完全二分图。令 H 为围长和最小度趋于无穷的图，则该图类是单子依赖的，但具有无界的合并宽度。

2 预备知识

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $[n]$ 表示整数区间 $\{1, \ldots, n\}$。

2.1 图和关系结构

对于图 $G = (V, E)$，我们将其顶点集和边集分别记作 $V(G) = V$和 $E(G) = E$。 $v \in V(G)$ 的邻居集合为 $N(v)$。对于 $X \subseteq V$， $G[X]$ 是由 X诱导的子图。当 $<$是 $V(G)$ 的线性序时，我们将行和

列按 $<$ 排序的邻接矩阵记作 $<_V$ 和 $<_E$ 是 V 和 E 的序时，$Inc(G, <_V, <_E)$ 是行和列分别按 $<_V$ 和 $<_E$ 排序的关联矩阵。

更一般地，二元关系结构（或简称二元结构）$(V, E_1, \dots, E_\ell)$ 由一个顶点集 V 和若干个关系 $E_i \subseteq V^2$ 组成。它可以看作一种有向图，其中包含 ℓ 种边；两个顶点之间可以有多条不同类型的边（但不能有多条相同类型的边）。对于二元结构，每个关系都有自己的邻接矩阵，记作 $Adj(E_i, <)$。有序二元结构是指其中一个关系为顶点集的线性序的二元结构，通常记作 $<$。因此，该结构的形式为 $(V, E_1, \dots, E_\ell, <)$。一种特殊情形是有序图 $(V, E, <)$，其中 (V, E) 是一个图，而 $<$ 是 V 的线性序。

2.2 网格

以下网格的概念源自 [13]。给定一个点 $p \in \mathbb{R}^2$，我们将其 x 坐标和 y 坐标分别记为 $\pi_x(p)$ $\pi_y(p)$。平面中的一个 t-网格 是一个点族 $(p_{i,j})_{i,j\in[t]}$，满足以下条件：对任意 $i, i', j, j' \in [t]$,

$$\text{if } i < i', \text{ then } \pi_x(p_{i,j}) < \pi_x(p_{i',j'}) \qquad \text{and} \qquad \text{if } j < j', \text{ then } \pi_y(p_{i,j}) < \pi_y(p_{i',j'}).$$

由此可见，存在区间 $X_1 < \cdots < X_t$ 和 $Y_1 < \cdots < Y_t$，使得 $p_{i,j} \in X_i \times Y_j$。事实上，取包含所有 $\pi_x(p_{i,j})$（其中 j）的最小区间作为 X_i，对 Y_i 也同样处理。

这一定义可以推广到 0–1矩阵：将矩阵 M 中位置 (i, j) 上的“1”解释为一个坐标为 (i, j) 的点。若由 M 中的 “1” 定义的点集包含一个符合前述定义的 t- 网格，则称 M 包含一个 t- 网格。于是，行和列可以像上文那样分别划分为区间：行划分为 $\mathcal{R} = \{X_1 < \cdots < X_t\}$，列划分为 $\mathcal{C} = \{Y_1 < \cdots < Y_t\}$。行与列的序在此定义中至关重要，因此我们在定义邻接矩阵 $Adj(G, <)$ 时将其明确说明。

网格的 Ramsey 性质可直接由二分团Ramsey定理推出：

▶ **定理 6**（网格Ramsey定理）。存在一个函数 $R(t, k)$，使得若点集 P 包含一个 $R(t, k)$ - 网格，且 $\lambda : P \to [k]$ 是任意一种染色，则 P 包含一个仅由颜色为 c 的点组成的 t-网格，其中 $c \in [k]$ 满足某个条件。

证明。令 $R(t, k)$ 为二部 Ramsey 界。对于 $T = R(t, k)$，考虑一个网格 $(p_{i,j})_{i,j\in[T]}$。构造一个顶点为 $\{u_i\}^{i\in[T]}$，$\{v_i\}^{i\in[T]}$ 的完全二分图，并将颜色 $\lambda(p_{i,j})$ 赋给边 $u_i v_j$。二部 Ramsey 定理给出一个每侧各有 t 个顶点的单色子完全二部图，设其颜色为 c。对应的点构成一个颜色为 c 的 t-网格。◀

当网格的 x 坐标和 y 坐标由同一个集合索引时（例如在 a邻接矩阵中），只需付出少许代价，便可假设它们来自不相交区间：

▶ **引理 7.** 任意 $2t$-网格 P 都包含一个 t-子网格 $P' \subset P$，使得集合 $X := \pi_x(P')$ 和 $Y := \pi_y(P')$ 的 x 坐标和 y 坐标满足 $X < Y$ 或 $Y < X$。

证明。设 $(p_{i,j})_{i,j\in[2t]}$ 为 P 的点。存在一个 x，使得当 $i \le t$ 时，$\pi_x(p_{i,j}) \le x$；而当 $i > t$ 时，$\pi_x(p_{i,j}) > x$：只需令 x 为所有 $i \le t$ 和 $j \in [2t]$ 上 $\pi_x(p_{i,j})$ 的最大值即可。类似地，存在一个 y，使得 $\pi_y(p_{i,j}) \le y$ 当且仅当 $j \le t$。若 $x \le y$，则选取 P'，使其由 $p_{i,j}$（其中 $i \le t$ 且 $j > t$）构成，这显然满足所需条件。对称地，若 $x > y$，则将网格限制到 $i > t$ 和 $j \le t$。◀

以下技术引理阐述了关联矩阵和邻接矩阵中的网格之间的关系。

▶ **引理 8**。设 $E \subseteq V^2$ 为一个二元关系，使得 $Adj(E, <_V)$ 不含 k-网格。设 $<_{\text{lex}}$为 E的字典序，即当且仅当 $x <_V x'$，或 $x = x'$ 且$y <_V y'$时，$x, y) <_{\text{lex}} (x', y')$。那么 $(E, <_V, <_{\text{lex}})$ 不含 $4k$-网格。

证明。对于有向边 $(x, y) \in E$，我们将其源点和目标点分别记为 $s(e) = x$ 和 $t(e) = y$ 。假设 $Inc(E, <_V, <_{\text{lex}})$ 包含一个 ℓ-网格 $(p_{i,j})_{i,j\in[\ell]}$。每个 $p_{i,j}$ 都是矩阵中的一个"1"，对应于一个顶点 $v_{i,j}$ 及一条与之关联的边 $e_{i,j}$。根据 ℓ-网格的定义，对于任意 i, i', j, j'，有以下不等式：

$$i < i' \quad \text{implies} \quad v_{i,j} <_V v_{i',j'}, \text{ and} \tag{1}$$
$$j < j' \quad \text{implies} \quad e_{i,j} <_{\text{lex}} e_{i',j'}. \tag{2}$$

根据字典序的定义，条件 (2) 还给出

$$j < j' \quad \text{implies} \quad s(e_{i,j}) \leq_V s(e_{i',j'}). \tag{3}$$

若满足 $v_{i,j} = s(e_{i,j})$，则称数对 (i, j) 为源点类型；否则称为目标点类型，即 $v_{i,j} = t(e_{i,j})$。注意，$(i + 1, j)$ 和 $(i, j + 1)$ 不可能同时为源点类型，因为这将同时推出 (1) 中的 $v_{i,j+1} <_V v_{i+1,j}$ ，以及 (3) 中的 $v_{i+1,j} \leq_V v_{i,j+1}$ 。将数对 (i, j) 分组成 2×2 方格 $(2i, 2j)$、$(2i, 2j - 1)$、$(2i - 1, 2j)$、$(2i - 1, 2j - 1)$，并在每组中只保留一个目标点类型的数对，由此得到一个新的 $\lfloor \ell/2 \rfloor$-网格，其中所有数对 (i, j) 均为目标点类型。因此，具体而言，对于满足任意 i, i', j, j' 的 $i, j < \ell/2$ ，我们有边 $f_{i,j}$ ：

$$i < i' \quad \text{implies} \quad t(f_{i,j}) <_V t(f_{i',j'}), \text{ and} \tag{4}$$
$$j < j' \quad \text{蕴含} \quad f_{i,j} <_{\text{lex}} f_{i',j'}. \tag{5}$$

我们声称，对于 $j + 1 < j'$ 和 $i > 1$，还有 $s(f_{i,\ j}) <_V s(f_{i',\ j'})$。事实上，我们有

$$f_{i,j} <_{\text{lex}} f_{1,j+1} <_{\text{lex}} f_{i',j'},$$

这转化为相应源顶点上的非严格不等式。但另一方面，(4)给出 $t(f_{i,j}) >_V t(f_{1,j+1})$。于是，要使 $f_{i,j} <_{\text{lex}} f_{1,j+1}$ 成立，必须有 $s(f_{i,j}) <_V s(f_{1,j+1})$。因此，只考虑 $i > 1$以及 j的奇数值对应的边 $f_{i,j}$ 时，源点的顺序 $s(f_{i,j})$ 与j指标的序一致，而目标点的顺序 $t(f_{i,j})$ 则与 i指标的序一致。这在 $Adj(E, <_V)$ 中得到一个 $\lfloor \ell/4 \rfloor$-网格，矛盾。◀

2.3 孪生宽度

我们回顾图 G 的孪生宽度 tww(G) 的定义，定义出自 [5]。

在图 G 中，若两个顶点集合 X，Y 之间既存在边又存在非边，则称它们不齐性。给定 G 的顶点划分$\mathcal{P}$ ，错误图是指其顶点为$\mathcal{P}$的各部分，且当两个部分不齐性时，它们之间有边的图。$\mathcal{P}$的误差度是该错误图的最大度。

图 G 的收缩序列是一列划分$\mathcal{P}_n$，.....，$\mathcal{P}_1$，这些划分均属于 $V(G)$，其中$\mathcal{P}_n$是由单元素集合构成的划分，$\mathcal{P}_1$ 是仅含一个部分的划分，而$\mathcal{P}_{i-1}$ 由$\mathcal{P}_i$合并两个部分得到。其宽度是$\mathcal{P}_n$，.....，$\mathcal{P}_1$的最大误差度。最后，图 G 的孪生宽度tww(G) 是其收缩序列的最小宽度。

更一般地，在二元关系结构 $S = (V, E_1, ..., E_\ell)$ 中，两个顶点集合 X，Y 若不满足齐性，则存在某个关系 E_i 以及某些顶点 x_1，$x_2 \in X$,y_1，$y_2 \in Y$，使得 $x_1y_1 \in E_i$ 和 $x_2y_2 \notin E_i$ 成立，或者对称地，$y_1x_1 \in E_i$ 和 $y_2x_2 \notin E_i$ 成立。

例如，在有序图 $(V, E, <)$ 中，两个集合 X，Y 齐性，当且仅当满足：(1) 对于 E 它们是齐性的（即完全相邻或完全不相邻）；并且 (2) $X < Y$ 或 $Y < X$。于是，划分 $\mathcal{P}$ 的错误图也定义为在所有不齐性的部分之间连边，从而可以为二元结构定义孪生宽度。

孪生宽度的基本刻画是：它对应于邻接矩阵不包含某些高秩网格状结构的有序图 [4, 定理 7]。此外，这种刻画具有高效性。这些高秩网格包含了我们所说的网格，因此这种刻画推出如下结论。

▶ **定理 9** ([5, 4])。 存在函数 f、g 以及一种算法，该算法给定一个$(V, E, <)$有序图，其矩阵 $Adj_{(E,<)}$ 不含 k-网格，便可计算出一个能证明$\mathsf{tww}(V, E, <) \leq f(k)$ 的收缩序列，耗时为 $g(k) \cdot |V|^{O(1)}$。

这种刻画还意味着，孪生宽度较高的有序图具有类 Ramsey 性质：

▶ **定理 10** ([4])。 存在函数 $R(k, \ell)$，使得若$(V, E, <)$ 是一个满足 $E = E_1 \cup \cdots \cup E_m$ 的有序图，且$\mathsf{tww}(V, E_i, <) \leq k$ 对所有 i 都成立，则$\mathsf{tww}(V, E, <) \leq R(k, \ell)$。

证明。 这可由如下结果推出：通过排除所谓的高秩划分来刻画有序图的有界双宽度 [4, 定理 7 和 23], 这些高秩划分具有 Ramsey 性质 [4, 引理 24]。◀

容易看出，一个图的孪生宽度等于其各连通分量的孪生宽度的最大值。我们将对有序图使用这一结果的以下变体。

▶ **引理 11**。 设 $G = (V, E, <)$ 是一个有序图，其中 V 被划分为若干区间$A_1 < \cdots < A_m < B_1 < \cdots < B_m$，使得所有边都位于 A_i 与 B_i 之间，其中某个 i满足条件，并且对所有 i，子图 $(A_i \cup B_i, E, <)$ 的孪生宽度至多为 k。那么$\mathsf{tww}(G) \leq 2k + 2$。

证明。称 G_i 为由 $A_i \cup B_i$诱导的有序子图，根据假设，满足 $\mathsf{tww}(G_i) \leq k$。根据 [5, 定理 4，1], 存在一个宽度至多为 $2k + 2$的 G_i 收缩序列，其中 A_i 的顶点绝不会与 B_i 的顶点收缩到一起（这样的收缩序列以二分划分 $\{A_i, B_i\}$ 结束，而非通常应有的平凡划分 $\{A_i \cup B_i\}$）。这个收缩序列可以在 G中复现；由于 A_i、B_i 是 $<$ 中的区间，且与图的其余部分没有边，因此不会在错误图中产生额外的边。

对每个 i 应用此论证，我们得到一个宽度至多为 $2k + 2$ 的部分收缩序列，其最终划分为 $\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\}$。可以通过合并部分 A_1, A_2，紧接着合并 B_1, B_2，并以此类推，直到只剩下两个部分 $\bigcup_i A_i$ 和 $\bigcup_i B_i$，再将它们合并，从而完成此收缩序列。在合并序列的第二阶段中，误差度始终不超过 2。◀

2.4 一阶逻辑

我们介绍将一阶逻辑（FO）和转导限制在二元 关系结构上的情形，因为这已足以满足我们的需要。关系签名 是一个集合 $\Sigma = \{E_1, \ldots, E_\ell\}$，其元素为关系符号。一个 Σ-结构 S 是建立在该签名之上的关系结构，也就是说，它是一个结构，其顶点集为 $V(S)$，并且对每个符号 $E_i \in \Sigma$ 都有一个边集 $E_i(S)$。

对于一个签名 Σ，可以定义关于 Σ 的一阶逻辑公式 ϕ。这些公式由顶点上的量词 $\forall x, \phi$，$\exists x, \phi$、布尔运算符 $\vee, \wedge, \neg$、谓词 $E_i(x, y)$（用于检验 xy 是否为 E_i 中的一条边），以及等号谓词 $x = y$ 构成。例如，公式

$$\phi(x, y) = E(x, y) \vee \exists z.\ (E(x, z) \wedge E(z, y))$$

表示 x, y 之间的距离至多为二。当公式 ϕ 含有自由变量时，这些变量会像上面那样作为 ϕ 的参数写出。不含自由变量的公式称为句子。如果 $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ 是关于 Σ的公式，S是一个 Σ-结构，并且 $v_1, \ldots, v_r \in V(S)$ 是顶点，那么 $S \models \phi(v_1, \ldots, v_r)$ 表示 ϕ 被 S满足，其中变量 $x_1, \ldots, x_r$分别解释为 $v_1, \ldots, v_r$。

孪生宽度的 FPT 模型检测算法给出如下结果。

▶**定理 12** ([5, 定理 1]). 给定一个图 G、一条宽度为 k 的 G收缩序列，以及一个句子 ϕ，可以在时间 $f(k, |\phi|) \cdot |V(G)|$ 内测试 $G \models \phi$ 是否成立。

给定两个签名 Σ、Γ，一个 一阶逻辑解释 Φ 从 Σ 到 Γ 是一个用一阶逻辑定义的映射，从 Σ-结构映射到 Γ-结构。准确地说，Φ通过给出以下内容来描述**1.** 对于每个符号 $E_i \in \Gamma$，一个一阶公式 $\phi_{E_i}(x,\ y)$，该公式基于 Σ的语言，以及**2.** 另一个一阶公式 $\phi_V(x)$，同样基于 Σ。

给定一个 Σ-结构 S，其像 $\Phi(S)$ 是这样的关系结构：顶点集被限制为满足 ϕ_V 的顶点，即

$$V(\Phi(S)) = \{x \in V(S)\ :\ S \models \phi_V(x)\},$$

对于每个符号 $E_i \in \Gamma$，边集 $E_i(\Phi(S))$ 由 ϕ_{E_i} 描述，即

$$E_i(\Phi(S)) = \{xy\ :\ x, y \in V(\Phi(S)) \text{ and } S \models \phi_{E_i}(x, y)\}.$$

转导 是一阶逻辑解释的非确定性推广。也就是说，一个 Σ-到-Γ转导输出的是一组 Γ-结构，而不是单个结构。设 Σ 为一个签名，并设 U_1、.....、U_k 为与 Σ不相交的 k 一元关系符号（即元数为 1）。k-染色是一种一对多操作，它将一个 Σ-结构 S 映射为 S 的所有可能扩张，即扩张为 $(\Sigma \uplus \{U_1、\ldots\ldots、U_k\})$-结构 S^+，这意味着对于任意 $R \in \Sigma$，$V(S) = V(S^+)$ 且 $R(S) = R(S^+)$，而 $U_i(S^+)$ 则被任意选为 $V(S^+)$ 的子集。一个 一阶逻辑转导是一个 k-染色（对于固定的 k）与一个一阶逻辑解释的复合。

解释和转导可以复合，这是一个民间结果。

▶ **引理 13**。如果 Φ、Ψ 分别是从 Σ 到 Γ 以及从 Γ 到 Δ的一阶逻辑转导（分别为解释），那么复合 $\Psi \circ \Phi$ 是一个从 Σ 到 Δ的一阶逻辑转导（解释）。

转导保持有界双宽度，并且这一过程可以高效实现。

▶ **定理 14** ([5, 定理 8。1])。对于任意一阶逻辑转导 Φ，存在一个函数 f，使得对于任意二元结构 S和 $T \in \Phi(S)$，$\mathsf{tww}(T) \leq f(\mathsf{tww}(S))$。

此外，给定 S 的宽度为 k 的收缩序列，以及用于通过 Φ获得 T 的 S 的染色，可以在 $g(k) \cdot |S|^{O(1)}$ 时间内，为某个取决于 Φ的函数 g，计算出一个宽度为 $f(k)$ 的 T 的收缩序列。

如果一个图类 $\mathcal{C}$ 能够通过一阶逻辑转导得到所有图所构成的图类，那么称其为单子独立的；也就是说，存在一个转导 Φ，使得 $\Phi(\mathcal{C})$ 包含所有图。如果不存在这样的转导，则称 $\mathcal{C}$ 为单子依赖的。定理 14 表明，有界孪生宽度图类是单子依赖的。

▶**定理 15** ([8])**：** 如果 $\mathcal{C}$ 是一个遗传的单子独立图类，那么 $\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测是 AW[∗]-困难的。

为了证明图类 $\mathcal{C}$ 是单子独立的，我们将采用 [2] 提出的以下构造。我们的定义略有不同，但思路和目的相同。

▶ **定义 16.** 一个横截对 T_k 由三个集合 $A = \{a_i : i \in [k]\}$、$B = \{b_{i,j} : i,j \in [k]\}$ 和 $C = \{c_j : j \in [k]\}$ 组成，其中边 $a_i b_{i',j'}$ 当且仅当 $i \leq i'$ 时存在，而边 $b_{i,j}c_{j'}$ 当且仅当 $j \leq j'$ 时存在（见图 *1*）。A、B、C 内部的边，以及 A 与 C 之间的边，不受限制。

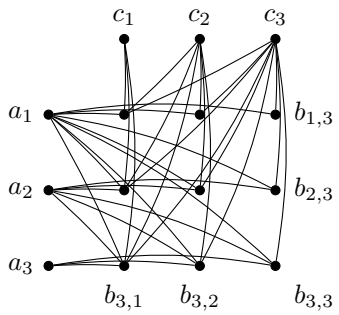


图 1 一个横截对 T_3。

▶ **引理 17.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个图类，满足对于任意 k，存在某个 $G \in \mathcal{C}$ 包含一个横截对 T_k。则 $\mathcal{C}$ 是单子独立的。

这是一个民间结果，也是 [8] 结果的一个非常特殊的情形。为求完整起见，我们给出证明。

证明。 我们证明，所有二分图组成的类都可以由所有横截对组成的类经转导得到。这意味着横截对也可以经转导得到所有图，因为任何图都可以由其 1-细分经转导得到，而其 1-细分是二分图。

回顾一下，T_n 由三个顶点集 $A = \{a_i\}_{i\in[n]}$, $B = \{b_{i,j}\}_{i,j\in[n]}$ 和 $C = \{c_j\}_{j\in[n]}$组成，边为 $a_i b_{i',j'}$，当且仅当 $i \leq i'$；以及 $b_{i,j}c_{j'}$，当且仅当 $j \leq j'$。我们首先要修改边，使得 $b_{i,j}$ 仅与 a_i 和 c_j 相邻。所得图恰好是完全二分图 $K_{n,n}$，且每条边都细分一次。

为此，注意到对于任意 i, i', j'，$i = i'$ 成立，当且仅当：(1) a_i 与 $b_{i',j'}$相邻；并且 (2) a_i 在此性质下是极小的，也就是说，对于任意与 $b_{i',j'}$相邻的 $a' \in A$，$N(a_i) \subseteq N(a')$。这可以表述为一个一阶逻辑转导：使用非确定性着色标记集合 A、B 和 C 后，这两个条件很容易用一阶公式表达。同样的技巧也可以应用于 B 和 C 之间，因此我们得到一个一阶逻辑转导 Φ_1，使得 $\Phi_1(T_n)$ 包含细分一次的完全二分图 $K_{n,n}$。

现在考虑 H 一个二分图，其划分为 (X, Y)，其中有 $|X| = x$ 和 $|Y| = y$。我们取上一步 $n =$ 中得到的细分后的 $K_{n,n}$，使其最大化 x, y。将 X与来自 A的顶点 $\{a_1, \ldots, a_x\}$ 对应起来，并将 Y 与来自 B 的 $\{c_1, \ldots, c_y\}$ 对应起来。还定义集合 $F = \{b_{i,j} : a_i c_j \in E(H)\}$，它包含 B 中与 H的边对应的顶点。接下来的转导通过对 $K_{n,n}$的细分进行如下操作，生成 H：用非确定性着色标记集合 X, Y 和 F，并通过公式定义 H 的边关系

$$\varphi(u, v) \equiv X(u) \wedge Y(v) \wedge \exists w(F(w) \wedge E(u, w) \wedge E(w, v)).$$

最后删除 X 和 Y 以外的顶点，得到 H。

因此，从所有横截对组成的类出发，我们可以通过连续三次转导得到所有细分完全二分图，然后得到所有二分图，最后得到所有图。由于两个转导的复合本身也是一个转导（引理 13），证明至此完成。◀

2.5 合并宽度

合并宽度 [9] 是孪生宽度的一种重要推广，旨在同时刻画有界度图，或更一般地说，有界扩张图。其定义也涉及顶点划分序列，但误差的概念更精细：误差是针对每个顶点单独计数，而不是针对每个部分计数。合并宽度实际上是一族参数：对任意 $r \in \mathbb{N}$，定义半径为 r 的合并宽度，记为 $\mathrm{mw}_r(G)$。

一个**构造序列** 是一个序列（$\mathcal{P}_1, E_1, N_1$）$\ldots$，（$\mathcal{P}_m, E_m, N_m$），其中$\mathcal{P}_i$是顶点集 V的划分，而 E_i, N_i 是互不相交的已解析边和非边集合，按如下方式得到。

- 该序列以单元素集合划分$\mathcal{P}_1 = \{\{v\} : v \in V\}$开始，且没有已解析的边或非边，即 $E_1 = N_1 = \varnothing$。
- 通过以下三种操作之一，从步骤 i 推进到 $i+1$：
  1. 合并 $\mathcal{P}_i$ 的两个部分，以得到 $\mathcal{P}_{i+1}$，**2.** 正向解析 两个部分 X，$Y \in \mathcal{P}_i$（可能 $X = Y$），即通过向 E_i 添加所有尚未属于 $x \in X$和 $y \in Y$的数对，来定义 E_{i+1}； E_i 或 N_i，**3.** 或 负向解析 X，Y改为将这些数对添加到 N_{i+1} 中。
- 当所有顶点都合并到 $\mathcal{P}_n = \{V\}$中，且所有数对都已在 E_m 或 N_m中解析后，序列结束。所得图为 (V, E_m)。

定义 $R_i := E_i \cup N_i$ 为时刻 i已解析数对的集合。于是对于 $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，半径-$r$宽度$\mathcal{P}$ 为

$$\max_{t \in [m]} \max_{v \in V} \left| \left\{ A \in \mathcal{P}_t : A \text{ is at distance at most } r \text{ from } v \text{ in } (V, R_t) \right\} \right|.$$

半径-r 合并宽度 G（记作 $\mathrm{mw}_r(G)$）是生成 G的构造序列中半径-r 宽度的最小值。若存在一个函数 f，使得对所有 $r \in \mathbb{N}$ 和 $G \in \mathcal{C}$，都有 $mw_r(G) \leq f(r)$，则称图类 $\mathcal{C}$ 具有有界合并宽度。

合并宽度的主要动机，也是我们使用它的原因，是对定理 12 的如下推广。

▶**定理 18** ([9])。 如果 $\mathcal{C}$ 是一个具有有界合并宽度的类，那么 $\mathcal{C}$ 是单子依赖的，并且在 $\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测是固定参数可处理的。[3]

2.6 几何图

对于集合族$\mathcal{F}$，交图 $G_{\mathcal{F}}$ 的顶点集为$\mathcal{F}$，当且仅当 A与 B相交时，$A, B \in \mathcal{F}$之间有一条边。集合族$\mathcal{F}$称为 $G_{\mathcal{F}}$的表示。

[3] 准确地说，如果 $\mathcal{C}$ 中图的半径-r 合并宽度由关于 r 的某个可构造的函数所界定，那么模型检验确实是固定参数可处理的。否则，只能得到非一致的固定参数可处理算法。在定理 18 的应用中，合并宽度上界函数就是 $2^{2^{O(r)}}$，因此这不是问题。

圆弧图

圆弧图是圆周上圆弧的交图。我们使用模 n的离散表示：$=\{1,...,n\}$ $[n]$，其中一个（离散）圆弧是模 n的区间 $[i,j]$；具体而言，当 $i \leq j$时，$[i,j] \coloneqq \{k\colon\ i \leq k \leq j\}$；当 $i > j$时，$[i,j] \coloneqq \{k\colon\ k \geq i$或 $k \leq j\}$。图 G 是圆弧图，当且仅当它是某个 n对应的上述（离散）圆弧集合族$\mathcal{F}$ 的交图。我们经常将图 G 的顶点与$\mathcal{F}$中的圆弧对应起来。当 $I = [i,j]$ 是圆弧时，我们用 $\mathsf{left}(I) \coloneqq i$和 $\mathsf{right}(I) \coloneqq j$ 表示其端点。

▶**定理19** ([18])。 给定一个图 G，可以在多项式时间内计算出 G的圆弧表示，或者判定它不是圆弧图。

轴平行单位线段图

轴平行单位线段（APUS）是平面中长度为 1 的水平或垂直线段。我们用 $\mathsf{Hor}(x,\ y)$ 表示从 $(x,\ y)$ 到 $(x+1,\ y)$ 的水平线段，并用 $\mathsf{Ver}(x,\ y)$ 表示从 $(x,\ y)$ 到 $(x,\ y+1)$ 的垂直线段。APUS 图是一个 APUS 族的交图。我们再次采用离散表示：任意 APUS 图 G都有一种表示 $\mathcal{F}$，使得存在某个 $\eta(\mathcal{F})$，满足 $1/\eta(\mathcal{F}) \in \mathbb{N}$，且$\mathcal{F}$ 中线段的坐标是 $\eta(\mathcal{F})$ 的非负倍数。

如果 APUS 族 $\mathcal{F}$ 中的任意两条水平线段（分别地，任意两条垂直线段）都不相交，则称该族为非退化。若 G 是某个非退化 APUS 族的交图，则称其为非退化 APUS 图。这等价于说，G 是任意 APUS 族 $\mathcal{F}$ 的交图，但忽略水平线段（垂直线段）之间的相交（即，对于这类相交，G 中没有边）。非退化 APUS 图是二分图，其中一侧为水平线段，另一侧为垂直线段。

我们将使用坐标最简化的 APUS 表示，而这对于非退化 APUS 族而言更难。因此，我们倾向于采用关于非退化 APUS 图的第二种观点：退化交集可以存在，但在交图中忽略这些交集。

地形可见图

一条*1.5D*地形是一条多边形曲线 $P = p_1, \ldots, p_n$，其 x坐标 $\pi_x(p_1)$ <递增 $\cdots < \pi_x(p_n)$。 P的可见图的顶点集为 P；每当 $p_i,\ p_j$彼此可见时，它们之间就有一条边，这里将 P 下方的区域视为障碍。形式上，当且仅当对于某个 $i < k < j,\ p_k$ 位于从 p_i 到 p_j 的直线上方时，p_ip_j 才不是一条边。因此，地形中相邻的两个顶点总是彼此可见。

3 圆弧图的界定

本节中，我们证明圆弧图的定理 1。

给定一个圆弧族 $\mathcal{F}$，我们定义其端点矩阵 $M_{\mathcal{F}}$，其中行对应于这些弧的右端点，列对应于左端点。对于 $M_{\mathcal{F}}$ 中的每个条目 (i,j)，当且仅当 $[i,j] \in \mathcal{F}$ 时，该条目为 1。

▶ **引理 20**。 存在函数 f、g，使得当 $M_{\mathcal{F}}$ 不含 k-网格时，可以计算出 a 一个能够证明$\mathsf{tww}(G_{\mathcal{F}}) \leq f(k)$ 的收缩序列，其所需时间为 *FPT* 时间 $g(k)\cdot|F|^{O(1)}$。

证明。 假设 $\mathcal{F}$ 表示在 $[n]$之内。我们将区间 $[x,y] \in \mathcal{F}$ 视为有序对(x,y)，因此 $\mathcal{F}$描述了 $[n]$上的一个二元关系。其邻接矩阵 $Adj(\mathcal{F}\ <)$ 按照

$[n]$ 的自然序恰好是 $M_{\mathcal{F}}$。它不含 k-网格，因此根据引理 8，关联矩阵 $Inc(\mathcal{F} <, <_{\mathsf{lex}})$不含 $4k$-网格，其中 $<_{\mathsf{lex}}$是 $[n]^2$的字典序。

现在构造如下有序图 $H = (V, E, <_V)$。顶点集为 $V := [n] \uplus \mathcal{F}$，其中 $[n]$ 排在$\mathcal{F}$之前，$[n]$内部按自然顺序排列，$\mathcal{F}$内部按字典序排列。在 E中，每个区间 $[x, y] \in \mathcal{F}$ 都与其两个端点相连。因此， H的邻接矩阵由 $Inc(\mathcal{F} <, <_{\mathsf{lex}})$及其转置组成，并排列为对角块。该矩阵不含 $(4k + 1)$-网格。根据定理 9，可以在 FPT 时间内计算出 $(V, E, <_V)$的有界宽度收缩序列。

要利用定理 14 得出结论，只需证明存在一个一阶逻辑转导 Φ，使得 $G_{\mathcal{F}} \in \Phi(H)$。给定 H，转导 Φ 按如下方式进行。
1. 首先，对 V 进行非确定性着色，以区分 $[n]$和 F，并指示每个区间 $[x, y] \in$ F 是否满足 $x \leq y$。2. 利用这些颜色，我们可以写出公式 $\phi(v, e)$，用于检验 $v \in [n]$ 是否属于区间$e \in$ F。具体而言，设 $x, y \in [n]$ 是 e的邻居，且 $x < y$。那么区间 e 要么是 $[x, y]$ ，要么是 $[y, x]$，这由步骤 1 中赋予 e 的颜色指示。只需让 $\phi(v, e)$在第一种情况下检验 $x \leq v \leq y$ ，在第二种情况下检验 $v \leq y \vee x \leq v$ 。在极端情况下，可能有 $e = [x, x]$，它仅与 x 相邻。此时， x 是包含在 e中的唯一点。以上内容都可以轻松地用一阶公式表达。3. 现在，可以用公式 $\psi(e, f) = \exists v.\ \phi(e, v) \wedge \phi(f, v)$ 检验 $e, f \in$ F 是否相交。4. 最后，删除 $[n]$ 的顶点，只保留 F 以及由 ψ定义的边。◀

如果圆弧表示 $\mathcal{F}$ 中的圆弧按包含关系极小，且仍表示 $G_{\mathcal{F}}$，则称该表示为最小化的，也就是说，对于任意 $I \in \mathcal{F}$，移除 I 的任一端点都会导致它不再与某个其他圆弧 $I' \in \mathcal{F}$相交。显然，可以在多项式时间内将圆弧表示最小化。我们将使用以下性质。

▶ **引理 21.** 若 F 是一个最小化圆弧表示，且 $I = [i, j] \in F$ 满足 $i \neq j$，则存在 $I_L, I_R \in F$，使得 $I \cap I_L = \{i\}$ 且 $I \cap I_R = \{j\}$。

证明。 如果 I 不满足该条件，那么可以通过删除 i 或 j来缩短它。 ◀

▶**引理 22.** 设 k 为正整数。考虑图 $G_{\mathcal{F}}$的一个最小化圆弧表示 F。若 $M_{\mathcal{F}}$ 包含一个$(4k + 2)$-网格，则 $G_{\mathcal{F}}$ 包含一个横截对 T_k。

证明。考虑 $M_{\mathcal{F}}$中的一个$(4k + 2)$-网格。它由区间 $I_{i,j}$ 组成，并满足：当 $i < i'$时，$\mathsf{left}(I_{i,j}) < \mathsf{left}(I_{i',j'})$；当 $j < j'$时，$\mathsf{right}(I_{i,j}) < \mathsf{right}(I_{i',j'})$。根据引理 7，可以提取一个$(2k + 1)$-网格，使得 x-和 y-坐标属于不相交区间。因此，假设 $i, j \in [2k + 1]$，并且对于所有 i, i', j, j'，$\mathsf{left}(I_{i,j}) < \mathsf{right}(I_{i',j'})$；$\mathsf{left}(I_{i,j}) > \mathsf{right}(I_{i',j'})$ 的情况类似。

现在让我们开始构造所需的横截对 T_k。横截对的中心顶点$b_{i,j} := I_{2i,2j}$ 通过选取网格中隔行隔列的方式获得。对于左侧顶点 a_i，我们首先提取辅助区间 $x_i := I_{2i+1,2k+1}$ 用于$i \in [k]$。我们声称，对于所有 i， i'， $j' \in [k]$

$$\text{if } i \geq i', \text{ then } \mathsf{left}(x_i) \in b_{i',j'}, \text{ and} \tag{6}$$
$$\text{if } i < i', \text{ then } b_{i',j'} \subseteq x_i \setminus \{\mathsf{left}(x_i)\}. \tag{7}$$

确实，如果 $i \geq i'$，那么 $2i + 1 > 2i'$，由此得到

$$\mathsf{left}(b_{i',j'}) = \mathsf{left}(I_{2i',2j'}) < \mathsf{left}(I_{2i+1,2k+1}) = \mathsf{left}(x_i). \tag{8}$$

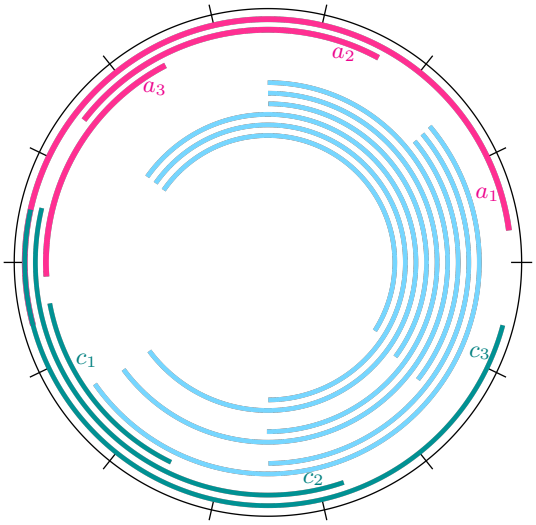


图2 横截对的圆弧表示 T_3 及其三划分 (A, B, C)。洋红色 圆弧表示 A，青色 圆弧表示 B，而 蓝绿色 圆弧表示 C。

此外，由于网格中所有区间的左端点都小于所有右端点，因此我们还有 $\mathsf{left}(x_i) < \mathsf{right}(b_{i',\,j'})$。因此，$b_{i',\,j'}$ 包含 $\mathsf{left}(x_i)$，从而证明了 (6)。另一方面，如果 $i < i'$，那么我们有 $2i+1 < 2i'$ 和 $2j' < 2k+1$，由此得到

$$b_{i',j'} = I_{2i',2j'} \subset I_{2i+1,2k+1} = x_i, \tag{9}$$

包含关系在两个端点处均为严格包含，因此可推出 (7)。

利用$\mathcal{F}$ 的极小性和引理 21，存在一个区间 $a_i \in \mathcal{F}$，使得$x_i \cap a_i = \{\mathsf{left}(x_i)\}$。由 (6) 和 (7) 可知，$a_i$ 与 $b_{i',j'}$ 相交，当且仅当 $i \geq i'$。对称地，我们定义$y_j = I_{1,2j-1}$，利用引理 21 找到 c_j，使得$y_j \cap c_j = \{\mathsf{right}(y_j)\}$，并得到 c_j 与 $b_{i',j'}$ 相交，当且仅当 $j \leq j'$。将指标顺序反转后，对 a_i,$b_{i,j}$, c_j 的前述描述给出一个横截对。◀

圆弧图的主要定理可直接由引理 20 和引理 22 得出。

▶**定理 23.** 设 $\mathcal{C}$ 是圆弧图的一个子类。那么，$\mathcal{C}$ 具有有界双宽度，当且仅当它是单子依赖的。此外，当 $\mathcal{C}$ 是遗传的，且假设固定参数可处理 $\neq$AW[$*$]时，这些条件也等价于 $\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测属于 *FPT*。

证明。 对每个 $G \in \mathcal{C}$，将 $\mathcal{F}_G$ 称为由定理 19 计算并经最小化后的圆弧表示。考虑端点矩阵 $\mathcal{M} = \{M_{\mathcal{F}_G} : G \in \mathcal{C}\}$。若 $\mathcal{M}$中的矩阵不含某个 k-网格，那么根据引理 20，可以在 FPT 时间内为 $k \in \mathbb{N}$中的图计算宽度为 $f(k)$ 的收缩序列。因此，$\mathcal{C}$具有有界双宽度（因而是单子依赖的），并且根据定理 12，$\mathcal{C}$ 中的模型检验属于 FPT。

然而，如果$\mathcal{M}$ 中的矩阵包含任意大的网格，那么根据引理 22，$\mathcal{C}$ 包含任意大的横截对。因此，根据引理 17，$\mathcal{C}$ 是单子独立的。若$\mathcal{C}$ 是遗传的，则由定理 15 可知$\mathcal{C}$ 中的模型检验是 AW[$*$]-困难的。◀

4 轴平行单位线段图的界定

本节证明定理 1 对 APUS 图成立。回顾一下，我们讨论的是非退化 APUS 图：两个水平（分别地，垂直）线段之间的交集不予考虑。

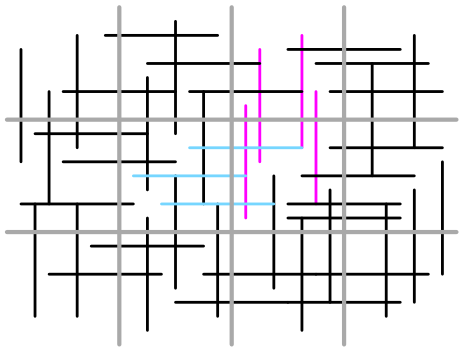


图 3 一个沿单位正方形划分的实例（以灰色绘制）。青色线段构成集合$\mathcal{H}_{s-1,\,t}$，而洋红色线段构成集合$\mathcal{V}_{s,\,t}$。它们共同构成$\mathcal{F}_{s,\,t}$。

与圆弧情形一样，对于 APUS 族$\mathcal{F}$，我们关联一个端点矩阵 $M_{\mathcal{F}}$：其列（分别地，行）是 $M_{\mathcal{F}}$ 中所有线段端点的 x-（y-）坐标；位置(x,y)处的元素为 1，当且仅当 Hor(x,y) $\in\mathcal{F}$或 Ver(x,y) $\in\mathcal{F}$。引理 20 的一个变体表明，当 $M_{\mathcal{F}}$ 没有 k-网格时，$G_{\mathcal{F}}$ 具有有界双宽度。然而，反向结论不成立：即使对$\mathcal{F}$施加适当的极小性条件，$M_{\mathcal{F}}$ 中存在网格也不意味着 $G_{\mathcal{F}}$ 具有无界双宽度。例如，若构成网格的线段彼此之间的距离均大于 1，这一结论就不成立。受 [2,引理 56], 启发，解决办法是将 APUS 图划分为对应于单位正方形的区域，并在每个区域内分别寻找网格。

4.1 沿单位正方形划分

在 APUS 族 F 中，对于 $i,j\in\mathbb{Z}$，记 H$_{s,t}$ 为线段 Hor(x,y) 的子集，其中$x\in[s,s+1)$ 且 $y\in[t,t+1)$；垂直线段对应地定义 V$_{s,t}$。显然，对于 $s,t\in\mathbb{Z}$，集合 H$_{s,t}$、V$_{s,t}$ 构成 F 的划分。另请注意，H$_{s,t}$ 中的线段与 V$_{s',t'}$ 中的线段只有在 $s'\in\{s,s+1\}$ 且 $t'\in\{t-1,t\}$ 时才可能相交。令 F$_{s,t}$ 表示 H$_{s,t}\cup$V$_{s,t}$，并令$E_{s,t}$ 表示 $G_{\mathcal{F}}$ 中包含于 F$_{s,t}$ 的边。换言之，$E_{s,t}$ 中的边来自在单位正方形 $[s,s+1)\times[t,t+1)$ 中相交的线段，这些线段分别来自该正方形的右侧和上侧（因此采用此记号）。类似地，定义 F$_{s,t,}$ $=$ H$_{s-1,t}\cup$V$_{s,t}$、F$_{s,t,}$ $=$ H$_{s,t}\cup$ V$_{s,t-1}$ 和 F$_{s,t,}$ $=$ H$_{s-1,t}\cup$ V$_{s,t-1,}$ 以及对应的边集$E_{s,t}$、$E_{s,t}$、$E_{s,t}$。对于 $s,t\in\mathbb{Z}$，集合 $E_{s,t,d}$ 和 $d\in\{,,,\}$ 构成 $G_{\mathcal{F}}$ 的边集划分。我们分别对每个 $E_{s,t,d}$ 运用第 3 节的技巧，并证明当它们的孪生宽度都有界时，$G_{\mathcal{F}}$ 的孪生宽度也有界。先从后者开始。

一般而言，边划分并不保持有界双宽度，但对于有序图则成立（定理 10）。为了运用这一结果，我们为线段定义一种序 $<_{\text{seg}}$。

一种自然的尝试是采用线段的字典序 $<_{\text{lex}}$，即 Hor(x,y) $<_{\text{lex}}$Hor(x',y') 当且仅当 $x<x'$，或者 $x=x'$ 且 $y<y'$；垂直线段也类似。然而，这种做法对孪生宽度来说效果不佳：设想线段 F $=\{h_1,\ldots,h_n,v_1,\ldots,v_n\}$，满足 h_i,v_i 在 $(0,2i)$ 附近相交。特别地，当 $i\neq j$ 时，h_i,v_j 并不相交。只需稍微调整它们的 x 坐标，就能让 $v_1,\ldots,v_n$ 的任意排列成为字典序 $<_{\text{lex}}$。因此，即便对于这些非常简单的线段族，有序交图 (F $E,<_{\text{lex}}$) 也可以是任意的有序匹配，而已知有序匹配具有无界双宽度（参见 [4]）。

解决方法是在局部和全局尺度上采用两层字典序。也就是说，我们先按（s，t）对集合 $\mathcal{H}_{s,\,t}$ 进行字典序排序，然后在每个 $\mathcal{H}_{s,\,t}$ 内部排序

将线段 Hor$(x,\ y)$ 按照 $<_{\text{lex}}$ 中的方式进行字典序排序。垂直线段也采用相同的序。最后，所有水平线段都排在所有垂直线段之前。关键的是，在 $<_{\text{seg}}$ 中，与 $<_{\text{lex}}$ 不同，每个集合 $\mathcal{H}_{s,\ t}$ 或 $\mathcal{V}_{s,\ t}$ 都是一个区间。

对于具有交图 G 的 APUS 族 $\mathcal{F}$，用 $G^{\text{seg}} := (\mathcal{F}\ E,\ <_{\text{seg}})$ 表示按 $<_{\text{seg}}$ 排序的同一个交图。进一步地，对于 $s,\ t \in \mathbb{Z}$ 和 $d \in \{\ 、\ 、\ 、\ \}$，令 $G^{\text{seg}}_{s\ t\ 、\ 、d} = (\mathcal{F}_{s,\ t,\ d},\ E_{s,\ t,\ d},\ \prec_{\text{seg}})$ 表示对 $\mathcal{F}_{s,\ t,\ d}$ 的限制。

▶ **引理 24**。 如果对于所有 s、t、d 都有 tww$(G^{\text{seg}}_{s\ t\ 、\ 、d}) \leq k$，那么对于某个函数 f，有 tww$(G^{\text{seg}}) \leq f(k)$。

证明。 根据方向 d 将边集 $E_{s,\ t,\ d}$ 分成 4 类，即定义 $\mathcal{E}_d := \bigcup_{s,\ t} E_{s,\ t,\ d}$。对于 $d \in \{\ 、\ 、\ 、\ \}$，集合 $\mathcal{E}_d$ 是边的一个划分，因此根据定理 10，只需证明每个 $(\mathcal{F},\ \mathcal{E}_d,\ <_{\text{seg}})$ 都具有有界双宽度。

我们考虑 E，其他情况类似。在 E 中，$\text{H}_{s,t}$ 的顶点仅与 $\text{V}_{s,t}$ 的顶点相邻。此外，每个 $\text{H}_{s,t}$ 和 $\text{V}_{s,t}$ 都是 $<_{\text{seg}}$ 的一个区间。区间 $\text{H}_{s,t}$ 按 (s,t) 的字典序彼此排列，而 $\text{V}_{s,t}$ 也采用相应的字典序。最后，所有 $\text{H}_{s,t}$ 都排在所有 $\text{V}_{s',t'}$ 之前。这满足引理 11 的所有要求，从而证明 $(\text{F}, \text{E}_d, <_{\text{seg}})$ 的孪生宽度至多为 $2k+2$。◀

4.2 单位正方形中的 APUS 图

现在让我们聚焦于每个 $G^{\text{seg}}_{s\ t\ ,,d}$，以找到有界双宽度或一个横截对，类似于第 3 节。

这里必须指出，图 $G_{s,t,d}$ 是圆弧图的补图。对于 $G_{0,0,}$，这是通过映射 Hor(x,y) $\mapsto [x, 1 \mp y]$ 和 Ver$(x,y) \mapsto [1+y, x]$ 实现的（区间位于 $[0, 2$ 中，模 2）。因此，第 3 节中的技术适用也就不足为奇了。不过，相关结果不能作为黑箱直接应用：为了在矩阵 $M_{\mathcal{F}_{s,t,\ d}}$ 含有大型网格时构造横截对，我们可能还需要使用 $\mathcal{F}_{s,t,d}$ 之外的线段。

当 $M_{\mathcal{F}_{s,\ t、\ d}}$ 不含 k-网格时，其交图具有有界孪生宽度。由对称性，只需证明 $\mathcal{F}_{0,0,}$的情形。与引理 20 唯一的区别在于，我们现在关注的是有序图，其序为 $<_{\text{seg}}$。

▶ **引理 25**。 设 F 是由形如 Hor(x,y) 或 Ver(x,y) 的 *APUS* 构成的族，且满足 $x, y \in [0,1)$。若矩阵 $M_{\mathcal{F}}$ 不含 k-网格，则对某个函数 f，有 tww$(G^{\text{seg}}{}_{\mathcal{F}}) \leq f(k)$。

证明。 首先，由于 $\mathcal{F}$ 中的线段坐标位于单位正方形 $[0,1)^2$，序 $<_{\text{seg}}$ 根据定义与 $<_{\text{lex}}$ 上的字典序 $\mathcal{F}$一致。

令 X、$Y \subset \mathbb{R}$ 表示 $M_{\mathcal{F}}$ 的列和行，即分别表示 $\mathcal{F}$ 中线段端点的 x-坐标集合和 y-坐标集合。我们将 $\mathcal{F}$ 视为 $X \times Y$ 上的二元关系，其中线段 $h_{x、\ y}$ 或 $v_{x、\ y}$ 被解释为有序对 $(x、y)$。我们将 $X \cup Y$ 按 $X < Y$ 排序，并在每个集合内采用自然序。于是，邻接矩阵 $Adj(\mathcal{F}\ <)$ 由 $M_{\mathcal{F}}$ 构成，另加一些空区域以将列扩展至 Y、将行扩展至 X。因此，$Adj(\mathcal{F}\ <)$ 不含 k- 网格；根据引理 8，关联矩阵 $Inc(\mathcal{F}\ <、\ <_{\text{lex}})$ 不含 $4k$- 网格。

现在构造如下有序图 $H = (V,\ E,\ <)$。顶点集为 $V := X \uplus Y \uplus \mathcal{F}$，按 $X < Y < \mathcal{F}$ 排序，其中 X，Y 内部按自然序排列，而$\mathcal{F}$内部按字典序排列。E 中的边将每个线段 $h_{x,\ y}$ 或 $v_{x,\ y}$ 连接到其端点的坐标 $x \in X$ 和 $y \in Y$。因此，E 的邻接矩阵由$Inc(\mathcal{F}\ <,\ <_{\text{lex}})$及其转置组成，并排列为对角块。可以验证，该矩阵不含 $(4k+1)$-网格，因此根据定理 9，H 的孪生宽度有某个 $f(k)$ 作为上界。

总之，只需证明存在一个固定的一阶转导 Φ 使得$G^{\text{lex}}_{\mathcal{F}} \in \Phi(H)$。事实上，由 [5, 定理 8.1] 可知，这意味着 tww$(G^{\text{lex}}_{\mathcal{F}}) \leq g(\text{tww}(H) \leq g(f(k))$

其中某个函数 g 仅依赖于 Φ，从而证明了该结果。给定 H，转导 Φ 按如下方式进行：

- 首先，使用非确定性着色来区分顶点的子集 X、Y 和 F，并指示顶点 $w \in$F 是水平线段还是垂直线段。接下来，注意到由于坐标 x、y、x'、y' 被限制为 $[0,1)$，线段
- Hor(x, y) 与 Ver(x', y') 相交，当且仅当 $x \leq x'$ 和 $y' \leq y$。要检验两条线段 s、$s' \in$ F 是否相交，只需检查：(1) 一条是水平线段而另一条是垂直线段（使用步骤 1 中给出的颜色）；(2) 它们的坐标满足前述不等式。后者通过沿着 E 的边，从 s、s' 跟踪到它们的坐标，并将其与序 $<$ 进行比较来检验。上述所有内容都可以表示为一阶公式 $\phi(s, s')$。最后，删除 X、Y 的顶点，并通过上述公式 $\phi(h, v)$ 重新定义边集，同时保留相同的序 $<$，其在 F 上的限制为 $<_{\text{lex}}$。
-

假设在染色步骤中做出了正确的非确定性选择，显然，当且仅当 s, s' 相交时，$\phi(s, s')$成立，因此得到的结构就是$G_{\mathcal{F}}^{\text{lex}} = G^{\text{seg}}{}_{\mathcal{F}}$，从而证明了该结果。◀

现在我们证明，当$M_{\mathcal{F}_{s,\,t,\,d}}$ 确实包含一个网格时，$G_{\mathcal{F}}$ 包含一个横截对。与第 3 节一样，这需要某种极小性假设。

这里，我们假设坐标是离散的，如第2.6节所述；也就是说，在一个 APUS 族$\mathcal{F}$中，线段的坐标都是某个 $\eta(\mathcal{F}) > 0$的非负整数倍。在此条件下，如果$\mathcal{F}$ 中的线段无法在保持交图不变的同时朝左下方移动，我们就称$\mathcal{F}$ 是极小的。形式化地说，对于固定的 $\eta = \eta(\mathcal{F})$，如果不存在另一个不同的族$\mathcal{F}'$，使其具有相同的 $\eta = \eta(\mathcal{F}')$，并存在一个双射 $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$，该双射保持垂直/水平方向、是交图之间的同构，且 $\phi(s)$的端点坐标逐项不大于 s的端点坐标，那么我们就称$\mathcal{F}$ 是极小的。

▶ 引理 *26*。在一个经过极小化的 *APUS* 族 *F* 中，对于任意水平的 *Hor*$(x, y) \in F$，都存在：*1.* 一个垂直线段 *Ver*$(x - \eta, y')$ 或 *Ver*$(x + 1, y')$，满足 $y' \leq y \leq y' + 1$，除非 $x = 0$；以及 *2.* 一个垂直线段 *Ver*$(x', y - 1 - \eta)$ 或 *Ver*(x', y)，满足 $x \leq x' \leq x + 1$，除非 $y = 0$；当交换垂直与水平的角色，以及 x-坐标和 y-坐标时，同样成立。

证明。如果情况并非如此，Hor(x、y) 可以通过 η 将其向左（情况 1）或向下（情况 2）移动，而不改变交图，这与极小性矛盾。◀

▶ **引理 27**。考虑一个经过极小化的 *APUS* 族 *F*，以及其限制 $F_{s、t、d}$，其中 s、$t \in \mathbb{Z}$ 和 $d \in \{$，，，$\}$。存在一个函数 f:∟ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得如果 $M_{\mathcal{F}_{s、t、d}}$ 具有一个 $f(k)$- 网格，那么 $G_{\mathcal{F}}$ 包含一个横截对 T_k。

证明。取一个 $f(k)$-网格于 $M_{\mathcal{F}_{s,t,d}}$，其中 $f(k)$ 是 k 的某个足够大的函数，具体取值稍后确定。它由点 $(p_{i,j})_{i,j\in[f(k)]}$ 构成，如第 2.2 节所述。每个$p_{i,j}$ 在 F 中对应一条水平线段（其左端点为 $p_{i,j}$），或一条垂直线段（其下端点为 $p_{i,j}$）。根据定理 6，如果该网格的大小至少为 $R(g(k), 2)$，那么我们可以找到一个仅由水平线段或仅由垂直线段组成的 $g(k)$-子网格。因此，我们固定 $f(k) = R(g(k), 2)$（其中 $g(k)$ 的取值稍后确定），并不失一般性地假设我们找到一个仅由水平线段组成的 $g(k)$-子网格 $(h_{i,j})_{i,j\in[g(k)]}$，它位于 $F_{s,t,d}$ 中。回顾一下，$F_{s,t,d}$ 中的水平线段要么全都属于 $H_{s,t}$，要么全都属于 $H_{s-1,t}$，具体取决于方向 d。不妨设它们属于 $H_{s,t}$。因此，线段$h_{i,j}$ 的左端点位于正方形 $[s, s + 1) \times [t, t + 1$ 中。

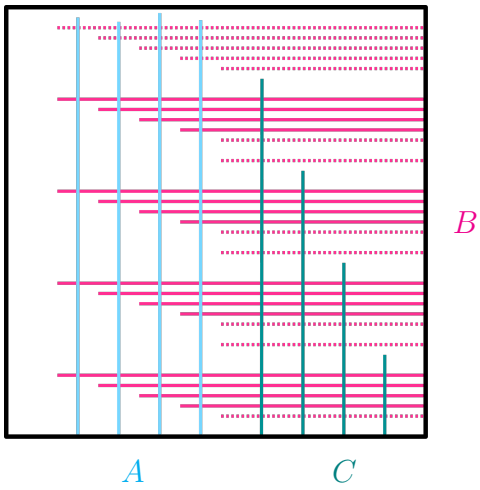


图 4 横截对 T_4 作为 APUS 图。洋红色 线是一个8-网格的一部分。其中一些（实线）被选为 B。其余（虚线）用于定义 A，C：青色 （分别是 蓝绿色）线构成 A （分别是 C），确保这些虚线具有水平（分别是垂直）极小性。

我们还可以假设，线段 $h_{i,\,j}$ 的端点都不在 $x=0$ 或 $y=0$ 处：只需移除网格的第一行和第一列即可确保这一点。然后，由于 $\mathcal{F}$ 是极小的，引理 26 表明，对于 $\mathcal{F}$ 中每个 $h_{i,\,j}=\mathrm{Hor}(x,\,y)$，都存在某条线段 $\mathrm{Hmin}(h_{i,\,j})\in\mathcal{F}$，确保 $h_{i,\,j}$ 的水平极小性（即阻止其向左移动），其形式如下：

- 要么 $\mathrm{Hmin}(h_{i,\,j})=\mathrm{Ver}(x-\eta,\,y')\in\mathcal{F}$，其中 $y'\le y\le y'+1$，
- 要么 $\mathrm{Hmin}(h_{i,\,j})=\mathrm{Ver}(x+1,\,y')\in\mathcal{F}$，其中 $y'\le y\le y'+1$。

类似地，存在某个 $\mathrm{Vmin}(h_{i,\,j})\in\mathcal{F}$，确保 $h_{i,\,j}$ 具有垂直极小性（阻止其向下移动），形式如下：

- 要么 $\mathrm{Vmin}(h_{i,\,j})=\mathrm{Ver}(x',\,y)\in\mathcal{F}$，其中 $x\le x'\le x+1$，
- 或 $\mathrm{Vmin}(h_{i,\,j})=\mathrm{Ver}(x',\,y-1-\eta)\in\mathcal{F}$ 满足 $x\le x'\le x+1$。

最后，我们关心 $\mathrm{Hmin}(h_{i,\,j})$ 是否与坐标为 $y=t$ 的水平线相交，或者 $y=t+1$。注意，对于 $\mathrm{Vmin}(h_{i,\,j})$，这并不重要：线段 $\mathrm{Ver}(x',\,y)$ 总会与直线 $y=t+1$ 相交，而 $\mathrm{Ver}(x',\,y-1-\eta)$ 与直线 $y=t$ 相交。

为 $h_{i,\,j}$ 这些点着色，使其符合 $g(k)$-网格的所有先前情形，即指明：**1.** $h_{i,\,j}$ 的水平极小性是在左侧还是右侧得到保证，**2.** $h_{i,\,j}$ 的垂直极小性是在上方还是下方得到保证，以及 **3.** $\mathrm{Hmin}(h_{i,\,j})$ 是否与直线 $x=s+1$ 相交。

总共有 8 种可能的颜色。对于 $g(k)$ 的适当取值，定理 6 得出一个单色 $2k$-子网格。假设定理 6 的结果是，这个 $2k$-网格满足以下条件：

1. 对于每个 $h_{i,j}=\mathrm{Hor}(x,y)$，左侧满足水平极小性，即 $\mathrm{Hmin}(h_{i,j})=\mathrm{Ver}(x-\eta,y')$，其中 $y'\le y\le y'+1$。**2.** 类似地，$h_{i,j}=\mathrm{Hor}(x,y)$ 的垂直极小性在底部得到保证，即 $\mathrm{Vmin}(h_{i,j})=\mathrm{Ver}(x',y-1-\eta)$，其中 $x\le x'\le x+1$。**3.** 最后，线段 $\mathrm{Hmin}(h_{i,j})$ 都与直线 $x=s+1$ 相交。

这种情况如图 4 所示。所有其他情况也可以用类似的方法处理，只需在构造的其余部分适当地反转指标。

回顾一下，根据网格的定义，$h_{i,\ j}$ 的 x 坐标和 y 坐标满足

$$\text{if } i < i', \text{ then } \pi_x(p_{i,j}) < \pi_x(p_{i',j'}) \qquad \text{and} \qquad \text{if } j < j', \text{ then } \pi_y(p_{i,j}) < \pi_y(p_{i',j'}).$$

由此，结合关于 Hmin($h_{i,\ j}$) 的假设，以下结论显然成立：$i,\ i',\ j,\ j' \in [2k]$ ：

$$\text{if } i < i', \text{ then } \mathsf{Hmin}(h_{i,j}) \text{ does not intersect } h_{i',j'}, \text{ and} \tag{10}$$
$$\text{if } i > i' \text{ and } j > j', \text{ then } \mathsf{Hmin}(h_{i,j}) \text{ does intersect } h_{i',j'}. \tag{11}$$

因此，若取 a_i :=Hmin($h_{2i,\ 2k}$) 和 $b_{i',\ j'} := h_{2i'-1,\ 2j'-1}$，则 a_i, $b_{i',\ j'}$ 相交当且仅当 $i \geq i'$。

同样，由关于 Vmin($h_{i,\ j}$) 的假设可得，对于 $i,\ i',\ j,\ j' \in [2k]$:

$$\text{if } j < j', \text{ then } \mathsf{Vmin}(h_{i,j}) \text{ does not intersect } h_{i',j'}, \text{ and} \tag{12}$$
$$\text{if } i > i' \text{ and } j > j', \text{ then } \mathsf{Vmin}(h_{i,j}) \text{ does intersect } h_{i',j'}. \tag{13}$$

因此，对于 c_j := Vmin($h_{2k,\ 2j}$)（以及相同的 $b_{i',\ j'} := h_{2i'-1,\ 2j'-1}$），有 c_j, $b_{i',\ j'}$ 相交当且仅当 $j \geq j'$。

对 a_is 的指标顺序进行反转后，顶点 a_i, $b_{i,\ j}$ 和 c_j 构成定义 16 中所述的一个横截对 T_k。

◀

APUS 图的主要定理可由引理 24、25 和 27 推出，证明思路与定理 23 相同，另需增加将图拆分为单位正方形这一步（引理 24）。由于计算图的 APUS 表示是 NP 困难的，[15], 一阶逻辑模型检测的复杂性也因此出现了一些微妙之处：我们假设图以其 APUS 表示给出，并利用如下事实：如图 4 所示，横截对的 APUS 表示很容易计算。

▶**定理 28.** 设 $\mathcal{C}$ 是非退化 *APUS* 图的一个子类。那么，$\mathcal{C}$ 具有有界双宽度，当且仅当它是单子依赖的。此外，当 $\mathcal{C}$ 是遗传的，且假设 固定参数可处理 $\neq$AW[$*$] 时，这些条件还等价于：当 $\mathcal{C}$ 中的图由某种 *APUS* 表示给出时，$\mathcal{C}$ 上的一阶逻辑模型检测是固定参数可处理的。

证明。考虑 C 中图的所有离散且最小化的 APUS 表示 F。对于每个表示，进一步考虑其子族 $\mathrm{F}_{s,t,d}$ 对于 $s,t,\in\mathbb{Z}$ 和 $d \in \{,,,\}$，以及它们的端点矩阵 $M_{\mathcal{F}_{s,t,d_0}}$。将所有上述 F s,t,d 的选择所对应的矩阵 $M_{\mathcal{F}_{s,t,d}}$ 组成的类称为 M。如果存在一个 k，使得 M 中没有任何矩阵含有 k-网格，那么根据引理 25，有序图 G^{seg} $\mathrm{F}_{s,t,d}$的孪生宽度由某个 $f(k)$ 所界。由引理 24 可知，完整的交图 G^{seg} F 也具有有界双宽度，即 C 具有有界双宽度。另一方面，如果 M 中存在网格大小任意大的矩阵，那么引理 27 给出 C 中图里横截对的大小任意大，因此 C 是单子独立的。

假设$\mathcal{M}$ 不含 k-网格。注意，对于任意一个 $G \in \mathcal{C}$ 的 APUS 表示，都可以在多项式时间内找到一个离散的极小表示$\mathcal{F}$，并计算出具有有界孪生宽度的有序图 $G^{\mathsf{seg}}{}_{\mathcal{F}}$。由于这是一个有序图，[4, 定理 7]给出了一个 FPT 算法，可用于寻找一个具有有界宽度的收缩序列。根据定理 12，$\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测是 FPT。

另一方面，如果$\mathcal{C}$ 是遗传的，且包含任意大的横截对（因而是单子独立的），那么定理 15 表明，$\mathcal{C}$中的一阶逻辑模型检测是 AW[$*$]-难的，前提是输入是图 $G \in \mathcal{C}$ 本身。我们想要证明，即使图是由某种 APUS 表示给出的，该问题仍然是困难的。

注意，$\mathcal{C}$ 是一类二分图。一般来说，横截对是在若干无约束顶点对的意义下定义的，也就是说，这些顶点对可以是边，也可以不是边（见定义 16）。

然而，对于二分图，可以验证这些无约束顶点对都必须不是边。因此，讨论阶为 k 的横截对 T_k 是有意义的，它在$\mathcal{C}$中有唯一确定的定义。对于任何 T_k，或其任意诱导子图，图 4 给出了一个 APUS 表示，可在多项式时间内计算得出（这一构造已在 [3,图 3.4]中出现）。这就给出了一个 FPT 归约：将以图形式给出的横截对上的模型检验（该问题是 AW[$*$]-困难的），归约为对由某个 APUS 表示给出的$\mathcal{C}$ 中的图进行模型检验。◀

4.3 具有固定可取长度集合的线段

现在我们考虑定理 1 最后一项中的 APUS 的推广：长度属于固定有限集合 $X \subseteq \mathbb{R}_+$ 的轴平行线段。根据紧致性，可以假设这些长度都是有理数，因此，经过缩放后，这等价于要求线段的长度为整数，且属于某个固定的 $L \in \mathbb{N}$ 中的{1、.....、 L}。

▶**定理 29**。 设 $\mathcal{C}$ 是由非退化轴平行线段图组成的类，其线段长度属于某个固定的 $[L]$ L。那么，$\mathcal{C}$ 具有有界孪生宽度，当且仅当它是单子依赖的。此外，当 $\mathcal{C}$ 是遗传的，且假设 固定参数可处理 $\neq$ AW[$*$] 时，这些条件还等价于 $\mathcal{C}$ 中的一阶逻辑模型检测（给定线段表示）是固定参数可处理的。

证明概要。 设 $\mathcal{F}$ 为一族长度属于 $[L]$ 的轴平行线段。我们再次根据线段的方向、包含其第一个端点的单位正方形，以及现在还要考虑的线段长度对线段进行划分。也就是说，定义 $\mathcal{H}_{s,\ t,\ \ell}$ 包含 $\mathcal{F}$ 中长度为 ℓ 且左端点位于 $[s, s+1) \times [t, t+1)$ 中的所有水平线段；类似地，定义 $\mathcal{V}_{s,\ t,\ \ell}$表示垂直线段。显然，$\mathcal{H}_{s,\ t,\ \ell}$ 中的线段与$\mathcal{V}_{s',\ t',\ \ell'}$ 中的线段只有在 $|s - s'|$ 和 $|t - t'|$ 至多为 L 时才可能相交。我们还推广了线段的全局排序 $<_{\text{seg}}$，以将线段长度纳入考虑。排序 $<_{\text{seg}}$ 依次按照以下顺序对线段进行排序：(1) 方向；(2) 线段长度；(3) 按字典序排列的包含端点的正方形；最后是 (4) 按字典序排列的端点坐标。

推广引理 24，若由 $\mathrm{H}_{s,t,\ell} \cup \mathrm{V}_{s',t',\ell'}$诱导的有序交图对于所有参数 $s, t, s', t', \ell, \ell'$的孪生宽度至多为 k，则完整的有序交图 (F $E, <_{\text{seg}}$) 的孪生宽度由 k 和 L 的某个函数界定。证明基本相同： $G_{\mathcal{F}}$的每条边都连接某个集合 $\mathrm{H}_{s,t,\ell}$ 和 $\mathrm{V}_{s',t',\ell'}$，其中 $i := s - s'$ 和 $j := t - t'$ 均属于 $\{-L, \ldots, L\}$。随后，我们按照上述偏移量 i, j 以及长度 ℓ, ℓ' 对 $G_{\mathcal{F}}$的所有边进行分类。这是将边集划分为 $O(L^4)$ 个组；根据定理 10，只需证明这些边类中的每一类都给出一个具有有界孪生宽度的有序子图即可。后者可通过完全按照引理 24 的证明使用引理 11 来获得。

- 接下来，几乎无需修改，引理 25 和 27 就可以加以改编，从而证明：如果$\mathcal{H}_{s,t,\ell} \cup \mathcal{V}_{s',t',\ell}$ 中线段的端点不构成网格，那么按 $<_{\text{seg}}$ 排序的相应诱导子图具有有界双宽度；但如果这些端点确实构成一个 $f(k)$-网格（对于适当的 f），且$\mathcal{F}$已取到最小，则 $G_{\mathcal{F}}$ 包含横截对 T_k。

这些结果结合起来，便可像定理 28 那样证明该定理。◀

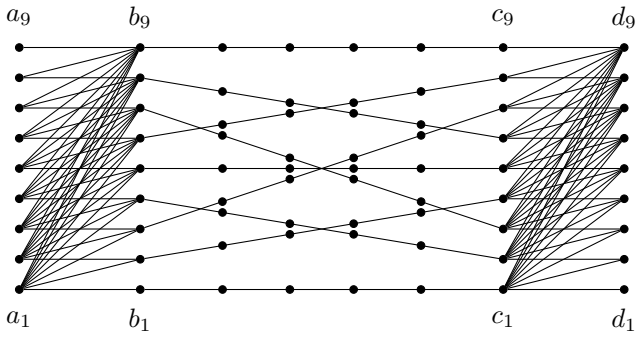
5 界定的障碍

在本节中，我们构造具有无界孪生宽度、但一阶逻辑模型检测属于固定参数可处理的问题的图。我们利用这些图证明，对于 1.5D 地形可见图，不可描绘性不成立；当放宽定理 28 的任一假设时，结论也同样不成立。

具体而言，我们构造一个图类 $\mathcal{H}$ ，其中结合了半图和长度略大于常数的路径，并证明它的孪生宽度无界，但合并宽度 [9]有界。后者意味着 FPT 模型检测和单子依赖。图类 $\mathcal{H}$ 与作为不可描绘性基本示例的所有次三正则图类 [2]有显著区别：$\mathcal{H}$ 的任何单子稳定（即不能转导所有半图）子类都具有有界孪生宽度。这为 [2,猜想 66]提供了一个具体的反例。Samuel Braunfeld 此前曾发现该猜想的另一个非显式反例（个人交流）。

5.1 构造

令 $\mathfrak{S}_n$ 表示 $[n]$ 的排列集合。给定长度为 $\ell > 0$ 的 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ，定义 H_σ^ℓ 如下（见图 5）。创建顶点 a_i， b_i， c_i， d_i ，其中 $i \in [n]$，形成两个互不相交的半图，其边为 $a_i b_j$ 和 $c_i d_j$ ，对所有 $i \le j$ 均成立。然后，用一条长度为 ℓ 的路径连接 b_i 和 $c_{\sigma(i)}$ 。对于函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们定义图类 $\mathcal{H}f := \{H_\sigma^{f(n)}\colon n \in \mathbb{N},\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$。



Figu图 5 排列 $\sigma = 14725$ 对应的图 H_σ^5 8369。

当 f 增长缓慢时，我们通过转导 $f(n)$-细分的、大小为 $\sqrt{n}$ 的完全二分图，证明 $\mathcal{H}f$ 具有无界孪生宽度；已知这类完全二分图具有无界孪生宽度 [3]。

▶ **事实 30. </style}对于 (n) $= o(\log n)$ </style}为正函数的情形，Hf 具有无界孪生宽度。**

证明。记 $K_{n,n}$ 为每侧有 n 个顶点的完全二分图，并记 $K_n^{(\ell)},_n$ 为将该完全二分图的每条边替换为长度为 ℓ的路径后得到的图。对于正函数 g，考虑类 K$g := \{K_n^{(g(n))},_n : n \in \mathbb{N}\}$。定理 6.2] 的一个简单变体表明，只要 $g(n) = o(\log n)$ 且 $g(n) \ge 2$，Kg就具有无界孪生宽度。我们将证明，当 $g(n) := f(n^2) + 2$时，Hf可以转导 Kg。注意， $f(n) = o(\log n)$ 蕴含 $f(n^2) = o(\log n)$，因此 Kg 确实具有无界孪生宽度。根据定理 8.1], ，这一转导意味着 Hf 也具有无界孪生宽度。

具体而言，我们构造一个一阶转导 Φ ，满足以下条件：若 σ是定义在 n^2 个元素上的万能排列，其定义为 $\sigma(in + j + 1) = jn + i + 1$，其中 i， $j \in \{0, \ldots\ldots, n-1\}$，那么对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$， $\Phi(H_\sigma^\ell) \ni K_n^{(\ell+2)},_n$。在下文中， $N := n^2$ 表示 σ的大小。

该转导 Φ 的过程如下。请注意，多个转导的复合仍然是一个转导（引理 13）。

- 首先，在 A 和 D中每隔 n个顶点选取一个顶点，也就是说，定义 $x_i := a_{(i-1)n+1}$ 和 $X := \{x_i : i \in [n]\}$，并对称地定义 $y_i := d_{in}$ 和 $Y := \{y_i : i \in [n]\}$。这些将成为 $K_n^{(\ell+2)},_n$中的高阶顶点。 $A \setminus X$ 和 $D \setminus Y$ 中的顶点将不会用到，

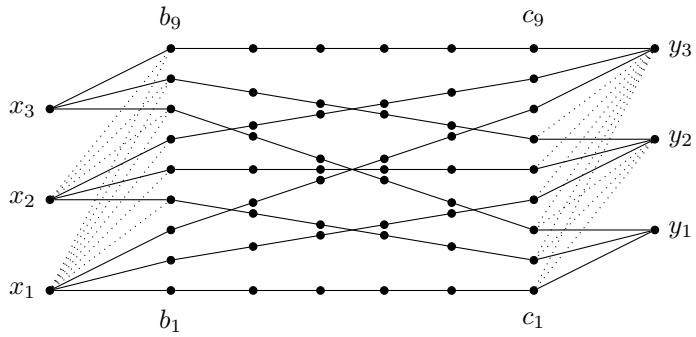


图6 从 H_σ^5 到细分双团 $K_{3\,3}^{(7)}$ 的转导，对应于 $\sigma = 147258369$。多余的顶点 $A \setminus X$ 和 $D \setminus Y$ 已被移除。实线边构成 $K_{3\,3}^{(7)}$，而转导只需移除半图中的虚线边即可得到它。

转导 Φ 首先通过删除它们来开始（取任意诱导子图都是一种转导
用非确定性着色标记要保留的顶点，并且在解释步骤中只保留这些顶点）。

接下来，使用非确定性着色标记每个子集 X, Y，以及 $B := \{b_i\}^{i \in [N]}$ 和 $C := \{c_i\}^{i \in [N]}$。现在我们的目标是当且仅当 $(i-1)n < j \leq in$ 时保留边 $x_i b_j$。注意，当且仅当满足以下条件时，这个不等式成立：（1） $x_i b_j$ 是一条边；（2） x_i 在具有此性质的元素中是极小的，也就是说，任何其他与 b_j 相邻的 $x' \in X$ 都满足 $N(x_i) \subseteq N(x')$。这两个条件可以用一阶公式 $\phi(x_i, b_j)$ 表达，从而通过解释只保留所需的边（见图6）。A

可以使用类似的论证来保留边 $c_j y_i$ 当且仅当 $(i-1)n < j \leq in$。
T此步骤不会修改 B 与 C 之间路径的边。

假设作出了“正确”的非确定性选择，则所得的图由两个族的 n 星组成，每个星有 n 条分支，其中以 x_is（分别以 y_is）为中心，以 b_js（分别以 c_js）为分支。万能排列 σ 的选择确保每个 x_i-星都通过一条长度为 ℓ的路径与每个 y_i-星相连，从而得到图 $K_{n\,n}^{(\ell+2)}$。。◀

另一方面，当 f 趋于无穷时，类 $\mathcal{H}f$ 具有有界合并宽度。更一般地，我们证明如下结论。

▶ **引理 31**。 设 G 是一个满足 $\mathsf{mw}_r(G) = k$的图，并且 $\ell > 2r$。任取若干对顶点 $(x_1, y_1) \ldots, (x_m, y_m)$，对每一对顶点，都从 x_i 到 y_i添加一条长度为 ℓ 的新路径，并使用新的内部顶点。将所得图称为 G'。则 $\mathsf{mw}_r(G') \leq \max(k+1, 4)$。

证明。 将 P_i 称为长度为 ℓ、连接 x_i 和 y_i 的 $i \in [m]$路径，并将其顶点记为 $x_i = v_i^0 v_i^1 v_i^2 \ldots v_i^{\ell-1} v_i^\ell = y_i$。在第一阶段，我们通过归纳处理路径 P_i，并将它们的内部顶点合并为一个部分。

先在路径 $x_1 v_1^1 v_1^2 v_1^3$ 中正向处理边，然后将 $\{v_1^1\}$，$\{v_1^2\}$ 合并到同一部分中。接下来处理 $v_1^3 v_1^4$，并将 $\{v_1^3\}$ 与 $\{v_1^1, v_1^2\}$合并，然后重复此过程，直到 P_1 全部处理完毕，且其所有内部顶点都位于同一部分中。然后以类似方式处理 P_2，别忘了将其内部顶点与 P_1 的内部顶点合并。一般而言，在处理 P_i 中的顶点 v_i^j 之前，已处理的边包括 $P_1, \ldots, P_{i-1}$ 的所有边，以及 P_i 的前缀 $x_1 \ldots v_i^j$ 的所有边；当前划分中有一个部分 S，其中包含 $P_1, \ldots, P_{i-1}$ 的所有内部顶点，以及 $v_i^1, \ldots, v_i^{j-1}$，其他所有顶点则各自构成单元素集合。接下来的步骤是

正向处理 v_i^j 与 v_i^{j+1}，并将 v_i^j 合并到 S 中。注意，在此过程中，半径为 r 的宽度至多为 4。完成后，所有 P_i 的内部顶点都合并到单个部分 S 中，而 P_i 的所有边都已处理。

接下来，我们继续构造序列，以证明 G witnessing $\mathsf{mw}_r(G) = k$。由于路径 P_i 的长度大于 r，顶点 $v \in V(G)$无法利用它们到达除 S以外的任何新部分。此外，对于顶点 $v_i^j \in P_i$，从 v_i^j 可经 r到达的所有部分，也必须能从 x_i 到达（如果 $j \le r$），或者从 y_i 到达（如果 $j \ge \ell - r > r$）。因此，构造序列第二部分的半径-r 宽度至多为 $k+1$。

此时，$V(G)$中的所有顶点对以及 P_i的所有边都已处理完毕，只剩下两个部分：S 和 $V(G)$。我们将它们合并，并对所有剩余的顶点对作负向处理，以完成构造序列。G' 的这个构造序列的宽度至多为 $\max(k+1, 4)$。◀

▶**事实 32.** 对于任意趋于无穷大的函数 f，类 H^f 的合并宽度有界 h.

证明。容易验证，在任意半径下，半图的合并宽度至多为 3（也可以通过团宽度，利用 [9, 定理 7.1] 得到一个上界）。由于 H_σ^ℓ 是通过引理 31 中描述的过程从半图得到的，因此可知 $\mathsf{mw}_r(H_\sigma^\ell) \le 4$只要 $\ell > 2r$。

现在将 g记作 f 的某个逆函数，意即对于所有 n，都有 $n \le g(f(n))$。现在考虑某个排列 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$对应的 $H_\sigma^{f(n)} \in \mathcal{H}f$。注意，$|V(H_\sigma^{f(n)})| = n \cdot (f(n) + 3)$，这是 $H_\sigma^{f(n)}$在任意半径 r下的合并宽度的一个平凡上界。如果 $f(n) \le 2r$，那么根据 g 的选取，我们有 $n \le g(2r)$，这意味着

$$\mathsf{mw}_r(H_\sigma^{f(n)}) \le n \cdot (f(n)+3) \le g(2r) \cdot (2r+3),$$

而如第一段所述，若 $f(n) > 2r$，则 $\mathsf{mw}_r(H_\sigma^{f(n)}) \le 4$。这证明了 $\mathcal{H}f$ 具有有界合并宽度。◀

现在例如取 $f(n) := \log\log n$，并考虑 $\mathcal{H} := \mathcal{H}f$。

▶推论 *33. </style>*类 H 具有无界孪生宽度，但单子依赖，且 H 上的一阶逻辑模型检测属于固定参数可处理。

证明。类 $\mathcal{H}$ 根据事实 30 具有无界孪生宽度，根据事实 32 具有有界合并宽度。根据定理 18，后者意味着单子依赖，且模型检测属于固定参数可处理。

◀

5.2 线段图中的不可描绘性

现在我们可以证明定理 29 的所有假设都是必需的：只要放宽其中任意一条，就能得到不可描绘类 $\mathcal{H}f$（对于任意满足 $f(n) \ge 3$ 的函数 f）作为交图。

▶**定理 2**。存在一个遗传图类 C，其一阶逻辑模型检测属于 FPT，但孪生宽度无界，并且可以实现为以下任意类型线段的交图：

1. 退化的轴平行单位线段，**2.** 处于一般位置的轴平行线段，其中线段长度仅取两个值（但这两个值可以随图 $G \in \mathcal{C}$而变化），**3.** 处于一般位置且长度属于 $[1, 1+\epsilon]$ 的轴平行线段，其中 $\epsilon > 0$为任意固定值，或者

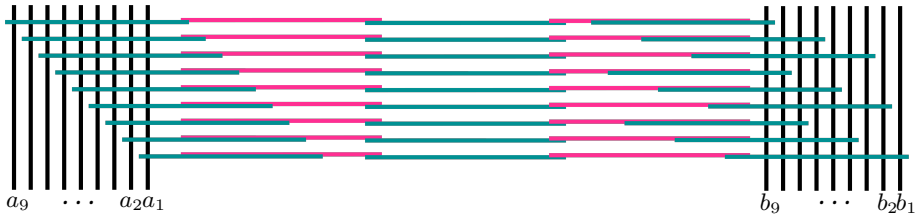


图7 一个退化 APUS，其交图为 H_σ^5 for $\sigma = 147258369$。

4. 处于一般位置的单位线段，即使线段斜率仅限于“垂直”、“水平加 ϵ”和“水平减 ϵ”。

证明。 图7 展示了如何构造任意图 H_σ^ℓ（带有 $\ell \geq 2$），使其成为 APUS 图，条件是允许水平线段之间相交。因此，推论 33 中的类 $\mathcal{H}f$ 是一个退化 APUS 图类，从而证明了第 1 点。

几乎相同的构造也可用于第 2 点和第 4 点。对于第 2 点，我们通过添加一条微小垂直线段 v（它仅与这两条线段相交），来模拟两条水平线段 h_1，h_2 之间的相交。这只会使交图中两个半图之间的路径长度加倍，但不会改变该类不可描绘这一事实。对于第 4 点，可以将图7中的水平线段交替地稍微倾斜为略高于或略低于水平，从而使线段族处于一般位置，同时保持相同的交图。

最后，为了证明第 3 点，我们再次得到任意图 H_σ^ℓ，不过采用了略有不同的构造，如图 8 所示。◀

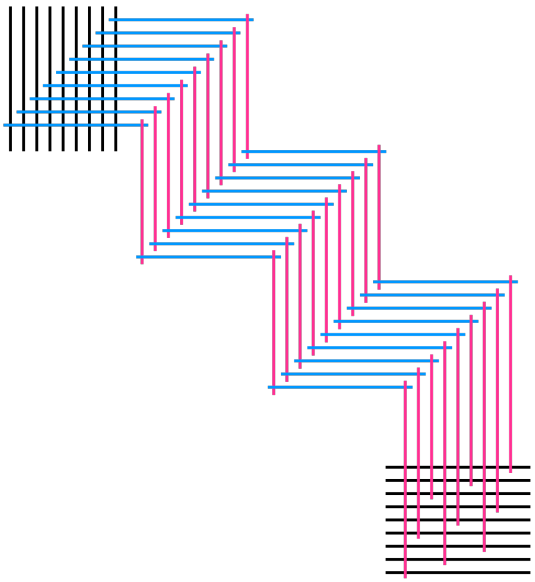


图 8 将图 H_σ^5 构造成轴平行线段的交图，其中线段长度介于 1 和 2 之间。唯一长度不为 1 的线段位于最底部垂直组中，用于将任意排列表示为半图。通过将每组线段排列得更紧密，可以使此构造所需的线段长度任意接近 1。

5.3 1.5D 地形可见图

这种构造的一个变体可用于地形可见图：

▶**定理 3**。 存在一类 *1.5D* 地形可见图 *C*，其遗传闭包允许进行 *FPT* 一阶逻辑模型检测，但其孪生宽度无界。

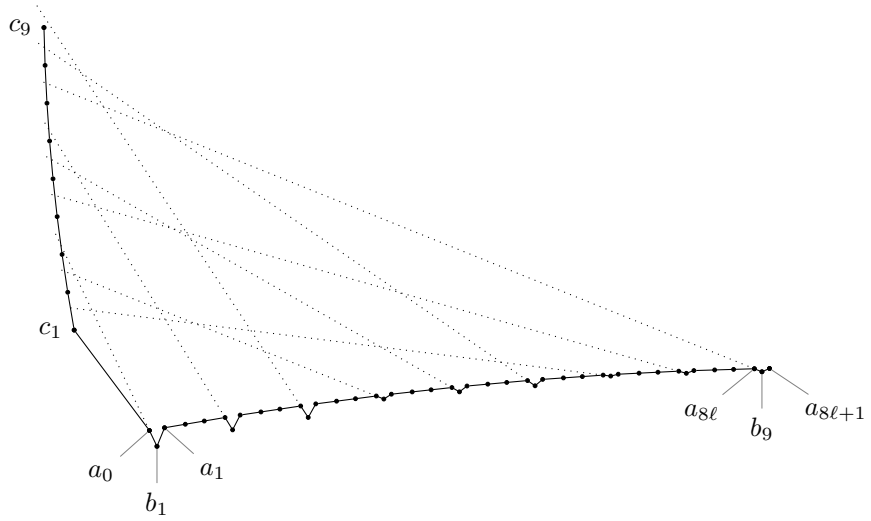


图 9 不可描绘的地形可见图的构造。虚线表示每个 b_i的“地平线”，可通过上下移动 b_i 来控制。这使得 b_i和 c_j之间的半图能够表示 b_i的任意排列，此处为 369258147。

为证明这一结果，我们构造了图 H_σ^ℓ 的一个变体，使其成为地形可见图。考虑图 9 所示的以下地形。在左侧构造一条近似竖直路径 $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$，其中 c_n 位于最左上方，c_1 位于最右下方。这条路径略微凸起，因此 C 在可见图中构成一个团。在 C的右侧和下方，构造一条近似水平路径 $A = \{a_1, \ldots, a_{\ell(n-1)+1}\}$，使其略微凹陷，从而让 $a_1, \ldots, a_{\ell(n-1)+1}$ 在可见图中构成一条路径。 A和 C上的点的位置安排如下：对于所有 i, j， a_i 和 c_j 彼此可见。

现在，对于每个 $i \in [n]$，我们在 $a_{\ell(i-1)}$ 和 $a_{\ell(i-1)+1}$ 之间稍下方添加一个点 b_i。点 b_i 无法被任何其他 a_j看见，添加它不会改变 $B \cup C$中的可见性。通过调整 b_i 相对于 $a_{\ell(i-1)}$的高度，可以控制其“地平线”的高度。因此，可以将 b_i 放置在能够看见 $c_{\sigma(i)}$、…、c_n，但看不见 c_1、…、$c_{\sigma(i)-1}$的位置。

因此，该地形的可见图如下。 B 和 C 之间是一个半图，其中当 $j \geq \sigma(i)$ 时有边 $b_i c_j$。此外， $A = a_1$、…、$a_{\ell n}$是一条路径，而 b_i与 $a_{\ell(i-1)}$、$a_{\ell(i-1)+1}$ 相邻，且与 A的其他顶点均不相邻。最后， B 没有边， C 是一个团， A 和 C 之间是一个完全二部图。我们将这个图称为 G_σ^ℓ，并为函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$定义图类：

$$\mathcal{G}_f := \left\{ G_\sigma^{f(n)} : n \in \mathbb{N} \text{ and } \sigma \text{ is a permutation on } [n] \right\}.$$

我们证明，当 f 足够小时，这个类具有无界孪生宽度。证明与事实 30 类似，不同之处在于，我们转导的是细分团，而不是细分完全二分图。

▶**事实 34**。 对于 $f(n)$ 是（$log = o$） n的正函数，G_f 具有无界孪生宽度。

证明。我们将 K_n^ℓ 表示为具有 n 个顶点的团，其中每条边都被替换为长度为 ℓ的路径。对于正函数 g，考虑类 $\mathsf{K}_g := \{K_n^{g(n)} : n \in \mathbb{N}\}$。已知，当 $g(n) = o(\log n)$ 且 $g(n) \geq 2$ [3,时，K_g 具有无界孪生宽度（定理 6.2]）。我们证明，对于 $g(n) := f(n^2) + 2 = o(\log n)$，$\mathsf{G}_f$可转导 K_g。根据 [5, 定理 8.1]，G_f也具有无界孪生宽度。

我们构造一个一阶逻辑转导 Φ，使得对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $\Phi(G_\sigma^\ell) \ni K_n^{\ell+2}$，其中 σ 将在后文适当选取。设 A、B、C 是 G_σ^ℓ 的顶点划分，如其描述所示。B 中的顶点被划分为 n 个部分 $B_k = \{b_k^1, \ldots, b_k^n\}$（$k \in [n]$），每个部分包含 n 个顶点。我们从 C 中每隔 n 个顶点选取一个顶点，构成 $C' = \{c_1', \ldots, c_n'\}$；这些顶点与 B 中的顶点形成一个半图，使得对于 $j \leq i$，c_i' 与 B_j 中的所有顶点相连。我们希望对于 $1 \leq i < j \leq n$，b_j^i 和 b_i^j 由互不相交的路径 $P_{i,j}$ 连接，这些路径的长度为 ℓ，且内部顶点位于 A 中。由于这 $\binom{n}{2}$ 条路径互不相交，我们可以选择一个排列 σ，使得 A 在 G_σ^ℓ 中诱导的路径延伸了所有这些路径。

现在，转导 Φ 是以下转导的复合；根据引理 13，它仍然是一个转导。注意，取任意诱导子图是一种转导，删除两个集合之间的所有边也是如此。

- 取由 C'，$B_k \setminus \{b_k^k\}$ 中属于 $k \in [n]$ 的顶点以及$A' := V(P_{i,j}) \cap A$ 中属于 $1 \leq i < j \leq n$ 的顶点所构成的诱导子图。删除团 $G_\sigma^\ell[C']$中的所有边，以及完全二分图 $G_\sigma^\ell[C' \cup A']$中的所有边。通过使用与事实 30 中所用类似的一阶逻辑解释，删除 c_i' 与 B_j 中属于 $j < i$ 的顶点之间的边。

那么，Φ 的输出是 $K_n^{\ell+2}$。 ◀

另一方面，利用引理 31，以及添加（按边并的意义）一个团或完全二分图会保持有界合并宽度这一事实，可以证明，当 f 趋于无穷大时，类 $\mathcal{G}_f$ 具有有界合并宽度。因此，例如对于 $f(n) := \log\log n$，类 $\mathcal{G}_f$ 具有有界合并宽度，但孪生宽度无界，由此证明定理 3。

5.4 H-图

最后，我们证明定理 4：如果 H 在同一个连通分量中包含两个环，那么 H-图不可被刻画。

令 H_∞ 为仅由一个顶点 x_0 和两个自环构成的图。对于任意二分图 $G = (U, V, E)$，令 $G^\bullet$ 为将 G 的每条边细分一次后取其补图所得的图，但不在 U 和 V 之间添加边。也就是说，$G^\bullet$ 的顶点集为 $U \uplus V \uplus E$，每个 $e \in E$ 都与 U, V 中除 e 的两个端点之外的所有顶点相邻；此外，U, V, E 各自都是一个团。

▶**事实 35**。对于任意二分图 G，图 $G^\bullet$ 是一个 H_∞-图。

证明。考虑如下构造，如图 10 所示。取 H_∞ 的拓扑实现：两个圆 C_1, C_2 恰好在一点 x_0 相交。将每个顶点 $u \in U$ 与 $C_1 \setminus \{x_0\}$ 中的一个半圆 X_u 对应，并为每个顶点任意选取不同的半圆。类似地，将每个 $v \in V$ 与 $C_2 \setminus \{x_0\}$ 中的某个半圆 X_v 对应。然后，对于 E 中的任意边 $e = uv$，令 X_e 为 $C_u \cup C_v$ 的补集。因此，X_e 由两个共享点 x_0 的半圆组成，故它是连通的；显然，它与 X_u, X_v 不相交，但与任意满足 $w \in (U \cup V) \setminus \{u, v\}$ 的 X_w 相交。集合 X_u, X_v, X_e 以交图的形式给出 $G^\bullet$。◀

▶**推论 36**。存在一个由 H_∞-图组成的遗传类 $\mathcal{C}$，它是单子依赖的，且一阶逻辑模型检测属于 *FPT*，但其合并宽度无界（因此孪生宽度也无界）。

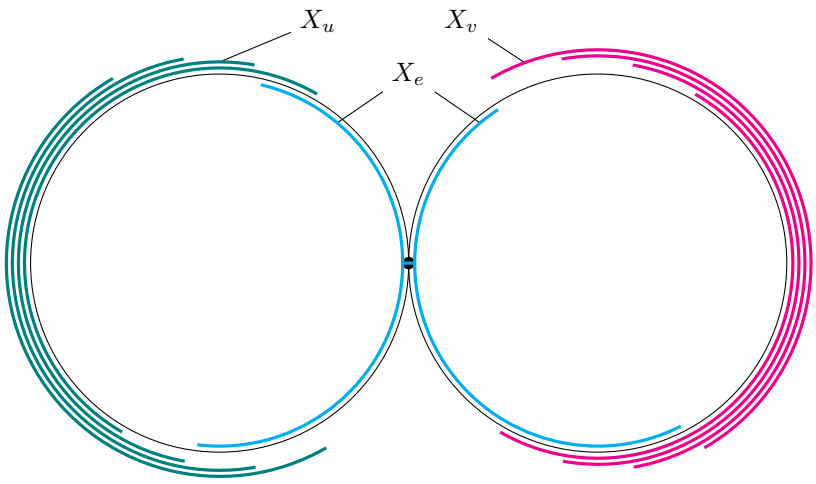


图 10 构造 $G^\bullet$ 作为一个 H_∞-图。代表 X_u，X_v 的顶点的半圆 U，V分别位于 青绿色 和 洋红色 两侧。中间的 青色部分：子集 X_e 代表某条边 $e = uv$，其选取方式使得 X_e 与左右两侧的所有半圆相交，除了 X_u，X_v。

证明。 取 $\mathcal{D}$ 为一个二分图类，它处处稀疏但具有无界扩张（例如参见 [16] 相关定义）。这类图通常由围长和最小度都趋于无穷的图构造而成。根据 [9, 推论 1。8], 类 $\mathcal{D}$ 的合并宽度也无界。于是，由 $\mathcal{D}$ 中图的 1-细分构成的类仍处处稀疏（由处处稀疏的定义可立即得出），且合并宽度仍无界（因为可以从 $\mathcal{D}$ 的 1-细分类中通过一阶逻辑转导得到 $\mathcal{D}$，而一阶逻辑转导保有界合并宽度 [9, 定理 1。12]）。注意，处处稀疏蕴含一阶逻辑模型检测属于 FPT [12]，且是单子依赖的 [1]。

现在令 $\mathcal{C} = \{G^\bullet : G \in \mathcal{D}\}$ 由前述的 H_∞-图构造得到。图 $G^\bullet$ 由 G 的 1-细分得到，具体做法是对适当顶点集合之间的边取补图。按照例如 [8], 中的术语，这意味着 $G^\bullet$ 是通过有限次翻转从 1-细分得到的。翻转是一阶逻辑转导的一种非常简单的情形，因此保留单子依赖、FPT 模型检测、有界孪生宽度和有界合并宽度。由此可知，$\mathcal{C}$ 仍然是单子依赖的，且具有 FPT 模型检测性质，同时其合并宽度和孪生宽度无界。◀

最后，若 H 是一个图，且同一个连通分量中有两个圈（不一定互不相交），那么 H 包含 H_∞ 作为小图（如果我们调整通常的小图概念，使其允许重边和自环）。容易验证，当 H' 是 H的一个小图时，任意H'-图也是一个 H-图。因此，推论 36 中的不可描绘类 $\mathcal{C}$ 也可以表示为 H-图，从而证明定理 4。

参考文献

1 Hans Adler 和 Isolde Adler。将处处稀疏图类解释为模型论的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36:322–330，2014年。网址：`https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669813001881`，`doi:10.1016/j.ejc.2013.06.048`。2 Édouard Bonnet、Dibyayan Chakraborty、Eun Jung Kim、Noleen Köhler、Raul Lopes 和 Stéphan Thomassé。《双宽度 VIII：界定与双赢》。载于 Holger Dell 和 Jesper

Nederlof 编，载于《第17届参数化与精确计算国际研讨会》（IPEC 2022），LIPIcs 第249卷，第9:1–9:18页，德国 Dagstuhl，2022年。Schloss Dagstuhl。arXiv:2204.00722, doi:10.4230/LIPIcs.IPEC.2022.9。3 Édouard Bonnet、Colin Geniet、Eun Jung Kim、Stéphan Thomassé 和 Rémi Watrigant。《双宽度 II：小类》。组合理论，2(2)，2022年。网址：https://escholarship.org/uc/item/9cs265b9, doi:10.5070/C62257876。4 Édouard Bonnet、Ugo Giocanti、Patrice Ossona de Mendez、Pierre Simon、Stéphan Thomassé 和 Szymon Toruńczyk。《双宽度 IV：有序图与矩阵》。J. ACM，71(3)，2024年6月。 doi:10.1145/3651151。5 Édouard Bonnet、Eun Jung Kim、Stéphan Thomassé 和 Rémi Watrigant。《双宽度 I：易处理的一阶逻辑模型检测》。J. ACM，69(1)：第3号文章，46页，2022年。 doi:10.1145/3486655。6 Flavia Bonomo-Braberman、Nick Brettell、Noleen Köhler、Andrea Munaro 和 Daniël Paulusma。非交叉 h图：真区间图的一种推广，且存在固定参数可处理算法，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2501.11192, arXiv:2501.11192。7 Rodney G Downey、Michael R Fellows 和 Udayan Taylor。关系数据库查询的参数化复杂度及对 W[1] 的改进刻画。DMTCS, 96:194–213，1996年。8 Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Szymon Toruńczyk。翻转可分解性：单子依赖图类的组合二分定理。载于《第56届ACM计算理论年会论文集》（STOC 2024），第1550–1560页，纽约，美国纽约州，2024年。计算机协会。 doi:10.1145/3618260.3649739。9 Jan Dreier 和 Szymon Toruńczyk。合并宽度与一阶模型检验。载于《第57届ACM计算理论年会论文集》（STOC '25），第1944–1955页，纽约，美国纽约州，2025年。计算机协会。 doi:10.1145/3717823.3718259。10 Jakub Gajarský、Petr Hliněný、Jan Obdržálek、Daniel Lokshtanov 和 M. S. Ramanujan。稠密图类一阶逻辑模型检测的新视角。ACM Trans. Comput. Logic，21(4)，2020年。 doi:10.1145/3383206。11 Colin Geniet 和 Stéphan Thomassé。竞赛图中的一阶逻辑与孪生宽度。载于 Inge Li Gørtz、Martin Farach-Colton、Simon J. Puglisi 和 Grzegorz Herman 编，《第31届欧洲算法年会》（ESA 2023），LIPIcs 第274卷，第53:1–53:14页，德国 Dagstuhl，2023年。Schloss Dagstuhl。网址： https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.ESA.2023.53, doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2023.53。12 Martin Grohe、Stephan Kreutzer 和 Sebastian Siebertz。判定处处不稠密图的一阶性质。J. ACM，64(3):17:1–17:32，2017年。 doi:10.1145/3051095。13 Sylvain Guillemot 和 Daniel Marx。在线性时间内查找排列中的小模式。载于《2014年ACM-SIAM离散算法年会论文集》（SODA），第82–101页，2014年。网址：https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611973402.7, doi:10.1137/1.9781611973402.7。14 Petr Hliněný 和 Filip Pokrývka。几何图上孪生宽度与一阶逻辑模型检测的可处理性界限，2022年。网址： https://arxiv.org/abs/2204.13742, arXiv:2204.13742。15 Irina Mustaţă 和 Martin Pergel。单位网格交图：识别与性质，2013年。arXiv:1306.1855。16 Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。《稀疏性——图、结构与算法》，算法与组合学第28卷。Springer，2012年。 doi:10.1007/978-3-642-27875-4。17 Detlef Seese。线性时间可计算问题与一阶描述。计算机科学中的数学结构，6(6):505–526，1996年。doi:10.1017/S0960129500070079。18 Alan Tucker。圆弧图的高效测试。SIAM Journal on Computing，9(1):1–24，1980年。 doi:10.1137/0209001。